

JANINA DERYŁO-STĘPNIAK  
ANDRZEJ KOPCEWICZ

[518:528.425.4]:624.131.8.003:725.4

## Wykorzystanie numerycznego modelu terenu do celów obliczania objętości i kosztów robót ziemnych na obszarze projektowanego obiektu przemysłowego

### 1. Wstęp

Proces tworzenia i stosowania modelu numerycznego dla celów obliczania objętości i kosztów robót ziemnych oraz optymalizacja geometryczna wstępnego projektu robót ziemnych na obszarze projektowanego zakładu przemysłowego zrealizowane zostały na komputerach GEO 2 i ODRA 1204 przy użyciu 9 programów.

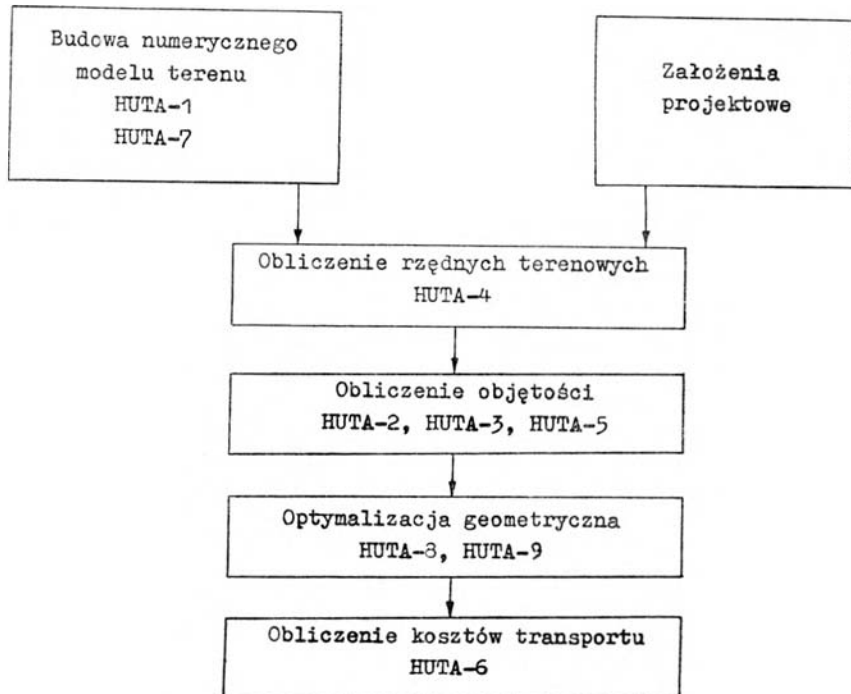
Poniżej podaje się wykaz autorów i nazw programów wykorzystywanych w opisywanej części:

1. *W. Gedymin* — Obliczanie współrzędnych  $x, y, z$  punktów zdjętych metodą biegunową — HUTA 1 (GEO 2, język W-GEO);
2. *A. Kopcewicz* — Obliczanie robót ziemnych oraz kosztów transportu na podstawie numerycznego modelu terenu — HUTA 2 (ODRA 1204, język Algol 1204);
3. *A. Kopcewicz* — Obliczanie robót ziemnych na podstawie numerycznego modelu terenu (wersja uproszczona) — HUTA 3 (ODRA 1204, język Algol 1204);
4. *A. Kopcewicz* — Obliczanie profili podłużnych terenu na podstawie numerycznego modelu terenu — HUTA 4 (ODRA 1204, język Algol 1204);
5. *A. Kopcewicz* — Obliczanie robót ziemnych w tarasach na podstawie profili podłużnych terenu — HUTA 5 (ODRA 1204, język Algol 1204);
6. *A. Kopcewicz* — Obliczanie kosztów robót ziemnych — HUTA 6 (ODRA 1204, język Algol 1204);
7. *A. Kopcewicz* — Zapis i porządkowanie modelu numerycznego terenu — HUTA 7 (ODRA 1204, język Algol 1204);

8. *D. Kowalska* — Optymalizacja geometryczna metodą zmiennych wag — Huta 8 (ODRA 1204, język Algol 1204);

9. *J. Kranz* — Minimalizacja funkcji  $n$  zmiennych z ograniczeniami — HUTA 9 (ODRA 1204, język Algol).

Kolejność wykorzystania poszczególnych programów zilustrowana jest na załączonym schemacie.



Schemat blokowy

Na opracowywanym obiekcie wyróżnia się następujące obszary:

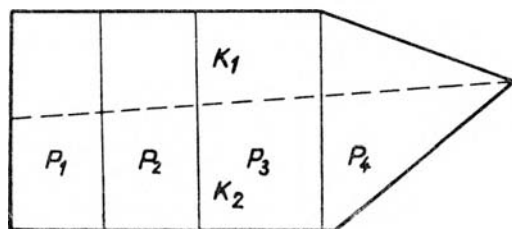
1) Taras — jest to dowolny wielobok stanowiący część technologiczną obiektu, określony przez współrzędne  $x, y$  wierzchołków; taras może być płaszczyzną poziomą lub dowolnie nachyloną. Wielkości poszczególnych tarasów i ich wzajemne położenie określone są przez projektanta.

2) Pole — jest to część tarasu wyróżniona jako jednostka przy obliczaniu kosztów transportu mas ziemnych, określona przez współrzędne  $x, y$  wierzchołków.

3) Kontur geologiczny — jest to część pola lub tarasu o jednolitej strukturze geologicznej gruntu, określona przez współrzędne  $x, y$  wierz-

chołków; kontur geologiczny może zawierać jedną lub kilka warstw geologicznych (kategorii) odpowiadających różnym cenom 1 m<sup>3</sup> kosztów robót ziemnych.

Podział tarasu na mniejsze jednostki ilustruje rysunek 1.



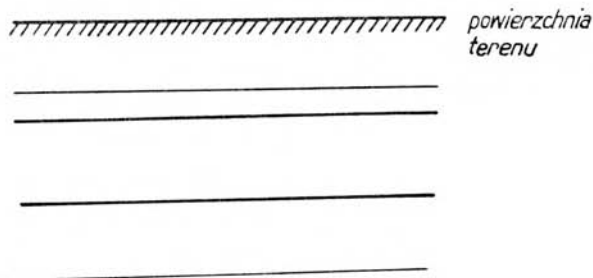
Rys. 1

Na rysunku tym wprowadzono następujące oznaczenia:

$P_i$  — oddzielone liniami ciągłymi pola,

$K_i$  — oddzielone linią przerywaną kontury geologiczne.

Pojedyncze pole może składać się z fragmentów konturów, zaś pojedynczy kontur może zawierać maksymalnie 4 warstwy geologiczne.



Rys. 2

Zakłada się, że warstwy w danym konturze mają przebieg poziomy i są określone przez rzędne górnego i dolnego poziomu zalegania.

Do obliczania rzędnych wierzchołków trójkątów, w których obliczane są objętości nasypów i wykopów zastosowano interpolację liniową opisaną w punkcie 2. Obliczanie rzędnych jest czynnością najbardziej pracochłonną w całym procesie i zajmuje około 70% czasu przeznaczanego na całość obliczeń. Sposób obliczenia objętości i kosztów jest opisany w dalszych punktach tego rozdziału.

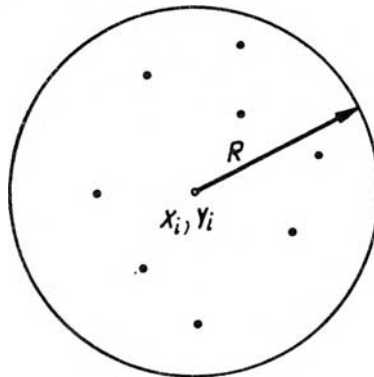
## 2. Interpolacja rzędnych

Dany jest punkt o współrzędnych  $x_i, y_i$ , należy znaleźć rzędną  $z_i$  na podstawie współrzędnych  $x, y, z$  punktów terenowych. Zadanie to rozwiązane zostało w następujący sposób:

1) Dla danego  $x_i, y_i$  wybiera się punkty, których współrzędne  $x, y$  spełniają warunek

$$(x-x_i)^2+(y-y_i)^2 \leq R^2, \quad (1)$$

co ilustruje rysunek 3.

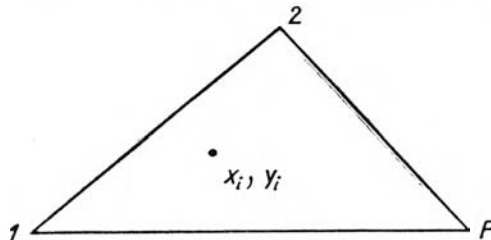


Rys. 3

2) Wybrane punkty porządkuje się według rosnących kwadratów odległości tych punktów od punktu danego

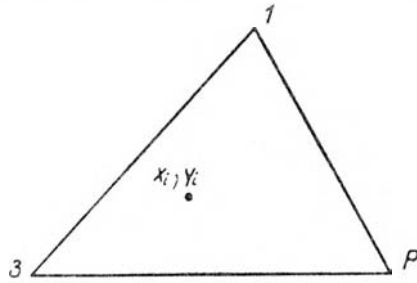
$$\begin{array}{ccc} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ x_n & y_n & z_n \end{array}$$

3) Przyjmując dwa najbliższe punkty, tj. punkty 1 i 2, poszukuje się kolejno, zaczynając od punktu 3, takiego punktu  $P$ , który spełnia warunek, że punkt o współrzędnych  $x_i, y_i$  leży wewnątrz trójkąta 1 2  $P$ .

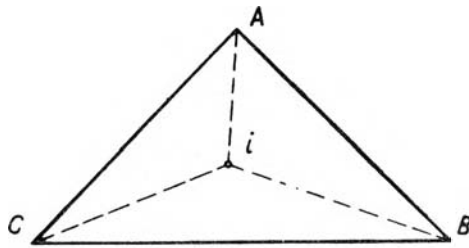


Rys. 4

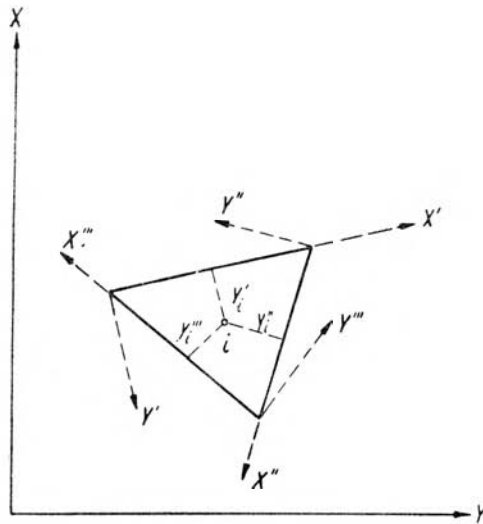
Jeśli w wybranym zbiorze  $n$  punktów nie znajdzie się takiego trójkąta, to poszukiwanie powtarza się, zastępując punkt 2 punktem 3.



Rys. 5



Rys. 6



Rys. 7

Jako kryterium położenia punktu  $i$  wewnątrz trójkąta  $ABC$  przyjęto równość sumy pól trójkątów  $iAB$ ;  $iBC$ ;  $iCA$  polu trójkąta  $ABC$  (rys. 6).

$$S_{ABC} = S_{iAB} + S_{iBC} + S_{iCA} . \quad (2)$$

Badanie, czy punkt  $i$  leży wewnątrz dowolnego wieloboku wypukłego, przeprowadzano także stosując kilkakrotną transformację współrzędnych  $x_i, y_i$  na układy współrzędnych, których poszczególne osie pokrywały boki wieloboku, co uwidoczniło na rysunku 7.

Jeżeli wszystkie przetransformowane współrzędne  $y$  są większe od zera, to punkt  $i$  leży wewnątrz wieloboku.

4) Wartość  $z_i$  oblicza się wg wzoru

$$z_i = \frac{p_A z_A + p_B z_B + p_C z_C}{p_A + p_B + p_C}, \quad (3)$$

gdzie

$p_A, p_B, p_C$  — pola trójkątów:  $iAB, iBC, iCA$  (rys. 6).

Jeśli w wybranych  $n$  punktach nie znaleziono 3 punktów tworzących trójkąt zawierający punkt określany, to wartość  $z_i$  oblicza się według tego samego wzoru (3), przyjmując:

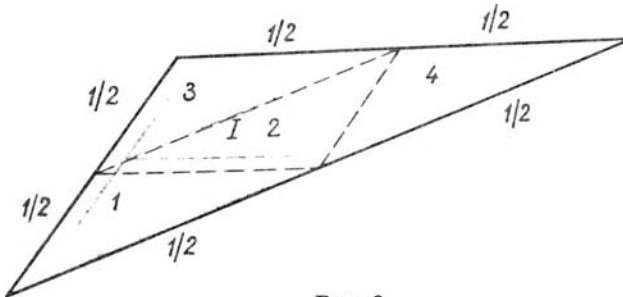
$$p_j = 1/[(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2], \quad (4)$$

gdzie  $j = ABC$ .

### 3. Obliczanie objętości nasypów i wykopów

Obliczenie objętości nasypów i wykopów wykonuje się na obszarze tarasu w obrębie trójkątów utworzonych przez punkty o obliczonych współrzędnych  $x, y, z$  oraz o znanych rzędnych projektowanych  $H$ . Zakłada się, że powierzchnia terenu i powierzchnia projektowana w obszarze trójkąta są płaszczyznami.

W algorytmie podziału konturu geologicznego lub pola na elementarne trójkąty założono, że figury te są czworobokami wypukłymi. Podział na elementarne trójkąty przebiega według następującego schematu:



Rys. 8

- podzielenie czworoboku na dwa trójkąty,
- podział każdego trójkąta na cztery trójkąty podobne powstałe przez połączenie liniami równoległymi środków boków trójkąta dzielonego,

c) dalszy podział każdego z trójkątów według punktu  $b$  tak długo, aż najdłuższy bok w trójkącie będzie mniejszy od założonej wielkości, np. 50 m.

W danym trójkącie  $ABC$  przebieg obliczeń jest następujący:

1. Obliczenie ze współrzędnych  $x, y$  pola trójkąta  $ABC$  według wzoru

$$S_{ABC} = \frac{\Delta x_{AB} \Delta y_{AC} - \Delta y_{AB} \Delta x_{AC}}{2}, \quad (5)$$

gdzie:

$$\Delta x_{AB} = x_B - x_A; \quad \Delta x_{AC} = x_C - x_A;$$

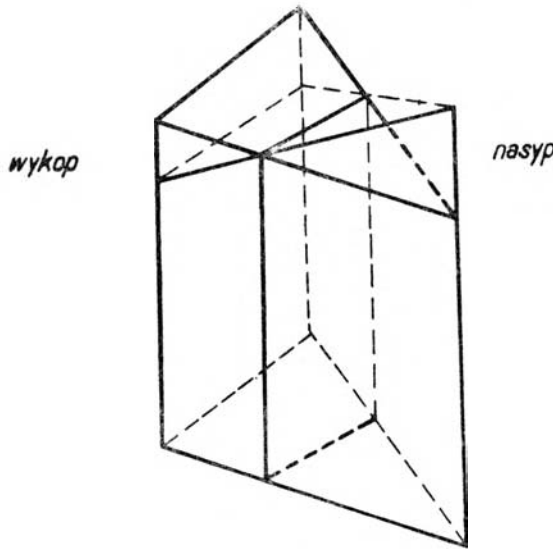
$$\Delta y_{AB} = y_B - y_A; \quad \Delta y_{AC} = y_C - y_A.$$

2. Obliczenie wartości  $\Delta$  wg wzoru

$$\Delta = \Delta z_A + \Delta z_B + \Delta z_C, \quad (6)$$

gdzie:

$$\Delta z_A = H_A - z_A; \quad \Delta z_B = H_B - z_B; \quad \Delta z_C = H_C - z_C.$$



Rys. 9

3. Obliczenie wartości wskaźnika  $w$ , określającego dalszy przebieg obliczeń

$$w = |9x_1 + 3x_2 + x_3|; \quad (7)$$

gdzie:

$$x_1 = \begin{cases} 1 & \Delta z_A > 0 \\ -1 & \Delta z_A < 0 \\ 0 & \Delta z_A = 0 \end{cases} \quad \text{gdy}$$





gdzie:

$$k_1 = \frac{\Delta z_Q}{\Delta z_Q - \Delta z_F},$$

$$k_2 = \frac{\Delta z_Q}{\Delta z_Q - \Delta z_H},$$

zaś  $Q, F, H$  są odpowiednimi wierzchołkami trójkąta  $ABC$ , przyjętymi zgodnie z rysunkiem 10.

- b) Obliczenie ze współrzędnych pól trójkątów  $QEG$  i  $EHG$ .  
 c) Obliczenie  $V_2$  wg wzoru

$$V_2 = \frac{1}{3} S_{QEG} \Delta z_Q. \quad (10)$$

- d) Obliczenie objętości nasypu  $ON$  i wykopu  $OW$ :

$$ON = \begin{cases} V_2 & \text{gdy } \Delta z_Q > 0 \\ R & \text{gdy } \Delta z_Q < 0 \end{cases}$$

$$OW = \begin{cases} -V_2 & \text{gdy } \Delta z_Q < 0 \\ -R & \text{gdy } \Delta z_Q > 0 \end{cases}$$

gdzie:

$$R = \begin{cases} R_3 & \text{gdy } w = 2, 6, 8 \\ R_4 & \text{gdy } w = 5, 7, 11 \end{cases}$$

$$R_3 = \frac{1}{3} (S_{ABC} - S_{QEG}) (\Delta z_F + \Delta z_H) \quad (11)$$

$$R_4 = \frac{1}{3} S_{EHG} \Delta z_H + \frac{1}{3} (S_{ABC} - S_{QEG} - S_{EHG}) (\Delta z_F + \Delta z_H).$$

#### 4. Obliczenie kosztów robót ziemnych

Koszty robót ziemnych oblicza się według wzoru

$$K = OW \cdot C, \quad (12)$$

gdzie:

- $OW$  — objętość wykopu w danej warstwie geologicznej,  
 $C$  — cena  $1 \text{ m}^3$  wykopu w warstwie.

Cena  $1 \text{ m}^3$  wykopu zależna jest od takich czynników, jak: kategoria terenu, środki transportu użyte do przewozu urobku oraz odległość, na jaką należy przewieźć urobek.

## 5. Optymalizacja geometryczna projektu ukształtowania pionowego

Opracowano dwie metody<sup>1</sup> dotyczące obiektów, których projekty przewidują ukształtowanie terenu w formie poziomych tarasów o ustalonym położeniu względem płaskiego układu współrzędnych ortogonalnych. W pierwszej z tych metod minimalizuje się sumę objętości nasypów i wykopów, zaś w drugiej sumę bezwzględnych wartości różnic objętości nasypów i wykopów.

Przy opisie metod zastosowano następujące oznaczenia:

- $p$  — liczba wszystkich tarasów,
- $m$  — liczba tarasów o zmiennych w trakcie optymalizacji wysokościach,
- $n$  — liczba warunków dotyczących wysokości tarasów,
- $H_i$  — wysokość  $i$ -tego tarasu,
- $N_i$  — objętość nasypu  $i$ -tego tarasu,
- $W_i$  — objętość wykopu  $i$ -tego tarasu,
- $R_i$  — różnica objętości nasypów i wykopów  $i$ -tego tarasu:  
 $R_i = N_i - W_i$  (nadmiar nasypu),
- $P_i$  — powierzchnia  $i$ -tego tarasu.

### 5.1. Minimalizacja sumy objętości nasypów i wykopów

Minimalizuje się funkcję wysokości zmiennych tarasów

$$F = \sum_{i=1}^m S_i(H_i) \quad (13)$$

przy zachowaniu warunku bilansowego

$$-\varepsilon \leq \sum_{i=1}^p P_i(H_i - H_i^0) + C \leq \varepsilon, \quad (14)$$

oraz  $n$  warunków różnic wysokości tarasów

$$A_{ij} \leq H_i - H_j \leq B_{ij}, \quad (15)$$

gdzie:  $\varepsilon$ ,  $A_{ij}$ ,  $B_{ij}$  są stałymi, zaś  $H_i^0$  ( $i = 1, 2, \dots, p$ ) wysokościami, którym odpowiada suma różnic objętości nasypów i wykopów:

$$C = \sum_{i=1}^p R_i(H_i^0). \quad (16)$$

Funkcja  $S_i(H_i)$  jest wielomianem drugiego stopnia aproksymującym sumę objętości nasypów i wykopów  $i$ -tego tarasu w otoczeniu  $H_i^0$ .

$$S_i(H_i) = N_i(H_i) + W_i(H_i) = a_{i1} + a_{i2}H_i + a_{i3}H_i^2. \quad (17)$$

<sup>1</sup> Autorem metod optymalizacji geometrycznej jest doc. dr J. Gaździcki.

Współczynniki tego wielomianu określa się na podstawie wartości  $S_i(H_i)$  obliczonych przy wykorzystaniu numerycznego modelu terenu dla trzech różnych, odpowiednio dobranych wartości  $H_i$ .

Dla rozwiązania tak postawionego zagadnienia zastosowano metodę bezpośrednich poszukiwań (direct search) H. H. Rosenbrocka.

### 5.2. Metoda zmiennych wag

Metoda ta nie daje tak dobrych efektów optymalizacyjnych, jak metoda opisana uprzednio, może być jednak z korzyścią stosowana do wstępnej optymalizacji projektu. Przy stosowaniu metody zmiennych wag nie zachodzi potrzeba obliczania wielomianów aproksymujących.

Minimalizuje się funkcję

$$Q = \sum_{i=1}^m |R_i| + c \sum_{i=1}^n \left( \frac{v_{ij}}{e_{ij}} \right)^2. \quad (18)$$

W funkcji (18)  $v_{ij}$  jest poprawką projektowanej średniej wartości różnicy wysokości tarasów  $i$  oraz  $j$ ,  $e_{ij}$  dopuszczalnym odchyleniem od wartości projektowanej  $\Delta_{ij}$ , zaś  $c$  parametrem zmienianym w trakcie minimalizacji. Wszystkie uzyskiwane iteracyjnie rozwiązania spełniają warunek bilansowy, natomiast wielkości poprawek  $v_{ij}$  w danym wariancie zależą od parametru  $c$ .

Przebieg rachunku przedstawia się jak następuje:

1. Układa się  $n$  równań poprawek różnic wysokości

$$H_i^0 + dH_i - H_j^0 - dH_j = \Delta_{ij} + v_{ij}, \quad (19)$$

czyli

$$v_{ij} = dH_i - dH_j + l_{ij}, \quad (20)$$

gdzie wyraz wolny  $l_{ij} = H_i^0 - H_j^0 - \Delta_{ij}$  oblicza się na podstawie wysokości  $H_i^0$ ,  $H_j^0$ , dla których obliczono różnice objętości nasypów i wykopów  $R_i^0$ ,  $R_j^0$ .

2. Zestawia się równanie bilansowe

$$\sum_{i=1}^m dH_i P_i + \sum_{i=1}^n R_i^0 = 0. \quad (21)$$

3. Układa się  $m$  równań tarasów

$$dH_i P_i + R_i^0 = R_i. \quad (22)$$

4. Tworzy się łączną tabelę wszystkich równań, z której eliminuje się jedną niewiadomą na podstawie równania bilansowego. W wyniku otrzymuje się tabelę zawierającą wyrazy wolne i współczynniki przy  $m-1$  niewiadomych w  $m+n$  równaniach.

5. Przekształcone na skutek eliminacji równania różnic  $i$  tarasów rozwiązuje się iteracyjnie stosując w każdym kroku metodę najmniejszych kwadratów. W  $k$ -tym kroku iteracyjnym stosuje się wagi:

— dla równań różnic

$$\frac{c^{k-1}}{e_{ij}}, \quad (23)$$

— dla równań tarasów

$$\frac{1}{\sqrt{|R_i^{k-1}|}}, \quad (24)$$

uwzględniając odpowiednio modyfikowany współczynnik  $c$  [1].

## 6. Dokumentacja

W wyniku opisanych obliczeń uzyskuje się następujące dokumenty:

- a) profile podłużne terenu w postaci liczbowej,
- b) objętości nasypów i wykopów w polach jednostkowych,
- c) koszty transportu,
- d) zestawienie ogólne dla obiektu, obejmujące rzędne projektowane, objętości, pola i koszty dla poszczególnych tarasów.

## LITERATURA

- [1] *Praca zbiorowa*. System obliczania i optymalizacji robót ziemnych na obszarze projektowanego zakładu przemysłowego. Zakład Informatyki Geodezyjnej i Kartograficznej IGiK. Warszawa 1972.
- [2] *Deryło-Stępnik J.*: Obliczanie objętości nasypów i wykopów na maszynie GEO-2. Zeszyty Naukowe AGH, Geodezja zeszyt 19, Kraków 1971.
- [3] *Hausbrandt S.*: Rachunek wyrównawczy i obliczenia geodezyjne. Warszawa 1970.

Recenzował: doc. dr Jerzy Gaździcki

Rękopis złożono w Redakcji w marcu 1973 r.

ЯНИНА ДЭРЫЛО-СТЭНІНЯК  
АНДЖЕЙ КОПЦЭВИЧ

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ЦИФРОВОЙ МОДЕЛИ МЕСТНОСТИ  
ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ ОБЪЕМА И СТОИМОСТИ ЗЕМЛЯНЫХ РАБОТ  
НА ТЕРРИТОРИИ ПРОЕКТИРУЕМОГО ПРОМЫШЛЕННОГО  
ОБЪЕКТА

Резюме

В статье описан процесс использования цифровой модели местности для вычисления объёма и стоимости земляных работ, а также геометрическая оптимизация предварительного проекта земляных работ на территории проектируемого промышленного предприятия. Подробно описаны применённые алгоритмы цифровой модели местности, вычисления объёма и геометрической оптимизации.

JANINA DERYŁO-STĘPNIAK  
ANDRZEJ KOPCEWICZ

APPLICATION OF NUMERICAL MODEL OF THE TERRAIN  
FOR CALCULATING VOLUME AND COST OF EARTHWORKS  
IN AREA OF THE DESIGNED INDUSTRIAL PLANT

S u m m a r y

The authors describe the process of making use of a numerical model of the terrain for calculating the volume and the cost of earthworks, and for geometrical optimizing the preliminary design of earthworks in the area of the designed industrial plant. They explain in detail the algorithms of the numerical model of the terrain of volumes calculation, and that of geometric optimization.