

TADEUSZ WYRZYKOWSKI

528.024.1.061.4

**Poprawka niwelacyjna ze względu na dobowe zmiany kierunku linii pionu spowodowane przez Księżyc i Słońce**

## SPIS TREŚCI

Rozdz. 1. Wstęp . . . . .	4
Rozdz. 2. Wzór na wielkość dobowej zmiany kierunku linii pionu i poprawkę niwelacyjną . . . . .	5
Rozdz. 3. Nomogramy dla wyznaczania poprawki niwelacyjnej ze względu na dobowe zmiany kierunku linii pionu . . . . .	9
Rozdz. 4. Obliczanie poprawki $C$ dla odcinka linii niwelacyjnej	14
Rozdz. 5. Analiza zmienności poprawki niwelacyjnej w zależności od azymutu linii oraz kąta godzinowego i deklinacji Księżycy i Słońca . . . . .	21
Rozdz. 6. Zastosowanie opracowanych nomogramów i wykresów	25
Rozdz. 7. Teoretyczna ocena wpływu poprawki $\kappa$ i $C$ na wyniki i wyznaczane błędy niwelacji precyzyjnej . . . . .	26
Rozdz. 8. Analiza wyników wprowadzenia do pomiarów niwelacji precyzyjnej poprawki ze względu na dobowe zmiany kierunku linii pionu . . . . .	29
Rozdz. 9. Podsumowanie. Wnioski . . . . .	33

## 1. Wstęp

Podjęcie przedstawianego tu opracowania, dotyczącego poprawki niwelacyjnej ze względu na dobowe zmiany kierunku linii pionu — nazywanej inaczej poprawką astronomiczną — wynikało z kilku przyczyn. Najważniejszą jest wzrastająca stale dokładność pomiaru niwelacji precyzyjnej, w wyniku udoskonalenia sprzętu i metod pomiarowych. — Stale zmniejszające się błędy przypadkowe pomiaru, a zwłaszcza błędy systematyczne — które we współczesnych dużych sieciach niwelacji precyzyjnej zawarte są w granicach  $0,02 \div 0,10$  mm/km<sup>1</sup>) — każą zwracać uwagę na ścisłość rachunkowego opracowania wyników niwelacji, w tym i na omawianą tu poprawkę, która na kilometrowych odcinkach pojedynczego pomiaru linii niwelacyjnej osiągać może nawet wartość 0,1 mm.

Jednocześnie też rosną stawiane przed niwelacją precyzyjną wymagania, w związku z różnymi jej zastosowaniami, gdzie konieczne jest uzyskanie najwyższych dokładności, np. przy pomiarach odkształceń i badaniach współczesnych ruchów skorupy ziemskiej.

Znaczenie poprawki niwelacyjnej ze względu na dobowe zmiany kierunku linii pionu wzrasta również wraz ze stale rosnącymi możliwościami przyspieszenia tempa pomiaru. Przy szybszym bowiem pomiarze, na dłuższym odcinku linii występują poprawki o jednakowym znaku, a tym samym większy jest błąd systematyczny wynikły z nieuwzględnienia tych poprawek. A możliwości przyspieszenia pomiaru są duże. Już od paru lat prowadzone są w NRD eksperymenty z pomiarami niwelacji precyzyjnej, przy wykorzystaniu samochodu jako środka transportu do przewożenia instrumentu i lat, ze stanowiska na stanowisko. Używając niwelatora samopoziomującego Koni 007 osiągnano szybkość pomiaru rzędu  $3 \div 4$  km na godzinę [8].

Celowość wprowadzania omawianej tu poprawki do wyników pomiarów niwelacji precyzyjnej została uznana przez Międzynarodową Asocjację Geodezji już w roku 1948, co znalazło swój wyraz w formie odpowiedniej uchwały podczas Zgromadzenia Ogólnego Międzynarodowej Unii Geodezyjno-Geofizycznej w Oslo [18].

<sup>1</sup>) Na przykład współczesna radziecka sieć niwelacji precyzyjnej I klasy charakteryzuje się następującymi średnimi błędami na 1 km linii: przypadkowym  $\eta = \pm 0,25$  do 0,27 mm oraz systematycznym  $\sigma = \pm 0,03 \div 0,04$  mm [19].

W praktyce, poprawka ze względu na dobowe zmiany kierunku linii pionu była już wprowadzana przy pomiarach niwelacji precyzyjnej na obszarze Danii [3] i Finlandii [6], a ostatnio w NRD [14]. Z doświadczeń fińskich wynika, że wprowadzenie jej nie zmienia wielkości przypadkowego błędu pomiaru ale ma wpływ na wartość błędu systematycznego.

Szerszemu rozpowszechnieniu tej poprawki w praktyce niwelacyjnej stoi na przeszkodzie pracochłonność jej wyznaczania. Trudność tę można jednak w znacznym stopniu pokonać przez opracowanie pomocniczych nomogramów lub tablic.

Niniejsza praca stawiała sobie głównie za cel trzy zadania.

Pierwsze, to praktyczne umożliwienie wyznaczania poprawki ze względu na dobowe zmiany kierunku linii pionu i wprowadzania jej do wyników pomiarów niwelacji precyzyjnej na obszarze Polski. W tym celu: a) opracowane zostały odpowiednie pomocnicze nomogramy, obliczone dla średniej szerokości geograficznej Polski ( $\varphi = 52^\circ$ ), b) przeprowadzona została analiza dokładności wyznaczenia tej poprawki przy pomocy opracowanych nomogramów, c) podano praktyczny przykład jej obliczenia, ze szczegółową instrukcją postępowania i wskazaniem co do dokładności poszczególnych, branych do rachunku elementów.

Z drugiej strony, opracowanie miało za zadanie teoretyczne przeanalizowanie zmienności wartości omawianej poprawki w zależności od kilku podstawowych czynników, a także teoretyczną ocenę jej wpływu na wyniki niwelacji. — W tym celu opracowano wykresy ilustrujące zmienność poprawki niwelacyjnej ze względu na dobowe zmiany kierunku linii pionu, w zależności od azymutu linii niwelacyjnej oraz od kąta godzinowego i deklinacji Księżyca i Słońca. Przeanalizowany został teoretycznie maksymalny i przeciętny wpływ tej poprawki na wyniki i błędy niwelacji.

Trzecim zadaniem tego opracowania była analiza wyników wprowadzenia, w latach 1965/66 — po raz pierwszy w Polsce — omawianej tu poprawki do pomiarów niwelacji precyzyjnej na liniach o ogólnej długości około 280 km.

Tak więc opracowanie to obejmuje w praktyce cały kompleks zagadnień związanych z wyznaczaniem tej poprawki i oceną jej wpływu na niwelację, pozwalając m. in. na określenie zakresu celowego jej stosowania.

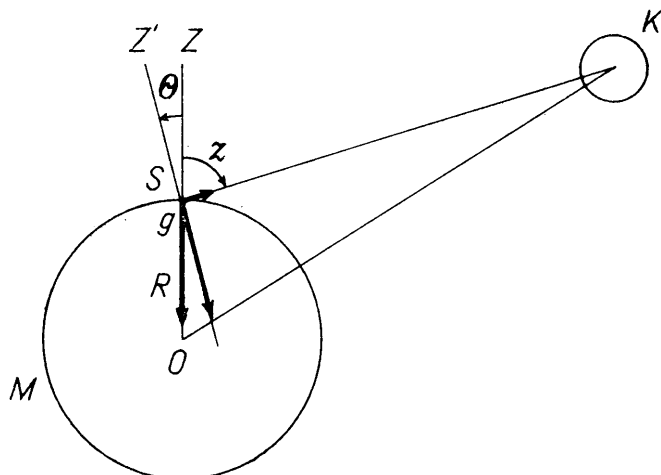
## **2. Wzór na wielkość dobowej zmiany kierunku linii pionu i poprawkę niwelacyjną**

Teoretycznym wyznaczaniem wielkości dobowych odchyłeń kierunku linii pionu — od jego położenia średniego — spowodowanych przez Księżyc i Słońce, jako jeden z pierwszych zajmował się matematyk norweski

N. H. Abel (1824 r.), a następnie C. A. F. Peters (1845 r.), który podał poprawny wzór na tę wielkość [9]. W 40 lat później w podręczniku F. R. Helmerta [2] znalazł się już ogólny wzór na poprawkę niwelacyjną ze względu na dobowe zmiany kierunku linii pionu. W literaturze polskiej zagadnienie dobowych zmian kierunku linii pionu omówione zostało krótko w podręczniku M. P. Rudzkiego [10] i Cz. Kameli [5], a ostateczny wzór na poprawkę niwelacyjną został podany u E. Warchałowskiego [16].

Przedstawimy tu pokrótce podstawowe zależności i wzory, konieczne dla dalszych wywodów.

Linia pionu przechodząca przez dowolny punkt S, leżący na powierzchni Ziemi (rys. 1), jest prostopadła do powierzchni ekwipotencjalnej rzeczywistego potencjału siły ciężkości Ziemi, przechodzącej przez ten punkt.



Rys. 1. Całkowite odchylenie kierunku linii pionu ( $\theta$ ) w punkcie S na skutek zaburzającego działania masy K (Rysunek w płaszczyźnie przechodzącej przez środki ciężkości obu mas i linię pionu w punkcie S).

Potencjał siły ciężkości zmienia się jednak okresowo na skutek wpływu zmieniających swe położenie mas zaburzających, w pierwszym rzędzie — Księżycy i Słońca. Odchylenie kierunku linii pionu od jego położenia średniego jest więc spowodowane przez zmienną poziomą składową wektora przyspieszenia siły ciężkości, skierowanego w kierunku masy zaburzającej K.

Składowa pozioma zaburzenia wektora przyspieszenia siły ciężkości wynosi

$$H = \frac{3}{2} g \cdot \frac{K}{M} \cdot \left( \frac{R}{r} \right)^3 \cdot \sin 2z, \quad (1)$$

gdzie:

$g$  — przyśpieszenie siły ciężkości w danym punkcie,

$M$  — masa Ziemi,

$K$  — masa ciała zaburzającego (Księżyc, Słońca),

$R$  — promień Ziemi,

$r$  — odległość między środkami ciężkości Ziemi i ciała zaburzającego,

$z$  — odległość zenitalna ciała zaburzającego.

Całkowite odchylenie linii pionu będzie więc równe

$$\Theta = \frac{3}{2} \frac{K}{M} \cdot \left(\frac{R}{r}\right)^3 \cdot \sin 2z. \quad (2)$$

Podstawiając wielkość pomocniczą

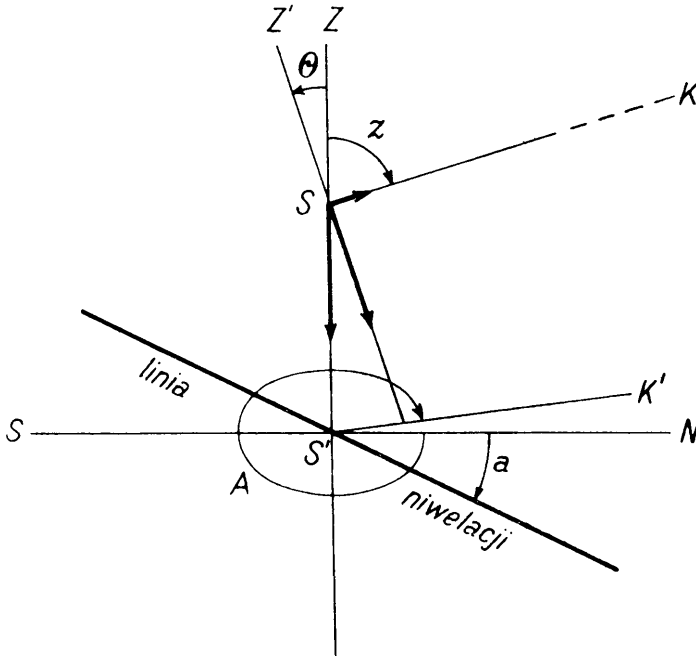
$$P'' = \frac{3}{2} \frac{K}{M} \cdot \left(\frac{R}{r}\right)^3 \cdot \varrho'', \quad (3)$$

otrzymujemy

$$\Theta = P'' \cdot \sin 2z, \quad (4)$$

gdzie:

$$P''_{\odot} = 0''0174, \quad P''_{\text{☾}} = 0''0080. \quad (5)$$



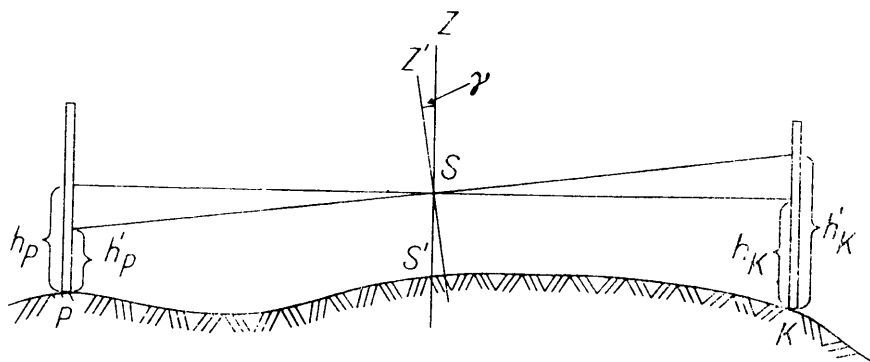
Rys. 2. Całkowite odchylenie kierunku linii pionu w punkcie S linii niwelacyjnej ( $A$  — azymut ciała zaburzającego  $K$ ,  $a$  — azymut linii niwelacyjnej,  $SS'$  — wysokość ustawienia niwelatora).

Całkowite odchylenie kierunku linii pionu ( $\Theta$ ), spowodowane przez Księżyc lub Słońce, leży w płaszczyźnie o azymucie ciała zaburzającego ( $A$ ) (rys. 2). Składowa całkowitego odchylenia pionu w azymucie linii niwelacyjnej ( $a$ ) wynosi więc

$$\gamma'' = P'' \cdot \sin 2z \cdot \cos (A - a). \quad (6)$$

Odchylenie kierunku linii pionu o wartość  $\gamma$  powoduje błąd pomiaru niwelacji taki, jaki powstałby na skutek systematycznego błędu poziomo-  
wania celowej niwelatora, równego kątowi  $\gamma$ .

W przypadku gdy azymut ciała niebieskiego, powodującego zmianę kierunku linii pionu, różni się od azymutu linii niwelacyjnej o mniej niż



Rys. 3. Wpływ składowej ( $\gamma$ ) całkowitego odchylenia linii pionu w azymucie linii niwelacyjnej, na wyznaczaną wartość różnicy wysokości między punktem początkowym (P) i końcowym (K) odcinka niwelacji.

$\pm 90^\circ$ , tzn. kiedy  $\cos (A - a) > 0$ , oraz gdy jego odległość zenitalna jest mniejsza od  $90^\circ$ , wtedy wyznaczona różnica wysokości między sąsiednimi punktami (P, K) linii niwelacyjnej — licząc w kierunku tej linii — będzie mniejsza od rzeczywistej. Ilustruje to rysunek 3. Widzimy bowiem, że

$$h'_P - h'_K < h_P - h_K \quad (7)$$

gdzie:

$h'_P, h'_K$  — odczyty łąt przy celowej prostopadłej do chwilowego kierunku linii pionu,

$h_P, h_K$  — odczyty łąt przy celowej prostopadłej do średniego kierunku linii pionu,

$S'$  — stanowisko instrumentu.

W tym przypadku poprawka niwelacyjna ze względu na dobową zmianę kierunku linii pionu posiada więc wartość dodatnią.

Ogólnie można powiedzieć, że poprawka będzie miała znak dodatni, gdy odcinek linii pionu skierowany w stronę zenitu odchyli się od swego

średniego położenia w kierunku przeciwnym do azymutu linii niwelacyjnej.

Ostatecznie, poprawka niwelacyjna ze względu na dobowe zmiany kierunku linii pionu, spowodowane przez Księżyc i Słońce, wyrażona w jednostkach 0,01 mm, ma postać

$$C = k \cdot s \cdot \sin 2z \cdot \cos (A - a) \quad (8)$$

gdzie:

$s$  — długość odcinka niwelacji dla którego obliczana jest poprawka, wyrażona w km,

$$k_{\odot} = 8,5, \quad k_{\text{☾}} = 3,9. \quad (9)$$

Czasem wygodnie jest operować omawianą poprawką obliczoną w odniesieniu do jednostki długości linii niwelacyjnej (1 km). Oznaczając ją przez  $\varkappa$ , mamy

$$\varkappa = k \cdot \sin 2z \cdot \cos (A - a). \quad (10)$$

Pamiętać jednak należy, że dobowe zmiany kierunku linii pionu są spowodowane przez zmienne położenie dwu mas, Księżyca i Słońca. Dlatego też całkowita poprawka niwelacyjna jest sumą dwu oddzielnych poprawek.

Mamy więc

$$C = C_{\odot} + C_{\text{☾}} = 8,5 \cdot s \cdot \sin 2z_{\odot} \cdot \cos (A_{\odot} - a) + 3,9 \cdot s \cdot \sin 2z_{\text{☾}} \cdot \cos (A_{\text{☾}} - a), \quad (11)$$

oraz

$$\varkappa = \varkappa_{\odot} + \varkappa_{\text{☾}} = 8,5 \cdot \sin 2z_{\odot} \cdot \cos (A_{\odot} - a) + 3,9 \cdot \sin 2z_{\text{☾}} \cdot \cos (A_{\text{☾}} - a). \quad (12)$$

Dotychczas rozpatrywaliśmy wielkość poprawki  $C$  przy założeniu zupełnej sztywności skorupy ziemskiej. W rzeczywistości jednak powierzchnia Ziemi nie jest całkowicie sztywna i podlega sprężystym odkształceniom, odpowiadającym — w granicach współczynnika sprężystości — dobowym zmianom przebiegu powierzchni ekwipotencjalnych. Biorąc to pod uwagę, wprowadza się współczynnik zmniejszający poprawkę niwelacyjną. Współczynnik ten przyjmuje się najczęściej w granicach 0,7 ÷ 0,8 [3], [6], [14].

### 3. Nomogramy dla wyznaczania poprawki niwelacyjnej ze względu na dobowe zmiany kierunku linii pionu

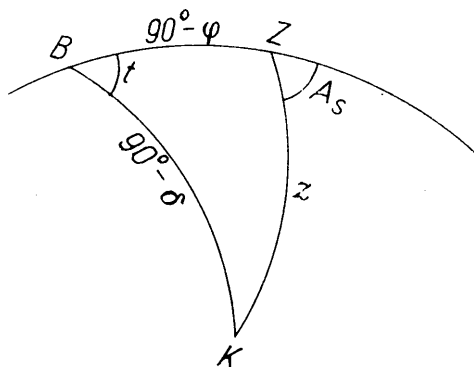
Jak widać z wzoru (11) i (12), do wyznaczenia poprawki  $C$  lub  $\varkappa$  potrzebna jest — prócz azymutu linii niwelacyjnej ( $a$ ) — znajomość azymutu ( $A$ ) i odległości zenitalnej ( $z$ ) Księżyca i Słońca. Wielkości te — pomijając bezpośrednie obserwacje astronomiczne — można wyznaczyć

w oparciu o dwa podstawowe wzory trygonometrii sferycznej w odniesieniu do trójkąta paralaktycznego (rys. 4)

$$\cos z = \sin \varphi \cdot \sin \delta + \cos \varphi \cdot \cos \delta \cdot \cos t \quad (13)$$

$$\sin A_S = \frac{\sin t}{\sin z} \cdot \cos \delta. \quad (14)$$

We wzorze (14) azymut ciała niebieskiego ( $A_S$ ) liczony jest — zgodnie z przyjętą w astronomii konwencją — od kierunku południa. Korzystnie



Rys. 4

jest, dla ujednoczenia rachunków i bezpośredniego porównania z azymutem linii niwelacyjnej, przejść na azymut liczony od północy ( $A_N$ ). Skąd

$$A_N = A_S + 180^\circ \quad (15)$$

oraz

$$\sin A_N = - \frac{\sin t}{\sin z} \cdot \cos \delta. \quad (16)$$

(Dalej azymut Księżyca i Słońca, liczony od kierunku północy, oznaczać będziemy wprost przez  $A_D$  i  $A_\odot$ ).

Każdorazowe wyznaczanie wartości  $z$  i  $A$  z wzorów (13) i (16) rzutowałoby na pracochłonność obliczania poprawki  $C$ .

Zauważmy, że po prawej stronie wzorów (13) i (16) występują wielkości:  $\varphi$ ,  $t$ ,  $\delta$  i  $z$ . Przyjmując określoną wartość na  $\varphi$ , otrzymujemy, że zarówno  $z$ , jak i  $A$  (po uprzednim wyznaczeniu  $z$ ) są funkcjami tylko dwu zmiennych wartości:  $t$  i  $\delta$ . Fakt ten umożliwił opracowanie dwu nomogramów dla wyznaczania wartości  $z$  i  $A$ , w których zmiennymi argumentami są wymienione wielkości  $t$  i  $\delta$ , łatwo określane przy pomocy danych zawartych w Roczniku Astronomicznym.



Dalej — dla ułatwienia wyznaczania samej poprawki  $\kappa$  — opracowane zostały następne dwa nomogramy, które w oparciu o wyznaczone już — przy pomocy uprzednich dwu nomogramów — argumenty  $z_{\odot}$  i  $(A_{\odot} - a)$ , pozwalają na bezpośrednie odczytywanie wartości  $\kappa_{\odot}$  i  $\kappa_{\star}$ .

Omówimy teraz pokrótce te cztery nomogramy. Znajdują się one na końcu tego zeszytu Prac IGiK pod opaską.

### 3.1. Nomogram dla wyznaczania odległości zenitalnej ( $z$ ). Nomogram 2<sup>2)</sup>

Nomogram dla wyznaczania odległości zenitalnej Księżyca i Słońca — tak jak i nomogram H. Jansena [3] — został opracowany dla zmiennych argumentów kąta godzinowego ( $t$ ) i deklinacji ( $\delta$ ), przy przyjęciu stałej wartości szerokości geograficznej ( $\varphi$ ), równej średniej szerokości geograficznej obszaru Polski ( $\varphi = 52^\circ$ ).

Nomogram obejmuje zakres zmienności  $0^h \leq t \leq 24^h$  oraz zakres zmienności  $-30^\circ \leq \delta \leq +30^\circ$ , tj. nieco większy od faktycznej zmienności deklinacji Księżyca i Słońca.

Celem opracowania tego nomogramu, wartości odległości zenitalnej ( $z$ ) zostały obliczone wg wzoru (13), dla argumentu  $t$  w interwałach co  $1^h$  ( $15^\circ$ ), w zakresie  $0^h \leq t \leq 12^h$ , oraz dla argumentu  $\delta$  w interwałach co  $10^\circ$ , w zakresie  $-30^\circ \leq \delta \leq +30^\circ$ . Tak przyjęta wielkość interwałów umożliwiła wewnątrz liniową interpolację wartości  $z$ , a rozszerzenie obliczeń na zakres dodatnich i ujemnych wartości pozwoliło na kontrolę rachunku.

Najmniejsze działka skali  $\delta$  nomogramu odpowiada  $1^\circ$ , a działka skali  $t - 10^m$  ( $2,5^\circ$ ).

Izolinie wartości  $z$  wykreślone zostały w interwałach co  $5^\circ$ , co przy odstępach między nimi rzędu 1 cm pozwala na interpolację i odczyt z dokładnością do  $\pm 0,5 \div 1^\circ$ .

### 3.2. Nomogram dla wyznaczania azymutu ( $A$ ). Nomogram 1

Po wyznaczeniu wartości  $z$ , z wzoru (13), możliwym było wyznaczenie azymutu ( $A$ ) z wzoru (16). Zakres przyjmowanych do obliczeń zmiennych argumentów  $t$  i  $\delta$ , oraz wielkości przyjmowanych interwałów były takie same, jak przy opracowywaniu poprzedniego nomogramu. Tak jak poprzednio, za stały przyjęto argument  $\varphi = 52^\circ$ .

Izolinie wartości  $A$  wykreślone zostały w interwałach co  $10^\circ$ . Przy

<sup>2)</sup> Kolejność omawiania nomogramów jest zgodna z logiczną i faktyczną kolejnością ich opracowywania, a kolejność numeracji odpowiada kolejności ich wykorzystywania w procesie wyznaczania poprawki.

przyjętej skali opracowania nomogramu, umożliwia to interpolację i odczyt z dokładnością do  $\pm 1^\circ$ .

Na nomogramie zastosowany został podwójny opis izolinii wartości azymutu. Kątom godzinnym ( $t$ ) w zakresie  $0 \div 12^h$  odpowiadają azymuty  $180 \div 360^\circ$ , a kątom godzinnym w zakresie  $12 \div 24^h$  azymuty  $0 \div 180^\circ$ .<sup>3)</sup>

### 3.3. Nomogram dla wyznaczania poprawki $\alpha_{\text{K}}$ . Nomogram 3a

Gdyby chodziło o dalsze obliczanie poprawek  $\alpha_{\text{K}}$  i  $\alpha_{\text{K}^*}$  wg wzoru (12), można by poprzestać na wykorzystaniu nomogramów 1 i 2, upraszczających wyznaczenie  $A$  i  $z$ . Jednak dla ułatwienia wyznaczania wartości  $\alpha_{\text{K}}$  i  $\alpha_{\text{K}^*}$  celowe było opracowanie dalszych dwu nomogramów (nomogramy 3a i 3b), z których wartości te byłyby bezpośrednio odczytywane.

Wychodząc z wzoru (10), tj. rozpatrując wielkość poprawki  $\alpha_{\text{K}}$  — na 1 km linii niwelacyjnej — ze względu na zmienny wpływ przyciągania Księżyca, można było napisać

$$\sin 2z_{\text{K}} = 8,5 \cdot \cos(A_{\text{K}} - a) \cdot \alpha_{\text{K}} \quad (17)$$

Z kolei zakładając na  $\alpha_{\text{K}}$  kolejno wartości: 1, 2, 3... 8 (wyrażone w 0,01 mm/km), a na  $\cos(A_{\text{K}} - a)$  podstawiając kolejno wartości odpowiadające różnym wartościom kąta ( $A_{\text{K}} - a$ ), otrzymujemy punkty leżące na poszczególnych izoliniach wartości  $\alpha_{\text{K}}$ , określone dwoma zmiennymi argumentami ( $A_{\text{K}} - a$ ) oraz  $z_{\text{K}}$ .

Obliczenie dokonano dla wartości kąta ( $A_{\text{K}} - a$ ) w zakresie  $0 \div 90^\circ$ , w interwałach co  $5^\circ$ .

Najmniejsza działka skali ( $A_{\text{K}} - a$ ) nomogramu 3a odpowiada  $2^\circ$ , a działka skali  $z$  odpowiada  $1^\circ$ .

Podwójne skale dla wartości kąta ( $A_{\text{K}} - a$ ), z obu stron nomogramu, pozwoliły na ujęcie wszystkich wartości poprawek  $\alpha_{\text{K}}$  dla argumentu ( $A_{\text{K}} - a$ ) w pełnym zakresie  $0^\circ \div 360^\circ$ ; to samo dotyczy skali odległości zenitalnej  $z_{\text{K}}$ , w pełnym zakresie  $0^\circ \div 180^\circ$ .

Znak poprawki  $\alpha_{\text{K}}$  został określony przez podanie znaków dwu czynników poprawki (znaki „plus” i „minus” wyrysowane w kółkach na marginesach poziomych i pionowych skal nomogramu). Iloczyn znaków dwu

<sup>3)</sup> Na marginesie warto może zauważyć, że analogiczny nomogram, opracowany przez H. Jensena dla średniej szerokości geograficznej Danii ( $\varphi = 55^\circ$ ) [3], daje niższą dokładność wyznaczenia azymutu, na skutek zastąpienia linii krzywych — rzeczywistych izolinii wartości azymutu — liniami prostymi.

czynników poprawki:  $\sin 2z_{\text{C}}$  oraz  $\cos(A_{\text{C}} - a)$ , odpowiadających zmiennym argumentom  $z_{\text{C}}$  i  $(A_{\text{C}} - a)$ , daje znak wyznaczonej poprawki  $\kappa_{\text{C}}$ .

Przy przyjętej skali opracowania nomogramu, odstęp między izoliniami poprawki  $\kappa_{\text{C}}$ , odpowiadające 0,01 mm/km, pozwalają — drogą interpolacji — na odczyt wartości  $\kappa_{\text{C}}$  z dokładnością do  $\pm 0,001$  mm/km.

### 3.4. Nomogram dla wyznaczania poprawki $\kappa_{\text{C}}$ . Nomogram 3b

Analogicznie jak w poprzednim przypadku, wychodząc z wzoru (10) możemy napisać

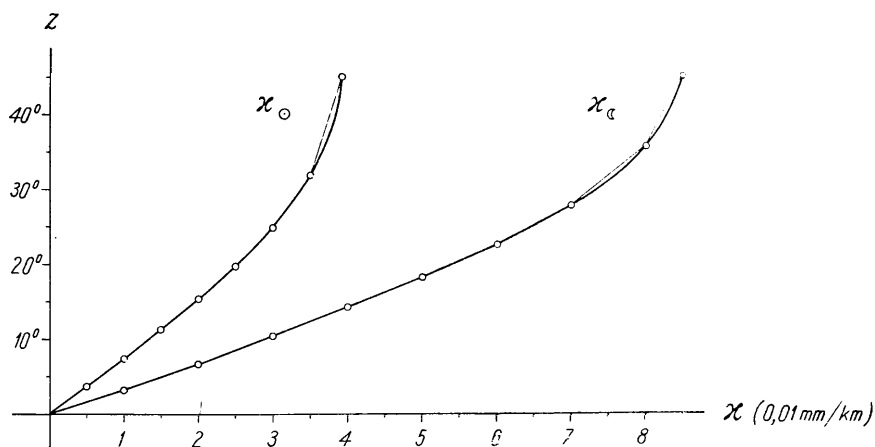
$$\sin 2z_{\text{C}} = \frac{\kappa_{\text{C}}}{3,9 \cdot \cos(A_{\text{C}} - a)} \quad (18)$$

i — jak poprzednio dla  $\kappa_{\text{C}}$  — wyznaczyć przebieg izolunii wartości  $\kappa_{\text{C}}$ . Na nomogramie 3b izolunii te wyznaczono w odstępach co 0,005 mm/km. Korzystając z interpolacji, łatwo uzyskuje się odczyt wartości  $\kappa_{\text{C}}$  z dokładnością  $\pm 0,001$  mm/km.

Forma nomogramu dla wyznaczania wartości poprawki  $\kappa_{\text{C}}$  (nomogram 3b) jest taka sama jak nomogramu wartości  $\kappa_{\text{C}}$  (nomogram 3a).

— \* —

Przytaczana dotychczas dokładność odczytu poszczególnych nomogramów, wynikająca jedynie z dokładności odczytu interpolowanych liniowo wartości  $z$ ,  $A$ ,  $\kappa_{\text{C}}$  i  $\kappa_{\text{C}}$ , nie jest oczywiście dokładnością określenia tych wartości za pomocą nomogramów.



Rys. 5. Ilustracja wielkości błędów liniowej interpolacji między izoliniami wartości  $\kappa_{\text{C}}$  i  $\kappa_{\text{C}}$  (nomogram 3a i 3b). Analiza dla  $(A - a) = 0$ .

I tak, przyjęcie dla nomogramów 1 i 2 stałego argumentu średniej szerokości geograficznej Polski ( $\varphi = 52^\circ$ ) powoduje występowanie największych błędów wyznaczenia  $z$  i  $A$  na południowym i północnym skraju obszaru Polski. Przy możliwych maksymalnych odchyleniach rzędu  $\Delta\varphi = \pm 3^\circ$ , błąd wyznaczenia poprawki  $\chi_{\text{☉}}$  może osiągnąć maksymalnie wartość  $\pm 0,01$  mm/km, a poprawki  $\chi_{\text{☽}}$  — dwukrotnie mniejszą.

Drugim źródłem błędu jest przyjęcie zasady liniowej interpolacji między izoliniami nomogramów. Błędy te — największe w niektórych częściach nomogramów 3a i 3b — zawarte są jednak przeważnie w granicach dokładności odczytu, tj. w granicach  $\pm 0,001$  mm/km.

Rysunek 5 ilustruje błędy liniowej interpolacji wartości  $\chi_{\text{☉}}$  (nomogram 3a) i wartości  $\chi_{\text{☽}}$  (nomogram 3b). Analizę przeprowadzono dla  $(A-a) = 0$ .

W celu praktycznego sprawdzenia dokładności wyznaczenia poprawek  $\chi$  za pomocą opracowanych nomogramów, 8 wartości tych poprawek zostało obliczonych w sposób ścisły, wg wzorów (12), (13) i (16), a następnie porównanych z wartościami wyznaczonymi przy wykorzystaniu nomogramów, przez 3 osoby niezależnie. W obu przypadkach przyjęto te same wartości wyjściowe na  $\delta$  i  $t$  oraz  $\varphi = 52^\circ$ . Rozbieżności między wyznaczeniami wartości  $\chi$  zawarte były w granicach  $\pm 0,0002 \div 0,0018$  mm/km (przeciętna rozbieżność  $\pm 0,0009$  mm/km).

#### 4. Obliczanie poprawki $C$ dla odcinka linii niwelacyjnej

W rozdziale 3 omawialiśmy sposób wyznaczania poprawek  $\chi_{\text{☉}}$  i  $\chi_{\text{☽}}$  za pomocą opracowanych nomogramów, zakładając znajomość wartości  $t_{\text{☉}}$  i  $t_{\text{☽}}$  oraz  $\delta_{\text{☉}}$  i  $\delta_{\text{☽}}$ . W rzeczywistości jednak wartości te muszą być wyznaczone za pośrednictwem innych elementów, czy to określonych bezpośrednio podczas pomiaru odcinka linii niwelacyjnej (moment rozpoczęcia i zakończenia pomiaru), czy też uzyskanych podczas kameralnego opracowania (średnia długość geograficzna, czas gwiazdowy Greenwich itd.). Ostatecznie, chcąc wyznaczyć poprawkę  $C$  dla danego odcinka linii, musimy też znać jego azymut i długość.

Wielkość poprawki jest zależna od wszystkich wymienionych tu elementów, a błąd jej określenia — od błędów określenia tych elementów. Przy dużej zmienności poprawki  $\chi$  w czasie — o czym będzie szerzej w rozdziale 5 — dokładność jej wyznaczenia zależeć będzie też od wielkości interwału czasu, w jakim pomiar danego odcinka został wykonany, a także od równomierności tempa tego pomiaru.

Z tego też powodu celowym wydaje się szersze omówienie postępowania w sposób prawidłowy prowadzącego do wyznaczenia poprawki  $C$ . Sposób postępowania zostanie zilustrowany przykładem (tabl. 1).

#### 4.1. Uwagi ogólne

Poprawkę  $C$  obliczamy zgodnie ze wzorem (11) — tj. jako sumę dwu poprawek ze względu na zmienny wpływ Księżyca i Słońca — oddzielnie dla pomiaru „tam” i „z powrotem”.

Elementem dla którego obliczamy poprawkę jest w zasadzie odcinek linii między dwoma sąsiednimi reperami, pod warunkiem iż pomiar jego był wykonywany w sposób ciągły, nie trwał dłużej niż  $2\div 2,5$  godz., oraz że odcinek ten można przyjąć jako linię prostą o określonym azymucie. W przeciwnym przypadku, tj. jeżeli:

- nastąpiła przerwa w pomiarze odcinka, dłuższa niż  $10\div 15$  min.,
- pomiar jego trwał dłużej niż  $2\div 2,5$  godz.,
- mierzony odcinek składał się z dłuższych fragmentów o wyraźnie różnym azymucie,

wtedy odcinek ten powinien być podzielony na odpowiednie części, dla których należy oddzielnie obliczyć poprawki i zsumować ich wartości.

Obliczenie poprawki  $C$  dla pojedynczego pomiaru odcinka linii niwelacyjnej — lub jego części — składa się zasadniczo z 4 etapów, a mianowicie:

1. Wyznaczenie wielkości wyjściowych, tj. elementów wspólnych dla wyznaczenia obu poprawek  $\kappa_{\odot}$  i  $\kappa_{\text{☾}}$ . — Korzystamy tu z danych dziennika niwelacji, mapy i Rocznika Astronomicznego. Etapowi temu w przykładzie (tabl. 1) odpowiadają rubryki  $1\div 14$ .

2. Wyznaczenie poprawki  $\kappa_{\text{☾}}$  — korzystamy z Rocznika Astronomicznego i nomogramów 1, 2 i 3a. (W przykładzie — rubryki  $15\div 21$ ).

3. Analogiczne wyznaczenie poprawki  $\kappa_{\odot}$  — Korzystamy z Rocznika Astronomicznego i nomogramów 1, 2 i 3b. (W przykładzie — rubryki  $22\div 28$ ).

4. Ostateczne wyznaczenie poprawki  $C$ , jako

$$C = s \cdot (\kappa_{\odot} + \kappa_{\text{☾}}) \quad (19)$$

(W przykładzie — rubryki 29 i 30).

Dla ułatwienia, pewne fragmenty obliczeń etapu 2 i etapu 3 wykonujemy równolegle.

Przykład obliczania poprawki  $C$ 

Linia: Radymin — Wyszków

TABLICA 1

1	Nr odcinka	1	2	3	1'	2'	3'
2	Kierunek pomiaru	tam	tam	tam	powrotny	powrotny	powrotny
3	Reper początkowy końcowy	AG-0033 AL-1631	AL-1631 AB-3211	AB-3211 AL-1610	AL-1631 AG-0033	AB-3211 AL-1631	AL-1610 AB-3211
4	Azymut odcinka ( $\alpha$ )	59°	59°	49°	$59^\circ + 180^\circ = 239^\circ$	$59^\circ + 180^\circ = 239^\circ$	$49^\circ + 180^\circ = 229^\circ$
5	Długość (s) (km)	2,1	2,2	0,8			
6	$\lambda_{\text{śr.}}$	-21° 15'	-21° 15'	-21° 15'			
7	Czas pomiaru (czas środkowoeurop.)	1963-IV-5 <sup>a</sup> 9 <sup>05</sup> - 11 <sup>15</sup>	1963-IV-5 <sup>d</sup> 11 <sup>20</sup> - 13 <sup>30</sup>	1963-IV-5 <sup>d</sup> 13 <sup>35</sup> - 14 <sup>10</sup>	1963-IV-19 <sup>d</sup> 12 <sup>00</sup> - 13 <sup>40</sup>	1963-IV-19 <sup>d</sup> 9 <sup>45</sup> - 11 <sup>30</sup>	1963-IV-6 <sup>d</sup> 8 <sup>35</sup> - 8 <sup>59</sup>
8	Średni moment (czas środkowoeurop.)	1963-IV-5 <sup>a</sup> 10 <sup>h</sup> 10 <sup>m</sup>	1963-IV-5 <sup>d</sup> 12 <sup>h</sup> 25 <sup>m</sup>	1963-IV-5 <sup>d</sup> 13 <sup>h</sup> 52 <sup>m</sup>	1963-IV-19 <sup>d</sup> 12 <sup>h</sup> 50 <sup>m</sup>	1963-IV-19 <sup>d</sup> 10 <sup>h</sup> 38 <sup>m</sup>	1963-IV-6 <sup>d</sup> 8 <sup>h</sup> 47 <sup>m</sup>
9	Średni moment (czas śr. Gr. = T. U.)	9 <sup>h</sup> 10 <sup>m</sup>	11 <sup>h</sup> 25 <sup>m</sup>	12 <sup>h</sup> 52 <sup>m</sup>	11 <sup>h</sup> 50 <sup>m</sup>	9 <sup>h</sup> 38 <sup>m</sup>	7 <sup>h</sup> 47 <sup>m</sup>
10	$\Theta_{\text{Gr.}}$ o 0 <sup>h</sup> T. U.	12 <sup>h</sup> 50 <sup>m</sup>	12 <sup>h</sup> 50 <sup>m</sup>	12 <sup>h</sup> 50 <sup>m</sup>	13 <sup>h</sup> 45 <sup>m</sup>	13 <sup>h</sup> 45 <sup>m</sup>	12 <sup>h</sup> 54 <sup>m</sup>
11	Interwał czasu gwiazdowego	9 <sup>h</sup> 12 <sup>m</sup>	11 <sup>h</sup> 27 <sup>m</sup>	12 <sup>h</sup> 54 <sup>m</sup>	11 <sup>h</sup> 52 <sup>m</sup>	9 <sup>h</sup> 40 <sup>m</sup>	7 <sup>h</sup> 48 <sup>m</sup>
12	$\Theta_{\text{Gr.}}$ na dany moment T.U.	22 <sup>h</sup> 02 <sup>m</sup>	0 <sup>h</sup> 17 <sup>m</sup>	1 <sup>h</sup> 44 <sup>m</sup>	1 <sup>h</sup> 37 <sup>m</sup>	23 <sup>h</sup> 25 <sup>m</sup>	20 <sup>h</sup> 42 <sup>m</sup>
13	$\lambda_{\text{śr.}}$	-1 <sup>h</sup> 25 <sup>m</sup>	-1 <sup>h</sup> 25 <sup>m</sup>	-1 <sup>h</sup> 25 <sup>m</sup>			
14	$\Theta_{\lambda}$	23 <sup>h</sup> 27 <sup>m</sup>	1 <sup>h</sup> 42 <sup>m</sup>	3 <sup>h</sup> 09 <sup>m</sup>	3 <sup>h</sup> 02 <sup>m</sup>	0 <sup>h</sup> 50 <sup>m</sup>	22 <sup>h</sup> 07 <sup>m</sup>

15	$\alpha_{\text{C}}$ na dany moment T.U.	10 <sup>h</sup> 29m	10 <sup>h</sup> 34m	10 <sup>h</sup> 37m	22 <sup>h</sup> 05m	22 <sup>h</sup> 00m	11 <sup>h</sup> 10m
16	$i_{\text{C}} = \Theta_{\lambda} - \alpha_{\text{C}}$	12 <sup>h</sup> 58m	15 <sup>h</sup> 08m	16 <sup>h</sup> 32m	4 <sup>h</sup> 57m	2 <sup>h</sup> 50m	10 <sup>h</sup> 51m
17	$\delta_{\text{C}}$ na dany moment T.U.	+12,7°	+12,3°	+12,1°	-14,6°	-15,0°	+8,9°
18	$A_{\text{C}}$	16°	47°,5	65°	248°	222°	341°
19	$A_{\text{C}} - a$	317°	348°,5	16°	9°	343°	112°
20	$z_{\text{C}}$	114°	104°	93°,5	92°,5	77°	117°,5
21	$\varkappa_{\text{C}}$ (0,01 mm/km)	-4,65	-3,9	-1,15	-0,75	+3,7	+2,6
22	$\alpha_{\text{C}}$ na dany moment T.U.	0 <sup>h</sup> 55m	0 <sup>h</sup> 55m	0 <sup>h</sup> 55m	1 <sup>h</sup> 47m	1 <sup>h</sup> 46m	0 <sup>h</sup> 58m
23	$i_{\text{C}} = \Theta_{\lambda} - \alpha_{\text{C}}$	22 <sup>h</sup> 32m	0 <sup>h</sup> 47m	2 <sup>h</sup> 14m	1 <sup>h</sup> 15m	23 <sup>h</sup> 04m	21 <sup>h</sup> 09m
24	$\delta_{\text{C}}$ na dany moment T.U.	+5,9°	+5,9°	+5,9°	+11,0°	+11,0°	+6,2°
25	$A_{\text{C}}$	151°,5	196°	224°	207°	160°	127°,5
26	$A_{\text{C}} - a$	92°,5	137°	175°	328°	281°	258°,5
27	$z_{\text{C}}$	50°	47°	54°	44°,5	42°,5	58°
28	$\varkappa_{\text{C}}$ (0,01 mm/km)	-0,15	-2,8	-3,65	+3,3	+0,75	-0,7
29	$\varkappa = \varkappa_{\text{C}} + \varkappa_{\text{C}}$	-4,8	-6,7	-4,8	+2,55	+4,45	+1,9
30	$C = \varkappa \cdot s$ (mm)	-0,10	-0,15	-0,04	+0,05	+0,10	+0,02

#### 4.2. Przykład i instrukcja wyznaczania poprawki

Celem zilustrowania sposobu postępowania przy wyznaczaniu poprawki  $C$ , podajemy przykład jej obliczenia (tabl. 1) dla trzech odcinków linii niwelacyjnej Radzymin — Wyszków, dla pomiaru „tam” i „z powrotem”. Omówienie sposobu postępowania dokonamy w kolejności rubryk przyjętego schematu obliczeń, podając jednocześnie uwagi co do dokładności określania występujących tam wielkości. (Cyfry odpowiadają numeracji rubryk).

1. W przypadku konieczności podzielenia odcinka na 2 części, części te oznaczamy dodatkowo literami, np. 23a, 23b.

3. W przypadku podziału odcinka na 2 części, dla pierwszej części wypisujemy u góry numer reperu początkowego, a poniżej „a”, zaś dla drugiej części u góry „a”, a u dołu numer reperu końcowego.

4. Azymut ( $a$ ) danego odcinka linii określamy kątomierzem w oparciu o mapę w skali 1 : 50 000 lub większej. Zapis prowadzimy z dokładnością do  $1^\circ$ . W przypadku występowania dłuższych fragmentów odcinka o zdecydowanie różnym azymucie, należy odcinek podzielić na 2 części. W przypadku linii krzywej, należy określić azymut linii łączącej punkty końcowe odcinka. Błąd określenia azymutu nie powinien być większy od paru stopni.

Dla kierunku powrotnego wpisujemy azymut kierunku „tam” plus  $180^\circ$ , dla którego będziemy obliczali poprawkę  $C$ .

5. Długość odcinka zapisujemy z dokładnością do 0,1 km, odczytując ją za pomocą podziałki z mapy w skali 1 : 50 000 (lub większej), jako odległość między końcowymi punktami odcinka, lub części odcinka dla której obliczamy poprawkę. Uwaga: Nie wykorzystujemy do tego celu sumy długości przeseł odcinka.

6. Na podstawie mapy określamy w przybliżeniu długość geograficzną ( $\lambda_{sr}$ ) środkowego punktu danego odcinka niwelacji. Zapisujemy ją z dokładnością do  $15'$ , co odpowiada 1 minucie czasu.

7. Wypisujemy z dziennika pomiaru niwelacji datę pomiaru danego odcinka oraz moment jego rozpoczęcia i zakończenia, wg czasu środkowo-europejskiego, tj. wg przyjętego w Polsce czasu zimowego. (W przypadku korzystania z czasu letniego, przy przejściu na czas środkowoeuropejski odejmujemy 1 godz.). Zapis prowadzimy z dokładnością do 1 min.

W przypadku konieczności podziału odcinka na części, dla obliczenia oddzielnych poprawek, momenty pośrednie ustalamy przy przyjęciu założenia jednostajnego tempa pomiaru niwelacji, a więc w oparciu o długości poszczególnych części odcinka. Uwaga: Nie dotyczy to przypadku przerwy w pomiarze odcinka, która — jeśli jest dłuższa niż  $10 \div 15$  min. — powinna być w dzienniku pomiaru zaznaczona.



10. Z Rocznika Astronomicznego na dany rok (!) wypisujemy — z dokładnością do 1 min. — czas gwiazdowy Greenwich ( $\Theta$ ) o 0 godz. czasu uniwersalnego (T.U.) w danym dniu.

11. Średni moment pomiaru, wyrażony w czasie uniwersalnym (rubr. 9) zamieniamy na interwał czasu gwiazdowego, dodając do tego momentu poprawkę zgodnie z poniższą tabelką.

Czas uniwersalny (w godzinach)	0 ÷ 3	3 ÷ 9	9 ÷ 15	15 ÷ 21	21 ÷ 24
Poprawka (w minutach)	0	+1	+2	+3	+4

12. Obliczamy czas gwiazdowy Greenwich ( $\Theta_{Gr}$ ) dla średniego momentu pomiaru, dodając do czasu gwiazdowego Greenwich o 0 godz. T.U. (rubr. 10) interwał czasu gwiazdowego (rubr. 11).

13. Wyrażamy długość geograficzną ( $\lambda_{sr}$ ) wyrażoną uprzednio w jednostkach łuku (rubr. 6), w jednostkach czasu, pamiętając że:

$$15^\circ — 1 \text{ godz.}, \quad 1^\circ — 4 \text{ min.}, \quad 15' — 1 \text{ min.}$$

14. Obliczamy czas gwiazdowy dla południka  $\lambda_{sr}$ , jako

$$\Theta_\lambda = \Theta_{Gr} - \lambda_{sr}.$$

15. Interpolujemy wartość rektascenzji Księżyca ( $\alpha_{\text{K}}$ ) na dany moment T.U. (rubr. 9), korzystając z danych Rocznika Astronomicznego, podanych na 0 godz. każdej doby. Stosujemy interpolację liniową, z zapisem do 1 min.

17. Analogicznie interpolujemy wartość deklinacji Księżyca ( $\delta_{\text{K}}$ ) na dany moment T.U. Stosujemy interpolację liniową, z zapisem do  $0,1^\circ$ .

18. Korzystając z nomogramu 1, dla wyznaczonych uprzednio wartości  $t_{\text{K}}$  i  $\delta_{\text{K}}$  (rubryki 16 i 17), drogą interpolacji określamy wartość azymutu Księżyca ( $A_{\text{K}}$ ), z dokładnością do  $0,5^\circ$ .

20. Korzystając z nomogramu 2, dla tych samych wartości  $t_{\text{K}}$  i  $\delta_{\text{K}}$  określamy drogą interpolacji odległość zenitalną Księżyca ( $z_{\text{K}}$ ), z dokładnością do  $0,5^\circ$ .

21. Posługując się nomogramem 3a, dla wyznaczonych uprzednio argumentów ( $A_{\text{K}} - a$ ) oraz  $z_{\text{K}}$  (rubryki 19 i 20), wyznaczamy drogą interpolacji wartość poprawki  $\varkappa_{\text{K}}$ , z dokładnością do  $0,0005 \div 0,001$  mm/km.

Znak poprawki  $\varkappa_{\text{K}}$  odpowiada iloczynowi znaków podanych przy tych dwu skalach wartości ( $A_{\text{K}} - a$ ) i  $z_{\text{K}}$ , z których w konkretnym przypadku korzystamy.

22 ÷ 28. Rubryki te odpowiadają analogicznemu wyznaczeniu odpowiednich wartości dla Słońca, jak uprzednio dla Księżyca w rubrykach 15 ÷ 21. W rubryce 28 korzystamy z nomogramu 3b.

TABLICA 2

Wprowadzenie poprawek do obliczeń niwelacji

Nr odcinka	Nr reperu	d km	Przewyższenie pomierzone		Poprawka $0,8 \cdot C$			Przewyższenie poprawione		$\varphi'$ mm	Przewyższenie średnie m
			tam m	z powrotem m	tam mm	z powrotem mm	tam m	z powrotem m			
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	
1	AG-0033	2,1	+1,35956	-1,36163	-0,08	+0,04	+1,35948	-1,36159	-2,11	+1,36053 <sub>5</sub>	
2	AL-1631	2,2	-1,55947	+1,56188	-0,12	+0,08	-1,55959	+1,56196	+2,37	-1,56077 <sub>5</sub>	
3	AB-3211 AL-1610	0,8	-1,37168	+1,37030	-0,03	+0,02	-1,37171	+1,37032	-1,39	-1,37101 <sub>5</sub>	
		5,1			-0,23	+0,14					

30. Po obliczeniu łącznej poprawki  $\varkappa$  (rubr. 29), wyznaczamy poprawkę  $C$  dla danego odcinka linii niwelacyjnej (lub jego części) jako

$$C = \varkappa \cdot s \quad (20)$$

Wynik zapisujemy z dokładnością do 0,01 mm.

Uwaga: Celem uproszczenia postępowania przy obliczaniu poprawki, zaleca się grupowanie niektórych czynności. Odnosi się to do czynności wymagających korzystania z Rocznika Astronomicznego (rubryki: 10, 15, 17, 22 i 24), przy wyznaczeniu  $\alpha$  i  $\delta$  Księżyca i Słońca, oraz do czynności związanych z wykorzystywaniem nomogramów (rubryki: 18, 20, 25 i 27).

#### 4.3. Wprowadzenie poprawki do obliczeń niwelacji

Sposób wprowadzania poprawek  $C$  do wyników pomiarów niwelacji precyzyjnej został przedstawiony w tablicy 2.

Poprawka  $C$  powinna być wprowadzana do wartości przewyższeń pomierzonych, w kierunku „tam” i „z powrotem”, tj. przed wprowadzeniem poprawki łąt i poprawki grawimetrycznej, ze względu na przyjęty system wysokości.

Wprowadzamy ostatecznie, jako poprawki do przewyższeń pomierzonych w kierunku „tam” i „z powrotem” (kol. 4 i 5), wielkości  $0,8 \cdot C$  (lub  $0,7 \cdot C$ ), tj. wielkości poprawek zmniejszone ze względu na niecałkowitą sztywność skorupy ziemskiej (kol. 6 i 7). Przewyższenia tak poprawione (kol. 8 i 9) są podstawą dla wyznaczania różnic  $o'$  — charakteryzujących dokładność pomiaru — i przewyższeń średnich.

### 5. Analiza zmienności poprawki niwelacyjnej, w zależności od azymutu linii oraz kąta godzinnego i deklinacji Księżyca i Słońca

#### 5.1. Wstęp

Niewprowadzenie do wyników pomiarów niwelacji precyzyjnej poprawki ze względu na dobowe zmiany kierunku linii pionu wpływa na zwiększenie błędu systematycznego niwelacji. Wielkość poprawki jest jednak zmienna i zależna od kilku czynników, a wobec tego i wpływ jej na pomiar niwelacji jest różny. Wynika stąd celowość znajomości charakteru jej zmienności, tak ze względów teoretycznych, jak i praktycznych.

Poprawka  $C$ , wyrażona w ostatecznej formie wzorem (8), jest funkcją odległości zenitalnej ( $z$ ) i azymutu ( $A$ ) Księżyca i Słońca. Wielkości te są

szybko zmienne, wyznaczone wzorami (13) i (16). Przypomnijmy jednak, że zarówno  $z = f(\varphi, t, \delta)$ , jak i  $A = f(\varphi, t, \delta)$ . Dla określonej szerokości geograficznej pozostają więc dwie zmienne:  $t$  i  $\delta$ . Kąt godzinny ( $t$ ) jest prostą zależnością związany z czasem, a wartość deklinacji ( $\delta$ ) zmienia się w sposób powolny. Z tych względów obie te wielkości mogą służyć jako zmienne parametry, dla których rozpatrywać będziemy zmienność poprawki niwelacyjnej. Trzecim parametrem — zgodnie ze wzrostem (8) — będzie azymut linii niwelacyjnej ( $a$ ).

Ponieważ długość odcinka linii niwelacyjnej ( $s$ ), dla którego obliczamy poprawkę, możemy traktować jako współczynnik, wobec tego — dla uproszczenia — rozpatrywać będziemy zmienność wielkości poprawki na 1 km danego odcinka, a więc zmienność wartości  $z$ ; wzór (10).

Analizę zmienności poprawki  $z$  można przeprowadzić jednocześnie dla Księżyca i Słońca, gdyż w obu przypadkach zależności między wielkościami  $z$  i  $A$  oraz  $\varphi$ ,  $t$  i  $\delta$  są takie same. Różnice we współczynniku  $k$  ( $k_{\odot} = 8,5$ ,  $k_{\text{☾}} = 3,9$ ) można traktować jako różnice skali.

Możliwość stosunkowo łatwego dokonania omawianej analizy powstała dzięki uprzednim obliczeniom wykonanym dla wyznaczenia nomogramu 1 i 2 oraz dzięki opracowaniu samych nomogramów 1, 2 i 3.

Jako ostateczny efekt opracowania powstały wykresy obrazujące cykliczną zmienność w czasie poprawki  $z$  (wyrażonej w 0,01 mm/km) dla:

a) różnych wartości azymutów linii niwelacyjnej oraz stałych wartości  $\varphi = 52^\circ$  i  $\delta = 0^\circ$ ,

b) różnych wartości deklinacji Księżyca i Słońca oraz stałych wartości  $\varphi = 52^\circ$  i stałych wartości azymutów linii.

Wykresy te znajdują się na końcu tego zeszytu Prace IGiK pod opaską.

## 5.2. Wykresy zmienności wartości $z$ , w zależności od kąta godzinnego Księżyca (lub Słońca) i azymutu linii. Wykresy 1 i 2

Dzięki poprzednio wykonanym obliczeniom dla opracowania nomogramów 1 i 2 — gdzie dla kątów godzinnych w interwałach co 1 godz. wyznaczone były wartości  $z$  i  $A$  — możliwe było łatwe wyznaczenie wartości  $(A-a)$  dla różnych kolejno przyjmowanych wartości azymutu odcinka linii, a następnie — wyznaczenie odpowiednich wartości  $z_{\odot} = f\{(A_{\odot} - a), z_{\odot}\}$ , przy pomocy nomogramu 3a.

Zmienność wartości poprawki  $z$  w czasie, dla różnych azymutów odcinków linii niwelacyjnej, została przedstawiona na dwu wykresach (1 i 2). Jako wartości stałe przyjęto  $\varphi = 52^\circ$  oraz średnią wartość deklinacji  $\delta = 0^\circ$ .

Wykres 1 przedstawia zmienność poprawki  $z$  w okresie jednej doby ( $t = 0 \div 24^h$ ), dla odcinków linii niwelacyjnych o azymutach  $a = 0^\circ, 90^\circ$ ,

$180^\circ$  i  $270^\circ$ . Dwie różne skale pozwalają na określenie zarówno wartości  $\kappa_{\text{☾}}$ , jak i  $\kappa_{\text{☉}}$ .

Wykres ten jest m.in. ilustracją, że dla azymutów odcinków linii niwelacyjnej różniących się o  $180^\circ$  wartości poprawek  $\kappa$  różnią się jedynie znakiem. Czyli

$$\kappa_a = -\kappa_{(a+180^\circ)} \quad (21)$$

Wykres 2 jest podobnym przedstawieniem przebiegu zmienności poprawki  $\kappa$  dla odcinków linii niwelacyjnych o różnych azymutach, w interwałach co  $45^\circ$ . Dzięki zastosowaniu dwu odwróconych względem siebie skal wartości  $\kappa$ , można było przedstawić zmienność tej poprawki dla azymutów w pełnym zakresie  $360^\circ$ . I tak, na lewej skali odczytuje się wartości  $\kappa$  z wykresów dla azymutów odcinków linii:  $0, 45, 90, 135$  i  $180^\circ$ , a na prawej — dla azymutów:  $180, 225, 270, 315$  i  $360^\circ$ .

Zastosowanie gęstszych niż poprzednio interwałów wartości azymutu pozwala na uchwycenie jeszcze jednej zależności. Mianowicie, dla dwu uzupełniających się do  $360^\circ$  azymutów linii, zachodzi związek

$$\kappa_a^t = \kappa_{360^\circ - a}^{24^h - t} \quad (22)$$

Przyjęcie interwału  $\Delta a = 45^\circ$  pozwala już na interpolację wartości  $\kappa$  dla pośrednich wartości azymutu.

### 5.3. Wykresy zmienności wartości $\kappa$ , w zależności od kąta godzinowego i deklinacji Księżyca (lub Słońca). Wykresy 3a, 3b i 3c

Wykresy 1 i 2 przedstawiały zmienność poprawki  $\kappa$  przy przyjęciu stałej wartości deklinacji Księżyca (lub Słońca)  $\delta = 0^\circ$ . Wykresy 3a, b i c obrazują zmienność tej poprawki w zależności od zmiany deklinacji Księżyca czy Słońca.

Jak i poprzednio, dla opracowania tych wykresów wykorzystane zostały obliczenia dla opracowania nomogramów i same nomogramy 1, 2 i 3. Korzystając z zależności wyrażonych wzorami (21) i (22), obliczenia poprawek  $\kappa$  można było ograniczyć do azymutów leżących w I ćwiartce kąta pełnego. Wykresy przedstawiają zmienność wartości poprawki  $\kappa_{\text{☾}}$  i  $\kappa_{\text{☉}}$  dla azymutów  $0$  i  $180^\circ$  (wykres 3a),  $45, 135, 225$  i  $315^\circ$  (wykres 3b) oraz  $90$  i  $270^\circ$  (wykres 3c), dla kilku charakterystycznych wartości deklinacji Księżyca lub Słońca, a mianowicie:

- dla średniej wartości deklinacji Księżyca lub Słońca  $\delta = 0^\circ$ ,
- dla ekstremalnych dla Słońca wartości  $\delta = +23^\circ$  i  $\delta = -23^\circ$ ,
- dla  $\delta = +7^\circ$  i  $\delta = -7^\circ$ , przy których — na szerokości geograficznej

$\varphi = 52^\circ$  — poprawka  $\kappa$  osiąga wartości ekstremalne, związane z ekstremum funkcji  $\sin 2z$  w momentach górowania i dołowania Księżyca lub Słońca. Mamy bowiem:

dla górowania

$$z = \varphi - \delta, \quad \delta = 52^\circ - 45^\circ = +7^\circ, \quad (23)$$

dla dołowania

$$z = 180^\circ - (\varphi + \delta), \quad \delta = 180^\circ - 52^\circ - 135^\circ = -7^\circ. \quad (24)$$

Wykresy sporządzone dla tych kilku wartości deklinacji pozwalają na interpolację wartości poprawki  $\kappa$  dla innych, pośrednich wartości deklinacji.

#### 5.4. Omówienie charakteru zmienności wartości poprawki $\kappa$

Na podstawie opracowanych wykresów łatwo jest scharakteryzować zmienność poprawki  $\kappa$  w zależności od azymutu linii niwelacyjnej, deklinacji i kąta godzinowego ciała zaburzającego (Księżyca, Słońca).

##### 5.4.1. Zmienność poprawki $\kappa$ w zależności od azymutu linii niwelacyjnej

Azymut linii niwelacyjnej ( $a$ ) ma duży wpływ na wartość poprawki  $\kappa$ . Najlepszą ilustracją są tu wykresy 1 i 2.

Poprawka  $\kappa$  dla linii o azymucie  $a = 0^\circ$ , przy  $\delta = 0^\circ$ , ma zawsze znak ujemny; przy  $\delta \neq 0^\circ$  — ma prawie zawsze znak ujemny. Poprawka dla linii o azymucie  $180^\circ$ , jak to wynika z zależności (21), ma — na odwrót — znak dodatni. Linie o azymutach  $90^\circ$  i  $270^\circ$  mają poprawki  $\kappa$  oscylujące w ciągu doby ( $0 \leq t \leq 24^h$ ) wokół wartości zerowej.

Ponieważ linie o kierunku południkowym otrzymują poprawki  $\kappa$  o stałym znaku, a więc wpływ tych poprawek na wyniki niwelacji jest w tym przypadku systematyczny. Dla linii niwelacyjnych o kierunku zbliżonym do równoleżnikowego wpływ wprowadzenia poprawek będzie znacznie mniejszy.

##### 5.4.2. Zmienność poprawki $\kappa$ w zależności od deklinacji Księżyca i Słońca

Zmienna wartość deklinacji Księżyca i Słońca, przez swój ograniczony zakres zmienności, w mniejszym stopniu wpływa na wartość poprawki  $\kappa$ . Ilustrują to wykresy 3a, b i c.

Najmniejszy wpływ na zmianę wartości poprawki  $\kappa$  ma zmiana deklinacji dla linii o azymucie  $a \approx 0^\circ$  ( $180^\circ$ ), największy — dla  $a \approx 90^\circ$  ( $270^\circ$ ).

### 5.4.3. Zmienność poprawki $\kappa$ w zależności od kąta godzinowego Księżyca i Słońca

Zmiana wartości  $\kappa$ , w zależności od zmiany kąta godzinowego Księżyca i Słońca, jest duża. W ciągu doby, która stanowi pełny cykl zmienności, poprawka  $\kappa$  osiąga 4 razy wartości ekstremalne, niezależnie od azymutu linii i deklinacji Księżyca lub Słońca. Moment pomiaru odcinka linii niwelacyjnej w znacznym więc stopniu decyduje o wielkości poprawki  $\kappa$ .

## 6. Zastosowania opracowanych nomogramów i wykresów

Opracowane nomogramy mają w zasadzie na celu ułatwienie procesu wyznaczania poprawki  $\kappa$ .

Wykresy, prócz zobrazowania charakteru zmienności tej poprawki i jej zależności od takich czynników jak:  $a$ ,  $\delta$  i  $t$ , mogą również służyć do przewidywanego określania wartości samej poprawki. Uzyskać to można przez łączne wykorzystanie wykresu 2 i wykresów 3, z zastosowaniem interpolacji ze względu na deklinację i azymut linii. Oczywiście wartości tych argumentów powinny być wstępnie ustalone. Odpada jednak potrzeba wyznaczania wartości  $A$  i  $z$ .

Dokładność określenia wartości  $\kappa$  na podstawie wykresów jest znacznie mniejsza niż przy użyciu nomogramów. Dla dowolnej wartości  $\delta$  i  $a$ , a przy  $\varphi = 52^\circ$ , błąd wyznaczenia jest tu rzędu 0,01 mm/km.

Można więc korzystać z wykresów, jako „grubej” i częściowo niezależnej kontroli wyznaczenia poprawki  $\kappa$ , określanej za pomocą nomogramów.

Prócz wymienionego zasadniczego swego zastosowania w zakresie niwelacji precyzyjnej, opracowane nomogramy i wykresy mogą mieć jeszcze i inne zastosowanie, z zakresu opracowań geofizycznych.

Zauważmy, że poprawka  $\kappa$  łatwo może być przeliczona na kąt o jaki odchyła się w danym momencie chwilowa linia pionu od swego średniego położenia. Porównując bowiem składową odchylenia pionu ( $\gamma$ ) w azymucie linii niwelacyjnej ( $a$ ) — wzór (6) — z poprawką  $\kappa$  — wzór (10) — mamy

$$\gamma'' = \kappa \cdot \frac{P''}{k} . \quad (25)$$

Ostatecznie otrzymujemy:

$$\gamma''_{\odot} = 0,00205 \cdot \kappa_{\odot} \quad (\text{w } 0,01 \text{ mm}), \quad (26)$$

$$\gamma''_{\ominus} = 0,00205 \cdot \kappa_{\ominus} \quad (\text{w } 0,01 \text{ mm}). \quad (27)$$

Opracowane nomogramy i wykresy mogą więc — po prostym przeliczeniu skal — służyć do odczytywania kątowych wartości odchyień pionu.

Nomogramy mogą być zastosowane:

1. Do określenia teoretycznej wielkości całkowitego odchylenia ( $\Theta$ ) chwilowej linii pionu od jej średniego położenia, spowodowanego przez Księżyc lub Słońce. — Wyznaczamy wtedy  $z$  z nomogramu 2 oraz  $\varkappa$  z nomogramu 3, zakładając  $(A-a) = 0$ . Azymut kierunku całkowitego odchylenia pionu będzie równy azymutowi  $A$  (nomogram 1).

2. Do określenia rzutu kąta całkowitego odchylenia pionu ( $\Theta$ ) na dany kierunek ( $a$ ) — Postępujemy analogicznie jak w poprzednim przypadku, wyznaczając jednak różnicę  $(A-a)$ , w tym przypadku nierówną zeru.

Wykresy mogą służyć do analizy zmienności wielkości rzutu kąta całkowitego odchylenia linii pionu na kierunek o azymucie  $a$ , w zależności od kąta godzinowego i deklinacji ciała zaburzającego (wykresy 3).

Nomogramy i wykresy — po zmianie skal — mogą więc być pomocne przy analizie materiałów obserwacyjnych z dziedziny geofizycznych wyznaczeń zmian kierunku linii pionu<sup>4)</sup>, obserwacji pływów i wyznaczeń współczynnika sprężystości skorupy ziemskiej.

Analogiczne nomogramy i wykresy mogą być opracowane dla szerokości geograficznej konkretnej stacji geofizycznej i dla odpowiednich azymutów ustawienia wahadeł, służąc określaniu błędów przypadkowych ciągłych rejestracji oraz wyznaczeniom wielkości charakterystycznych dla danej stacji.

## 7. Teoretyczna ocena wpływu poprawki $\varkappa$ i $C$ na wyniki i wyznaczone błędy niwelacji precyzyjnej

Omówione w rozdziale 5 wykresy, przedstawiające zmienność poprawki niwelacyjnej ( $\varkappa$ ) ze względu na dobowe zmiany kierunku linii pionu, pozwalają na scharakteryzowanie jej wpływu na wyniki i błędy niwelacji, a także na wysnucie szeregu wniosków.

Rozpatrzmy z początku krótki odcinek linii niwelacyjnej, na przykład 1 km przeszło między sąsiednimi reperami.

W przypadku gdy ta sama wielkość poprawki — w odniesieniu do kierunku głównego — wystąpi przy pomiarze danego odcinka w obu kierun-

<sup>4)</sup> Na przykład przy stałej rejestracji wahadłowej, dla porównania wyznaczonych obserwacyjnie i teoretycznie przewidywanych zmian kierunku linii pionu.



kach, o tę samą wielkość zmieniona zostanie średnia wartość przewyższenia, mamy bowiem

$$\frac{(h_I + z) + (h_{II} + z)}{2} = \frac{h_I + h_{II}}{2} + z. \quad (28)$$

Różnica przewyższeń, charakteryzująca błąd pomiaru, pozostanie w tym przypadku nie zmieniona, gdyż

$$(h_I + z) - (h_{II} + z) = h_I - h_{II}. \quad (29)$$

Gdy poprawki będą miały znak przeciwny, nie wpłyną na zmianę średniej wartości przewyższenia, ponieważ

$$\frac{(h_I + z) + (h_{II} - z)}{2} = \frac{h_I + h_{II}}{2}. \quad (30)$$

natomiast podwójna wartość tej poprawki wystąpi w różnicy przewyższeń, wyznaczonej z dwukrotnego pomiaru, bowiem

$$(h_I + z) - (h_{II} - z) = h_I - h_{II} + 2z, \quad (31)$$

i wpłynie na zmianę oceny błędu pomiaru niwelacji.

Maksymalna wartość całkowitej poprawki  $z$  dla pojedynczego pomiaru krótkiego, np. kilometrowego odcinka linii niwelacji precyzyjnej może wynieść

$$z = z_{\text{I}} + z_{\text{II}} \approx 0,085 + 0,039 \approx 0,124 \text{ mm/km}. \quad (32)$$

Po uwzględnieniu współczynnika (0,8), ze względu na elastyczność skorupy ziemskiej, otrzymamy

$$z = 0,124 \cdot 0,8 \approx 0,1 \text{ mm/km}. \quad (33)$$

Przeciętnie, w oparciu o rachunek prawdopodobieństwa, należy spodziewać się poprawki rzędu  $\pm 0,03$  mm/km. Wielkość tę potwierdzają materiały obserwacyjne, przytoczone w publikacji T. J. Kukkamäki'ego [6], a odnoszące się do dwu linii niwelacji o łącznej długości około 140 km.

Przeciętny wpływ poprawki na średnią wartość przewyższenia, wyznaczoną z 2 pomiarów, będzie wynosił

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot z_{\text{przec.}} \approx 0,7 \cdot z_{\text{przec.}} \approx \pm 0,02 \text{ mm/km}, \quad (34)$$

odpowiadając swą wielkością poprawce ortometrycznej normalnej dla linii o kierunku południkowym — dla którego osiąga ona największą wartość — i o średniej wysokości  $H = 25$  m, gdyż [1]

$$(1) \cdot (H_A + H_B) = 0,0004 \cdot (25 + 25) = 0,02 \text{ mm/km} \quad (35)$$

Jednak dla linii o kierunku południkowym znak poprawki  $\kappa$  jest stały, a więc jej wartość przeciętna wynosi około  $\pm 0,03$  mm/km, i odpowiada wtedy poprawce ortometrycznej normalnej dla linii o średniej wysokości  $H \approx 40$  m.

Należy przy tym zauważyć, że znak obu poprawek jest taki sam (dla kierunku  $N \rightarrow S$  — dodatni).

Przechodząc do analizy wpływu poprawki, ze względu na dobowe zmiany kierunku linii pionu, na dłuższych odcinkach niwelacji, należy przede wszystkim stwierdzić, że zależy on od azymutu linii i jest największy dla linii o kierunku południkowym. Dla takiej linii np. o długości  $L = 100$  km sumaryczna poprawka  $C$  będzie rzędu 3 mm. Dla linii o kierunku równoleżnikowym będzie ona bliska zeru, gdyż oscyluje ona dokoła tej wartości.

Dla wszystkich innych, pośrednich wartości azymutu linii, poprawki na poszczególnych odcinkach mają różne znaki, a przeciętna ich wartość — wyznaczona dla całej linii — będzie mniejsza niż  $\pm 0,03$  mm/km.

Jednak, tak ze względu na charakter zmienności poprawki  $\kappa$  w czasie, jak i na technikę pomiaru, istnieją sprzyjające warunki do tego by na dłuższych fragmentach linii występowały poprawki  $C$  o jednakowym znaku.

Dla zilustrowania rozpatrzmy następujący przykład.

Weźmy linię o azymucie  $a \approx 45^\circ$  i — analizując na razie tylko poprawkę  $C_{\oplus}$  — założmy że w danym dniu  $\delta_{\oplus} \approx 0^\circ$  (patrz wykres 3b). Przyjmijmy, że pomiar tej linii był wykonywany w tym dniu rano w ciągu 5 godzin i po południu — po przerwie trwającej 5 godzin — 3 godziny. Niech początek pomiaru przypada na moment gdy  $t \approx 1$  godz.

Wtedy poprawki  $C_{\oplus}$  dla wszystkich przesł mierzonych w ciągu całego dnia będą miały ujemne wartości. Jeżeli pomiar odbywał się z przeciętną prędkością 1 km/godz., to całkowita poprawka  $C_{\oplus}$  dla pomierzonego w tym dniu odcinka 8 km wyniesie — przyjmując współczynnik 0,8 — około 0,35 mm. Niewprowadzenie tej poprawki spowoduje więc błąd systematyczny na 8-kilometrowym odcinku rzędu 0,04 mm/km, tj. rzędu błędów systematycznych współczesnych sieci niwelacji precyzyjnej.

Ze względu na to, iż kąty godzinne Księżyca, rozpatrywane w tych samych momentach czasu słonecznego dwu kolejnych dób, różnią się między sobą tylko o około 50 minut, tym samym poprawki  $C_{\oplus}$  podczas kilku kolejnych dni pomiaru danej linii — jeśli pomiary te wykonywane były w tych samych porach dnia — będą miały bardzo podobne do siebie wartości. Fakt ten powoduje, że poprawka  $C_{\oplus}$  może mieć systematyczny wpływ na wynik niwelacji na kilkunasto- a nawet dwudziesto- trzydziestokilometrowym odcinku linii.

Systematyczny wpływ poprawki, zależny od pory dnia w której wykonywany jest pomiar niwelacji, może występować jeszcze wyraźniej w przypadku poprawki  $C_{\odot}$ , gdzie tym samym okresem doby odpowiadają te same kąty godzinne Słońca, a więc — przy założeniu  $a = \text{const.}$  i  $\Delta L = \text{const.}$  — te same wartości poprawki  $C_{\odot}$ . Widzimy więc, że poprawka  $C_{\odot}$ , mimo, że jej przeciętna wartość jest o połowę mniejsza od poprawki  $C_{\oplus}$ , może mieć na długim odcinku linii jednakowy znak, a więc i bardziej systematyczny charakter, spowodowany specyfiką pomiaru niwelacyjnego, wykonywanego z reguły zawsze w tych samych porach dnia.

Ogólnie można powiedzieć, że poprawka niwelacyjna ze względu na dobowe zmiany kierunku linii pionu jest wyraźnie mniejsza od średnich błędów przypadkowych współczesnych pomiarów niwelacji precyzyjnej ( $\eta \approx 0,3 \div 0,4$  mm/km) i nie należy się spodziewać ich zmniejszenia przez wprowadzenie tej poprawki. Sądzić jednak można, że nieuwzględnianie poprawki  $C$  jest jednym ze źródeł występowania błędów systematycznych w sieciach niwelacyjnych, których wielkości ( $0,02 \div 0,10$  mm/km) są rzędu tej poprawki.

## 8. Analiza wyników wprowadzenia do pomiarów niwelacji precyzyjnej poprawki ze względu na dobowe zmiany kierunku linii pionu

Ponieważ dotychczas w Polsce nie stosowano omawianej tu poprawki, postanowiono tytułem próby wprowadzić ją do wyników pomiarów, wykonanych w latach 1965/66, na liniach przebiegających po obszarach przewidywanych wstępnie do założenia poligonów doświadczalnych dla kompleksowych badań współczesnych ruchów powierzchni skorupy ziemskiej. Wspomniane pomiary wykonane zostały w rejonie Mławy i Zamościa (rys. 6) [17].

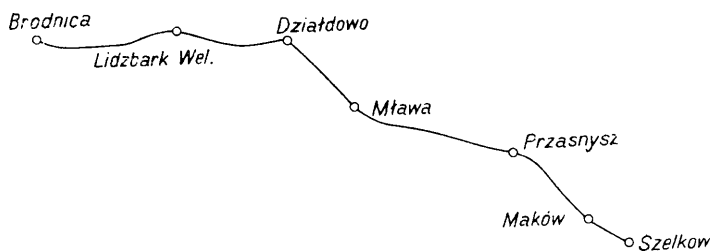
Linia w rejonie Mławy, o ogólnej długości około 150 km, pomierzona została w roku 1965, a w rejonie Zamościa, o długości około 130 km, w latach 1965 i 1966.

Poprawka  $C$  obliczana była w sposób ścisły dla każdego odcinka między sąsiednimi reperami (długości odcinków około 1,5 km), a czasem nawet dla części odcinka, jeśli występowały na nim wyraźne zmiany azymutu lub gdy pomiar jego trwał dłużej niż 2,5 godz. (patrz rozdz. 4). Przy obliczaniu poprawki korzystano z opracowanych nomogramów (patrz rozdz. 3). Ostatecznie do wyników niwelacji — biorąc pod uwagę sprężystość Ziemi — jako poprawkę wprowadzano wartość  $0,8 \cdot C$ .

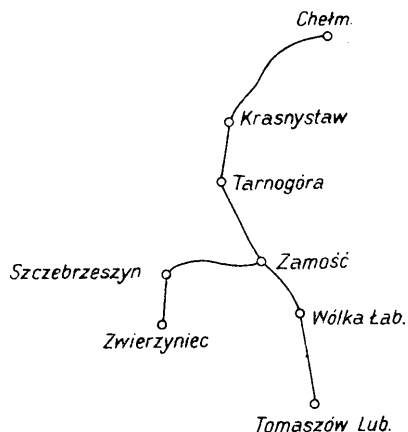
Otrzymane z pomiarów wyniki zostały dwukrotnie w różny sposób opracowane.

Pierwsze obliczenie nie różniło się od normalnie stosowanego, a mianowicie: obliczone zostały różnice ( $\varrho$ ) między pomiarami „tam” i „z powrotem”, poprawki łąt i przewyższenia średnie, oraz średnie błędy przypadkowe ( $\eta$ ) i systematyczne ( $\sigma$ ) na 1 km linii.

a)



b)



Rys. 6. Szkic linii niwelacyjnych mierzonych w 1965/66 r. i redukowanych ze względu na dobowe zmiany kierunku linii pionu; a) linia w rejonie Mławy, b) linie w rejonie Zamościa.

Drugie obliczenie było analogiczne, z tym, że do wyjściowych wartości przewyższeń z pomiarów w obu kierunkach dodane zostały poprawki  $0,8 \cdot C$ .

Porównanie obu opracowań oraz analiza wielkości poprawek dały możliwość określenia wielkości wpływu omawianej poprawki na wyniki i średnie błędy pomiaru niwelacji.

Zestawienie sum wartości poprawek ( $0,8 \cdot C$ ), oraz charakterystyka ich wielkości dla poszczególnych linii i ich części, zostały podane w tablicy 3.

TABLICA 3

Zestawienie charakteryzujące wpływ poprawki na wyniki niwelacji precyzyjnej

Lp.	Odcinek linii	L	Sumy poprawek dla pomiaru						Poprawka		100% $\frac{0,8 \cdot C}{0,5 \cdot \sqrt{L}}$	
			„tam”			„z powrotem”			średnia $\frac{0,8 \cdot C}{\frac{1}{2}(\Sigma_1 - \Sigma_2)}$	na 1 km $\frac{0,8 \cdot C}{L}$		
			+	-	$\Sigma_1$	+	-	$\Sigma_2$				
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	
1	Brodnica	km	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	-2 10 mm	%	
2	Lidzbark Welski	32	0,44	0,70	-0,26	0,44	0,75	-0,31	+0,025	+0,1	1	
3	Działdowo	27	0,47	0,36	+0,11	0,31	0,44	-0,13	+0,120	+0,4	5	
4	Mława	23	0,28	0,12	+0,16	0,27	0,22	+0,05	+0,055	+0,2	2	
5	Przasnysz	38	0,50	0,40	+0,10	0,53	0,59	-0,06	+0,080	+0,2	3	
6	Maków Szelków	26	0,76	0,08	+0,68	0,04	1,06	-1,02	+0,850	+3,3	34	
		8	0,10	0,10	0,00	0,02	0,28	-0,26	+0,130	+1,8	9	
7	Chelm	154	2,55	1,76	+0,79	1,61	3,34	-1,73	+1,260	+0,8	20	
8	Krasnystaw	28	0,68	0,11	+0,57	0,34	0,58	-0,24	+0,405	+1,4	15	
9	Tarnogóra	15	0,60	0,00	+0,60	0,04	0,55	-0,51	+0,555	+3,7	29	
10	Zamość	19	0,84	0,00	+0,84	0,02	0,87	-0,85	+0,845	+4,4	39	
11	Wólka Labuńska	15	0,58	0,10	+0,48	0,02	0,67	-0,65	+0,565	+3,8	30	
	Tomaszów Lub.	20	0,65	0,00	+0,65	0,07	0,44	-0,37	+0,510	+2,6	23	
12	Zwierzyniec	97	3,35	0,21	+3,14	0,49	3,11	-2,62	+2,880	+2,9	58	
13	Szebrzeszyn	10	0,01	0,31	-0,30	0,34	0,01	+0,33	-0,315	-3,2	20	
	Zamość	22	0,63	0,08	+0,55	0,20	0,31	-0,11	+0,330	+1,5	14	
		32	0,64	0,39	+0,25	0,54	0,32	+0,22	+0,015	0,0	1	
									$\frac{\Sigma 0,8 \cdot C}{2L} = 0,030$ mm/km			

W kolumnie 3 podano długości linii i ich odcinków, w kolumnach 4, 5 i 6 — zsumowane wielkości poprawek dla pomiaru „tam”, z rozbiem na poprawki dodatnie i ujemne, w kolumnach 7, 8 i 9 — odpowiednie wartości dla pomiaru „z powrotem” (odwrotne azymuty). W kolumnie 10 podane są poprawki do średnich wartości przewyższeń z dwu pomiarów, a w kolumnie 11 — wartości tych poprawek obliczone na 1 km odcinka linii. W kolumnie 12 podany został (w procentach) stosunek wielkości poprawki  $0,8 \cdot C$  do średniego błędu pomiaru niwelacji danego odcinka, obliczonego jako:  $0,5 \cdot \sqrt{L}$  mm.

Jak wynikało z analizy teoretycznej (p. 5.4.1.) znak i wielkość poprawki przede wszystkim zależą od azymutu linii niwelacyjnej. Otrzymane wyniki liczbowe w pełni to potwierdzają. — Linia Brodnica—Szelków i Chelm

—Tomaszów Lubelski mają na wszystkich 11 odcinkach stale ten sam dodatni znak poprawki (kol. 10), co wiąże się ze stale ujemnymi przyrostami szerokości geograficznej (azymuty odcinków są w II lub III ćwiartce).

Przeciętna wielkość poprawki na 1 km linii (kol. 11) jest szczególnie duża dla linii Chełm—Tomaszów Lubelski (+0,029 mm/km), a to z uwagi na kierunek tej linii zbliżony do południkowego. Na poszczególnych odcinkach poprawka ta jest nawet jeszcze większa (+0,044 mm/km), przekraczając 2/3 wielkości średniego błędu systematycznego ( $\sigma \pm 0,06$  mm/km), wyznaczonego dla tego pomiaru niwelacji.

Porównanie wielkości poprawki  $0,8 \cdot C$  z wielkością średniego przypadkowego błędu pomiaru (kol. 12) daje też ciekawe rezultaty. Widzimy bowiem, że poprawka ta na poszczególnych odcinkach linii sięga 39% wielkości błędu przypadkowego, a dla całej linii Chełm—Tomaszów Lubelski nawet 58%. Jest to oczywiste, jeśli się weźmie pod uwagę, że przy systematycznym znaku poprawki, dla linii w przybliżeniu południkowej, rozpatrywany stosunek wielkości będzie rósł wraz z długością linii.

Mimo korelacji między znakiem i wartością poprawki, a azymutem linii niwelacyjnej, wiemy że poprawka ta zmienia się w czasie. Praktycznym efektem tych zmian są różnice między odpowiednimi wartościami w kolumnie 4 i 8, 5 i 7 oraz 6 i 9 (po uwzględnieniu różnicy w znaku). Z wielkości różnic wynika, że sposób rozłożenia pomiaru w czasie ma mniejsze znaczenie niż azymut linii. Największe różnice występują na linii w przybliżeniu równoleżnikowej, czego można się było spodziewać porównując wykres 3c z wykresem 3a. (Największa różnica między wartościami kolumn 6 i 9 występuje dla odcinka Brodnica—Lidzbark Welski i wynosi 0,57 mm).

Przeciętna wartość poprawki na 1 km linii niwelacyjnej, obliczona z wartości bezwzględnych, jako:

$$\frac{\sum |0,8 \cdot C|}{2L} = \frac{\sum |0,8 \cdot C'| + \sum |0,8 \cdot C''|}{2L}, \quad (36)$$

wynosiła  $\pm 0,030 \div 0,037$  mm/km. Wartość ta jest zgodna z wartością wydedukowaną na drodze teoretycznej (rozdz. 7) i z wartością uzyskaną z eksperymentalnych pomiarów na terenie Finlandii [6].

Biorąc pod uwagę, że średni błąd przypadkowy pomiaru wyniósł  $\eta = \pm 0,50$  mm/ $\sqrt{\text{km}}$ , a systematyczny  $\sigma \pm 0,06$  mm/km, nie można się było spodziewać dużego wpływu poprawki  $0,8 \cdot C$  w kierunku zmniejszenia tych błędów. Rzeczywiście wprowadzenie do wyników pomiaru poprawki  $0,8 \cdot C$  nie zmniejszyło wartości błędu przypadkowego, a średni błąd systematyczny zmalał o 10%, z  $\pm 0,059$  na  $\pm 0,054$  mm/km.

Uzyskane zmniejszenie błędu systematycznego o 10% jest zgodne z tym, czego należało się spodziewać na drodze teoretycznej. Biorąc bowiem pod

uwagę, że przeciętna wartość poprawki odpowiada 50% błędu systematycznego, po wprowadzeniu tych poprawek należało się spodziewać w przybliżeniu zmniejszenia do

$$\sqrt{1^2 - 0,5^2} \cdot 100\% = \sqrt{1 - 0,25} \cdot 100\% \approx 90\%$$

pierwotnej wielkości błędu systematycznego.

Na zakończenie należałoby stwierdzić, że materiał pomiarowy, z punktu widzenia analizy, miał pewne mankamenty, do których należał przede wszystkim brak zamkniętych poligonów, a tym samym brak możliwości stwierdzenia wpływu poprawki na błędy ich zamknięć.

## 9. Podsumowanie. Wnioski

Niniejsze opracowanie — zawierające zarówno analizę teoretyczną wpływu poprawki ze względu na dobowe zmiany kierunku linii pionu na wyniki niwelacji precyzyjnej, jak i zestawiony materiał obserwacyjny — pozwala na pewne ogólne, uzasadnione już wnioski.

Za najwyraźniejszy należy uznać efekt wprowadzenia poprawek do różnic wysokości między punktami leżącymi na linii o kierunku w przybliżeniu południkowym. Wpływ ten jest systematyczny, o wielkości rzędu 3 mm na 100 km (dla linii o kierunku N-S poprawka ma wartość dodatnią). Tak więc np., gdyby do polskiej sieci niwelacji precyzyjnej I klasy, o rozpiętości około 500 km w kierunku południkowym, dodane zostały poprawki  $0,8 \cdot C$ , spowodowałyby to systematyczne podniesienie południowych krańców sieci, w stosunku do północnych, o około + 15 mm. Wpływ poprawki  $0,8 \cdot C$  byłby więc równy 1/4 wpływu poprawki ortometrycznej normalnej, jeśli przyjmiemy, że średnia wysokość obszaru Polski wynosi  $H_{sr} \approx 150$  m.

Omawiana poprawka zmniejsza średni błąd systematyczny pomiaru niwelacji. Wpływ zmniejszający jest tym większy im błąd systematyczny jest mniejszy. Wprowadzanie poprawek  $0,8 \cdot C$  ma więc większe znaczenie w sieciach najnowszych o wysokiej precyzji.

Jednocześnie — co również dotyczy sieci współczesnych — systematyczny wpływ wynikający z niewprowadzania tej poprawki wzrasta wraz ze wzrostem szybkości pomiaru, gdyż poprawki o jednakowym znaku mogą występować wtedy na dłuższych odcinkach linii. Częściowym przeciwdziałaniem może tu być taka organizacja pomiaru, która zapewniałaby pomiar poszczególnych odcinków linii, w obu kierunkach, w różnych porach dnia (zmiany azymutów Księżyca i Słońca).

Opierając się na wynikach analizy, wydaje się celowe wprowadzanie poprawki niwelacyjnej ze względu na dobowe zmiany kierunku linii pio-

nu do tych pomiarów, w których chodzi o osiągnięcie możliwie najwyższej dokładności. Dotyczyć to może zarówno dużych sieci, jak i małych obiektów (pomiaru specjalne).

Tymczasem celowe są dalsze eksperymentalne próby wprowadzania tej poprawki do niwelacji precyzyjnej.

Za sprawę otwartą można uznać sposób obliczania tej poprawki w dużych sieciach. Pierwszym przybliżeniem, najmniej pracochłonnym, mogłoby być wprowadzanie jej przeciętnej wartości, jako funkcji przyrostów szerokości geograficznych odcinków linii. Lepsze wyniki dałoby zastosowanie uproszczonych wzorów H. Jensena [3] i O. Simonsena [13]. Jednak dla uzyskania zmniejszenia systematycznego błędu pomiaru niwelacji, wyznaczanego w oparciu o wartości  $\varrho$ , należałoby obliczać poprawkę  $C$  dla każdego odcinka między dwoma sąsiednimi reperami. Opracowane i załączone tu nomogramy umożliwiają realizację tego dla linii niwelacji precyzyjnej na całym obszarze Polski.

#### LITERATURA

- [1] Bokun J., Chojnicki T.: „Tablice do obliczania w systemie wysokości normalnych poprawki niwelacyjnej ze względu na nierównoległość powierzchni poziomowych”, Prace IGiK, zeszyt 1 (13), t. VI. Warszawa 1958.
- [2] Helmert F. R.: „Die mathematischen und physikalischen Theorien der höheren Geodäsie”, II Teil. Leipzig 1884.
- [3] Jensen H.: „Formulas for the astronomical correction to precise levelling”, Bull. Géod. Nr 17. Paris 1950.
- [4] Jordan W., Eggert O.: „Handbuch der Vermessungskunde”, III Band, II Halbband. Stuttgart 1841.
- [5] Kamela Cz.: „Geodezja dynamiczna”, t. II. Warszawa 1955.
- [6] Kukkamäki T. J.: „Tidal correction of the levelling”, Veröffentlichungen des Finnischen Geodätischen Institutes. Nr 36. Helsinki 1949.
- [7] Nygaard K.: „Calculation by nomograms of the astronomical correction to precise levelling”, Mémoires de l'Institut Géodésique de Danemark. Série 3, Tome XX. København 1954.
- [8] Peschel H.: „Niwelacja zmotoryzowana”. Referat na XXVII konferencję naukowo-techniczną na temat „Mechanizacja i automatyzacja prac w geodezji i kartografii”. Warszawa 1964.
- [9] Peters C. A. F.: „Von den kleinen Ablenkungen der Lotlinie und des Niveaus”, Bull. de la Cl. physicomathém. de l'Ac. de St. Pétersb. t. III. 1845.
- [10] Rudzki M. P.: „Fizyka Ziemi”. Kraków 1909.
- [11] Rune G. A.: „Report on levelling and moon — sun diurnal oscillation of the vertical”, Bull. Géod. Nr 18. Paris 1950.
- [12] Simonsen O.: „Report on the astronomical diurnal correction in the new Danish precise level network”, Bull. Géod. Nr 18. Paris 1950.



- [13] *Simonsen O.*: „Global aspect of the astronomical correction for levelling of high precision when considering the definition of levelling datum”, The Danish Geodetic Institute. Copenhagen 1965.
- [14] *Steinberg J.*: „Verbesserung der Nivellementsergebnisse hoher Genauigkeit durch Anbringen einer Gezeitenkorrekturen”, Vermessungstechnik, Nr 3. Berlin 1966.
- [15] *Vignal J.*: „Comptes rendus des séances de travail de la Section II. Nivellements, de l'Association Internationale de Géodésie à l'Assemblée Générale d'Oslo (Août 1948)”, Bull. Géod. Nr 18. Paris 1950.
- [16] *Warchałowski E.*: „Niwelacja geometryczna”. Warszawa 1954.
- [17] *Wyrzykowski T.*: „Analysis of results obtained from introducing by reason of diurnal changes in the plumb line direction, a correction into surveys of precise levelling”, Communications to be presented at the XIV General Assembly, of the IAG of the IUGG, Lucerne. Warszawa 1967.
- [18] Bulletin Géodésique, Nr 18. Paris 1950.
- [19] Report on scientific activity in geodesy and gravimetry in 1963—1966. Academy of sciences of the USSR Presented to the IAG for the XIV General Assembly of the IUGG. Moscow 1967.

*Recenzował: dr inż. Jerzy Bokun*

*Rękopis złożono w Redakcji w maju 1968 r.*

ТАДЭУШ ВЫЖИКОВСКИ

## НИВЕЛИРОВОЧНАЯ ПОПРАВКА ЗА СУТОЧНЫЕ ИЗМЕНЕНИЯ НАПРАВЛЕНИЯ ОТВЕСНОЙ ЛИНИИ ВЫЗВАННЫЕ ВОЗДЕЙСТВИЕМ ЛУНЫ И СОЛНЦА

### Резюме

Работу предпринято, учитывая непрерывно растущую точность и скорость выполнения измерений прецизионной нивелировки, а тем самым возрастающее значение упомянутой поправки.

После вступительной части работы (глава 1), оговорено формулу определения величины суточного изменения направления отвесной линии, вызванного изменением положения Луны ( $\text{☾}$ ) и Солнца ( $\text{☉}$ ) и являющуюся результатом этого нивелировочную поправку (глава 2).

С целью облегчения определения величин этих поправок ( $C$ ) для отдельных участков нивелирной линии, составлено специальные номограммы (глава 3) позволяющие определить значения вспомогательных величин: азимута ( $A$ ) — номограмма 1, а также зенитного расстояния ( $z$ ) — номограмма 2 — Луны или Солнца, и следовательно значений поправок ( $\kappa$ ) на 1 км нивелирной линии ( $\kappa \text{☾}$  — номограмма 3a,  $\kappa \text{☉}$  — номограмма 3b). Номограммы 1 и 2, аналогичные номограммам Г. Енсена [3], составлено для средней географической широты территории Польши ( $\varphi = 52^\circ$ ). Номинальная точность номограммов  $\pm 0,001$  мм/км. Принимая однако во внимание отклонения  $\Delta\varphi = \pm 3^\circ$ , в пределах территории Польши, максимальная ошибка определения поправки  $\kappa$ , с помощью этих номограммов может достигнуть  $\pm 0,01$  мм/км, то есть около 10% значения  $\kappa$ .

По поводу нетипичности по сравнению с нормальными нивелировочными расчётами, более внимательно оговорено правильную методику производства расчётов поправки  $C$  (глава 4), иллюстрируя это численным примером (табл. 1).

Основным элементом для которого вычисляется поправку, является участок нивелирной линии между двумя реперами, при условии, что измерение этого участка, выполненное в один приём (без перерыва) составляет не более 2÷2,5 часов, и при условии, что этот участок можно считать прямой линией с определенным азимутом. В противном случае этот участок должен быть разбит соответственно на части.

При определении исходных данных пользуются: журналом выполнения нивелировки (время измерения), картой масштаба 1 : 50 000 (азимут и протяженность участка, а также  $\lambda_{sr}$ ), астрономическим ежегодником ( $\text{☉}$ ,  $\text{☾}$ ,  $\text{☽}$ ,  $\text{☿}$ ) и номограммами 1, 2, 3a и 3b.

Глава 5 посвящена вопросу анализа изменчивости поправки  $\kappa$ . Используя составленные ранее номограммы, изготовлено графики изменения поправки  $\kappa$  в зависимости от азимута участка нивелирной линии ( $a$ ), часового угла ( $t$ ) Луны или Солнца (графики 1 и 2) и склонения ( $\delta$ ) — графики 3а, 3б и 3с. График 1 представляет изменение во времени величины поправки  $\kappa_{\odot}$  и  $\kappa_{\ominus}$  при  $\delta = 0^\circ$  для азимутов линий:  $a = 0^\circ, 90^\circ, 180^\circ$  и  $270^\circ$ , график 2 — для азимутов:  $a = 0^\circ, 45^\circ, 90^\circ, 135^\circ, 180^\circ, 225^\circ, 270^\circ, 315^\circ$  и  $360^\circ$ . Графики 3а, 3б, и 3с представляют изменение  $\kappa_{\odot}$  и  $\kappa_{\ominus}$  для нескольких характерных величин астрономического склонении  $\delta_{\odot, \ominus} = +23^\circ, +7^\circ, 0^\circ, -7^\circ, -23^\circ$ . Как видно, азимут линии оказывает решающее влияние на величину поправки. Например, для линии с азимутом  $a = 180^\circ$  поправка  $\kappa$  имеет постоянно положительный знак (когда  $\delta \approx 0^\circ$ ).

Между значениями поправки  $\kappa$  для разных азимутов линий ( $a$ ) и часовых углов ( $t$ ) существуют следующие зависимости:

$$\kappa_a = -\kappa_{a+180}, \tag{21}$$

$$\kappa_a^t = \kappa_{360^\circ - a}^{24h - t} \tag{22}$$

Поправка 4 раза в сутки принимает экстремальные значения.

Область возможного применения составленных номограмм и графиков оговорено в главе 6. Например, графики — кроме номограмм — также могут быть применены к определению значений  $\kappa$ , хотя с меньшей точностью. Отпадает однако тогда необходимость посредственного определения значения азимута ( $A$ ), и зенитного расстояния ( $z$ ) Луны и Солнца.

Кроме геодезического применения в области прецизионной нивелировки, номограммы и графики могут быть использованы также при геофизических обработках, ибо довольно просто заменить шкалы номограмм и графиков выраженных в единицах нивелировочной поправки  $\kappa$  (с делением через 0,01 мм/км), шкалой выраженной в единицах слагаемой по азимуту  $a$  угла мгновенного отклонения от среднего положения направления линии отвеса.

Таким образом, используя зависимость

$$\gamma'' = \kappa \cdot \frac{P''}{K}, \tag{25}$$

получаем окончательно

$$\gamma''_{\odot, \ominus} = 0,00205 \cdot \kappa_{\odot, \ominus}. \tag{26, 27}$$

Номограммы и графики — после изменения шкал — могут быть помощными при производстве анализа материалов наблюдений из области геофизических определений изменения направления отвесной линии, наблюдений приливно — отливных явлений и определений коэффициента упругости земной коры. Подобные номограммы и графики могут быть составлены для географической широты конкретной геофизической станции и для соответствующих азимутов маятников. Они могут служить определению случайных ошибок непрерывной регистрации, а также определению величин характеризующих данную станцию.

В главе 7 даётся теоретические рассуждения касающиеся величины влияния поправки  $\kappa$  и  $S$  на результаты и полученные ошибки прецизионной нивелировки. Для меридианных линий предусматривается систематическое влияние поправки порядка 0,03 мм/км, т.е. соответствующее нормальной ортометрической поправке для средней высоты местности  $H = 40$  м. Характер изменения поправки во времени а также применяемая по вседневно техника и организация выполнения

прецизионной нивелировки, позволяют судить, что не только на меридианных линиях нивелировки поправки одного знака могут распределяться на более длинных отрезках линии.

Впервые в Польше, в опытным порядке, были введены нивелировочные поправки учитывающие суточные изменения направления отвесной линии, в измерениях прецизионной нивелировки выполненной в 1965/66 году общей протяженностью линии около 280 км (черт. 6). Поправки определялись для отдельных, в среднем 1,5 километровых участков линии, с помощью приведенных здесь номограммов. К результатам нивелировки — учитывая эффект упругости земной коры — были введены окончательно поправки  $C$  умноженные на коэффициент 0,8.

В таблице 3 даётся сводку сумм значений поправок ( $0,8 \cdot C$ ) совместно с характеристикой их величин для отдельных линий и их частей. Графы 4, 5 и 6 содержат ссуммированные значения поправок измерений произведенных „вперёд”, с подразделением поправок на положительные и отрицательные; графы 7, 8 и 9 содержат те самые величины для измерений произведенных „назад”. В графе 10 даются поправки к средним превышений из двух измерений, в графе 11 — величины тех же поправок вычисленные для 1 км линии, а в графе 12 — соотношение значения поправки к величине средней ошибки нивелировочных измерений ( $0,5 \cdot \sqrt{L}$  мм) выраженное в процентах

Как ожидало, линия имеющая направление наиболее приближенное к меридианному направлению получила максимальные поправки с постоянным (положительным) знаком, порядка  $+0,03$  мм/км.

Учет поправок уменьшил среднюю систематическую ошибку измерения  $\sigma = \pm 0,059$  мм/км на 10%, т.е. к  $\sigma = \pm 0,054$  мм/км.

Если бы к линиям польской прецизионной нивелировочной сети I класса расположенным в меридианном направлении протяженностью около 500 км прибавить поправки  $0,8 \cdot C$ , вызвало бы это систематический подъем южных краевых точек нивелирной сети, относительно к северным, около  $+15$  мм. Это соответствует учету влияния примерно  $1/4$  нормальной ортометрической поправки.

Кажется целесообразным введение упомянутой поправки в эти измерения, которых целью является получение как возможно максимальной точности. Это может касаться равным образом обширных как и небольших сетей (специальные измерения).

До окончательного решения о введении этой поправки в государственных сетях прецизионной нивелировки I класса, целесообразно вести в дальнейшем экспериментальные работы.

Открытым вопросом следует считать способ вычислений поправки для обширных сетей. Первым приближением, наименее трудоемким, могло бы быть введение ее среднего значения, как функции приращений географической широты участков линии. Лучшие результаты дало бы применение сокращённых формул Г. Енсена [3] и О. Симонсена [13]. Однако чтобы получить систематическое уменьшение ошибки нивелировочного измерения, определяемой на основе значений  $\rho$ , следовало бы вычислять поправку  $C$  для каждого участка между двумя соседними реперами.

TADEUSZ WYRZYKOWSKI

## LEVELLING CORRECTION DUE TO DIURNAL CHANGES IN PLUMB LINE DIRECTION CAUSED BY THE MOON AND THE SUN

### Summary

The author's study was undertaken on account of the constantly improving accuracy and rapidity of precise levelling and, therefore, of the increased importance of the correction required considered here.

Following an Introduction (Chapter 1) the author discusses the formula for the magnitude of the diurnal change of the plumb line direction brought about by changes in the position of the Moon ( $\text{☾}$ ) and the Sun ( $\text{☀}$ ), and for the levelling correction resulting from these changes (Chapter 2).

In order to render less difficult the determination of the values of these corrections ( $C$ ) for individual sections of the survey line, the author prepared special nomograms (Chapter 3) which facilitate the determination of the following auxiliary values: the azimuth ( $A$ ) — Nomogram 1, and the zenithal distance ( $z$ ) — Nomogram 2, for Moon or Sun; further, values of the corrections ( $\kappa$ ) per 1 km line ( $\kappa_{\text{☾}}$  — Nomogram 3a and  $\kappa_{\text{☀}}$  — Nomogram 3b).

Nomograms 1 and 2, analogous to H. Jensen's nomograms [3], have been prepared for the mean geographical latitude of Poland ( $\varphi = 52^\circ$ ). The nominal accuracy of the nomograms is  $\pm 0,001$  mm/km. However, using these nomograms and taking into account deviation  $\Delta\varphi = \pm 3^\circ$  within the limits of Poland's area, the maximum error in determining correction may be as much as  $\pm 0,01$  mm/km, i. e. some 10% of value of  $\kappa$ .

By reason of its not being typical compared with normal levelling calculations, the author discussed (Chapter 4) more extensively how to proceed correctly in order to establish correction  $C$ ; this he illustrated adding an example of this calculation (Table 1).

As a rule the element for which the correction is calculated is a line section between two bench-marks, provided the survey has been made continuously and did not take more than two to two and a half hours, and provided that the section can be considered a straight line towards a definite azimuth. Unless these two conditions are met, the section should be subdivided into suitable parts.

For defining basic data, the survey journal (the record of the time the survey lasted) and a 1 : 50 000 map (for azimuth, length of section and mean  $\lambda$ ) is used and, subsequently, the Astronomical Yearbook ( $\Theta, \alpha_{\text{☾,☀}}, \delta_{\text{☾,☀}}$ ) and Nomograms 1, 2, 3a and 3b.

Chapter 5 is dedicated to an analysis of the variability of correction  $\kappa$ . With the previously prepared nomograms as basis, diagrams were plotted showing the changes of correction  $\kappa$  depending on the line azimuth ( $a$ ) and the hourly angle ( $t$ ) of Moon or Sun (Diagrams 1 and 2), and on the declination ( $\delta$ ) — Diagrams 3a, 3b and 3c. Diagram 1 indicates the variability in time of the values for correction  $\kappa_{\odot}$  and  $\kappa_{\text{☾}}$  with  $\delta = 0^\circ$ , for line azimuths:  $a = 0^\circ, 90, 180$  and  $270^\circ$ , while Diagram 2 gives values for azimuths:  $a = 0^\circ, 45, 90, 135, 180, 225, 270, 315$  and  $360^\circ$ . Diagrams 3a, b and c indicate the variability of  $\kappa_{\odot}$  and  $\kappa_{\text{☾}}$  for several characteristic values of the declination  $\delta_{\odot, \text{☾}} = +23^\circ, +7^\circ, 0^\circ, -7^\circ$  and  $-23^\circ$  respectively. As can be seen, of decisive influence upon the value of the correction is the line azimuth. For instance, correction  $\kappa$  for a line of azimuth  $a = 180^\circ$  has always a positive sign (with  $\delta \approx 0^\circ$ ).

The following dependences occur between the values of correction  $\kappa$  for different azimuth lines ( $a$ ) and different hourly angles ( $t$ ):

$$\kappa_a = -\kappa_{a+180^\circ}; \quad (21)$$

$$\kappa_a^t = \kappa_{360^\circ - a}^{24^h - t}. \quad (22)$$

Four times during 24 hours the correction attains its extreme values.

The extent to which the nomograms and diagrams prepared by the author can be of use has been discussed in Chapter 6. Thus, the diagrams, besides the nomograms, can also be useful for determining though less accurately, the values  $\kappa$ . However, unnecessary in this case is the indirect determination of the values of the azimuth ( $A$ ) and the zenithal distance ( $z$ ) of Moon and Sun.

Apart from the geodetic application in the field of precise levelling, the nomograms and diagrams can also be used in geophysical work, because the original scales of the nomograms and diagrams, prepared in units of the levelling correction  $\kappa$  (i. e. in 0,01 mm/km) can easily be replaced by a scale giving units of the components of the azimuth  $a$  of the angle of the momentary deviation of the plumb line from its mean position.

Thus, applying the dependence:

$$\gamma'' = \kappa \cdot \frac{P''}{k}, \quad (25)$$

we ultimately obtain:

$$\gamma_{\odot, \text{☾}}'' = 0,00205 \cdot \kappa_{\odot, \text{☾}}. \quad (26, 27)$$

With changed scales, both nomograms and diagrams can prove useful for analyses of observation material in the domain of geophysical determinations of changes in plumb line direction, in observations of tides, and in determinations of the index elasticity of the Earth's crust. Analogous nomograms and diagrams can also be prepared for the geographical latitude of any definite geophysical station and for suitable azimuths of setting pendulums, for the purpose of determining accidental errors in continuous registration and of establishing values characteristic for the given station.

Chapter 7 brings theoretical reflections on how much the results and the determined errors in precise levelling are affected by correction  $\kappa$  and by  $C$ . For meridional lines the systematic effect of the correction is expected to be of the order of 0,03 mm/km, thus to correspond in magnitude to a normal orthometrical correction for a mean altitude of  $H = 40$  m. The way how the correction is variable in time and the commonly adopted technique and organization of making precise

surveys imply, that it is not only on lines of meridional direction that corrections with identical signs may occur on longer line sections.

Levelling corrections referring to diurnal changes in plumb line direction have been introduced in Poland for the first time experimentally for the precise levelling survey made in 1965/66; the total length of these surveys was some 280 km (Fig. 6). These corrections were determined for line sections averaging 1,5 km, and the nomograms given above were used for this purpose. In due consideration of the effect of the elasticity of the Earth's crust, ultimately corrections  $C$  with a coefficient 0,8 were introduced into the results of these levelling surveys.

Table 3 lists the sums of the corrections ( $0,8 \cdot C$ ) and gives the characteristics of these values for individual lines and their sections. In Columns 4, 5 and 6 are totalled the values of the direct levellings, subdivided into positive and negative values; Columns 7, 8 and 9 show the same, for reciprocal levellings. Column 10 shows corrections to mean values of the height differences from two levellings, Column 11 the value of these corrections per 1 km line; and in Column 12 is given, in per-cent figures, the relation of the correction to the mean error of the levelling survey ( $0,5 \cdot \sqrt{L}$  mm).

As was to be expected, the line nearest the meridional direction required the greatest corrections — with a positive sign throughout of the order of  $+0,03$  mm/km.

The introduction of the above corrections reduced the mean systematical error of the survey from  $\sigma = \pm 0,059$  mm/km to  $\sigma = 0,054$  mm/km, i. e. by 10%.

Should corrections  $0,8 \cdot C$  be introduced into the Polish first-class network of precise levelling extending some 500 km in meridional direction, the result would be a systematic raising of the southern margins of the network, in relation to the northern margins, by about  $+15$  mm. This would equal some  $1/4$  of the effect of a normal orthometrical correction.

It seems advisable to introduce the above correction into those surveys in which the highest possible precision should be secured; and this may refer to both large and small networks (special surveys).

However, before the decision is reached to apply this correction in the state first-class network of precise levelling, further experiments are suitable.

Open to debate may be considered the question how the correction should be calculated for large networks. The average value of the correction, as function of increases in geographical latitude of a line section, might be used as first approximation, this being least time-consuming. Better results might be obtained by the use of the simplified formulae suggested by H. Jensen [3] and O. Simonsen [13]. Yet, for obtaining a reduction in the systematic error of the levelling survey determined with values  $\varrho$  as basis, it is recommended to calculate the correction  $C$  separately for each section between two neighbouring bench-marks.

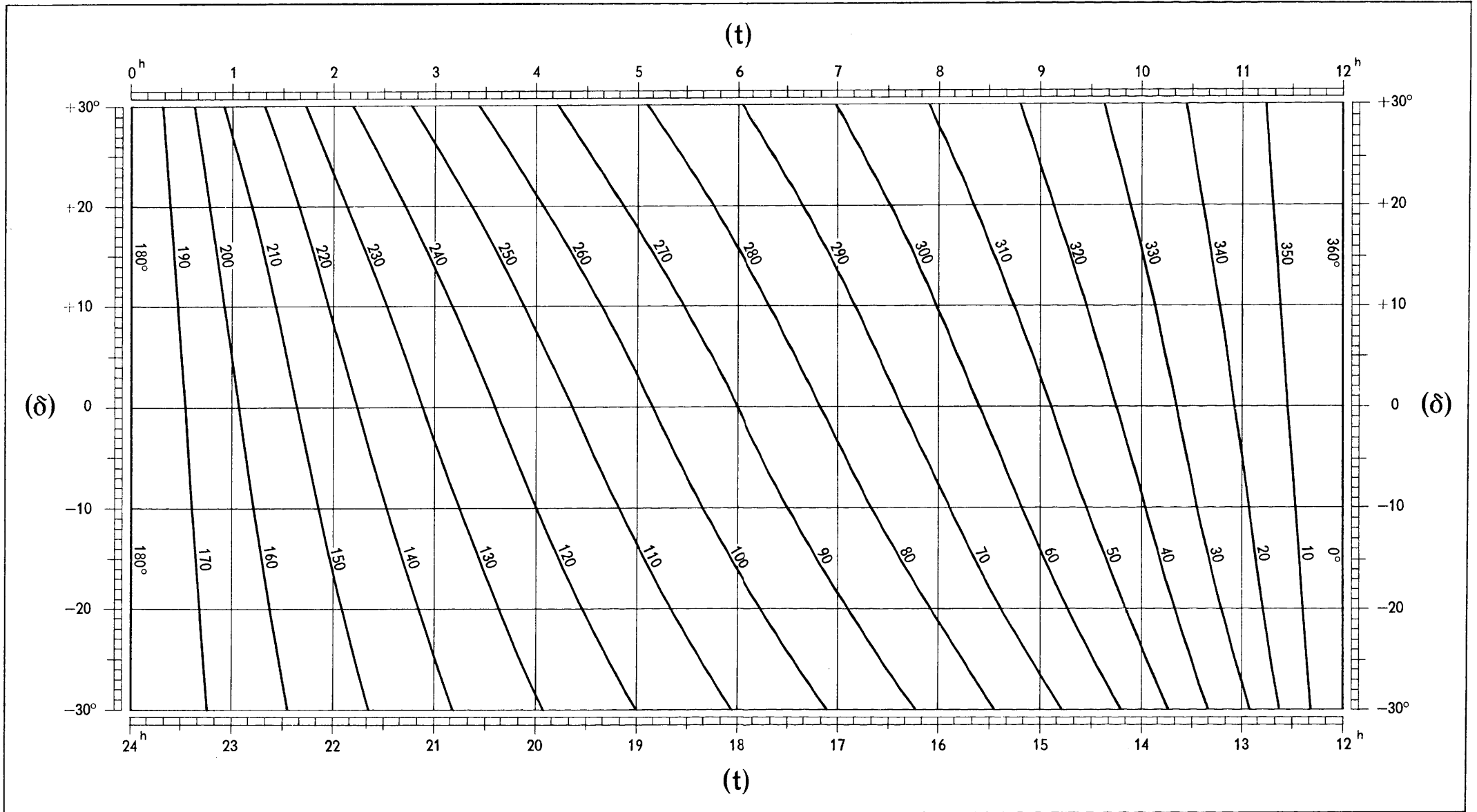




# WYZNACZENIE AZYMUTU

Nomogram 1

$\varphi = 52^\circ$



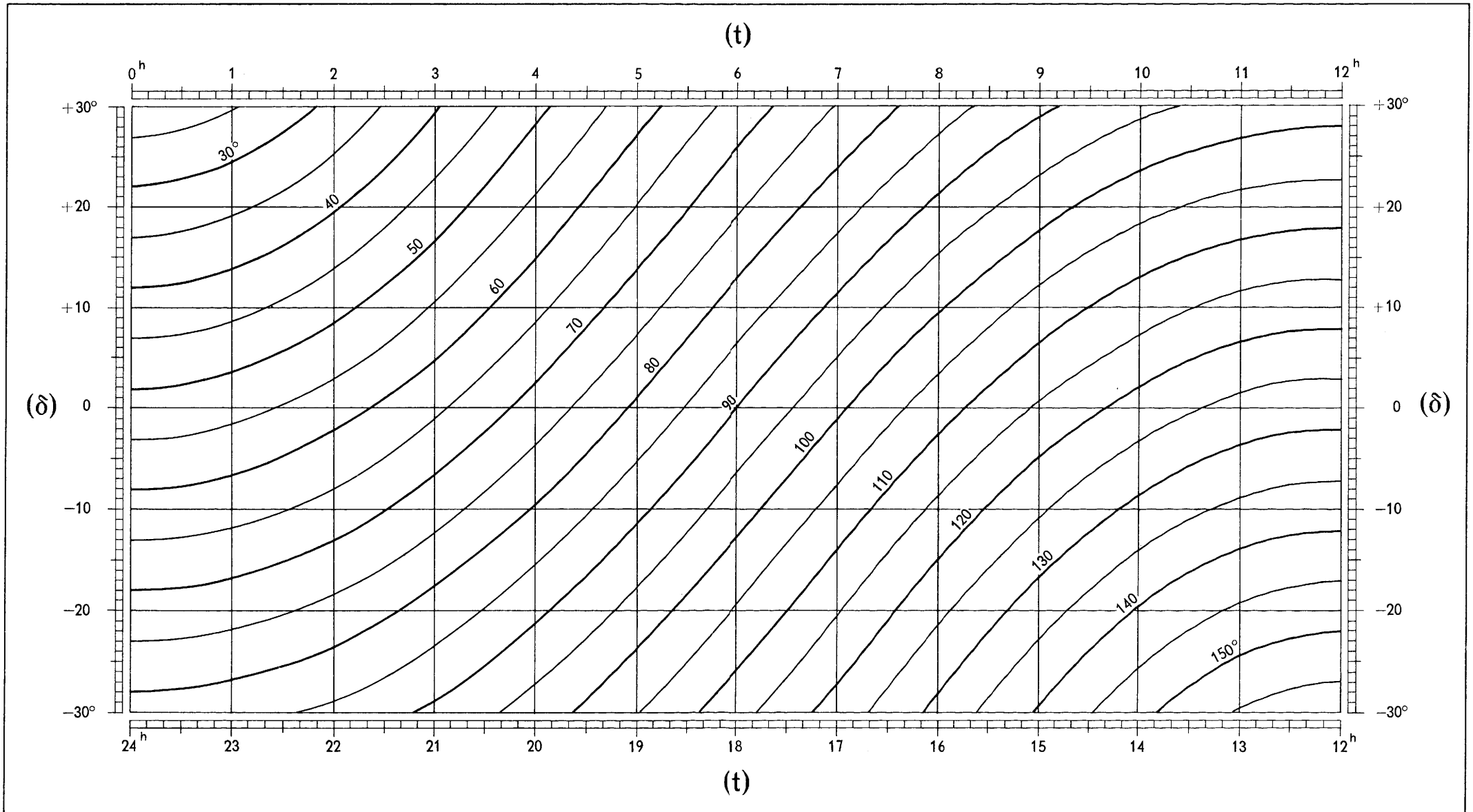
Opracował T. Wyrzykowski

Instytut Geodezji i Kartografii  
Warszawa 1965

# WYZNACZENIE ODLEGŁOŚCI ZENITALNEJ

$\varphi = 52^\circ$

Nomogram 2



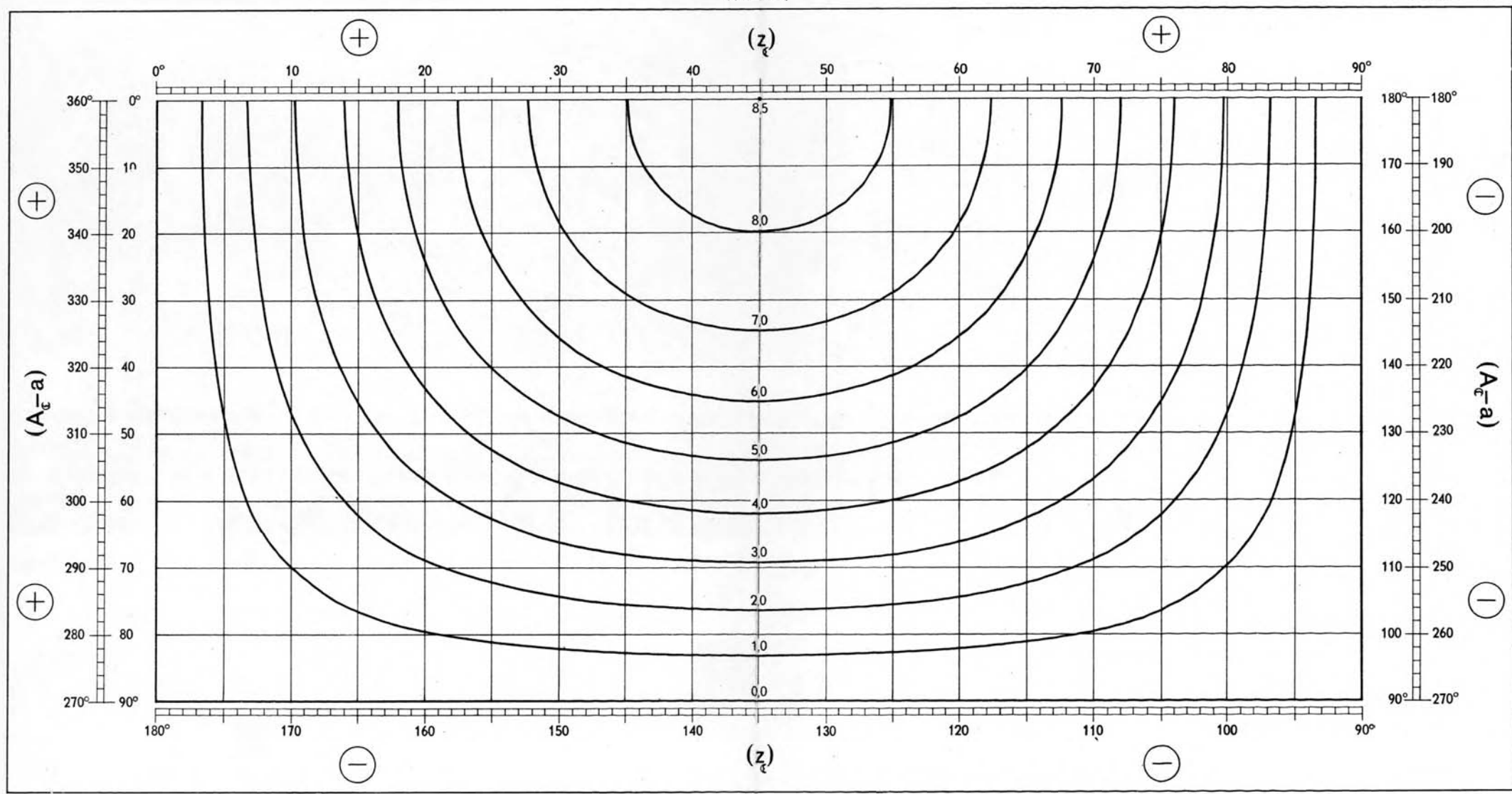
Opracował T. Wyrzykowski

Instytut Geodezji i Kartografii  
Warszawa 1965

# WYZNACZENIE WARTOŚCI $\alpha_{\epsilon}$

(0,01 mm/km)

Nomogram 3a



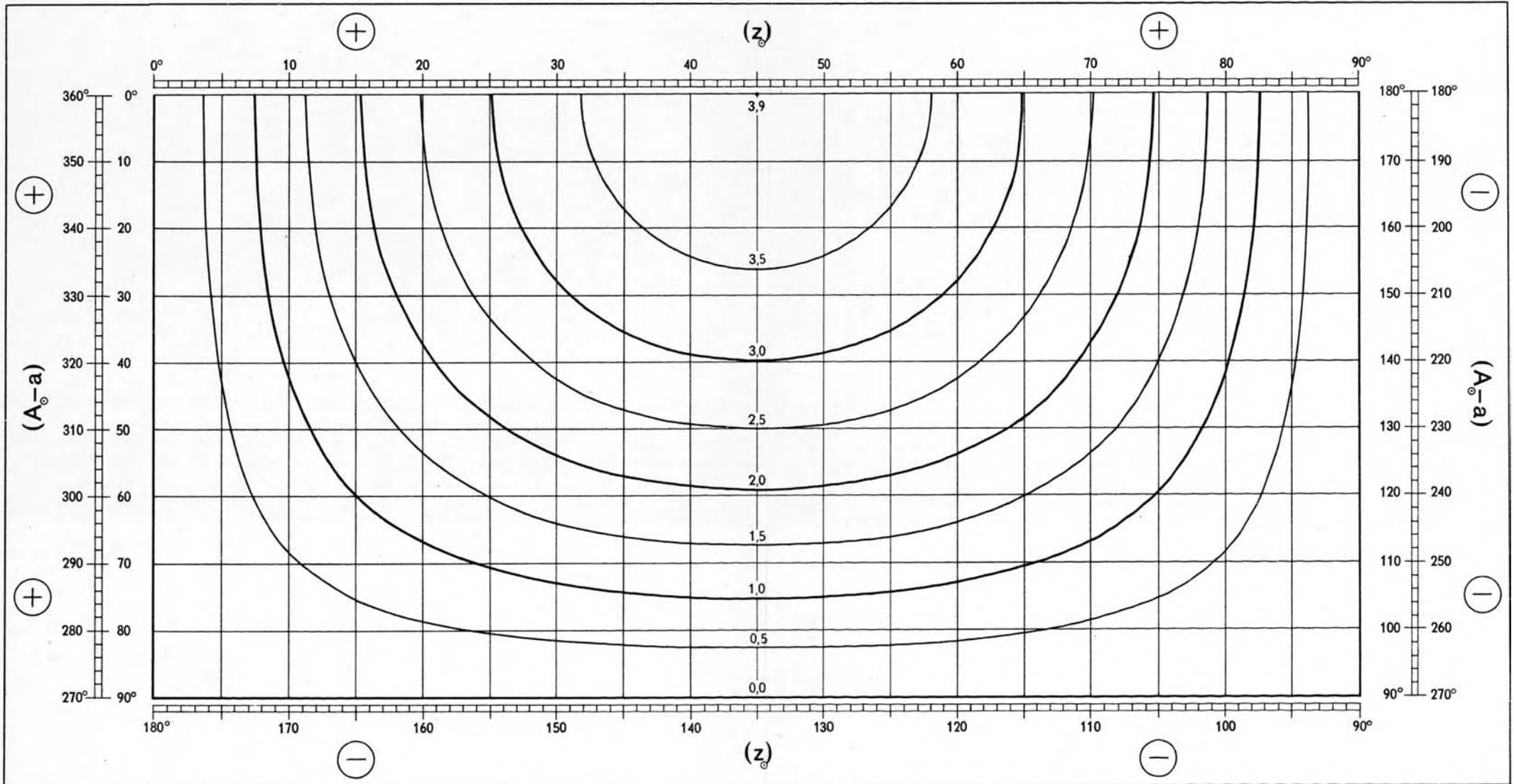
Opracował T. Wyrzykowski

Instytut Geodezji i Kartografii  
Warszawa 1965

# WYZNACZENIE WARTOŚCI $\alpha_0$

(0,01 mm/km)

Nomogram 3b



Opracował T. Wyrzykowski

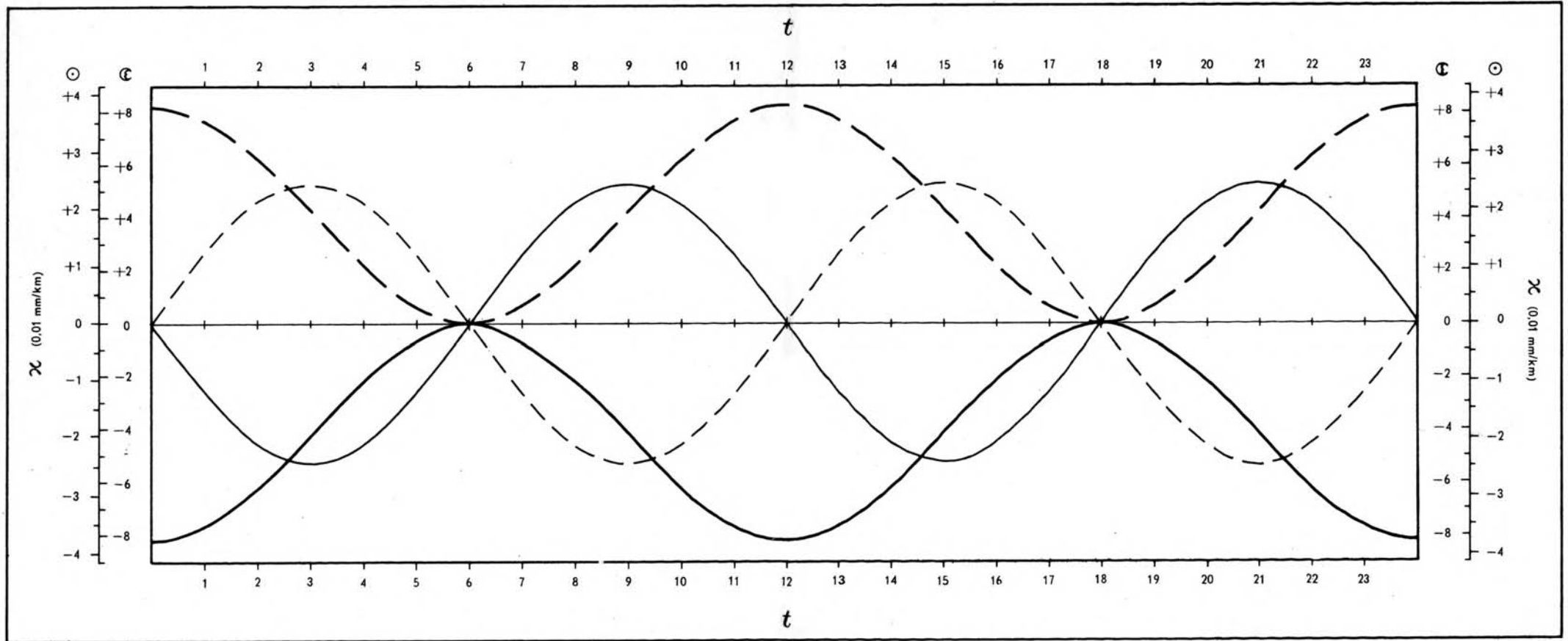
Instytut Geodezji i Kartografii  
Warszawa 1965

Wykres zmienności wartości  $\chi$  w zależności od  $t$  i  $\alpha$

Dla  $\varphi = 52^\circ$ ,  $\delta = 0^\circ$

Opracował T. Wyrzykowski

Wykres 1



$\alpha = 0^\circ$  —————

$90^\circ$  —————

$180^\circ$  - - - - -

$270^\circ$  . . . . .

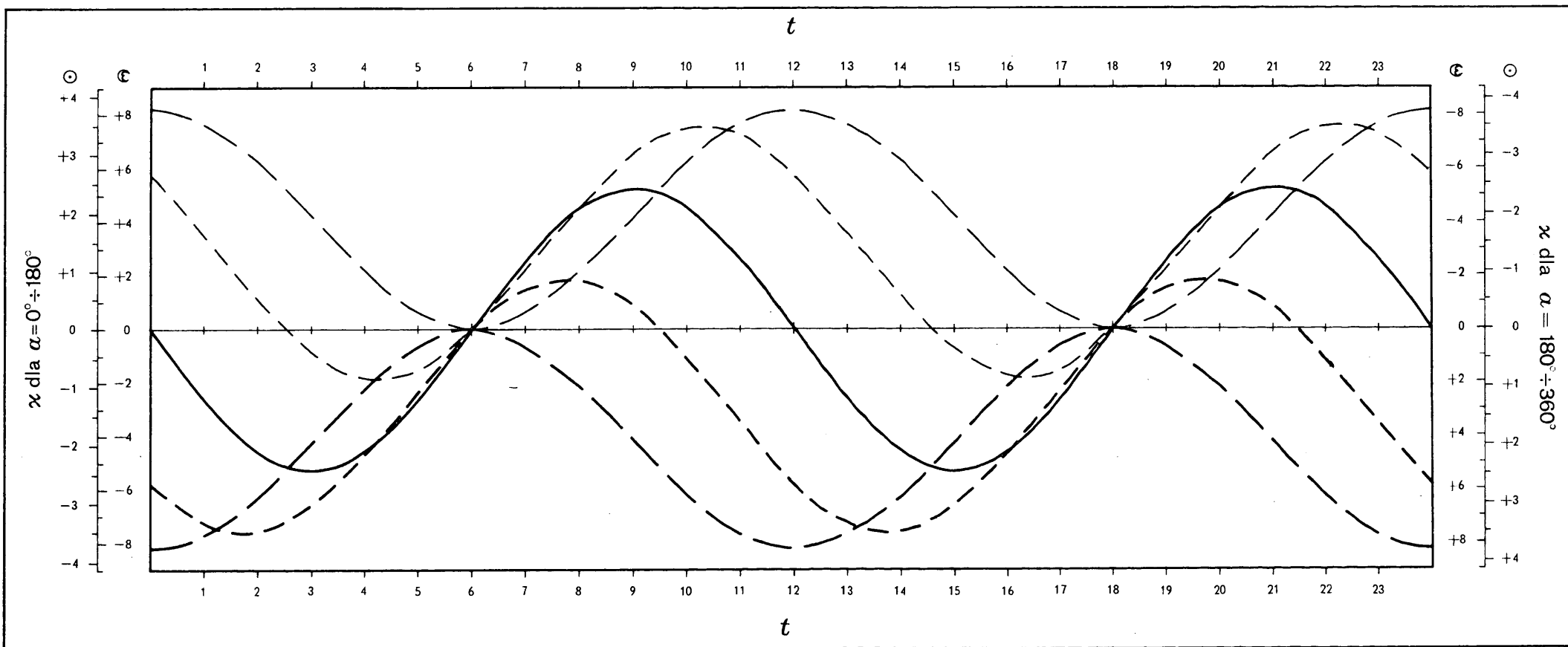
Instytut Geodezji i Kartografii  
Warszawa 1965

Wykres zmienności wartości  $\kappa$  w zależności od  $t$  i  $\alpha$

Dla  $\varphi = 52^\circ$ ,  $\delta = 0^\circ$

Opracował T. Wyrzykowski

Wykres 2



(0,01 mm/km)

$\alpha = 0^\circ$  ————  $180^\circ$      $45^\circ$  - - - -  $225^\circ$      $90^\circ$  — · — ·  $270^\circ$      $135^\circ$  — — — —  $315^\circ$      $180^\circ$  — — — —  $360^\circ$

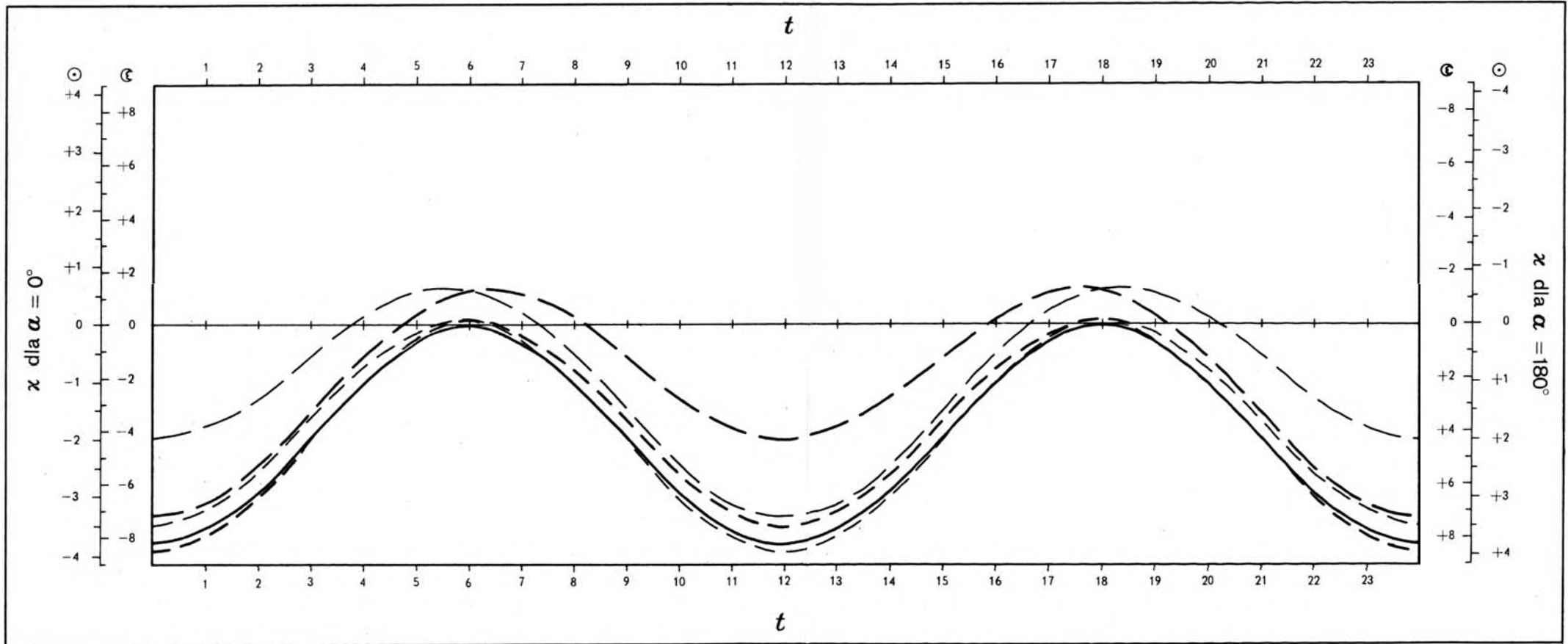
Instytut Geodezji i Kartografii  
Warszawa 1965

Wykres zmienności wartości  $\alpha$  w zależności od  $t$  i  $\delta$

Dla  $\varphi = 52^\circ$ ,  $\alpha = 0^\circ(180^\circ)$

Opracował T. Wyrzykowski

Wykres 3a



(0,01 mm/km)

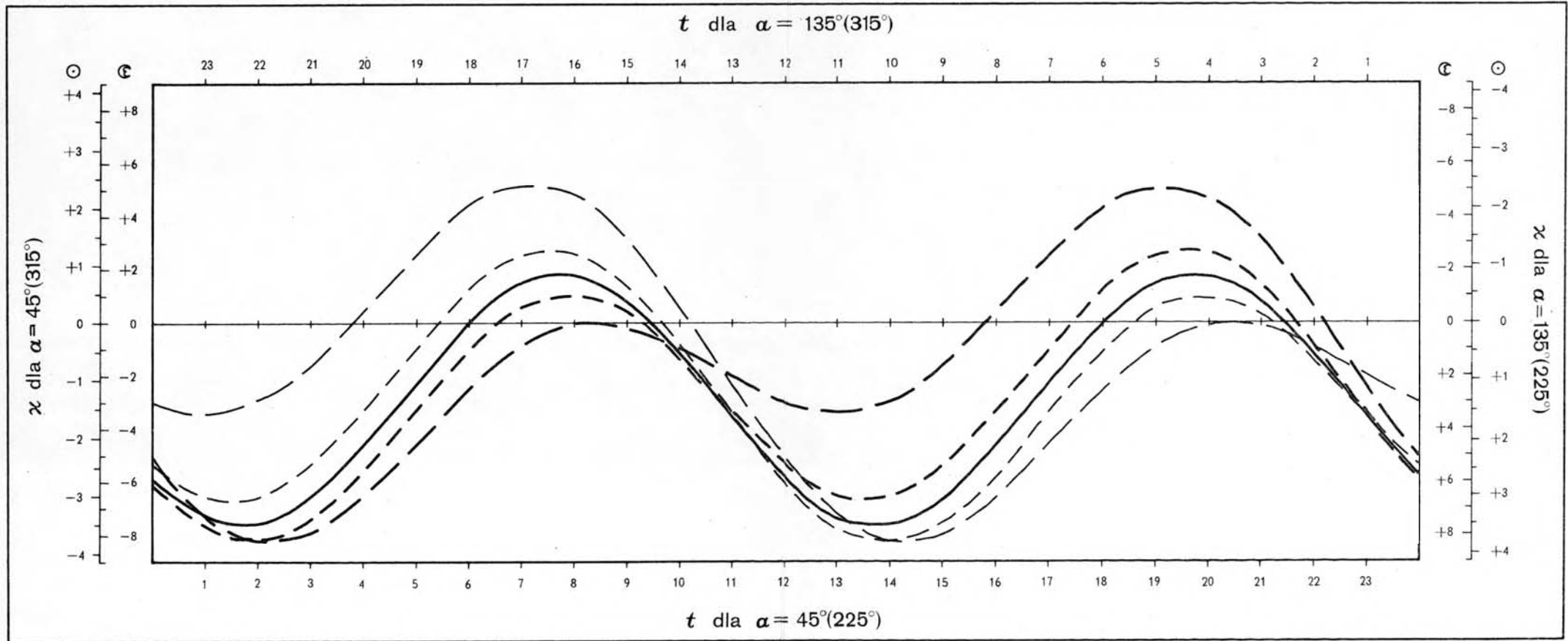
Instytut Geodezji i Kartografii  
Warszawa 1965

Wykres zmienności wartości  $\alpha$  w zależności od  $t$  i  $\delta$

Dla  $\varphi = 52^\circ$ ,  $\alpha = 45^\circ(135^\circ, 225^\circ, 315^\circ)$

Opracował T. Wyrzykowski

Wykres 3b



$\delta = +23^\circ$  ————  $+7^\circ$  - - - -  $0^\circ$  ————  $-7^\circ$  - - - -  $-23^\circ$  ————

Instytut Geodezji i Kartografii  
Warszawa 1965

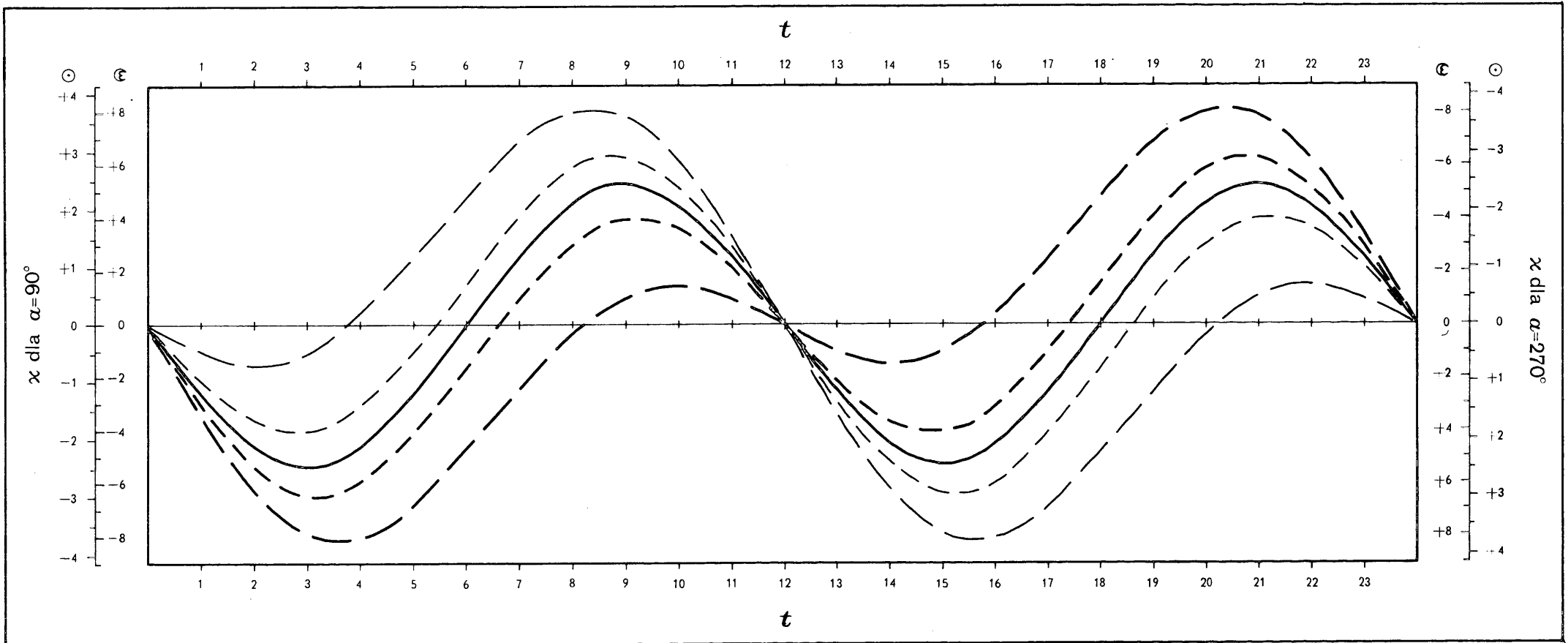


Wykres zmienności wartości  $\chi$  w zależności od  $t$  i  $\delta$

Dla  $\varphi = 52^\circ$ ,  $\alpha = 90^\circ(270^\circ)$

Opracował T. Wyrzykowski

Wykres 3c



(0,01 mm/km)

$\delta = +23^\circ$  ————  $+7^\circ$  - - - - -  $0^\circ$  ————  $-7^\circ$  - - - - -  $-23^\circ$  ————

Instytut Geodezji i Kartografii  
Warszawa 1965