

Poligonizacja techniczna metodą smukłych trójkątów

Celem niniejszej pracy jest przedstawienie mało jeszcze znanej szerzemu ogółowi techników, metody smukłych trójkątów, która moim zdaniem jest wygodniejsza od obecnie stosowanych.

Przed przystąpieniem do jej szczegółowego omówienia teoretycznego i praktycznego, słusznym będzie na wstępie podać jej charakterystykę ogólną i dziedziny, w których metoda ta mogłaby być najlepiej stosowana.

Istotą tej metody jest pośredni pomiar boków poligonu, polegający na zaobserwowaniu w terenie dwóch kątów trójkąta, przylegających do ciągu poligonowego; i w oparciu o znaną długość boku krótkiego tegoż trójkąta, zwanego w dalszym ciągu bazą, następuje obliczenie odpowiedniego boku poligonu. Przeciętna długość takiego boku poligonowego wynosi 700 m i może wahać się w granicach od 200 m do 1500 m. Obie granice długości boku poligonowego wynikają ze względów praktycznych, a nie teoretycznych. I tak, granica górna wiąże się z widocznością tyczki (zaopatrzonej w sygnał tarczowy) na tę odległość, natomiast granica dolna wynika z faktu — co jest ekonomiczniejsze, czy pomiar pośredni, czy bezpośredni boku taśmą mierniczą.

Bezpośredniemu wyznaczeniu długości w terenie zasadniczo podlega co piąta baza, a zatem bezpośredni pomiar długości jest bardzo ograniczony i może być wykonywany w miejscu najbardziej odpowiednim dla pomiaru taśmą. Decyzja pomiaru tej czy innej bazy zależy od mierniczego, który w wyborze kieruje się łatwością jej pomiaru, a zatem możliwością osiągnięcia jak najwyższej dokładności samego pomiaru.

Podstawowym instrumentem w tej metodzie jest teodolit uniwersalny (1" lub nawet 6"). Większość pomiarów — to pomiary kierunków na ustawione tyczki miernicze, ewentualnie punkty stałe w terenie.

Posługiwanie się tak prostym sprzętem, jak: teodolit, tyczki i niekiedy taśma, pozwala mierniczemu na łatwe ześrodkowanie uwagi na rzeczach wymagających odpowiedniego dozoru. I tak punktami jego uwagi powinien być instrument oraz czynność trasera. W przypadku gdy technikowi można byłoby powierzyć pracę przy instrumencie bez obawy o dobro wyników obserwacji, mierniczy powinien przede wszystkim

stkim zwrócić uwagę na sposób ustalania i rozmieszczania przez trasera punktów pomiarowych (w tym i poligonowych). Praca przy instrumencie nie wymaga żadnej inicjatywy od wykonawcy, a jedynie uwagi przy odczytywaniu kół podziałowych instrumentu, opieki nad instrumencie i umiejętności odszukiwania celów na już znane (stare) i jeszcze nie znane (nowe) punkty pomiarowe. Praca trasera jest czynnością wymagającą inicjatywy w ramach przepisów objętych odpowiednią instrukcją pomiarową, traktującą o wyborze i zakładaniu punktów pomiarowych do tej metody potrzebnych.

Ze względu na konieczne powiązanie tych punktów systemem obserwacji, który będzie jedynie możliwy przy osiągnięciu wzajemnej widoczności tych punktów — praca wymaga również orientowania się się trasera w terenie. Stąd też można twierdzić, że sprawność całego zespołu w największym stopniu zależeć będzie od pracy trasera i wobec powyższego, kierownik zespołu pomiarowego powinien jak najbardziej wnikliwie przychodzić mu z pomocą.

Pracę trasera mogą ułatwiać w dużym stopniu zdjęcia lotnicze danego terenu. Na podstawie zdjęć lotniczych można łatwo utrzymać prostoliniowy kierunek ciągu poligonowego oraz odpowiednie długości boków. Widoczność punktów pomiarowych możliwa jest do ustalenia na podstawie zdjęć lotniczych tylko częściowo. Mianowicie, ustalenie czy istnieją przeszkody sytuacyjne w postaci zabudowań, drzew i t.p. — jest łatwe; natomiast ustalenie przeszkód terenowo-wysokościowych jest utrudnione, chociaż w wielu przypadkach dzięki korzystaniu ze stereoskopu, również jest możliwe.

Ekonomia tej metody polega na:

- 1) mniejszej ilości najprostszycy czynności na każdym stanowisku instrumentu; (w stosunku np. do metody 5-metrowej łąty paralaktycznej)
- 2) mniejszej liczbie samych stanowisk instrumentu;
- 3) możliwości zatrudnienia mniejszej liczby pomiarowych; i
- 4) możliwości zastosowania jako środka lokomocji — rowerów dla całego zespołu pomiarowego. Posiadanie rowerów czyni grupę bardziej ruchliwą, a zatem i sprawniejszą.

Każdy pomiar poligonowy, polegający na pośrednim pomiarze boków, może być stosowany w terenach płaskich i górzystych. W terenach górzystych stosowanie pośrednich pomiarów boków uzyskało przewagę ze względu na bardzo mozolne pomiary bezpośrednie. W terenach płaskich — przewaga pomiarów pośrednich nad pomiarami bezpośrednimi może być osiągnięta w przypadku stosowania długich boków poligonowych, których pomiar bezpośredni staje się mozolny mało dokładny i jest więcej narażony na popełnienie grubszych błędów, kłopotliwych do wykrycia. Z tych też względów — o ile zadanie, dla którego pomiar ma być przeprowadzony, pozwala na stosowanie długich

boków, jak np. przy wyznaczaniu współrzędnych punktów daleko od siebie położonych — najwłaściwszym jest stosowanie metody smukłych trójkątów. Zagwarantowanie przeciętnego długiego boku da się łatwiej osiągnąć przez wprowadzenie sygnałów i stanowisk podwyższonych.

Użycie tego dodatkowego sprzętu uczyni łatwiejszym osiągnięcie średniej długości boku równej 700 m, a przy pewnych staraniach trasa — długość średnia może nawet osiągnąć 1000 m.

Przy stosowaniu metody smukłych trójkątów bez podwyższonych stanowisk uzyskano na terenie powiatu grójeckiego średnią długość boku 830 m.

Zastosowanie jedynie podwyższonego celu, co jest bezspornie łatwiejsze aniżeli użycie podwyższonego stanowiska, może również dać duże korzyści, a nie obciąży tak znacznie zespołu sprzętem (w porównaniu z 5-metrową łąką paralaktyczną). Korzyści w zastosowaniu podwyższonego celu nie ograniczają się tylko do wydłużenia boku poligonowego. Cel taki może być kilkakrotnie brany do obserwacji, czyniąc zbędnym obieranie nowych punktów do przejścia trójkątami dla wyznaczanie potrzebnych długości boków ciągu poligonowego.

Poza wymienionymi korzyściami podwyższonego celu i stanowiska instrumentu należy osobno podkreślić konieczność użycia tego sprzętu dla jednoczesnego określania współrzędnej wysokościowej „z” wyznaczanych punktów. Wyniesienie celowej minimum 2—2,5 m nad powierzchnię terenu jest konieczne dla celowych dłuższych aniżeli 300 m, jeśli chodzi o trygonometryczny pomiar wysokości punktów terenu, a to ze względu na możliwy i często nieobliczalny w skutkach wpływ refrakcji topograficznej na wynik pomiaru wysokościowego.

Metoda smukłych trójkątów, przeprowadzona zgodnie z dalszymi rozważaniami, pozwala na wyznaczenie położenia punktu z błędem średnim $\pm 0,5$ m przy ciągach o długości 15 km. Przy tym należy zaznaczyć, że sposób wyrównania obserwacji jest w związku z ostateczną dokładnością wyznaczonych punktów, że przy wyrównaniu otrzymanych odchyłek kątowych i przyrostowych wg metody najmniejszych kwadratów przy ścisłym wyrównaniu prostoliniowego i równobocznego ciągu, największe spodziewane zniekształcenia liniowe w położeniu punktów ciągu poligonowego przypadają będą w środku ciągu. Tak też należy rozumieć podany powyżej błąd średni położenia punktu.

Stosowanie opisywanej metody w terenach zabudowanych i zadrzewionych jest utrudnione. Wykorzystanie jej jest w ogóle niemożliwe w terenach o zwartej, miejskiej zabudowie oraz w terenach wyłącznie lesistych o dużych przestrzeniach wysokopiennego lasu. Jasnym jest, że w tego rodzaju terenach każdy pomiar jest mocno utrudniony, a najmniej kłopotliwą metodą pomiaru będzie ta metoda, która wymaga najmniejszej liczby celowych z danego stanowiska instrumentu (np. dwóch). Przebitki w lasach lub ulice w miastach są zbyt wąskie, by można było

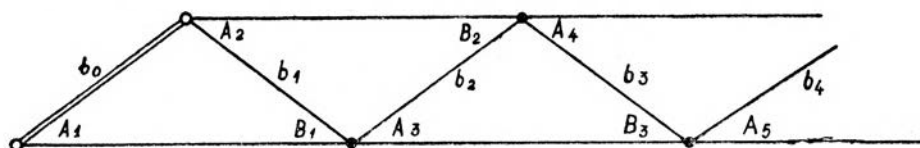
ekonomicznie stosować metodę smukłych trójkątów. Przy stosowaniu tej metody w powyższych warunkach wymagana jest przestrzeń w postaci pasa o szerokości minimum 30 metrów dla boku poligonowego o długości 200 metrów. W takich sytuacjach, przy przyjęciu zasadniczo pomiarów wg tej metody, należałoby łączyć ją ze zwykłym pomiarem boków taśmą mierniczą, który w tych warunkach będzie korzystniejszy od innego pomiaru.

Z przytoczonych powyżej uwag wynika, że metoda smukłych trójkątów najodpowiedniejszą byłaby dla opracowań fotogrametrycznych, zarówno dla terenów płaskich jak i górzystych. Podkład fotogrametryczny dla metody fotomapy jak i aerotriangulacji przestrzennej, jest podkładem o punktach rzadko rozstawionych, o dużych odległościach między sobą. Przy prawidłowo wykonanych nalotach odległości fotopunktów znajdują się od siebie w granicach od 1400 metrów (przy aerotriangulacji przestrzennej) do 7000 metrów (przy fototriangulacji) dla zdjęć lotniczych wykonanych w skali 1:20.000. Przechodzenie tak długich odcinków powinno odbywać się przy jak najmniejszej ilości stanowisk instrumentu. Stanowiska instrumentu, będące od siebie w odległości mniejszej, aniżeli np. 1400 metrów, powinny być usprawiedliwione jedynie warunkami terenowymi, a nie względami samej metody pomiaru.

Sprawa samego wywiadu, czyli opisana wyżej czynność trasera przy metodzie smukłych trójkątów, nie może być obciążeniem tej metody, który w pełni korzystać może z usług zdjęcia lotniczego przy opracowaniach fotogrametrycznych i skoro wywiad w terenie może ograniczyć się do pasa o szerokości maximum do 500 metrów w przypadkach trudniejszych terenów. Odpowiedni dobór i wyszkolenie trasaera sownie opłaci się.

Drugą i jednocześnie pokrewną dziedziną, w której mogłaby być stosowana ta metoda, to topografia, opierająca swe prace na fotomapach. Sprawdzenie wartości technicznej fotomapy oraz zagęszczenie podkładu dla celów topograficznych przez danie gęstszej podstawy geodezyjnej dla opracowań stolikowych, może się odbywać przy stosowaniu tej metody.

Od strony teoretycznej metoda przedstawia się następująco:



rys. 21

Niech rys. 21 przedstawia pewien idealny łańcuch trójkątów, w którym pomierzono np. bazę b_0 oraz kąty: $A_1, B_1, A_2, B_2, A_3, B_3, \dots$ itd. (nie mierząc kąta trzeciego w żadnym z trójkątów). Pomierzone wartości

stanowią minimum, konieczne do rozwiązania tego łańcucha odnośnie długości jego boków. Można wobec tego postawić pytanie, jak się wyraża długość bazy b_n w zależności od pomierzonych wartości oraz jakim wzorem będzie się wyrażał błąd średni tejże bazy?

Aby odpowiedzieć na postawione pytanie, należy wyprowadzić wartość funkcji, czyli $b_n = f(b_0, A_1, A_2, A_3 \dots B_1, B_2, B_3 \dots)$ i użyć do niej wzoru ogólnego na błąd średni funkcji.

A zatem:

$$b_1 = \frac{b_0 \sin A_1}{\sin B_1}, \quad b_2 = \frac{b_1 \sin A_2}{\sin B_2}, \quad b_3 = \frac{b_2 \sin A_3}{\sin B_3}, \quad b_4 = \dots$$

czyli ostatecznie mieć będziemy:

$$b_n = b_0 \cdot \frac{\sin A_1 \sin A_2 \sin A_3 \dots \sin A_n}{\sin B_1 \sin B_2 \sin B_3 \dots \sin B_n}$$

Aby niepotrzebnie nie użyć pośrednimi przeróbkami matematycznymi w postaci wyprowadzania pochodnych cząstkowych dla ostatecznego wzoru na błąd średni funkcji, podaję ten wzór w formie ostatecznej.

$$m_{bn} = \pm b_n \sqrt{\left(\frac{mb_0}{b_0}\right)^2 + \text{ctg}^2 A_1 m_{A_1}^2 + \dots + \text{ctg}^2 A_n m_{A_n}^2 + \text{ctg}^2 B_1 m_{B_1}^2 + \dots + \text{ctg}^2 B_n m_{B_n}^2}$$

Jeżeli założymy, że wszystkie pomierzone kąty są w przybliżeniu sobie równe i odpowiadają wartości K oraz ich błędy średnie też są sobie równe i wynoszą m_k — to otrzymamy wzór uproszczony na błąd średni funkcji jak niżej:

$$m_{bn} = \pm b_n \sqrt{\left(\frac{mb_0}{b_0}\right)^2 + 2n \text{ctg}^2 K m_k^2}$$

lub

$$\left(\frac{mbn}{b_n}\right)^2 = \left(\frac{mb_0}{b_0}\right)^2 + 2n \text{ctg}^2 K \cdot m_k^2 \quad (1)$$

w którym należy uwzględnić jeszcze wartość ρ , o ile wartości kątowe będą liczone w miarze kątowej. Ostatni wzór (1) podaje nam związek

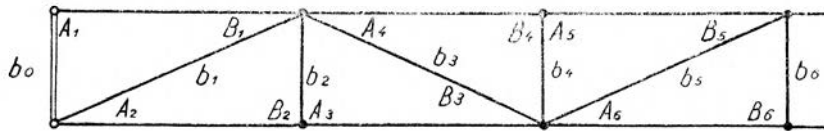
między błędem względnym bazy b_n , wyrażenie: $\frac{mbn}{b_n}$

błędem względnym bazy b_0 , wyrażenie: $\frac{mb_0}{b_0}$

błędem średnim kąta K , wyrażenie: m_k

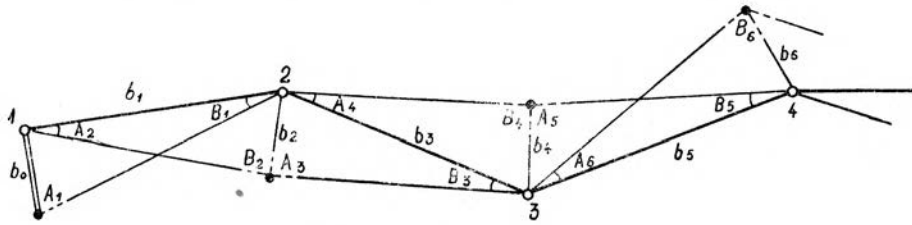
oraz ilością założonych trójkątów, wyrażenie: n

W praktyce zakładanie łańcucha trójkątów o 2-ch kątach ostrych (rys. 21) jest rzeczą uciążliwą. Ze względu na to, że owe dwa kąty, które powinny być mniej więcej sobie równe, są od siebie bardzo odległe, przeto łatwiejsze będzie zakładanie łańcucha trójkątów o jednym kącie ostrym. Wobec tego pozostałe dwa będą zbliżone do kąta prostego. W nowym przypadku łańcuch trójkątów wyglądałby jak niżej:



rys. 22

Założenia takiej sieci łatwiejsze jest również ze względu na zakładane bazy $b_0, b_2, b_4, b_6 \dots$, które w miarę potrzeby będą mierzone. W zastosowaniu praktycznym, przedstawiony łańcuch trójkątów (rys. 22) będzie mógł przyjąć postać jak np. na rys. 23.



rys. 23

Wobec tego, że każdy nowy trójkąt posiada tylko jeden kąt ostry (oznaczamy go przez K'), przeto we wzorze ogólnym (0) przypadną wartości cotangensów kątów B_i , wchodzących pod znak pierwiastka, a to z tego tytułu, że kąty te w praktyce będą bliskie kątowi prostemu, a zatem bliskie zera będą kwadraty ich cotangensów. Czyli kątów ostrych będzie już tylko n , a nie $2n$. Wzór (1) przyjmie postać:

$$\left(\frac{mb_n}{b_n}\right)^2 = \left(\frac{mb_0}{b_0}\right)^2 + n \cdot \text{ctg}^2 K' \cdot m_K^2 \quad (2)$$

Wzór ostatni (2) może posłużyć do określenia kształtu trójkątów, tj. wielkości kąta ostrego K' , jeżeli poczynimy założenia:

$$\frac{mb_0}{b_0} = 1/5000, \quad \frac{mb_n}{b_n} = 1/2330, \quad m_K = \pm 5'', \quad n = 5,$$

a po wstawieniu do wzoru (2) otrzymamy $K' = 8^\circ$.

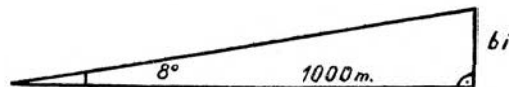
Przy powyższych założeniach otrzymaliśmy najniższą wartość kąta ostrego K' , w którymkolwiek z trójkątów naszego łańcucha. Wartości tego kąta przy zakładaniu sieci nie wolno zmniejszać, tj. trójkąty powinny być tak zakładane, aby żaden z kątów ostrych nie był mniejszy od 8° .

W ten sposób otrzymaliśmy dość blisko określony kształt trójkąta, stanowiącego element sieci (łańcucha trójkątów). Pozostaje sprawa jego wielkości. Otóż analizując bliżej wzór (2) możemy powiedzieć, że błąd względny bazy b_n , a tym samym jej błąd średni, nie należy od długości boków trójkąta, a jedynie od dokładności ich pomiarów. Stąd wielkość trójkąta, a tym samym i boku poligonowego, mogłaby być dowolna. Dlatego też, przyjęta górna granica długości boku poligonowego na 1500 m dyktowana jest widocznością tyczki zaopatrzonej w sygnał tarczowy, który z tej odległości przez lornetkę polową będzie dobrze widoczny.

Aby traser, nie operujący żadnym narzędziem kątomierzczym, mógł się orientować przy ustalaniu wzajemnej pozycji punktów pomiarowych, posłużyć mu może następująca tabelka, która podaje konieczną długość boku bazowego w zależności od długości boku poligonowego.

Długość boku w m	Długość bazy w m
100	15
200	30
300	45
400	60
500	75
600	90
700	105
800	120
900	135
1000	150
1100	165
1200	180
1300	195
1400	210
1500	225 itd.

Ułożenie tej tabelki oparte zostało na założeniach dokonanych powyżej oraz na rozwiązaniu trójkąta prostokątnego (rys. 24) o boku przyprostokątnym dłuższym równym 1000 m i kącie ostrym równym 8° .



rys. 24

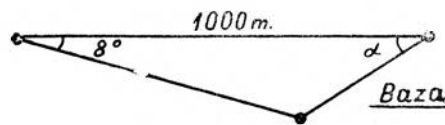
$$b_i = 1000 \cdot \operatorname{tg} 8^\circ = 140,5 \approx 150 \text{ metrów}$$

Wzięcie bazy większej pewniej gwarantuje uzyskanie minimum 8° w kącie ostrym trójkąta. Podana tabelka słuszna jest dla ciągów prostoliniowych i baz ustawianych prostopadle do boków poligonowych. Słuszność i użyteczność tej tabelki rozciąga się również i na ciąg łamiący się, a to ze względu na wydłużenie każdej długości bazy o 7% w stosunku do ściśle wyliczonej, lecz tylko w pewnych granicach. W przypadku silnych załamań ciągu, np. pod kątem prostym: konieczne będzie dla zachowania wielkości kąta ostrego minimum 8° przeliczyć drugą tabelkę.

Korzystniej jednak w tym wypadku będzie podać ją dla boku poligonowego 1000 m a zmiennym kącie załamania tegoż boku w stosunku do jego bazy.

I tak:

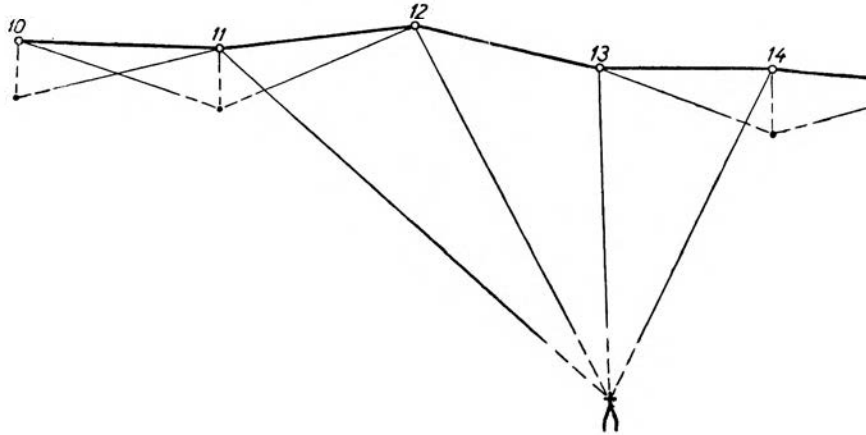
dla kąta w gradach	długość bazy w metrach
30	245
35	220
40	205
45	190
50	175
55	165
60	160
70	150
80	150
90	150
100	150



rys. 25

Przy boku poligonowym odpowiednio krótszym lub dłuższym, długość bazy może być również w tym samym stosunku zmieniona. Zasadniczo dla wszystkich przypadków istnieje jedna zasada: kąt ostry (paralaktyczny) nie powinien być mniejszy od 8° . Zakładanie bazy dłuższej, aniżeli wynikałoby to z tej czy innej tabelki, jest ze względów dokładnościowych korzystniejsze i może być z powodzeniem stosowane w terenie przy obieraniu w okolicy ciągu poligonowego jakichś punktów stałych w terenie. Punkty te mogłyby również służyć jako oparcie dla kilku kolejnych boków poligonowych — oczywiście tworzone w ten sposób trójkąty nie mogłyby być przesadnie wydłużone. Orientowanie się o kształcie projektowanego trójkąta może być łatwo przeprowadzone na podstawie posiadanych zdjęć lotniczych, które traser powinien mieć w ręku. Ten nowy łańcuch trójkątów przedstawia rys. 26.

Umiejętne korzystanie z punktów stałych w terenie w sposób zilustrowany na rys. 26 przyspiesza wykonanie prac polowych. W przypadku posiadania składanego sygnału podwyższonego (o czym była mowa na początku niniejszego artykułu), można byłoby ten sam efekt osiągnąć w terenach niezabudowanych.



rys. 26

Następnie należy poruszyć dwa zagadnienia: 1) do jakiego stopnia można nasz ciąg poligonowy wyginać bez utraty jego dokładności, wynikającej z kształtu trójkąta, i 2) z jaką dokładnością można byłoby mierzyć kierunek na drugi punkt bazowy, będący w odległości od pierwszego prawie z reguły o około 150 metrów. Przy drugim punkcie tego zagadnienia należy podkreślić, że pomiar tego kierunku nie ma wpływu na kąt poligonowy ciągu.

Odpowiedź na oba zagadnienia otrzymamy z wzoru (0), który dla tego celu można napisać:

$$\frac{m_{b_n}}{b_n} = \pm \sqrt{\left(\frac{m_{b_0}}{b_0}\right)^2 + n \cdot \text{ctg}^2 K \cdot m_k^2 + n \cdot \text{ctg}^2 D \cdot m_D^2} \quad (3)$$

gdzie wyrażenie $n \cdot \text{ctg}^2 D \cdot m_D^2$ wygodnie będzie oznaczyć znakiem ε , a raczej $\varepsilon = n \cdot \text{ctg}^2 D \cdot \left(\frac{m_D}{\rho}\right)^2$. Oznaczać ono będzie, pominięty we wzorze (2), wpływ wielkości kąta D (uznanego za kąt prosty) i jego średniego błędu na błąd względny bazy b_n . W podanych poprzednio uwagach na temat wpływu wartości tego kąta D , któremu przypisywano wartość $\sim 90^\circ$, podano, że wyrażenie to (ε) jest tak małe, że nie ma żadnego wpływu na dokładność obliczanego boku.

W celu obliczenia określonej wartości ε można byłoby nadawać kątowi D różne wartości (np. 60° , 45° itp.) oraz przy $m_D = \pm 5''$ obliczać wartość ε , tę wartość dodawać do wyrazów podpierwiastkowych

wyrażenia (3) i ostatecznie po wyciągnięciu pierwiastka kwadratowego można byłoby mieć wartość błędu względnego bazy b_n . Porównanie tak otrzymanej wartości z tą samą wartością obliczoną przy pominięciu wyrażenia ε pozwoliłoby zorientować się jaki jest wpływ tego wyrażenia na wynik błędu względnego bazy b_n . Tu jednak zastosowano inną drogę.

Idąc inną drogą, należy zorientować się w rzędzie wielkości wyrazów znaczących (tj. posiadających wyraźny i stały wpływ na wartość błędu względnego bazy b_n , czyli należy obliczyć ich sumę i wyciągnąć pierwiastek kwadratowy). To wszystko wykonano przy następujących założeniach:

$$\frac{mb_0}{b_0} = 1/5000 = 0.00020, \quad n = 5, \quad \text{ctg } K = \text{ctg } 8^\circ = 7.1154,$$

$$m_K = \pm 5'', \quad \rho'' = 206265$$

A zatem będzie:

$$\frac{mb_5}{b_5} = \pm \sqrt{0.000\,000\,188} = \pm 0.000\,43$$

(czyli $0.000\,43 = 1/2330$, co się oczywiście musi pokrywać z wynikami odnośnie rozważań kształtu trójkąta, stanowiącego element łańcucha).

Gdy następnie dla przykładu przyjmijemy $b_5 = 1000$ m, to błąd średni tak długiej bazy wyniósłby ± 0.43 metra. Chcąc utrzymać tę wartość błędu względnego, można będzie operować jedynie w ramach samego zaokrąglenia, tj. w obszarze od $0.000\,42_5$ do $0.000\,43_4$, przechodząc następnie do ich wartości podpierwiastkowych mieć będziemy odpowiednio:

$$\sqrt{0.000\,000\,180.6} \text{ i } \sqrt{0.000\,000\,188.4}$$

a stąd różnicę wartości podpierwiastkowych można będzie potraktować jako wartość ε . Czyli mieć będziemy $\varepsilon = 0.000\,000\,007.8$.

Zgodnie z założeniem (oznaczeniem) i ostatnim warunkiem będzie:

$$\frac{n \cdot \text{ctg}^2 D \cdot m_D^2}{\rho^2} \leq \varepsilon \quad (4)$$

Nierówność tę należy rozwiązać w stosunku do niewiadomej $\text{ctg } D$. A zatem:

$$\text{ctg } D \leq \frac{\rho''}{m_D} \sqrt{\frac{\varepsilon}{n}}, \text{ a po podstawieniu będzie:}$$

$$\text{ctg } D \leq \frac{206265}{5} \sqrt{\frac{0.000\,000\,007.8}{5}}$$

$$\text{ctg } D \leq 1.65012, \text{ czyli } \underline{D \geq 31^\circ 13'} \text{ (34.68)}$$

Ostateczny wniosek będzie następujący: Ciąg poligonowy może się załamywać pod kątem nie mniejszym jak $2D = 62^\circ$ (69), o ile mamy niedopuszczyć do wpływu kąta D na wyniki liniowy boków poligonowych, przeliczanych przy rozwiązywaniu trójkątów.

W praktyce tak ostre kąty załamania (62°) ciągu poligonowego rzadko kiedy występują, a poza tem w przypadku zaistnienia takiego kąta — wpływ jego na przeliczaną długość będzie w centymetrach.

Utrzymanie założonej dokładności pomiaru kąta D , równej $\pm 5''$ jest zupełnie możliwe ze względu na tę okoliczność, że baza w miejscu załamania ciągu musi być odpowiednio wydłużona; toteż odpowiedź na postawione drugie pytanie (z jaką dokładnością można byłoby mierzyć kierunek na drugi punkt bazowy?) — można rozpatrywać w miejscach najniebezpieczniejszych, tj. gdy ciąg przebiega prostopoliniowo, a baza wystawiona jest prawie pod kątem prostym do ciągu poligonowego.

Aby odpowiedzieć na ostatnie pytanie, można wyjść również z nierówności (4), rozwiązując ją w stosunku do niewiadomej m_D i tak będzie:

$$m_D = \leq \frac{\rho''}{\text{ctg } D} \sqrt{\frac{\varepsilon}{n}}$$

Po wstawieniu poprzednich wartości na ε , n , ρ'' oraz kolejno na D wartości kąta 70° , 80° i 85° mieć będziemy:

$$\begin{aligned} m_{70} &= \frac{206265}{0.364} \sqrt{\frac{0.000\ 000\ 007.8}{5}} \\ &= 566000 \quad 0.000\ 04 \quad = 22'' \end{aligned}$$

i podobnie:

$$\begin{aligned} m_{80} &= 1170000 \quad 0.000\ 04 \quad = 47'' \\ m_{85} &= 2360000 \quad 0.000\ 04 \quad = 94'' \end{aligned}$$

Ostatecznie, wniosek drugi: Kierunek na drugi punkt bazowy tj. odległy od pierwszego o około 150 m, czyli drugi koniec bazy, można brać z różną dokładnością $22''$ — $94''$ (zależnie od kąta D). Oczywiście trudno ten wniosek byłoby zastosować w praktyce. Należy zatem trzymać się zasady — mierzyć starannie, dopuszczając przy sprawdzeniu drugą serią pomiaru, do większych rozbieżności aniżeli dopuszczalne są na punkty odległe.

Przyjęte powyżej i utrzymane dokładności pomiarów polowych: a) dla pomiaru boku bazowego 1:5000 oraz b) dla kąta paralaktycznego $\pm 5''$ st. podz. w następujący sposób kształtują wielkości błędów w zględnych dla kolejno wyliczonych boków (baz).

TABELKA 3

	Błąd względny	Numer boku poligonow,
$\frac{m_{b_0}}{b_0}$	1/5000	
$\frac{m_{b_1}}{b_1}$	1/3850	1
$\frac{m_{b_2}}{b_2}$	1/3230	
$\frac{m_{b_2}}{b_2}$	1/2780	2
$\frac{m_{b_4}}{b_4}$	1/2500	
$\frac{m_{b_5}}{b_5}$	1/2330	3
$\frac{m_{b_6}}{b_6}$	1/2130	
$\frac{m_{b_7}}{b_7}$	1/2000	4
$\frac{m_{b_8}}{b_8}$	1/1890	
$\frac{m_{b_9}}{b_9}$	1/1820	5
$\frac{m_{b_{10}}}{b_{10}}$	1/1730	
$\frac{m_{b_{11}}}{b_{11}}$	1/1670	6

Zestawienie tej tabelki oparte zostało na wzorze (2), gdzie zmiennym elementem było wyrażenie n . Przy tej okazji należy podkreślić, że bok b_0 — to baza wyjściowa dla jakiegoś odcinka poligonu, pomierzona bezpośrednio w terenie skomparowaną taśmą mierniczą. Pomiar ten powinien być wykonany z błędem względnym nie większym jak 1/5000.

Tabela 4 przygotowana została w tym założeniu, że pewne pomiary, a w konsekwencji wyniki obliczeń odnośnie długości boków będą się odchyłały od przeciętnych, tj. wzorowych i aby móc je ocenić, czy są jeszcze dopuszczalne służy ta tabela. Sporządzona została dla dwóch typowych długości 1000 m i 150 m, które w ciągu poligonowym mogą się kolejno przeplatać. Oczywiście ustalenie odpowiedniej dopuszczalnej odchyłki dla wyliczonej długości, musi odbywać się proporcjonalnie do tej długości i w zależności od numeru przeliczanego boku.

TABELKA 4

Ilość boków	Długość boku	Dopuszczalne różnice w m.
1	1000	± 0.75
2	150	0.05
3	1000	1.08
4	150	0.18
5	1000	1.29
6	150	0.21
7	1000	1.50
8	150	0.24
9	1000	1.65
10	150	0.27
11	1000	1.80

Ostatnim, osobliwym fragmentem tej metody jest obliczenie według załączonego wzoru Nr 2T, wszystkich boków poligonowych ciągu. Obliczenia przeprowadzać należy odcinkami zawartymi między pomierzonymi bazami w terenie. Załączony przykład najlepiej ilustrować będzie sposób przeliczenia odcinka. Do przerobienia tego przykładu będzie potrzebna jeszcze jedna tabelka nr 5, załączona poniżej:

TABELKA 5

Numer kolejny boku	Wartości błędów względnych					
	0.5 m	1 m	1.5 m	2 m	2.5 m	3 m
1	1/7700	1/3850	1/2560	1/1925	1/1540	1/1280
2	6460	2230	2150	1620	1290	1080
3	5550	2780	1850	1390	1510	925
4	5000	2500	1670	1250	1000	830
5	4600	2300	1540	1150	920	770
6	4260	2130	1420	1065	850	710
7	4000	2000	1335	1000	800	665
8	3780	1890	1260	945	760	630
9	3640	1820	1210	910	730	605
10	3460	1730	1150	865	690	580
11	3380	1670	1110	835	670	555

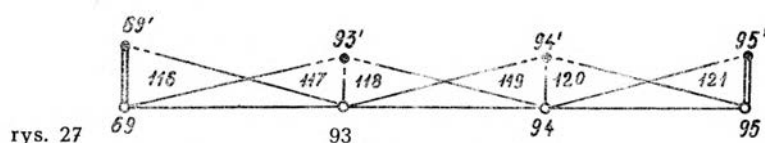
Co drugi wiersz podkreślony (1, 3, 5, 7, 9, 11) odnosi się do boków poligonowych. Pozostałe wiersze odnoszą się do baz, czyli boków, które mogą być zamierzane w terenie.

Przykład

1	2	3			4	5	6	7	8	9	10
		0	'	''							
116	69'	79	25	25	0.98301	279.97	0	1/5000	0	279.97	baza pom.
	93	20	31	55	0.35073						
	69	80	02	40							
117	69	9	27	19	0.16428	784.69	1	1/1925	+ 0.41	785.1	
	93'	59	15	34	0.85949						
	93	111	17	07							
118	93'	95	52	11	0.99476	149.98	2	1/		—	
	94	15	14	02	0.26276						
	93	68	53	47							
119	93	27	16	43	0.45832	567.81	3	1/1390	+ 0,41	568.2	
	94'	73	23	45	0.95830						
	94	79	19	32							
120	94'	74	38	57	0.96432	271.56	4	1/		—	
	95	17	03	52	0.29345						
	94	88	17	11							
121	94	10	35	33	0.18382	169.67	6	1/1212	+ 0.14	169.81	baza pom.
	95'	75	12	06	0.96683	892.40	5	1/1150	+ 0.78	893.2	
	95	94	12	21							

$$\Delta b_{\max} = \pm 0.23$$

Szkic sieci.



Obliczenie i wyrównanie długościowe odcinka polega na:

- 1) rozpisaniu arkusza na podstawie szkicu sieci, wypełniając kol. 1 i 2,
- 2) wpisaniu z Dziennika polowego (wzór Nr 1T) sprawdzonych wyników kątowych i obliczenie kąta trzeciego w trójkącie— kol. 3,
- 3) wypisaniu z tablic naturalnych funkcji trygonometrycznych wartości sinusów dla dwóch kątów każdego trójkąta — kol. 4,
- 4) wpisaniu z dziennika polowego do kol. 9 baz pomierzonych oraz bazy zerowej do kol. 5,
- 5) obliczeniu kolejnych długości wszystkich boków ciągu poligonowego i wszystkich baz wchodzących do odcinka — kol. 5,
- 6) obliczeniu błędu względnego dla bazy końcowej (pomierzonej w terenie) i porównaniu wyniku z odpowiednią wartością błędu względnego Tabelki 5, w celu wybrania odpowiedniej kolumny wartości błędów względnych,

- 7) rozpisaniu numerów trójkątów obliczanych — kol. 6,
- 8) wpisaniu do kol. 7 odpowiednich wartości błędów względnych z Tabelki 5, kierując się przy wyborze odpowiedniej kolumny tej tablicy tym, w której kolumnie znajduje się wartość bliższa wartości obliczonej,
- 9) obliczeniu różnicy między wartością bazy pomierzonej a wartością bazy obliczonej. Wypisanie z Tabelki 4 wartości dopuszczalnej różnicy dla bazy porównywanej: Δb_{\max} oraz stwierdzenie możliwości dalszych obliczeń,
- 10) obliczeniu poprawek dla boków poligonowych i wpisaniu ich do kol. 8,
- 11) obliczeniu długości ostatecznych boków poligonowych—kol. 9.

Na powyższym przykładzie i opisie przebiegu wyrównania odcinka długościowo, temat ten można uważać za wyczerpany, gdyż samo przeliczenie i wyrównanie ciągu poligonowego można przeprowadzać którąkolwiek ze znanych metod wyrównania ciągu poligonowego. Godnym jednak zalecenia byłby sposób ścisły, opisany przez prof. S. Hausbrandta w „Rachunkach geodezyjnych” na str. 157 i następujących.

Dane uzupełniające

Uzupełnieniem opisu tej metody powinien być dziennik obserwacji, wzór Nr 1T; jego lewa i prawa część stanowi jedną stronę składaną *d* środka wzdłuż linii przerywanej. W ten sposób sam dziennik jest mały i można go łatwo chować do kieszeni. Przeciętnie na jednej stronie dziennika mieści się jedno stanowisko instrumentu, wykonane w dwóch pełnych seriach. Pierwszym sprawdzeniem obserwacji będzie kolumna 2c (błąd kolimacji), a drugim kol. „Kąty”. W kolumnie „Uwagi” należy sporządzać szkic kierunków na danym stanowisku oraz notować wyniki pomiarów długości bazy w przypadku jej pomiaru, wykazując czterokrotny lub dwukrotny jej pomiar.

Na zakończenie można dodać, że ta metoda była już teoretycznie opracowana przez Włodzimierza Kolanowskiego. Tą metodą pracowało paru naszych kolegów, dając podkład geodezyjny dla obszaru łącznego o powierzchni ok. 255.000 ha terenów równinnych i falistych, częściowo pokrytych dużymi lasami. Sam miałem możliwość wypróbować tę metodę w woj. warszawskim na powierzchni ok. 20.000 ha. Obwodnica tego obiektu wynosiła ok. 60 km, a ciągi wiążące — 40 km; pomiar był dowiązany do trzech punktów triangulacyjnych I rzędu—uwiązanie liniowe dało błąd względny 1/12000 na długości równej 25.347.61 metrów. Stanowisk instrumentu było ok. 130, pomierzonych baz — 30, o ogólnej długości 6 km.

Tych kilka danych świadczy o próbie ogniowej, jaką ta metoda przeżyła. Toteż oceniając ją jako metodę korzystną szczególnie dla obecnie prowadzonych pomiarów osnów geodezyjnych, pozwoliłem sobie ją przedstawić.

СТАНИСЛАВ ДМОХОВСКИ

МЕТОД „СТРОЙНЫХ” ТРЕУГОЛЬНИКОВ В ТЕХНИЧЕСКОЙ ПОЛИГОНОМЕТРИИ

СОДЕРЖАНИЕ

Излагается один из методов технической полигонометрии, в котором длины сторон хода определяются из посредственных измерений. Длину линии полигонометрического хода получают решением длинного и узкого треугольника (рис. 23), одной стороной которого есть именно сторона полигонометрического хода; другая сторона „стройного” треугольника или измеряется непосредственно стальной рулеткой (с точностью 1:5000), или получается из решения одного из стройных треугольников, образующих цепь вдоль полигонометрического хода. Непосредственно измеряются только два угла каждого треугольника (острые углы с точностью $\pm 5''$) и, в среднем, в каждом пятом треугольнике, его короткая сторона, называемая „базисом”.

Обыкновенная длина стороны полигонометрического хода ок. 700 м, соответствующая длина базиса 105 м. (Таблица). При этих предпосылках, принимая длину полигонометрического хода 15 км., точное уравновешение хода дает среднюю ошибку вершин хода, лежащих в его середине, около $\pm 0,5$ м.

В тексте дан теоретический анализ метода; определяется лучшая форма треугольника (рис. 24) и точность измерения углов треугольника ($T_{уг} \pm 5''$; от $T_{70^\circ} = \pm 22''$ до $T_{85^\circ} = \pm 94''$).

Даны также образцы формуляров, на которых следует вести вычисления последовательных сторон хода и числовой пример с приближенным уравновешением сторон (Пример 1).

В Таблице 1 даны кратчайшие базисов для соответствующих длин сторон полигонометрического хода.

В Таблице 3 дано разложение относительных ошибок последовательно вычисляемых сторон хода.

Таблица 5 — максимальные величины относительных ошибок.

По мнению автора этот метод лучше всего годится для измерений геодезических основ фотограмметрических съемок, равно в равнинных, как холмистых местностях и совсем заступает другие полигонометрические методы с посредственным измерением длин сторон. Этот метод может соревноваться с другими не только по точности, но и экономике измерений. В тоже время он не требует применения невыгодной аппаратуры — напр. 5 м. полигонометрических реек. Основным оснащением группы, ведущей измерения этим методом есть: теодолит типа Вильд Т2, 20-м стальная рулетка и 6 жалонов в визирными марками.

STANISŁAW DMOCHOWSKI

POLYGONISATION TECHNIQUE PAR LA MÉTHODE
DES TRIANGLES SVELTES

RÉSUMÉ

Dans ce travail on a démontré une des méthodes de polygonisation technique, d'après laquelle on procède au mesurage de la longueur des côtés de suite polygonale par mesurage intermediaire. Pour fixer la longueur du côté on résoud le triangle étroit et long (dessin Nr 23) dont un côté constitue en même temps le côté de suite polygonale; l'autre côté est — soit mesuré dans le terrain avec mètre à ruban (avec précision de mesure 1:5 000) — soit calculé à la base des résultats obtenus dans le calcul précédent de triangle, étant donné que tous les triangles sont liés entre eux en une chaîne des triangles. Pendant l'arpentage dans le terrain on prend en consideration seulement deux angles de chaque triangle (avec précision de mesure de $\pm 5''$ pour chaque angle aigu) et aussi en moyenne à chaque cinquième triangle on mesure son côté court nommé „la base”.

La longueur moyenne du côté de suite polygonale est de 700 mètres; sa correspondante pour la côte de base est de 105 mètres (Tables).

En partant de ces principes, pour une suite polygonale longue de 15 kilomètres environ, et compensée d'après la méthode précise pour les suites polygonales — l'erreur moyenne de fixation de la position des points polygonaux situés au milieu de dite suite s'élève à ± 0.5 mètres environ.

Dans le travail on a établi une analyse théorique du problème sus mentionné. On a élaboré la forme du triangle (Dessin Nr 24) et la précision de mesure des angles dans un triangle ($m_k = \pm 5''$; et de $m_{70^\circ} = \pm 22''$ à $m_{85^\circ} = \pm 94''$).

A la fin l'auteur présente des modèles des imprimés sur lesquels il est plus facile de faire les calculs des longueurs successive des côtés de suite polygonale. Il donne aussi un exemple numérique concernant la première compensation des côtés (Exemple 1^{er}).

Les tables annexées, comme par exemple: Table 1 — décrit les longueurs de bases les plus minimales avec longueurs des côtés de la suite polygonale.

Table 3 — indique disposition des erreurs relatives pour les côtés de suite polygonale qui se succèdent.

Table 5 — contient les valeurs maxima des erreurs relatives.

D'après l'auteur cette méthode convient surtout pour l'arpentage de chaînes géodésique pour études photogrammétriques, pour les terrains ainsi que pour les terrains ondulés.

Elle peut tout à fait remplacer autres méthodes polygonales de mesurage intermédiaires de longueurs des côtés de suite polygonale.

Cette méthode peut faire concurrence non seulement quant à la précision, mais aussi en économie des mesurages mêmes. Elle n'exige non plus un appareillage compliqué d'arpentage dont surtout les jalons hauts de 5 mètres sont bien incomodes.

L'équipement de la groupe qui exécute l'arpentage par cette méthode se compose seulement d'un théodolite ou modèle universale, d'une chaîne d'arpenteur à ruban longue de 20 mètres et de 6 jalons avec les mires à voyant.