

3426

PRACE GEODEZYJNEGO INSTYTUTU NAUKOWO-BADAWCZEGO  
ТРУДЫ ГЕОДЕЗИЧЕСКОГО НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОГО ИНСТИТУТА  
TRAVAUX DE L'INSTITUT GEODESIQUE

---

Nr 16

---

STEFAN HAUSBRANDT

# SYMBOLE POMOCNICZE W RACHUNKACH GEODEZYJNYCH

WARSZAWA 1952

---

PAŃSTWOWE PRZEDSIĘBIORSTWO WYDAWNICTW KARTOGRAFICZNYCH

**E R R A T A**  
do Rocznika Geodezyjnego 1954.

Str.	Wiersz		Wydrukowano	Ma być
	od góry	od dołu		
1		11	panowanie	planowanie
15	2		równomocnych	równonocnych
15	3		zodialnym	zodiakalnym
29		14	polegającą	podlegającą
35		15	sierpnie	sierpnia
51		12	świtle	światle
53	2		obiegłych	ubiegłych
56	13		zakładami	zakładami
63	16		Siepanow	Stiepanow
73	8		$\cos \delta \sin \varphi \cos t$	$\cos \delta \sin \varphi \cos t$
73		10	ostanie	ostatnie
75	16		instrumentu	instrumenty
77	5		geograficzne	geograficznej
77	7		geograficzne	geograficznej
94		1	punktów	punktów
96	1		wskazuje	wskazują
100	12		$0.952 \Delta \varphi \Delta \lambda +$	$0.952 \Delta \varphi \Delta \lambda -$
111		1	jak sinus, tangens,	jak sinus, cosinus, tangens,
114	15 rys. drugi wykres od lewej strony		$y = x^3$	$y = x^2$
141	4		wprowadzone	wyprowadzona
154		6,5	do ogniskowej o- kularu.	do ogniskowej o- biektwu i od- wrotnie propor- cjonalne do og- niskowej okula- ru.
157		13	$120'' \frac{(b-a)+(d\ c)}{(c\ a)+(d\ b)}$	$120'' \frac{(b-a)+(d-c)}{(c-a)+(d-b)}$

Str.	Wiersz		Wydrukowano	Ma być
	od góry	od dołu		
169	3		bo i tutaj zauważono	wykazały
174	20	17	Porównanie w tych publikacjach wysokości	Przyjmując, jak poprzednio uzasadniliśmy, że wysokości
174		3	fűf	fűr
175	19	18	meraograficznych	mareograficznych
185		2	grymsów	gzysmów
191	13 i 14		zatem kierunku	zatem w kierunku
212		3	obudowy	odbudowy
252		17	„Zemêmêřictvı“	„Zeměměřictví“
252		12	Bedřicha	Bedřicha
253		8	Břetislava	Břetislava
256	12		Tichy	Tichý
260	15		Břetislava	Břetislava
264	10		„Zemêmêřictvı“	„Zeměměřictví“
264		16	Tichy	Tichý
266		12	państwach	państwach
313	14		$A - a$	$a - a$
342		11	$P_1P$	$P_1P_2$
343	7		krzywą	krzywej
346	3		$\frac{l}{2} [+ R +$	$\frac{l}{2} + [R +$
346	12		przed wierszem 13	po wierszu 13 — po wzorze
347	8		$(x \cdot m_e)^2$	$(x \cdot m_l)^2$
349	9		$\pm =$	$= \pm$
350		8	równy	równym
351		6	Obliczenie	C. obliczenie
352	1		- graficzne, graficzne	-graficznie, graficznie
352	4		czy	lub

Str.	Wiersz		Wydrukowano	Ma być
	od góry	od dołu		
352	10		$-\frac{b}{4n}$	$-\frac{b^2}{4n}$
353		10	$\frac{P_1 + P_2}{2}$	$\frac{P_1 + P_2}{2}$
375		13	opisy	odpisy
376	12		ciągu	skreślić
383		3	$S_1$ i $S$	$S_1$ i $S_2$
416	16		stytuacji	sytuacji
446		10	punktu	punkty
455	17		przymocowanych	przymocowanie
510	4		polwych	polowych
510		11	1. H. A. Aprodow	1. W. A. Aprodow
561		14	auredukcyjnego	autoredukcyjnego
564	16		24 m, 8 m, i 2 m	24 m, 8 m, 4 m i 2 m
568		17	kreślanego	określanego
639	2		swoszczowicach	swoszwowicach
643	17		Podziemie	Podziemne
643		4	(bezaltołom,	(bazaltołom,
644		16	projektowch,	projektowych,
697		16	zmierzonej	zamierzonej
724	6		0 4,8 lub	o 4,8 lub
735		7	$Q = \frac{2}{3} \mu b \sqrt{2g} h^{3/2} =$	$Q = \frac{2}{3} \mu b \sqrt{2g} h^{3/2} =$
741		9	szaty	szaty
774		5	— 3	— 2
		2 szpalta		
776		1 i 2	62 66	52 56
		5 szpalta		
776	7		52	32
	16 szpalta			
777	1		80	20
	9 szpalta			
777	1		60	50
	11 szpalta			

Str.	Wiersz		Wydrukowano	Ma być
	od góry	od dołu		
780	24 g 1 szpalta		22 30	80
780	26 g 1 szpalta		00	22 00
836	9		Miernilczego	Mierniczego
836	11		gruntowych	gruntowych
836	13		znaszeniu służeb- ności	znoszeniu służeb- ności
838	21		(— 5)	(10)
844	4		astronomij	astronomii
845	3			skreślić cały wiersz
845	5		1954	1945
845	14		J. D.	J. U.
847	12		dorożnom	dorożnom
847		3	stroitielnej	stroitielnoj
848		12	Geosgeolizdat	Geosgeodizdat
848		4	Geosgeolizdat	Geosgeodizdat
853		14	inwentarizaczji	inwentarizacji
853		9	1952	1951
854	2		1935	1953
854	6		Rukwodstwo	Rukowodstwo
855	12		176	172
856		5	geograficznych	geofizycznych
856		1	27 × 17	26 × 17
857	2		Kartografiowanie	Kartografiowanie
857	18		osnowych	osnownych
858	2		bomagi	bumagi
858		2	rbl	rb
864	15		25 rys.	205 rys.
873		3	+ 1,	+ 1, Pomiarы na płaszczyźnie
874	18		mangal	manual

440 528.1:512.83

PRACE GEODEZYJNEGO INSTYTUTU NAUKOWO-BADAWCZEGO  
ТРУДЫ ГЕОДЕЗИЧЕСКОГО НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОГО ИНСТИТУТА  
TRAVAUX DE L'INSTITUT GEODESIQUE

---

Nr 16

---

STEFAN HAUSBRANDT

# SYMBOLE POMOCNICZE W RACHUNKACH GEODEZYJNYCH

WARSZAWA 1952

---

PAŃSTWOWE PRZEDSIĘBIORSTWO WYDAWNICTW KARTOGRAFICZNYCH



3426

1952. V. 15

Red. techn.: SIELSKI TADEUSZ

Korektor: STACHURSKA IRENA

PPWK — Zam. nr 32 — nakład 611 egz.  
Podpisano do druku dnia 15 maja 1952 roku.  
Druk ukończono dnia 30 maja 1952 roku.  
Obj. 3 ark. Papier druk. sat. kl. V, 70 g, A-1

## WSTĘP

Jeżeli w pewnej dziedzinie prac rachunkowych zachodzi często potrzeba wykonywania działań o tej samej treści formalnej staje się celowe wprowadzenie symbolu pomocniczego zastępującego zwykłą symbolikę algebraiczną. Tak np. jeżeli często zachodzi potrzeba obliczania wielkości  $x$ , związanej z danymi cyfrowo wielkościami  $a$   $b$   $c$   $d$  równaniem:

$$x = ad - bc$$

celowo jest wyrażać związek pod postacią wyznacznika:

$$x = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

gdyż postać ta dzięki symetrycznej budowie jest łatwiej przyswajalna pamięciowo i mniej rozprasza jąca uwagę rachmistrza. Dzięki ustalonej raz na zawsze przez definicję wyznacznika zmianie znaku w jednym z iloczynów, występujących w omawianej operacji rachunkowej, rachmistrz wykonuje tę zmianę w sposób zupełnie automatyczny nie analizując za każdym razem jej algebraicznej treści. Rzut oka na zespół elementów liczbowych:

$$\begin{array}{cc} a & b \\ c & d \end{array}$$

napisany pod postacią tabeli, oraz na zasymbolizowany tak czy inaczej „rozkaz“ wykonania działania wyznacznikowego sugeruje już rachmistrzowi mnożenie elementów położonych na głównej przekątnej tablicy zgodnie z regułą znaków oraz mnożenie elementów, położonych na drugiej przekątnej tablicy niezgodnie z regułą znaków. Jeżeli działania wykonano na arytmometrze — co w nowoczesnych rachunkach zawsze ma miejsce — nie kasując w czasie rachunku licznika rezultatowego, pozostaje odczytać na tym liczniku wartość obliczonej sumy iloczynów.

Analizując rachunki geodezyjne z punktu widzenia formalnego można zauważyć, że wiele z tych rachunków daje się łatwo sprowadzić do następującej postaci: dany jest zespół wielkości

$$\begin{array}{cc} a & b \\ c & d \end{array} \quad \text{względnie kilka takich zespołów} \quad \begin{array}{cc} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{array} \quad \begin{array}{cc} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{array} \quad \dots$$

zaś wielkości poszukiwane w zagadnieniu wyrażają się bądź to pod postacią wyznacznika tabeli danych elementów:

$$ad - bc \quad \text{względnie sumy wyznaczników:} \quad a_1d_1 - b_1c_1 + a_2d_2 - b_2c_2 \dots$$

bądź też pod postacią sumy iloczynów elementów położonych w tych samych kolumnach:

$$ac + bd \quad \text{względnie} \quad a_1c_1 + b_1d_1 + a_2c_2 + b_2d_2 \dots$$

Obliczenie wartości tych dwóch podstawowych funkcji elementów zespołu: „iloczynu wyznacznikowego“:  $ad - bc$  i „iloczynu kolumnowego“:  $ac + bd$  stanowi zresztą przeważnie pierwsze stadium rachunku. Wielkości, które są ostatecznymi niewiadomymi zagadnienia wyrażają się bądź to jako stosunek iloczynu wyznacznikowego lub iloczynu kolumnowego do sumy elementów jednego z wierszy zespołu, względnie do sumy kwadratów elementów jednego z wierszy zespołu, bądź też jako stosunek iloczynu wyznacznikowego do iloczynu kolumnowego. Te okoliczności skłoniły mnie do wprowadzenia



kilku symboli zastępczych, których znaczenie wyjaśniam szczegółowo na początku pracy, i których używam nadal zarówno w konstrukcji wzorów jak i w rozwiązywaniu przykładów liczbowych. Przy pisując wprowadzonym symbolom wyłącznie znaczenie porządkujące — zarówno w dziedzinie pojęciowej, jak i w dziedzinie rachunku liczbowego — unikam zdecydowanie nawiązywania do rachunku wektorowego.

Takie nawiązywanie przyniosłoby wprawdzie korzyści pod postacią wybitnego skrócenia niektórych dowodów; jednocześnie jednak zdecydowanie zmniejszyłoby przejrzystość formalno rachunkową przez wprowadzenie większej ilości liczb zespolonych (po dwa wektory dwuelementowe zamiast jednej tabeli cztero-elementowej).

## DEFINICJE I TWIERDZENIA PODSTAWOWE

Zespół wielkości uporządkowany pod postacią tablicy kwadratowej o czterech elementach, lub pod postacią kilku takich tablic, zestawionych szeregowo, a więc np.

zespół:  $\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 7 \end{vmatrix}$  lub  $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 7 & 5 \end{vmatrix}$  lub  $\begin{vmatrix} \Delta X & \Delta Y \\ \cos \varphi & \sin \varphi \end{vmatrix}$  i t.p.

będziemy nazywali „formą rachunkową“ lub krócej: „formą“ i symbolizowali gloską  $f$  wzgl.  $F \varphi$  itp.

Tę umowę można w sposób ogólny wyrazić wzorem:

$$f \equiv \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & a_2 & b_2 & \dots & a_n & b_n \\ c_1 & d_1 & c_2 & d_2 & \dots & c_n & d_n \end{vmatrix} \quad . . . . . 1$$

gdzie znak  $\equiv$  jest symbolem identyczności, stwierdzającym, że wybraną gloską  $f$  wzgl.  $F \varphi$  oznaczamy w skróceniu zespół tych, a nie innych wielkości, i tak, a nie inaczej uporządkowanych.

W rachunkach geodezyjnych celowo jest rozważać kilka prostych funkcji elementów takiego zespołu.

Funkcjami tymi są:

1) funkcja pierwsza  $f_1$  lub „iloczyn wyznacznikowy“, czyli suma wyznaczników drugiego rzędu, utworzonych z tablic kwadratowych zespołu:

$$f_1 = a_1 d_1 - b_1 c_1 + a_2 d_2 - b_2 c_2 + \dots + a_n d_n - b_n c_n = \sum_1^n (a_i d_i - b_i c_i) \quad . . . . . 2$$

2) funkcja druga  $f_2$  lub „iloczyn kolumnowy“, czyli suma iloczynów elementów, tworzących poszczególne kolumny:

$$f_2 = a_1 c_1 + b_1 d_1 + a_2 c_2 + b_2 d_2 + \dots + a_n c_n + b_n d_n = \sum_1^n (a_i c_i + b_i d_i) \quad . . . . . 3$$

3) funkcja zerowa  $f_0$  lub „iloraz główny“, czyli stosunek funkcji pierwszej do drugiej:

$$f_0 = \frac{f_1}{f_2} = \frac{\sum (a_i d_i - b_i c_i)}{\sum (a_i c_i + b_i d_i)} \quad . . . . . 4$$

4 i 5) funkcje względne proste: pierwsza i druga, czyli funkcje  $f_1$  i  $f_2$  dzielone przez sumę elementów wiersza zespołu. Funkcje względne proste będziemy symbolizować umieszczając przy symbolu zespołu  $f$  wskaźnik 1 lub 2 otoczony kółkiem:  $(1)$   $(2)$ ; przy czym dla zaznaczenia dzielenia przez sumę elementów wiersza *dolnego* umieszczac będziemy wskaźniki *u-dolu*, zaś dla zaznaczenia dzielenia przez sumę elementów wiersza *górnego-u góry* przy symbolu zespołu. Będzie więc wyraźnie:

$$\begin{array}{lcl} f_{(1)} = \frac{f_1}{\sum (c_i + d_i)} & f_{(2)} = \frac{f_2}{\sum (c_i + d_i)} & . . . . . 5 \\ f^{(1)} = \frac{f_1}{\sum (a_i + b_i)} & f^{(2)} = \frac{f_2}{\sum (a_i + b_i)} & . . . . . 5' \end{array}$$

6 i 7) funkcje względne kwadratowe: pierwsza i druga, czyli funkcje  $f_1$   $f_2$  dzielone przez sumę kwadratów elementów wiersza zespołu. Funkcje względne kwadratowe będziemy symbolizować przez umieszczenie przy symbolu zespołu  $f$  wskaźnika 1 lub 2 w małym kwadracie:

Dla zaznaczenia dzielenia przez sumę kwadratów elementów wiersza dolnego — umieszczając będziemy wskaźniki u dołu, zaś dla zaznaczenia dzielenia przez sumę kwadratów elementów wiersza górnego — u góry przy symbolu zespołu. Będzie więc wyraźnie:

$$\begin{array}{cc} f_{\boxed{1}} = \frac{f_1}{\Sigma(c_1^2 + d_1^2)} & f_{\boxed{2}} = \frac{f_2}{\Sigma(c_1^2 + d_1^2)} & \dots & 6 \\ f^{\boxed{1}} = \frac{f_1}{\Sigma(a_1^2 + b_1^2)} & f^{\boxed{2}} = \frac{f_2}{\Sigma(a_1^2 + b_1^2)} & \dots & 6' \end{array}$$

Należy dobrze sobie uświadomić, że symbol  $f$  (względnie  $F$   $\varphi$  i t.p.) oznacza formę, tj. *cały zespół*; podczas gdy symbol  $f_i$  (względnie  $F_i$   $\varphi_i$  itp.) gdzie  $i$  jest jednym z wskaźników: 1.2.0. (1) (2)  $\boxed{1}$   $\boxed{2}$  oznacza *liczbę algebraiczną*.

Z identyczności symboli  $f$  i  $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & \dots & a_n & b_n \\ c_1 & d_1 & \dots & c_n & d_n \end{vmatrix}$  wynika inny sposób pisania  $f_i$

Tak np: zamiast  $f_1$  napisać możemy:  $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & \dots & a_n & b_n \\ c_1 & d_1 & \dots & c_n & d_n \end{vmatrix}_1$

zamiast  $f_0$  napisać możemy:  $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & \dots & a_n & b_n \\ c_1 & d_1 & \dots & c_n & d_n \end{vmatrix}_0$  i t.p.

2. W celu przyswojenia podanych pojęć pożytecznie jest przerobić kilka przykładów liczbowych, przyjmując za elementy form niewielkie liczby całkowite. Oto przykłady, w których wypisujemy wyraźnie poszczególne etapy rachunku, *co oczywiście przy rachunku maszynowym, wymagającym jedynie zapisania rezultatów końcowych, jest zbędne*.

## Przykłady

Obliczając funkcje  $f_1$   $f_2$   $f_0$  formy:  $f \equiv \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 6 & -2 \end{vmatrix}$  znajdziemy:  $f_1 = 3(-2) - 4 \cdot 6 = -30$   $f_2 = 3 \cdot 6 + 4(-2) = 10$

$f_0 = \frac{f_1}{f_2} = \frac{-30}{10} = -3$  Może to być też napisane pod postacią:  $\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 6 & -2 \end{vmatrix}_1 = -6 - 24 = -30$   $\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 6 & -2 \end{vmatrix}_2 = 10$  itp.

Dla obliczenia pierwszej funkcji formy podwójnej:  $F = \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 6-7 \\ 2-3 \end{vmatrix}$  możemy stosować różną kolejność poszczególnych etapów rachunków:

1) możemy obliczyć najpierw wszystkie iloczyny elementów położonych na przekątnych dodatnich:  $4 \cdot 1 + 6(-3) = -14$  po tym — wszystkie iloczyny elementów położonych na przekątnych ujemnych:  $5 \cdot 2 - 7 \cdot 2 = -4$ ; skąd  $f_1 = -14 - (-4) = -10$ . Przy rachunku maszynowym w pierwszym stadium tego rachunku nadajemy obroty w sensie zgodnym z algebraiczną regułą znaków; w drugim stadium — w sensie przeciwnym. Zapisaniu podlega oczywiście tylko końcowy rezultat rachunku  $f_1$  odczytany w okienkach rezultatowych arytmetru po ukończeniu całego rachunku.

2) możemy prowadzić rachunek w granicach poszczególnych tabel kwadratowych, znajdując najpierw wyznacznik:  $4 \cdot 1 - 5 \cdot 2 = -6$ , po tym wyznacznik:  $6(-3) + 7 \cdot 2 = -4$  skąd:  $f_1 = -6 - 4 = -10$ .

W pracy maszynowej ten sposób postępowania jest naogół mniej wygodny ze względu na większe prawdopodobieństwo omyłek w znakach. Jednak w wypadkach, gdy celem rachunku są jednocześnie funkcje  $f_1$   $f_2$  elementów pierwszej tablicy formy podwójnej:  $F \equiv (f\varphi)$  jak i funkcje  $F_1$   $F_2$  elementów całej tablicy  $F$  rachunek w granicach poszczególnych tablic składowych będzie oczywiście wygodniejszy. Pozwala on bowiem zapisać w trakcie rachunku wartość  $f_1$  zaś po jego ukończeniu wartość  $F_1$ .

Funkcje względne proste formy:  $F \equiv \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 4-7 \\ 2-3 \end{vmatrix}$  wynoszą  $F_{(1)} = \frac{4 \cdot 1 - 5 \cdot 2 - 4 \cdot 3 + 7 \cdot 2}{2 + 1 + 2 - 3} = \frac{-4}{2} = -2$

$$F_{(2)} = \frac{4 \cdot 2 + 5 \cdot 1 + 4 \cdot 2 + 7 \cdot 3}{2} = \frac{42}{2} = 21$$

Rachunek maszynowy funkcji względnych prostych rozpoczyna się od zesumowania elementów wiersza dolnego (względnie górnego). Po zapisaniu sumy, kasujemy okienka rezultatowe arytmetru, obliczamy wartość  $f_1$  ewentualnie:  $f_2$  po czym — bez kasowania okienek rezultatowych, odczytywania i zapisywania — dzielimy bezpośrednio rezultat przez zapisaną sumę elementów wiersza.

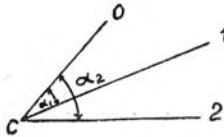
Liczniki obrotów przed dzieleniem muszą być oczywiście skasowane.

Funkcje względne, kwadratowe formy:  $F = \begin{vmatrix} 10 & 15 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 5 & -20 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$  wynoszą:  $F_{[1]} = \frac{-10 - 30 + 10 - 20}{4 + 1 + 1 + 4} = \frac{-50}{10} = -5$

$$F_{[2]} = \frac{20 - 15 - 5 - 40}{10} = \frac{-40}{10} = -4$$

Rachunek maszynowy funkcji względnych kwadratowych rozpoczynamy od znalezienia sumy kwadratów elementów wiersza dolnego (względnie górnego). Po zanotowaniu wartości sumy kwadratów, kasujemy okienka rezultatu arytmometru, obliczamy wartość  $f_1$  ewentualnie:  $f_2$  po czym — bez kasowania okienek rezultatu, odczytywania i zapisywania — dzielimy bezpośrednio rezultat przez zapisaną sumę kwadratów elementów wiersza. Liczniki obrotów przed dzieleniem muszą być oczywiście skasowane.

Wydaje się słuszne zilustrować na niewielkim przykładzie celowość wprowadzenia proponowanej symboliki. Zagadnienie orientacji osiowej pęku prostych (patrz rysunek obok) może być rozwiązane przez zastosowanie poniższego wzoru, podanego przez Délambréa:



$$\overrightarrow{\text{tgCO}} = \frac{(Y_1 - Y_0) \text{ctg } \alpha_1 - (X_1 - X_0) - (Y_2 - Y_1) \text{ctg } \alpha_2 + (X_2 - X_0)}{(X_1 - X_0) \text{ctg } \alpha_1 + (Y_1 - Y_0) - (X_2 - X_0) \text{ctg } \alpha_2 - (Y_2 - Y_0)}$$

Wzór ten, prosty i efektowny z punktu widzenia treści (wyraża on wielkość szukaną bezpośrednio w funkcji wielkości danych, tzn. bez wprowadzenia wielkości pomocniczych), nie jest prosty z punktu widzenia formy. Wystarczy jednak wyrazić ten wzór przez proponowane uprzednio symbole, aby nadać mu formę przejrzystą i przydatną w rachunku liczbowym. Otrzymamy np:

$$\overrightarrow{\text{tgCO}} = \begin{vmatrix} \Delta Y_{01} & \Delta X_{01} \\ 1 & \text{ctg } \alpha_1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \Delta Y_{02} & \Delta X_{02} \\ -1 & -\text{ctg } \alpha_2 \end{vmatrix}_0 \quad \text{lub też:} \quad -\overrightarrow{\text{tgCO}} = \begin{vmatrix} \Delta X_{01} & \Delta Y_{01} \\ \text{ctg } \alpha_1 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \Delta X_{02} & \Delta Y_{02} \\ -\text{ctg } \alpha_2 & -1 \end{vmatrix}_0 \quad \text{itp.}$$

Niewątpliwie jedynie nieprzejrzystość wzoru Délambréa ujętego w ramy zwykłej symboliki algebricznej spowodowała, że dziś jeszcze wielu rachmistrzów unika stosowania tego prostego wzoru i rozwiązuje zadanie orientacji sztucznymi metodami i przy pośrednictwie dodatkowych pojęć geometrycznych, obcych istocie rachunku liczbowego i przedłużających czas pracy.

3. Z definicji (1-6) wynikają oczywiście różne własności funkcji  $f_i$  dające się zużytkować do przeprowadzania dowodów słuszności wzorów, operujących tymi funkcjami. Pomimo, że nie uważamy za celowe badania własności funkcji  $f_i$  gdyż do ich wprowadzenia nie skłaniają nas względy natury poznawczej, lecz korzyści rachunku liczbowego; podamy kilka własności funkcji zerowej  $f_0$  uważając te własności za interesujące i pożyteczne.

1) funkcja  $f_0$  formy  $f$  nie zmienia swej wartości przez pomnożenie elementów któregośkolwiek wiersza formy przez dowolną, różną od zera, liczbę:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}_0 = \begin{vmatrix} ka & kb \\ c & d \end{vmatrix}_0 = \begin{vmatrix} a & b \\ lc & ld \end{vmatrix}_0 \quad k \neq 0 \quad l \neq 0$$

2) funkcja  $f_0$  formy  $f$  nie zmieni swej wartości jeżeli wszystkie elementy położone na przekątnych wzajemnie zmieniają swe miejsca:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}_0 = \begin{vmatrix} d & c \\ b & a \end{vmatrix}_0$$

3) jeżeli funkcje zerowe dwóch form  $f$  i  $\varphi$  są sobie równe:  $f_0 = \varphi_0$ , wówczas jest im też równa funkcja zerowa formy:  $F \equiv |f\varphi|$  lub  $F \equiv |\varphi f|$  otrzymanej przez szeregowe zestawienie form danych:

$$f_0 = \varphi_0 \longrightarrow |f\varphi|_0 = |\varphi f|_0 = f_0 = \varphi_0$$

4) Każda liczba  $t$  może być napisana pod postacią:

$$t = \begin{vmatrix} a & b \\ (a-bt) & (b+at) \end{vmatrix}_0 = \begin{vmatrix} a & b \\ t & 1 \end{vmatrix}_1 \begin{vmatrix} a & b \\ t & 1 \end{vmatrix}_2$$

gdzie  $a$  i  $b$  są dowolnymi, różnymi od zera, liczbami.

5) Jeżeli formy składowe  $f\varphi$  formy złożonej:  $F \equiv |f\varphi|$  mają odpowiadające sobie położeniem elementy jednego z wierszy równe, wówczas forma, którą otrzymamy zestawiając ten wiersz o identycznych elementach z wierszem, otrzymanym w drodze zesumowania odpowiadających sobie położeniem elementów pozostałych wierszy, mieć będzie tę samą funkcję zerową (jak również te same funkcje pierwszą i drugą), co forma  $F$ :

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a & b \\ c_1 & d_1 \end{vmatrix}_0 = \begin{vmatrix} a & b \\ (c+c_1) & (d+d_1) \end{vmatrix}_0 \quad \text{lub} \quad \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ c & d \end{vmatrix}_0 = \begin{vmatrix} (a+a_1) & (b+b_1) \\ c & d \end{vmatrix}_0$$

Własności (1, 2, 4, 5) wynikają bezpośrednio z definicji. Dla wykazania własności (3) mamy:

$$|f\varphi|_0 = \frac{f_1 + \varphi_1}{f_2 + \varphi_2} \text{ lecz: } f_1 = f_0 f_2 \text{ oraz } \varphi_1 = \varphi_0 \varphi_2 \text{ skąd } |f\varphi|_0 = \frac{f_0 f_2 + \varphi_0 \varphi_2}{f_2 + \varphi_2} \quad \text{Z równości } f_0 = \varphi_0$$

$$\text{wynika więc: } |f\varphi|_0 = f_0 \frac{f_2 + \varphi_2}{f_2 + \varphi_2} = f_0 = \varphi_0$$

4. Zastosowania geodezyjne funkcji  $f_i$  podane dalej, mogą być uważane za wnioski z następujących twierdzeń:

A. Tangens różnicy dwóch kątów  $(\alpha - \beta)$  równy jest funkcji zerowej formy, której wiersz górny tworzą dwie jakiegokolwiek liczby  $\delta x_\beta \delta y_\beta$  których stosunek  $\frac{\delta y}{\delta x}$  równy jest tangensowi odjemnika, zaś wiersz dolny tworzą dwie jakiegokolwiek liczby  $\delta x_\alpha \delta y_\alpha$  których stosunek  $\frac{\delta y}{\delta x}$  równy jest tangensowi odjemnej:

$$\boxed{\text{tg } (\alpha - \beta) = \left| \begin{array}{cc} \delta x_\beta & \delta y_\beta \\ \delta x_\alpha & \delta y_\alpha \end{array} \right|_0 \text{ gdzie } \frac{\delta y_i}{\delta x_i} = \text{tg } i \text{ (} i = \alpha, \beta \text{)}} \quad . . . . . 7$$

B. Wartość niewielkiego przyrostu  $d\alpha$  kąta  $\alpha$  w funkcji niewielkich przyrostów:  $dx_L dy_L dx_p dy_p dx_c dy_c$  współrzędnych punktów wyznaczających ten kąt (punkt lewy, punkt prawy, punkt centralny) określa równanie:

$$\boxed{d\alpha = \left| \begin{array}{cc|cc|cc} dx_L & dy_L & dx_p & dy_p & dx_c & dy_c \\ A_L & B_L & -A_p & -B_p & -(A_L - A_p) & -(B_L - B_p) \end{array} \right|_1} \quad . . . . . 8$$

gdzie A i B — z wskaźnikiem  $_L$  dla lewego ramienia kąta, oraz z wskaźnikiem  $_p$  dla prawego ramienia kąta — są funkcjami przyrostów współrzędnych, określonymi przez równania:

$$A = \frac{\Delta x}{\Delta x^2 + \Delta y^2} \quad B = \frac{\Delta y}{\Delta x^2 + \Delta y^2} \quad . . . . . 9$$

$$\text{lub przez równania: } A = \frac{\rho \Delta x}{\Delta x^2 + \Delta y^2} \quad B = \frac{\rho \Delta y}{\Delta x^2 + \Delta y^2} \quad . . . . . 10$$

jeżeli kąt  $d\alpha$  chcemy otrzymać wyrażony w sekundach ( $\rho'' = 206265''$   $\rho^{cc} = 636620^{cc}$ ) <sup>1)</sup>

## ZASTOSOWANIA

5. **Rachunek kątów.** Niech L P C (lewy, prawy, centralny) będą trzy punkty, wyznaczające kąt  $\alpha$  (rys). Znając współrzędne prostokątne tych punktów, obliczymy wartość kąta z równania:

<sup>1)</sup> Oto dowody słuszności twierdzeń (7) i (8):

(7) Podstawiając  $\frac{\delta y_\alpha}{\delta x_\alpha}$  oraz  $\frac{\delta y_\beta}{\delta x_\beta}$  na miejsce  $\text{tg } \alpha$  i  $\text{tg } \beta$  do znanego wzoru goniometrycznego na tangens różnicy otrzymamy:

$$\text{tg } (\alpha - \beta) = \frac{\frac{\delta y_\alpha}{\delta x_\alpha} - \frac{\delta y_\beta}{\delta x_\beta}}{1 + \frac{\delta y_\alpha}{\delta x_\alpha} \cdot \frac{\delta y_\beta}{\delta x_\beta}} = \frac{\frac{\delta y_\alpha \delta x_\beta - \delta y_\beta \delta x_\alpha}{\delta x_\alpha \delta x_\beta}}{\frac{\delta x_\alpha \delta x_\beta + \delta y_\alpha \delta y_\beta}{\delta x_\alpha \delta x_\beta}} = \frac{\delta y_\alpha \delta x_\beta - \delta y_\beta \delta x_\alpha}{\delta x_\alpha \delta x_\beta + \delta y_\alpha \delta y_\beta} = \left| \begin{array}{cc} \delta x_\beta & \delta y_\beta \\ \delta x_\alpha & \delta y_\alpha \end{array} \right|_0 \text{ o c.n.d.}$$

Wzór (7) może więc być uważany za ogólniejsze sformułowanie wzoru na tangens różnicy:

$$\text{tg } (\alpha - \beta) = \frac{\text{tg } \alpha - \text{tg } \beta}{1 + \text{tg } \alpha \cdot \text{tg } \beta}$$

B. Przyrost kąta  $\alpha$ , równego różnicy kątów kierunkowych:  $\overrightarrow{CP}$  i  $\overrightarrow{CL}$  :  $\alpha = \arctg \frac{Y_p - Y_c}{X_p - X_c} - \arctg \frac{Y_L - Y_C}{X_L - X_C}$  może być,

przy założeniu dostatecznie małych wielkości przyrostów  $dx_L dx_p dx_c dy_L dy_p dy_c$  odpowiadających przyrostowi  $d\alpha$  kąta  $\alpha$ , uważamy za różniczkę zupełną:

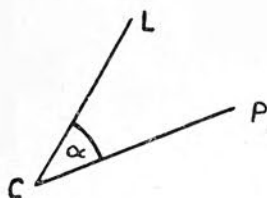
$$d\alpha = \frac{\partial \alpha}{\partial x_L} dx_L + \frac{\partial \alpha}{\partial x_p} dx_p + \frac{\partial \alpha}{\partial x_c} dx_c + \frac{\partial \alpha}{\partial y_L} dy_L + \frac{\partial \alpha}{\partial y_p} dy_p + \frac{\partial \alpha}{\partial y_c} dy_c$$

Że zaś różniczkowanie daje:

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x_L} = \frac{Y_L - Y_c}{\left[1 + \left(\frac{Y_L - Y_c}{X_L - X_c}\right)^2\right] \cdot (X_L - X_c)^2} = \frac{Y_L - Y_c}{(X_L - X_c)^2 + (Y_L - Y_c)^2} = \frac{\Delta Y_{Lc}}{\Delta X_L^2 + \Delta Y_L^2} = B_L \text{ itd. itd.}$$

(analogiczny rachunek pozostałych pochodnych opuszczamy), otrzymamy ostatecznie:

$$d\alpha = B_L dx_L - A_L dy_L - B_p dx_p + A_p dy_p - (B_L - B_p) dx_c + (A_L - A_p) dy_c = \left| \begin{array}{cc|cc|cc} x_L & dy_L & dx_p & dy_p & dx_c & dy_c \\ A_L & B_L & -A_p & -B_p & -(A_L - A_p) & -(B_L - B_p) \end{array} \right|_1 \text{ c.n.d.}$$



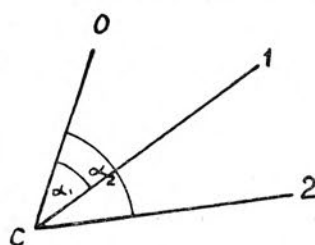
$$\boxed{\operatorname{tg} \alpha = \left| \frac{\Delta x_L}{\Delta x_P} \frac{\Delta y_L}{\Delta y_P} \right|_0} \quad \dots \quad 11$$

w którym  $\Delta x_L, \Delta y_L$  są przyrostami współrzędnych wzdłuż lewego ramienia zaś  $\Delta x_P, \Delta y_P$  są przyrostami współrzędnych wzdłuż prawego ramienia kąta  $\alpha$ , tzn. zupełnie wyraźnie:

$$\begin{aligned} \Delta x_L &= x_L - x_C & \Delta y_L &= y_L - y_C \\ \Delta x_P &= x_P - x_C & \Delta y_P &= y_P - y_C \end{aligned} \quad \dots \quad 12$$

Zespół  $\frac{\Delta x_L}{\Delta x_P} \frac{\Delta y_L}{\Delta y_P}$  zestawień można najprędzej przy pomocy podwójnej maszyny do rachowania. Wzór (11) znajduje zastosowanie rachunkowe przy kontroli obliczenia współrzędnych w typowych zagadnieniach triangulacyjnych, jak również przy określeniu wartości „kątów przybliżonych” w zagadnieniach wyrównawczych. Z punktu widzenia pojęciowego wzór 11 pozwala na szybkie algebraiczne formułowanie wielu zagadnień postawionych pod postacią geometryczną. <sup>2)</sup>

<sup>2)</sup> Weźmy za przykład tzw. zadanie Pothenota czyli zadanie wyznaczania współrzędnych punktów C (rys. obok),



na którym zmierzono kąt  $\alpha_1$ , pod którym widoczny jest z punktu C odcinek  $\vec{O1}$ , oraz kąt  $\alpha_2$  pod którym z tego punktu widoczny jest odcinek  $\vec{O2}$ . Oznaczając przy  $x$  i  $y$  rzuty odcinka  $\vec{CO}$  na osi układu współrzędnych napisać możemy dwa następujące równania typu (11):

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \left| \frac{x}{x + \Delta x_{01}} \frac{y}{y + \Delta y_{01}} \right|_0 \quad \text{oraz} \quad \operatorname{tg} \alpha_2 = \left| \frac{x}{x + \Delta x_{02}} \frac{y}{y + \Delta y_{02}} \right|_0$$

to znaczy w postaci algebraicznej zwykłej:

$$\left. \begin{aligned} \cotg \alpha_1 \cdot \Delta y_{01} x - \cotg \alpha_1 \cdot \Delta x_{01} y &= x^2 + y^2 + \Delta x_{01} x + \Delta y_{01} y \\ \text{oraz: } \cotg \alpha_2 \cdot \Delta y_{02} x - \cotg \alpha_2 \cdot \Delta x_{02} y &= x^2 + y^2 + \Delta x_{02} x + \Delta y_{02} y \end{aligned} \right\} \quad \begin{aligned} &\text{Jest to z punktu widzenia algebry „jednorodny”} \\ &\text{układ dwóch równań drugiego stopnia.} \end{aligned}$$

Rozwiązać go najwygodniej wprowadzając jako pomocniczą zmienną stosunek niewiadomych  $\frac{y}{x} = t$  (geometrycznie będąc

dzię to tangens kąta kierunkowego  $\vec{CO}$ , Podstawiając  $y = tx$  otrzymujemy układ dwóch równań o zmiennych  $t, x$ :

$$\left. \begin{aligned} \cotg \alpha_1 \cdot \Delta y_{01} x - \cotg \alpha_1 \cdot \Delta x_{01} tx &= x^2 + t^2 x^2 + \Delta x_{01} x + \Delta y_{01} tx \\ \cotg \alpha_2 \cdot \Delta y_{02} x - \cotg \alpha_2 \cdot \Delta x_{02} tx &= x^2 + t^2 x^2 + \Delta x_{02} x + \Delta y_{02} tx \end{aligned} \right\}$$

lub, po odjęciu i podzieleniu przez  $x \neq 0$

$$\cotg \alpha_2 \cdot \Delta y_{02} - \cotg \alpha_1 \Delta y_{01} - \cotg \alpha_2 \cdot \Delta x_{02} t + \cotg \alpha_1 \cdot \Delta x_{01} t = \Delta x_{02} - \Delta x_{01} + \Delta y_{02} t - \Delta y_{01} t$$

$$t(\Delta x_{01} \cotg \alpha_1 + \Delta y_{01} - \Delta x_{02} \cotg \alpha_2 - \Delta y_{02}) = \cotg \alpha_1 \Delta y_{01} - \Delta x_{01} - \cotg \alpha_2 \Delta y_{02} + \Delta x_{02}$$

$$\text{stąd } t = \frac{\cotg \alpha_1 \Delta y_{01} - \Delta x_{01} - \cotg \alpha_2 \Delta y_{02} + \Delta x_{02}}{\Delta x_{01} \cotg \alpha_1 + \Delta y_{01} - \Delta x_{02} \cotg \alpha_2 - \Delta y_{02}}$$

Jest to znany wzór Délabre’a na orientację pęku Pothenota. Po podstawieniu  $t$  do któregośkolwiek z równań układu, znaleźć możemy  $x$ . Jeżeli wprowadzić formę podwójną:

$$F \equiv \left| f \quad \varphi \right| = \left| \frac{\Delta x_{01}}{\cotg \alpha_1} \quad \Delta y_{01} \right| - \left| \frac{\Delta x_{02}}{\cotg \alpha_2} \quad \Delta y_{02} \right|$$

będzie, jak łatwo odczytać:  $\frac{y}{x} = t = -F_0$ , czyli  $y = -F_0 x$ . Pierwsze z równań układu po wyniesieniu przed nawias  $x$  i pominięciu nieinteresującego nas rozwiązania daje:

$$-f_1 = x(1 + F_0^2) - F_0(\Delta y_{01} + \Delta x_{01} \cotg \alpha_1) = x(1 + F_0^2) - F_0 f_2$$

Stąd przyrost odciętej między danym punktem O i szukanym C wyniesie:

$$\Delta x_{oc} = -x = \frac{-f_1 - F_0 f_2}{1 + F_0^2} \quad \text{lub przy przyjętym oznaczeniu: } \Delta x_{oc} = \left| \frac{f_1 \quad f_2}{F_0 \quad 1} \right|_{[1]} \quad \text{zaś } \Delta y_{oc} = -y = F_0 x = -F_0 \cdot \Delta x_{oc}. \quad \text{Zadanie Po-}$$

thenota rozwiązują więc ostatecznie wzory, które używamy dalej (14): zauważymy, że wzór na orientację pęku Pothenota

$$\boxed{F \equiv \left| f \quad \varphi \right| = \left| \frac{\Delta x_{01}}{\cotg \alpha_1} \quad \Delta y_{01} \right| - \left| \frac{\Delta x_{02}}{\cotg \alpha_2} \quad \Delta y_{02} \right| \quad \Delta x_{oc} = \left| \frac{f_1 \quad f_2}{F_0 \quad 1} \right|_{[1]} \quad \Delta y_{oc} = -F_0 \cdot \Delta x_{oc}}$$

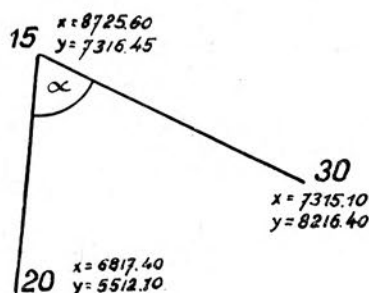
można — wprowadzając zamiast przyrostów współrzędne punktów na zerowym pierwszym i drugim ramieniu pęku — napisać j. n.

$$- \operatorname{tg} \varphi_{co} = \leftarrow F_0 = \left| \frac{x_0 \quad y_0}{-(\cotg \alpha_1 - \cotg \alpha_2) \quad 0} \right| \left| \frac{x_1 \quad y_1}{\cotg \alpha_1 \quad 1} \right| \left| \frac{x_2 \quad y_2}{-\cotg \alpha_2 \quad -1} \right|_0$$



## Przykład liczbowy

Ze znanych współrzędnych punktów 30.15.20 obliczymy wartość kąta  $\sphericalangle 30.15.20 = \alpha$

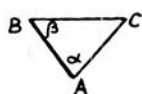


$$\operatorname{tg} \alpha = \begin{vmatrix} -1410.50 & 899.95 \\ -1908.20 & -1804.35 \end{vmatrix}_0 = \frac{4262320}{1067691} = 3.99209 \quad \text{skąd } \alpha = 84.^\circ 37' 45''$$

Przebieg rachunku jest tu przy posługiwaniu się pojedynczym arytmetem następujący: 1) wprowadzamy odciętą punktu centralnego ruchem lewoobrotowym korby. 2) wprowadzamy odciętą punktu lewego prawym obrotem korby i 3) odczytujemy wartość przyrostu  $\Delta x_L$  (-1410,50) po czym 4) przez lewy obrót korby wprowadzamy wartość odciętej punktu lewego z licznika rezultatów. 5) wprowadzamy odciętą punktu prawego prawym obrotem korby

i odczytujemy w okienkach rezultatowych wartość przyrostu  $\Delta x_P$  (-1908,20). Analogiczne postępowanie z rzędnymi pozwoli nam zestawić drugą kolumnę:  $\begin{matrix} 899.95 \\ -1804.35 \end{matrix}$  zespołu. Dalszy rachunek objaśnię nie wymaga.

**7. Wcięcie wprzód.** Znając współrzędne prostokątne punktów A i B oraz kąty  $\alpha$  i  $\beta$  w trójkącie ABC rys. możemy obliczyć współrzędne punktu C, realizując wzór:



$$F \equiv \begin{vmatrix} X_A & Y_A & X_\beta & Y_\beta \\ -1 & \operatorname{ctg} \beta & 1 & \operatorname{ctg} \alpha \end{vmatrix} \quad \dots \dots \dots 13$$

$$x = F(1) \quad y = F(2)$$

Przy zestawianiu formy należy pamiętać, że: 1) kotangensy kątów  $\alpha$  i  $\beta$  wpisuje się w porządku odwrotnym ( $\operatorname{ctg} \beta$  pod  $Y_A$  zaś  $\operatorname{ctg} \alpha$  pod  $Y_\beta$ ), oraz 2) jednostka ujemna -1 napisana jest pod odciętą tego punktu podstawy wcięcia, który będzie początkowym punktem podstawy dla obserwatora poruszającego się po obwodzie trójkąta zagadnienia ruchem prawoskrętnym. Uzasadnienie wzoru w odsyłaczu <sup>1)</sup>. Niezależną kontrolę rachunku stanowi obliczenie wartości kąta C znanym wzorem (11).

<sup>1)</sup> Słuszność wzoru na wcięcie wprzód (13) można krótko uzasadnić, opierając się na związkach między przyrostami  $\Delta X$   $\Delta Y$  współrzędnych prostokątnych, odniesionych do osi głównej układu a przyrostami  $\Delta d$   $\Delta b$  współrzędnych prostokątnych odniesionych do osi odniesienia, tworzącej z osią główną OX kąt  $\varphi$ . Związki te, których słuszność uzasadnimy dalej omawiając transformację współrzędnych, mają postać (p. rys.).



$$\Delta X = \begin{vmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ \Delta d & \Delta b \end{vmatrix}_1 \quad \Delta Y = \begin{vmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ \Delta d & \Delta b \end{vmatrix}_2$$

Obierając bok AB trójkąta wcięcia za oś pomocniczą, której początek znajduje się w punkcie A, mieć będziemy:

$$\Delta X_{AC} = \begin{vmatrix} \cos \varphi_{AB} & \sin \varphi_{AB} \\ C^1 C & AC^1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\Delta X_{AB}}{AB} & \frac{\Delta Y_{AB}}{AB} \\ \frac{AB}{\Sigma \operatorname{ctg}} & \frac{AB}{\Sigma \operatorname{ctg}} \operatorname{ctg} \alpha \end{vmatrix}_1 = \begin{vmatrix} \Delta X_{AB} & \Delta Y_{AB} \\ 1 & \operatorname{ctg} \alpha \end{vmatrix}_1 \quad \text{analogicznie } \Delta Y_{AC} = \begin{vmatrix} \Delta X_{AB} & \Delta Y_{AB} \\ 1 & \operatorname{ctg} \alpha \end{vmatrix}_2$$

gdzie  $\Sigma \operatorname{ctg} = \operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta$ . Otrzymane wzory można łatwo doprowadzić do postaci (13): Pisząc je pod postacią algebraiczną mamy:

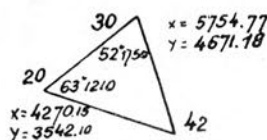
$$X - X_A = \frac{(X_B - X_A) \operatorname{ctg} \alpha - (Y_B - Y_A)}{\Sigma \operatorname{ctg}} \quad \text{t.j. } X = \frac{X_A (\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta) + (X_B - X_A) \operatorname{ctg} \alpha - (Y_B - Y_A)}{\Sigma \operatorname{ctg}} =$$

$$= \frac{X_A \operatorname{ctg} \beta + X_B \operatorname{ctg} \alpha - Y_B + Y_A}{\Sigma \operatorname{ctg}} = f(1) \quad \text{gdzie } f \equiv \begin{vmatrix} X_A Y_A & X_B Y_B \\ -1 \operatorname{ctg} \beta & 1 \operatorname{ctg} \alpha \end{vmatrix}$$

$$Y - Y_A = \frac{X_B - X_A + (Y_B - Y_A) \operatorname{ctg} \alpha}{\Sigma \operatorname{ctg}} \quad \text{t.j. } Y = \frac{Y_A (\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta) + X_B - X_A + (Y_B - Y_A) \operatorname{ctg} \alpha}{\Sigma \operatorname{ctg}} =$$

$$= \frac{Y_A \operatorname{ctg} \beta + Y_B \operatorname{ctg} \alpha + X_B - X_A}{\Sigma \operatorname{ctg}} = f(2) \quad \text{c. ud.}$$

### Przykład liczbowy



Po znalezieniu wartości kotangensów:  $\text{ctg } 63^\circ 12' 10'' = 0.65416$   
 $\text{ctg } 52^\circ 17' 50'' = 0.93391$

$$\text{zestawiamy formę: } f = \begin{vmatrix} 4270.15 & 3542.10 & 5754.77 & 4671.18 \\ -1 & 0.93391 & 1 & 0.65416 \end{vmatrix}$$

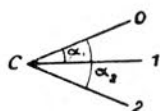
skąd, po zapisaniu wartości sumy elementów dolnego wiersza: 1.58807 obrachujemy bezpośrednio:

$$X_{42} = 4170.72 \\ Y_{42} = 4942.05$$

$$\text{Kontrola rachunku daje: } \text{tg } \alpha_{42} = \begin{vmatrix} 99.43 & -1399.95 \\ 1584.05 & -270.87 \end{vmatrix}_0 = \frac{2190658}{536707} = 4.08166, \text{ skąd: } \alpha_{42} = 84^\circ 7' 42''$$

zamiast:  $200^\circ - 63^\circ 12' 10'' - 52^\circ 17' 50'' = 84^\circ 7' 40''$

**8. Wcięcie wstecz (zagadnienie Pothenota).** Znając współrzędne prostokątne punktów 0 1 2, oraz wartości kątów  $\alpha_1$  i  $\alpha_2$  pod którymi z poszukiwanego punktu C widoczne są odcinki 01 i 02 (rys.) możemy obliczyć współrzędne X Y punktu C realizując wzory:



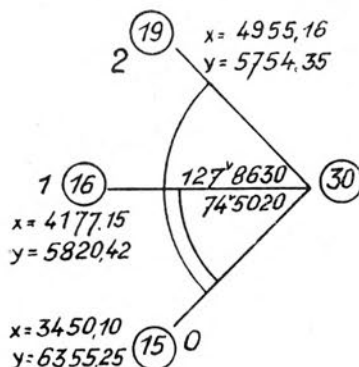
$$F = |f \varphi| = \begin{vmatrix} \Delta X_{01} & \Delta Y_{01} \\ \text{ctg } \alpha_1 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \Delta X_{02} & \Delta Y_{02} \\ -\text{ctg } \alpha_2 & -1 \end{vmatrix} \dots \dots \dots 14$$

$$\Delta X_{oc} = \begin{vmatrix} f_1 & f_2 \\ F_0 & 1 \end{vmatrix} \frac{1}{F} \quad \Delta Y_{oc} = -F_0 \cdot \Delta X_{oc}$$

Niezależną kontrolę rozwiązania stanowi obliczenie wartości kąta 1 C 2 znanym wzorem (11). Dla wygody rachunku za oś odniesienia kątów C O przyjmować należy promień pęku możliwie zbliżony kierunkowo do osi głównej układu OX.

Uzasadnienie wzoru podaliśmy w odsyłaczu na poprzedniej stronie.

### Przykład liczbowy



Po znalezieniu wartości kotangensów:

$$\text{ctg } 74^\circ 5' 020'' = 0.42341 \quad \text{ctg } 127^\circ 8' 630'' = -0.46794$$

oraz obliczeniu przyrostów współrzędnych wzdłuż odcinków widoczności 01.02 mamy:

$$F = |f \varphi| = \begin{vmatrix} 727.05 & -534.83 \\ 0.42341 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1505.06 & -600.90 \\ 0.46794 & -1 \end{vmatrix} \frac{-270.372}{1078.188} = -0.25077$$

Realizując wzory (14) nie należy zapominać, że najwygodniej będzie tu rachować w granicach form składowych. Pozwala to na zapisanie wartości funkcji  $f_1 f_2$  w czasie rachunku, oraz funkcji  $F_1 F_2$  po zakończeniu rachunku w granicach całej tablicy. (Wartości funkcji  $F_1$  oraz ich ilorazu  $F_0$  zapisano za tablicą F).

$$\Delta X_{oc} = \begin{vmatrix} 953.50 & -226.99 \\ -0.25077 & 1 \end{vmatrix} \frac{1}{F} = 843.53 \quad \Delta Y_{oc} = +0.25077 \cdot 843.53 = 211.53$$

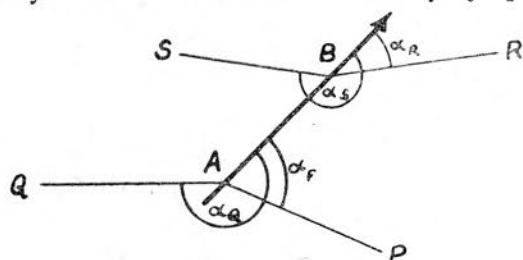
Dodając do otrzymanych przyrostów współrzędne punktu:  $0 \equiv 15$ , otrzymamy:  $X_{30} = 4293.63$   
 $Y_{30} = 6566.78$

Sprawdzenie daje:

$$\text{tg } \alpha_{16-30-19} = \begin{vmatrix} -116.48 & -746.36 \\ 661.53 & -812.43 \end{vmatrix}_0 = 1.11158, \text{ zamiast } \text{tg } 53^\circ 36' 10'' = 1.11159$$



**9. Zagadnienie dwóch punktów.** Niech  $\alpha_P \alpha_Q \alpha_R \alpha_S$  będą wielkościami kątów dyrekcyjnych, odniesionych do osi AB, które charakteryzują położenie punktów A B w stosunku do układu punktów znanych.



Rozwiązanie zagadnienia wyznaczenia współrzędnych prostokątnych punktów A i B przeprowadzimy najpierw w postaci ogólnej t. zn. zakładając cztery różne punkty nawiazania P Q R S, a następnie dla szczególnego wypadku podwójnej identyczności punktów  $P \equiv R$   $Q \equiv S$ , zwanego zadaniem Hansena. W tym nieco ważniejszym praktycznie wypadku stosowanie ogólnej metody rozwiązania niepotrzebnie przedłużałoby czas rachunku.

Rozwiązanie zagadnienia rozbić można na dwa etapy: a) zorientowanie pęku, t. j.: obliczenie kąta kierunkowego AB w odniesieniu do osi głównej układu OX, względnie tangensa tego kąta, oraz b) wyznaczenie współrzędnych. W wypadku ogólnym zadanie orientacji rozwiązują wzory:<sup>1)</sup>

$$f \equiv \begin{vmatrix} X_P & Y_P \\ \cotg \alpha_P & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} X_Q & Y_Q \\ -\cotg \alpha_Q & -1 \end{vmatrix} \quad \varphi \equiv \begin{vmatrix} X_R & Y_R \\ \cotg \alpha_R & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} X_S & Y_S \\ -\cotg \alpha_S & -1 \end{vmatrix} \quad \overrightarrow{\text{tg AB}} = - \frac{f(1) - \varphi(1)}{f(2) - \varphi(2)} \quad \dots \quad 15$$

Znając kąt kierunkowy osi AB (wątpliwości przy określaniu kąta z tangensa wyklucza szkic sieci) obliczymy przez proste dodanie kątów dyrekcyjnych kąty kierunkowe prostych  $\overrightarrow{AP}$   $\overrightarrow{AQ}$   $\overrightarrow{BR}$   $\overrightarrow{BS}$ :

$$\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AB} + \alpha_P \quad \overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{AB} + \alpha_Q \quad \overrightarrow{BR} = \overrightarrow{AB} + \alpha_R \quad \overrightarrow{BS} = \overrightarrow{AB} + \alpha_S$$

co pozwoli na znalezienie kątów przy podstawach w trójkątach PQA oraz SRB i wyznaczenie współrzędnych punktów A i B w drodze dwukrotnego rozwiązania wcięcia wprzód wzorami (13).

Przykład liczbowy zagadnienia dwóch punktów w postaci ogólnej pomijamy.

**Zadanie Hansena** wygodnie można rozwiązać obliczając kąt utworzony przez przekątne czworoboku według wzoru:<sup>2)</sup>



$$\cotg \gamma = \begin{vmatrix} \cotg A & \cotg B \\ \cotg C & \cotg D \end{vmatrix}_1 \quad \dots \quad 15^A$$

$\Sigma \cotg$

<sup>1)</sup> Obierzmy na osi AB punkt O ( $X_0 Y_0$ ) i napiszemy dwukrotnie wzór na orientację pęku Pothenota, przyjmując za punkt zerowy punkt O za punkty pierwszy i drugi: raz P. Q i raz R. S

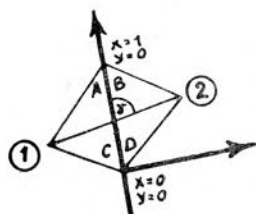
$$\begin{aligned} -\text{tg } \varphi_{AB} &= \begin{vmatrix} X_0 & Y_0 \\ -(\cotg \alpha_P - \cotg \alpha_Q) & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} X_P & Y_P \\ \cotg \alpha_P & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} X_Q & Y_Q \\ -\cotg \alpha_Q & -1 \end{vmatrix}_0 \quad \text{oraz} \quad -\text{tg } \varphi_{AB} = \\ &= \begin{vmatrix} X_0 & Y_0 \\ -(\cotg \alpha_R - \cotg \alpha_S) & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} X_R & Y_R \\ \cotg \alpha_R & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} X_S & Y_S \\ -\cotg \alpha_S & -1 \end{vmatrix}_0 \end{aligned}$$

Mnożąc dolny wiersz pierwszej z form przez  $\cotg \alpha_R - \cotg \alpha_S = S_2$ , zaś dolny wiersz drugiej formy przez  $-(\cotg \alpha_P - \cotg \alpha_Q) = -S_1$  (ilorazy zmianie nie ulegną), oraz łącząc te formy w jedną (porównaj własności funkcji  $f_0$  str. 7 N. 3) wyeliminujemy nieznane współrzędne  $X_0 Y_0$  otrzymując:

$$-\text{tg } \varphi_{AB} = \begin{vmatrix} X_P & Y_P \\ S_2 \cotg \alpha_P & S_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} X_Q & Y_Q \\ -S_2 \cotg \alpha_Q & -S_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} X_R & Y_R \\ -S_1 \cotg \alpha_R & -S_1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} X_S & Y_S \\ S_1 \cotg \alpha_S & S_1 \end{vmatrix}_0$$

co dzieląc dolny wiersz przez  $S_1 S_2$  napisać można w postaci (15).

<sup>2)</sup> Obierzmy przekątną czworoboku, od której liczymy kąt  $\gamma$  za oś główną układu i niech współrzędne punktów określających tę przekątną będą:  $X = 1 \ Y = 0$  oraz  $X = 0 \ Y = 0$  (rysunek).

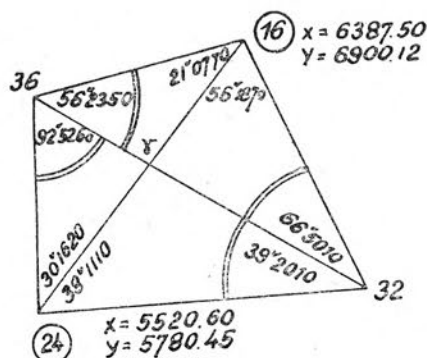


Dwukrotne wcięcie wprzód z tych punktów pozwoli znaleźć współrzędne punktów 1 i 2 i określić kąt osiowy prostej 1-2 równy kątowi  $\gamma$  wzorem:  $\cotg \gamma = \frac{X_2 - X_1}{Y_2 - Y_1}$  Rachunek wcięcia prowadzony wzorem (13) daje:

$$\begin{aligned} X_1 &= \frac{\cotg C}{\cotg A + \cotg C} & Y_1 &= \frac{-1}{\cotg A + \cotg C} & X_2 &= \frac{\cotg D}{\cotg B + \cotg D} & Y_2 &= \frac{1}{\cotg B + \cotg D} \\ \text{stąd: } \cotg \gamma &= \frac{\cotg D (\cotg A + \cotg C) - \cotg C (\cotg B + \cotg D)}{\cotg A + \cotg B + \cotg C + \cotg D} = \begin{vmatrix} \cotg A & \cotg B \\ \cotg C & \cotg D \end{vmatrix}_1 \\ & & & & & \Sigma \cotg \end{aligned}$$

przy czym oznaczenie kątów wyjaśnia załączony obok rysunek. Znajomość kąta między przekątnymi pozwala na obliczenie kątów przy podstawie wcięć łączącej punkty dane w zagadnieniu i sprowadzenie zadania Hansena do dwóch wcięć wprzód.

#### Przykład liczbowy



Dla wyznaczenia położenia punktów 32 i 36 zmierzono kąty ograniczone na szkicu łukiem podwójnym (pozostałe wielkości kątowe wpisywano przy rachunku w miarę ich obliczania). Obliczenie kąta  $\gamma$  między przekątnymi 32—36 i 24—16 daje:

$$\operatorname{ctg} \gamma = \frac{\left| \begin{array}{cc} \operatorname{ctg} 92^\circ 52'60'' & \operatorname{ctg} 56^\circ 23'50'' \\ \operatorname{ctg} 39^\circ 20'10'' & \operatorname{ctg} 66^\circ 50'10'' \end{array} \right|}{\sum \operatorname{ctg}} \times \frac{\left| \begin{array}{cc} 0.117944 & 0.821073 \\ 1.413349 & 0.580825 \end{array} \right|}{2933191} = -0.372276$$

Obliczając kąty przy podstawie 24.16 w trójkątach 16—24—36 oraz 24—16—32 znajdujemy:

$$\begin{aligned} 200^\circ - 56^\circ 23'50'' - 122^\circ 68'80'' &= 21^\circ 07'19'' \\ 122^\circ 68'80'' - 92^\circ 52'60'' &= 30^\circ 16'20'' \end{aligned}$$

oraz:

$$122^\circ 68'80'' - 66^\circ 50'10'' = 56^\circ 18'70'' \text{ i } 200^\circ - 39^\circ 20'10'' - 122^\circ 68'80'' = 38^\circ 11'10''$$

Rozwiązując zadania wcięcia wprzód dla punktów 36 i 32 z podstawy 24—16 (wzór 13) otrzymamy:

$$X_{36} = f_{(1)} = 6098.92 \quad Y_{36} = f_{(2)} = 6051.42 \quad X_{32} = \varphi_{(1)} = 5586.66 \quad Y_{32} = \varphi_{(2)} = 6876.59$$

#### 10. Zagadnienie wielu punktów wyznaczonych z obserwacji kątowych

Niech będzie do wyznaczenia  $p$  punktów w dowolnej sieci trygonometrycznej. Znając wartości  $2p$  niezależnych kątów, określających położenie wyznaczanych punktów w stosunku do układu punktów znanych, rozwiązać można zagadnienie obliczenia współrzędnych punktów wyznaczanych w następujący sposób:

1) po obliczeniu przybliżonych wartości współrzędnych punktów wyznaczanych — co osiągnąć można np: na drodze konstrukcji graficznej — zestawiamy dla każdego kąta „równanie obserwacyjne“:

$$\left| \begin{array}{cc|cc|cc} dx_L & dy_L & dx_P & dy_P & dx_C & dy_C \\ A_L & B_L & -A_P & -B_P & -(A_L - A_P) & -(B_L - B_P) \end{array} \right|_1 + \alpha_{prz} - \alpha_{obs} = 0 \quad \dots \dots \dots 16$$

w którym:  $dx$   $dy$  są poszukiwanymi poprawkami, jakie należy dodać do przybliżonych wartości współrzędnych dla ich przekształcenia na wartości współrzędnych spełniające założone warunki (przy czym jak zawsze wskaźniki  $L$  odnoszą się do punktu na lewym ramieniu kąta, wskaźniki  $P$  do punktu na prawym ramieniu kąta, wreszcie wskaźniki  $C$  do punktu wierzchołkowego kąta)  $\alpha_{prz}$  jest wartością kąta obliczoną z przybliżonych współrzędnych:

$$\operatorname{tg} \alpha_{prz} = \left| \begin{array}{cc} \Delta x_L & \Delta y_L \\ \Delta x_P & \Delta y_P \end{array} \right|_0 \dots \dots \dots 17$$

$\alpha_{obs}$  jest wartością kąta, uzyskaną z obserwacji.

Wielkości  $A$   $B$  (z wskaźnikami  $L$  i  $P$  dla lewego i prawego ramienia kąta) są funkcjami przyrostów współrzędnych wzdłuż ramion kąta, zdefiniowanymi przez równania (9). Wartości liczbowe wielkości  $AB$  najwygodniej zresztą określać z nomogramu siatkowego według argumentów  $\Delta x$   $\Delta y$  odczytanych na osiach.

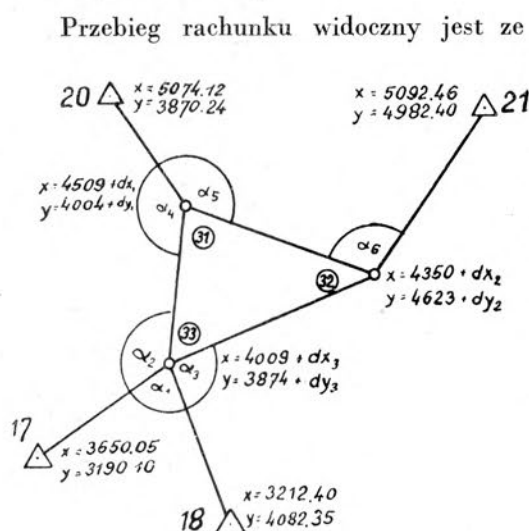
2) Po zestawieniu dla każdego kąta równania obserwacyjnego w postaci tabelarycznej (16) — przy czym oczywiście wartości  $AB_x$  podane są liczbowo — otrzymamy układ  $2p$  równań liniowych o  $2p$  niewiadomych, który rozwijamy, t. zn. wyrażamy pod postacią przyjętą w algebrze symbolizowaną ogólnie:

$$a_1x + b_1y + c_1z + \dots + l_1 = 0 \quad \dots \dots \dots 18$$

i rozwiązujemy znajdując poszukiwane poprawki współrzędnych przybliżonych.

Najpełniejszą kontrolę stanowi obliczenie wartości kątów z poprawionych współrzędnych.

## Przykład liczbowy



Przebieg rachunku widoczny jest ze schematu: kąty przybliżone i różnice  $\alpha_{prz} - \alpha_{obs}$  obliczone w pierwszych czterech kolumnach. W piątej kolumnie wpisano wartości współczynników AB. Wartości te można sprawdzić obliczając dla każdego kąta wyrażenie:  $\begin{vmatrix} A_L & B_L \\ A_P & B_P \end{vmatrix}_0$  którego wartość winna okazać się równą tangensowi kąta. Szósta kolumna zawiera równania obserwacyjne poszczególnych kątów napisane w postaci tabelarycznej (16). W dalszych kolumnach równania te doprowadzono do postaci algebraicznej, tzn. napisano je pod postacią tabeli współczynnika układu równań liniowych. Rozwiązanie tego układu równań daje:

$$\begin{aligned} X_{31} &= 4509 + dx_1 = 4508.46 & Y_{31} &= 4003.86 & X_{32} &= 4350.16 \\ Y_{32} &= 4623.12 & X_{33} &= 4009.12 & Y_{33} &= 3874.21 \end{aligned}$$

Sprawdzając wartości kątów otrzymamy z dostateczną dokładnością:

$$\begin{aligned} \text{tg } \alpha_{31} &= \begin{vmatrix} -158.30 & 619.26 \\ -499.34 & -129.65 \end{vmatrix}_0 & \text{tg } \alpha_{32} &= \begin{vmatrix} -341.04 & -748.91 \\ 158.30 & -619.26 \end{vmatrix}_0 & \text{tg } \alpha_{33} &= \begin{vmatrix} 499.34 & 129.65 \\ 341.04 & 748.91 \end{vmatrix}_0 \\ \alpha_{31} &= 100^\circ 239 \text{ zamiast } 100^\circ 241 & \alpha_{32} &= 43^\circ 137 & \alpha_{33} &= 56^\circ 624 \text{ zamiast } 56^\circ 623 \end{aligned}$$

Rachunek kątów				Współczynniki		Równania obserwacyjne kątów															
$f \equiv \begin{vmatrix} \Delta X_L & \Delta Y_L \\ \Delta X_P & \Delta Y_P \end{vmatrix}$		$f_1$ $f_2$ $f_0 = \text{tg} \alpha_{prz}$	$\frac{\alpha_{prz}}{\alpha_{obs}}$ $\alpha_{prz} - \alpha_{obs}$	$A_L$ $A_P$	$B_L$ $B_P$	postać tabelaryczna						postać algebraiczna (tablica współczynników)									
						$dx_L$ $A_L$	$dy_L$ $B_L$	$dx_P$ $-A_P$	$dy_P$ $-B_P$	$dx_C$ $-(A_L - A_P)$	$dy_C$ $-(B_L - B_P)$	$\alpha_{prz}$ $+$ $-\alpha_{obs}$	$dx_1$ $-0.5A_3$	$dy_1$ $-0.1B_3$	$dx_2$ $0.16A_2$	$dy_2$ $0.1A_2$	$dx_3$ $0.12A_1$	$dy_3$ $0.20A_3$	L	S	
$\alpha_1$	$\begin{vmatrix} -796.60 & 208.35 \\ -358.95 & -683.90 \end{vmatrix}$	619582	85.5158	-748	196	0	0	0	0	$dx_3$	$dy_3$	$+188$						-926	-365	188	
		143449	85.4970																		
$\alpha_2$	$\begin{vmatrix} -358.95 & -683.90 \\ 500.00 & 130.00 \end{vmatrix}$	4.319180	$+188^{cc}$	-383	-730	-748	196	383	730	365	-926	$_1$									
		295287	146.59636	-383	-730	0	0	$dx_1$	$dy_1$	$dx_3$	$dy_3$	$+196$	-310	1193			1040	-1576	196		
		-268382	146.9440																		
$\alpha_3$	$\begin{vmatrix} -358.95 & -683.90 \\ 500.00 & 130.00 \end{vmatrix}$	-1.100249	$+196^{cc}$	1193	310	-383	-730	-1193	-310	1576	1040	$_1$									
		667701	110.59124	321	704	$dx_2$	$dy_2$	0	0	$dx_3$	$dy_3$	$-236$				704	-321	-508	1069	-236	
		-115586	110.9360																		
$\alpha_4$	$\begin{vmatrix} 341.00 & 749.00 \\ -796.60 & 208.35 \end{vmatrix}$	-5.776660	$-236^{cc}$	-748	196	321	704	748	-196	-1069	-508	$_1$									
		140346	169.50103	-1193	-310	$dx_3$	$dy_3$	0	0	$dx_1$	$dy_1$	$-487$	58	-2260			-310	1193	-487		
		-265171	169.0590																		
$\alpha_5$	$\begin{vmatrix} -500.00 & -130.00 \\ 565.12 & -133.76 \end{vmatrix}$	-0.529266	$-487^{cc}$	1067	-252	-1193	-310	-1067	252	2260	58	$_1$									
		328541	130.58027	1067	-252	0	0	$dx_2$	$dy_2$	$dx_1$	$dy_1$	$+1027$	1217	1315	-965	-248			1027		
		-172652	130.7000																		
$\alpha_6$	$\begin{vmatrix} 565.12 & -133.76 \\ -159.00 & 619.00 \end{vmatrix}$	-1.902909	$+1027^{cc}$	-248	965	1067	-252	248	-965	-1315	1217	$_1$									
		516727	112.56935	248	-965	$dx_1$	$dy_1$	0	0	$dx_2$	$dy_2$	$-715$	-965	-248	1301	-447			-715		
		-104417	112.7650																		
		-4.948687	$-715^{cc}$	695	336	248	-965	-695	-336	447	1301	$_1$									

## 11. Zagadnienie wyrównania błędów w kątowych sieciach triangulacyjnych

Jeżeli ilość obserwacji kątowych w sieci jest większa od podwójnej ilości wyznaczanych punktów powstaje „zagadnienie wyrównania błędów w sieci“, które może być uważane za uogólnienie rozpatrzonego uprzednio „zagadnienia wielu punktów“. Oznaczając przez  $v$  poprawki, które trzeba dodać do wartości zaobserwowanych kątów — przy utrzymaniu bez zmiany znaczenia symboli  $dx$   $dy$   $A$   $B$   $\alpha_{obs}$   $\alpha_{prz}$  przyjętych uprzednio (str. 13) — mieć będziemy dla każdego kąta w sieci następujące równanie obserwacyjne („równanie błędu obserwacji kątowej“).

$$\begin{vmatrix} dx_L & dy_L & dx_P & dy_P & dx_C & dy_C \\ A_L & B_L & -A_P & -B_P & -(A_L - A_P) & -(B_L - B_P) \end{vmatrix}_1 + \alpha_{prz} - \alpha_{obs} = v \quad \dots \dots \dots 19$$

Ponieważ ilość równań będzie tu większa od ilości niewiadomych otrzymamy w wyniku rozwiązania symboli (19) układ równań (stosujemy ogólnie przyjętą symbolikę):  $a_i x + b_i y + c_i z \pm \dots \pm l_i = v_i \dots 20$  nie posiadający — przy założeniu  $v = 0$  — jednoznacznego rozwiązania. Pozostaje prze-

kształcić ten układ w znany sposób na układ równań normalnych Gaussa spełniający warunek minimum sumy kwadratów poprawek obserwacji  $\sum v_i^2 = \min$ , względnie warunek minimum sumy iloczynów kwadratów poprawek  $v_i$  przez odpowiadające im wagi  $p_i$  tj.  $\sum p_i v_i^2 = \min$ . Tablica współczynnikowa takiego układu, tj. tablica:

$$\left. \begin{array}{ll} [aa] [ab] [ac] \cdot [al] & \text{dla obserwacji} \\ [ab] [bb] [bc] \cdot [bl] & \text{o równej do-} \\ [ac] [bc] [cc] \cdot [cl] & \text{kładności} \end{array} \right\} \dots\dots 2l_1 \quad \text{lub tablica} \quad \left. \begin{array}{ll} [paa] [pab] [pac] \cdot [pal] & \text{dla obserwacji} \\ [pab] [pbb] [pbc] \cdot [pbl] & \text{o różnej do-} \\ [pac] [pbc] [pcc] \cdot [pcl] & \text{kładności} \end{array} \right\} \dots\dots\dots 2l_2$$

pozwała wyznaczyć wielkości poszukiwanych poprawek współrzędnych, jak też scharakteryzować liczbowo dokładność osiągniętych rezultatów. Posiłkując się symboliką wyznacznikową otrzymamy dla punktu P, którego odcięta jest  $i^{\text{ta}}$  zaś rzędna  $k^{\text{ta}}$  niewiadomą układu następujące wzory-

$$\left. \begin{array}{l} \text{dla poprawek} \\ \text{współrzędnych;} \end{array} \right\} \begin{array}{l} dx = \frac{D_i}{D} \\ dy = \frac{D_k}{D} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \text{dla średnich} \\ \text{błędów} \\ \text{współrzędnych;} \end{array} \right. \begin{array}{l} m_x = m_0 \sqrt{\frac{D_{ii}}{D}} \\ m_y = m_0 \sqrt{\frac{D_{kk}}{D}} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \text{lub dla błędów śr.} \\ \text{wyznaczenia} \\ \text{punktu;} \end{array} \right. m_p = m_0 \sqrt{\frac{D_{ii} + D_{kk}}{D}} \dots\dots\dots 22$$

$D$  jest tu wyznacznikiem głównym układu równań normalnych,  $D_i$  oraz  $D_k$  są wyznacznikami, powstającymi z zastąpienia w wyznaczniku głównym jego  $i^{\text{tej}}$  względnie  $k^{\text{tej}}$  kolumny przez kolumnę wyrazów wolnych.  $D_{ii}$  oraz  $D_{kk}$  są minorami powstającymi z wyznacznika głównego przez skreślenie  $i^{\text{tego}}$  wiersza i  $i^{\text{tej}}$  kolumny, względnie  $k^{\text{tego}}$  wiersza i  $k^{\text{tej}}$  kolumny. Symbol  $m_0$  oznacza błąd średni obserwacji o jednostkowej wadze  $m_0 = \sqrt{\frac{[pvv]}{S}}$ , gdzie  $S$  ilość nadliczbowych obserwacji.<sup>1)</sup>

<sup>1)</sup> Oznaczmy przez  $dx$  przyrost, jakiego dozna wartość kąta  $\alpha_{prz}$  obliczona z przybliżonych współrzędnych, gdy współrzędnym tym nadamy poprawki  $dx_L, dy_L, dx_P, dy_P, dx_C, dy_C$  zamieniające współrzędne przybliżone na najprawdopodobniejsze przy danym układzie spostrzeżeń. Jeżeli  $\alpha_{prz} + dx$  ma być najprawdopodobniejszy wartością kąta, musi być  $\alpha_{prz} + dx = \alpha_{obs} + v$ , gdzie  $\alpha_{obs}$  wartość zaobserwowana kąta, zaś  $v$  poprawka spełniająca warunek minimum ( $\sum vv$  wzgl.  $\sum pvv$ ). Mamy więc  $dx + \alpha_{prz} - \alpha_{obs} = v$ , skąd po skorzystaniu z twierdzenia o przyroście wartości kąta (8), otrzymamy równanie (19), względnie, przy zastosowaniu ogólniejszej symboliki ( $x, y, z, \dots$  niewiadome zadania, a  $b, c$  współczynniki, wyrazy wolne), równania (20). Przejścia od równań błędów (poprawek) do równań normalnych Gaussa i równań wagowych, jako znanego z rachunku wyrównawczego, nie omawiamy.

Stosując do układu równań normalnych Gaussa rozwiązanie wyznacznikowe otrzymamy od razu wzory na niewiadome. Dla wykazania słuszności wzorów na średnie błędy niewiadomych napiszmy układ równań wagowych, np. dla pierwszej niewiadomej;

$$\begin{array}{l} [aa]Q_{11} + [ab]Q_{12} + [ac]Q_{13} \dots = 1 \\ [ab]Q_{11} + [bb]Q_{12} + [bc]Q_{13} \dots = 0 \\ \dots \dots \dots \end{array}$$

przy czym  $Q_{11}$  jest współczynnikiem wagowym pierwszej niewiadomej, tzn. zachodzi związek  $m_1 = m_0 / \sqrt{Q_{11}}$ , gdzie  $m_1$  błąd średni niewiadomej, zaś  $m_0$  błąd średni poszczególnego spostrzeżenia.

Obliczając niewiadomą  $Q_{11}$  otrzymamy przy oznaczeniu przez  $D$  wyznacznika głównego układu:

$$Q_{11} = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} 1 & [ab] & [ac] & \dots \\ 0 & [bb] & [bc] & \dots \\ 0 & [bc] & [cc] & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}$$

co po rozwinięciu wyznacznika według elementów pierwszej kolumny daje  $Q_{11} = \frac{1}{D} (1 \cdot D_{11} + 0 \cdot D_{21} + 0 \cdot D_{31}) = \frac{D_{11}}{D}$ .

Mamy więc:  $m_1 = m_0 \sqrt{\frac{D_{11}}{D}}$ , ogólnie  $m_i = m_0 \sqrt{\frac{D_{ii}}{D}}$ . Jeżeli odcięta pewnego punktu jest  $i^{\text{ta}}$ , zaś rzędna  $k^{\text{ta}}$  niewia-

domą układu, błąd wyznaczenia punktu  $m_p$  będzie:  $m_p = \sqrt{m_i^2 + m_k^2} = \sqrt{m_0^2 \frac{D_{ii}}{D} + m_0^2 \frac{D_{kk}}{D}} = m_0 \sqrt{\frac{D_{ii} + D_{kk}}{D}}$ .

Układ równań wag można było oczywiście napisać w ogólniejszej postaci:  $[paa, \dots]$ , co w niczym nie zmieniłoby dowodu ( $m_0$  będzie wtedy błędem spostrzeżenia o wadze = 1).



Przykład liczbowy (tzw. wielokrotne wcięcie w przód)

Rachunek kątów				Współczynniki kierunkowe		Równania błędów obserwacji kątowych									
NN kąta	$f = \begin{vmatrix} \Delta x_L & \Delta y_L \\ \Delta x_P & \Delta y_P \end{vmatrix}$	$f_1$ $f_2$ $f_0 = \text{tg } \alpha_{\text{prz}}$	$\alpha_{\text{prz}}$ $\alpha_{\text{obs}}$ $L = \alpha_{\text{prz}} - \alpha_{\text{obs}}$	$A_L$ $A_P$	$B_L$ $B_P$	postać tabelaryczna					postać algebraiczna				
						$\frac{dx_L}{A_L}$	$\frac{dy_L}{B_L}$	$\frac{dx_P}{-A_P}$	$\frac{dy_P}{-B_P}$	$\frac{dx_C}{-(A_L \cdot A_P) - (B_L \cdot B_P)}$	$\frac{dy_C}{-(A_L \cdot B_P) - (B_L \cdot A_P)}$	$\frac{+1}{1}$	$\frac{dx}{0,040}$	$\frac{dy}{-0,207}$	$\frac{L}{1}$
1	$\begin{vmatrix} 2469,14 & -370,37 \\ 1234,54 & 494,03 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 1677066 \\ 2865278 \\ 0,58531 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 33,87121 \\ 33,87037 \\ + 84^{\text{cc}} \end{vmatrix}$	252	-38	0	0	dx	dy	0	0	+84	-178	445	84
2	$\begin{vmatrix} 493,82 & 2716,05 \\ -1234,60 & 864,40 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 3780093 \\ 1738083 \\ 2,17486 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 72,85634 \\ 72,85741 \\ - 107^{\text{cc}} \end{vmatrix}$	41	227	0	0	dx	dy	0	0	-107	-242	-346	-107
3	$\begin{vmatrix} -2222,22 & -123,45 \\ -1728,42 & -1851,65 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 3901400 \\ 4069516 \\ 0,95869 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 48,86575 \\ 48,86574 \\ + 1^{\text{cc}} \end{vmatrix}$	-286	-16	0	0	dx	dy	0	0	+1	184	-172	1
4	$\begin{vmatrix} 493,80 & -1728,20 \\ 2222,22 & 123,45 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 3901400 \\ 883986 \\ 4,41342 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 85,88149 \\ 85,88148 \\ + 1^{\text{cc}} \end{vmatrix}$	97	-341	dx	dy	0	0	0	0	+1	-341	-97	1
				286	16	97	-341	...	...	...	...	1	...	...	...

$x = 2839,51$   
 $y = 737,28$

$x = 3333,33$   
 $y = 3453,33$

$x = 1111,11$   
 $y = 3329,88$

$x = 3703,37$   
 $y = 1107,65$

$D = 10^4 \begin{vmatrix} 2404 & 60 \\ 60 & 3567 \end{vmatrix} = 10^8 \cdot 857; \quad D_x = 10^4 \cdot \begin{vmatrix} -108 & 60 \\ -741 & 3567 \end{vmatrix} = -10^8 \cdot 34;$

$D_y = 10^4 \cdot \begin{vmatrix} 2404 & -108 \\ 60 & -741 \end{vmatrix} = -10^8 \cdot 177,4$

$dx_{31} = \frac{-34}{857} = -0,040; \quad dy_{31} = \frac{-177,4}{857} = -0,207; \quad m_0 = \sqrt{\frac{2692}{2}} = \pm 37^{\text{cc}}$

$m_x = 37 \sqrt{\frac{36 \cdot 10^4}{857 \cdot 10^8}} = 0,37 \sqrt{0,042} = \pm 0,08;$

$m_y = 37 \sqrt{\frac{24 \cdot 10^4}{857 \cdot 10^8}} = 0,37 \sqrt{0,028} = \pm 0,06$

Obliczenie przybliżonych współrzędnych p. 31

$f = \begin{vmatrix} 3333,33 & 3453,33 \\ -1 & 0,22658 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 1111,11 & 3329,88 \\ 1 & 1,04309 \end{vmatrix}$	$x_{31}^0 = f(1) = 1604,91$	$-0,04$	$x_{31}^0 = f(2) = 1601,68$	$-0,21$
---	--	-----------------------------	---------	-----------------------------	---------

Współrzędne wyrównane:  
 $x_{31} = 1604,87$   
 $y_{31} = 1601,47$

Przykład liczbowy (tzw. wielokrotne wcięcie wstecz)

Rachunek kątów				Współczynniki kierunkowe		Równanie błędów obserwacji kątowych									
NN kąta	$f = \begin{vmatrix} \Delta x_L & \Delta y_L \\ \Delta x_P & \Delta y_P \end{vmatrix}$	$f_1$ $f_2$ $f_0 = \text{tg } \alpha_{\text{prz}}$	$\alpha_{\text{prz}}$ $\alpha_{\text{obs}}$ $L = \alpha_{\text{prz}} - \alpha_{\text{obs}}$	$A_L$ $A_P$	$B_L$ $B_P$	postać tabelaryczna					postać algebraiczna				
						$\frac{dx_L}{A_L}$	$\frac{dy_L}{B_L}$	$\frac{dx_P}{-A_P}$	$\frac{dy_P}{-B_P}$	$\frac{dx_C}{-(A_L \cdot A_P) - (B_L \cdot B_P)}$	$\frac{dy_C}{-(A_L \cdot B_P) - (B_L \cdot A_P)}$	$\frac{+1}{1}$	$\frac{dx}{0,124}$	$\frac{dy}{0,002}$	$\frac{L}{1,000}$
1	$\begin{vmatrix} -740,66 & -1728,31 \\ 1358,11 & -1234,48 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 3261565 \\ 1127666 \\ 2,89231 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 78,88083 \\ 78,88117 \\ - 34^{\text{cc}} \end{vmatrix}$	-133	-311	0	0	0	0	dx	dy	-34	78	-390	-34
2	$\begin{vmatrix} 1358,11 & -1234,48 \\ 1975,39 & 987,74 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 3780039 \\ 1463452 \\ 2,58296 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 76,84844 \\ 76,84846 \\ - 2^{\text{cc}} \end{vmatrix}$	257	-233	0	0	0	0	dx	dy	-2	362	-1	-2
3	$\begin{vmatrix} 1975,39 & 987,74 \\ -123,37 & 1728,48 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 3536280 \\ 1463585 \\ 2,41618 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 75,80183 \\ 75,80185 \\ - 2^{\text{cc}} \end{vmatrix}$	258	129	0	0	0	0	dx	dy	-2	237	284	-2
4	$\begin{vmatrix} -123,37 & 1728,48 \\ -1357,93 & 370,46 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 2301451 \\ 807861 \\ 2,84882 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 78,85086 \\ 78,85062 \\ + 24^{\text{cc}} \end{vmatrix}$	-26	366	0	0	0	0	dx	dy	+24	-247	410	24
5	$\begin{vmatrix} -1357,93 & 370,46 \\ -740,66 & -1728,31 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 2621309 \\ 365495 \\ 7,17194 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 91,81803 \\ 91,81698 \\ + 105^{\text{cc}} \end{vmatrix}$	-436	119	0	0	0	0	dx	dy	+105	-430	-303	105
				-133	-311	-436	119	133	311	303	-430	1	...	...	...

$x = 3086,42$   
 $y = 865,40$

$x = 3703,70$   
 $y = 3087,62$

$x = 1728,31$   
 $y = 2099,88$

$x = 1604,94$   
 $y = 3328,36$

$x = 370,38$   
 $y = 2470,34$

$D = 10^4 \cdot \begin{vmatrix} 4392 & 655 \\ 655 & 4927 \end{vmatrix} = 10^8 \cdot 2121; \quad D_x = 10^4 \cdot \begin{vmatrix} 549 & 655 \\ 93 & 4927 \end{vmatrix} = 10^8 \cdot 264;$

$D_y = 10^4 \cdot \begin{vmatrix} 4392 & 549 \\ 655 & 93 \end{vmatrix} = 10^8 \cdot 489$

$dx_{20} = \frac{264}{2121} = 0,124; \quad dy_{20} = \frac{5}{2121} = 0,002; \quad m_0 = \sqrt{\frac{5895}{3}} = \pm 44^{\text{cc}}$

$m_x = 44 \sqrt{\frac{49 \cdot 10^4}{2121 \cdot 10^8}} = 0,44 \sqrt{0,023} = \pm 0,07$

$m_y = 44 \sqrt{\frac{44 \cdot 10^4}{2121 \cdot 10^8}} = 0,44 \sqrt{0,021} = \pm 0,07$

Obliczenie przybliżonych współrzędnych p. 20

$F = \begin{vmatrix} 617,28 & 2222,22 \\ 0,38715 & 1 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} -1481,48 & 2962,96 \\ 1,04837 & -1 \end{vmatrix}$	$x_{20}^0 = 1728,31$	$-1867,85$	$x_{20}^0 = 2099,88$	$-2054,90$
---	--	----------------------	------------	----------------------	------------

Współrzędne wyrównane:  
 $x_{20} = 1728,43$   
 $y_{20} = 2099,88$



Przykład liczbowy (t.zw. wielokrotne wcięcie skombinowane)

$x = 8397,15$   
 $y = 5617,27$   
 $x_0 = 7020$   
 $y_0 = 6617$   
 $x = 5387,60$   
 $y = 5196,45$   
 $x = 4623,15$   
 $y = 7588,26$   
 $x = 5812,40$   
 $y = 8597,42$   
 $x = 8412,75$   
 $y = 8808,32$   
 $x = 9433,58$   
 $y = 7186,56$

$135843 \quad 2897 \quad -20878 \quad 117862 \quad [VV] = 713$   
 $2897 \quad 180257 \quad -8361 \quad 174793$   
 $D = \begin{vmatrix} 135843 & 2897 \\ 2897 & 180257 \end{vmatrix} = 24478 \cdot 10^6 \quad D_{11} = 0,180 \cdot 10^6 \quad D_{22} = 0,136 \cdot 10^6$   
 $D_1 = \begin{vmatrix} 20878 & 2897 \\ 8361 & 180257 \end{vmatrix} = 3739 \cdot 10^6 \quad D_2 = \begin{vmatrix} 135843 & 20878 \\ 2897 & 8361 \end{vmatrix} = 1075 \cdot 10^6$   
 stąd:  $dx = \frac{D_1}{D} = 0,1527 \quad dy = \frac{D_2}{D} = 0,0439 \quad X_{30} = 7020,15 \quad Y_{30} = 6417,04$   
 $m_p = m_0 \cdot \sqrt{\frac{0,180 + 0,136}{24478}} = m_0 \cdot \sqrt{0,0000129} = m_0 \cdot 0,0036$   
 Jeżeli przyjąć wartość średniego błędu jednej obserwacji kątowej równą  $m_0 = \sqrt{\frac{[VV]}{S}}$  (przy małej ilości obserwacji nadliczbowych  $S = 4 - 2 = 2$  wzór ten nie posiada większego realnego znaczenia), tzn.  $m_0 = \sqrt{\frac{713}{2}} = \pm 19,1''$  błąd  $m_p$  wyznaczenia punktu będzie:  $m_p = \pm 19 \cdot 0,0036 = \pm 0,07$ .  
 Poprawione wartości obserwacji kątowych wynoszą:  
 $\sphericalangle 1 = 74,81064 \quad \sphericalangle 2 = 55,87986 \quad \sphericalangle 3 = 56,87985 \quad \sphericalangle 4 = 70,89045$

Przykład liczbowy (t. zw. grupa dwupunktowa)

Rachunek kątów				Współczynniki kierunkowe		Równania obserwacyjne kątów									
Ozn. kąta	$f = \frac{\Delta X_L \Delta Y_L}{\Delta X_P \Delta Y_P}$	$f_1$ $f_2$ $f_0 = \tan \alpha_{prz}$	$\alpha_{prz}$ $\alpha_{obs}$ $\alpha_{prz} - \alpha_{obs}$	$A_L$ $A_P$	$B_L$ $B_P$	postać tabelaryczna					postać algebraiczna				
						$dx_L dy_L$ $A_L B_L$	$dx_P dy_P$ $-A_P B_P$	$dx_C dy_C$ $-(A_L A_P) - (B_L B_P)$	$\alpha_{prz} - \alpha_{obs}$	$dx_1$ 0,151	$dy_1$ 0,204	$dx_2$ 0,110	$dy_2$ 0,158	$l$	$S$ (V)''
1	-1891,25 -617,84 1334,40 -1025,23	2763412 -1890256 -1,461925	138,91926 133,91780 146"	-304	-99	0 0 -304 -99	0 0 -300 230	$dx_1 dy_1$ 604 -131	+146 1	-131	-604			146	-589 (3,0)
2	1334,40 -1025,23 1960,15 1668,26	4235731 905274 4,678949	86,95956 86,96050 -94"	390	-230	0 0 300 -230	0 0 -188 -160	$dx_1 dy_1$ -112 390	-94 1	390	112			-94	408 (-12,3)
3	1960,15 1668,26 -96,00 1602,00	3300313 2484378 1,328426	58,99207 58,99240 -33"	188	160	0 0 188 160	$dx_2 dy_2$ 24 -396	$dx_1 dy_1$ -212 236	-33 1	236	212	-396	-24	33	-5 (-1,5)
4	-96,00 1602,00 -1891,25 -617,84	3089095 -808220 -3,822097	116,92911 116,92930 -19"	-24	396	$dx_2 dy_2$ -24 396	0 0 304 99	$dx_1 dy_1$ -280 -495	-19 1	-495	280	396	24	19	186 (10,7)
5	1795,25 -2219,84 96,00 -1602,00	3089095 3383840 0,912896	47,91031 47,91030 +1"	-140	-173	0 0 -140 -173	$dx_1 dy_1$ -24 396	$dx_2 dy_2$ 164 -223	+1 1	396	24	-223	-164	1	34 (15,2)
6	96,00 -1602,00 2056,15 66,26	3300313 91241,88 36,1710	98,92404 98,92350 54"	24	-396	$dx_1 dy_1$ 24 -396	0 0 -309 -10	$dx_2 dy_2$ 285 406	+54 1	-396	-24	406	-285	54	-215 (-11,1)
7	2056,15 66,26 744,15 2100,10	4268813 1669237 2,557344	76,92700 76,92760 60"	309	10	0 0 309 10	0 0 -95 -269	$dx_2 dy_2$ -214 259	-60 1			259	214	-60	413 (2,3)
8	744,15 2100,10 -1795,25 -2219,84	2118311 -5997821 -0,353180	178,93865 178,93860 5"	95	269	0 0 95 269	0 0 140 173	$dx_2 dy_2$ -235 -442	+5 1			-442	235	5	-202 (-6,4)

$x = 4206,40$   
 $y = 1184,77$   
 $x = 4832,15$   
 $y = 3878,26$   
 $x = 2872,00$   
 $y = 2210,00$   
 $x = 2776,00$   
 $y = 3812,00$   
 $x = 980,75$   
 $y = 1592,16$

$[VV] = 677,5$   
 $m_0 = \sqrt{\frac{677,5}{4}} = \pm 13''$   
 Współrzędne 20  $x = 2872,15 \quad y = 2210,20$   
 wyrównane: 21  $x = 2776,11 \quad y = 3812,16$   
 $x = 3520,15$   
 $y = 5912,10$

## Parę uwag dotyczących sieci kątowych

Jako przykłady wyrównania fragmentów sieci kątowych wybraliśmy wielokrotne wcięcia: wprzód, wstecz i kombinowane, oraz wyrównanie łączne dwóch punktów. Podkreślamy specjalnie, że sposób postępowania jest zawsze ten sam: po obliczeniu przybliżonych współrzędnych wyznaczanych punktów sieci zestawiamy dla każdej obserwacji kątowej równanie błędu (19), po czym od otrzymanego układu równań błędów, przepisane w postaci algebraicznej, przechodzimy w wiadomy sposób do układu równań normalnych Gaussa (21). Potrzeba pamiętania różnorodnych zasad postępowania w zależności od tego, czy kąt zmierzono na punkcie znanym, czy nieznanym (t.zw. zewnętrzne i wewnętrzne celowe) nie istnieje. Za równoważne dokładnościowo obserwacje kątowe z merytorycznego punktu widzenia najsluszniej jest przyjmować kąty, zawarte między sąsiadującymi w obserwacji celowymi. Jeżeli kto chce uważać za równoważne dokładnościowo kąty t.zw. „kierunki“, czyli kąty zawarte między jedną z celowych a każdą pozostałą celową, sposób postępowania będzie zupełnie analogiczny. Pisząc równania obserwacyjne kątów dla pewnego stanowiska, mieć będziemy w tym wypadku stale to samo ramię lewe. Przyjęcie równoważności kierunków uzyskanych z pomiaru seryjnego jest jednak pojęciowo tak nieuzasadnione, że trudno je zalecać. Z tego względu w przerobionych przykładach liczbowych przyjmowano stale za równoważne dokładnościowo kąty zawarte między sąsiadującymi w obserwacji celowymi.

*Zagadnienie techniki rozwiązania układu równań normalnych* w sieciach o znaczniejszej ilości punktów jest zagadnieniem ogromnej wagi. Najcelowsze przy rachunku maszynowym jest niewątpliwie stosowanie metody pierwiastka krakowianowego, zwanej też często „algorytmem Banachiewicza“.

Zagadnień tych nie omawiamy, odsyłając czytelnika do odnośnej literatury np.: T. Kochmański „Zarys rachunku krakowianowego“ — Warszawa 1948, Główny Urząd Pomiarów Kraju, lub: S. Hausbrandt „Algebraiczne ujęcie algorytmu Banachiewicza“ (Warszawa 1947, Przegląd Geodezyjny N 11.12). W sieciach o małej ilości punktów stosowanie takiej czy innej metody rozwiązania układu mały ma wpływ na czas całkowitego rachunku sieci. W przykładach stosowano rozwiązania wyznacznikowe, które oczywiście przy dużej ilości punktów byłyby bardzo nieekonomiczne.

Jakkolwiek nie jest też zadaniem niniejszej pracy rozpatrywanie zagadnienia *wyrównania sieci na wielkich obszarach*, wydaje się słuszne zaznaczyć, że większe sieci kątowe nawiązywane do punktów wyższych rzędnych o danych współrzędnych prostokątnych Gauss — Krügerowskich, można z powodzeniem wyrównywać jako sieci płaskie opisaną wyżej metodą. Jeżeli długości boków sieci nawiązywanej nie przekraczają 10 km, wystarczy najzupełniej przeliczyć każdy zaobserwowany w terenie kąt, dodając doń algebraicznie czterechsetną część rzędnej wierzchołka pomnożoną przez różnicę odciętych lewego i prawego punktu celu, przy czym dla otrzymania poprawki kąta w sekundach wyrażamy tu współrzędne — oczywiście Gauss-Krügerowskie — w kilometrach.

Przeliczającymi tak kątami posługujemy się następnie tak jak kątami płaskimi. Przy oznaczaniu  $\bar{\alpha}$  kąta zmierzonego w terenie, zaś  $\alpha$  kąta poprawionego do rachunku na płaszczyźnie wyrazimy operację przeliczenia równaniem:

$$\alpha = \bar{\alpha} + \frac{Y_c}{400} (X_L - X_P) \dots\dots\dots 23$$

lub nieco ściślej:

$$\alpha = \bar{\alpha} + 0,00253 Y_c (X_L - X_P)$$

Bliższe szczegóły podaję w pracy: „Parę uwag dotyczących możliwości celowych uproszczeń rachunkowych przy przeliczaniu kątów z elipsoidy na płaszczyznę odwzorowania Gaussa-Krügera“.

Jest charakterystyczne, że metoda najmniejszych kwadratów, wkraczająca w coraz to nowe dziedziny zagadnień w innych gałęziach techniki, w geodezji bywa przez niektórych zarzucana na rzecz takich czy innych uproszczonych sposobów postępowania wyrównawczego. Takie *uproszczone* sposoby — z punktu widzenia nauki wadliwe, gdyż niedostarczające najprawdopodobniejszych wartości niewiadomych — bywają usprawiedliwiane względami natury ekonomicznej, t.zn. nieco mniejszym kosztem pracy rachunkowej. Nie czas i nie miejsce na dyskusję w tej sprawie. Wydaje się tylko celowe *przestrzegać przed podnoszeniem różnych dowolnych sposobów wyrównania do rzędu metod i nadawania im mocy obowiązującej*. Każdy taki sposób będzie dobry i usprawiedliwiony, jeżeli poprawki, jakie trzeba nadać obserwacjom w wyniku wyrównania nie przekroczą granic, określonych przez cele gospodarcze danej pracy. W tym wyłącznie kierunku powinno iść wszelkie instruowanie w dziedzinie przybliżonych sposobów wyrównania.

## Przekształcanie współrzędnych prostokątnych płaskich przy dwóch punktach dostosowania

Dane są współrzędne prostokątne pewnego zbioru  $n$  punktów ( $n > 2$ ) w jednym układzie — nazywamy go dalej „układem pierwotnym” — oraz współrzędne prostokątne dwóch punktów tego zbioru, odniesione do innego układu — nazywamy go dalej „układem wtórnym”. Współrzędne w obu układach mogą być przy tym wyrażone w innych miarach. Zadanie polega na przeliczeniu (transformacji) współrzędnych układu pierwotnego na układ wtórny. Oznaczamy przez:

$\frac{\Delta X_p}{\Delta X_w}$	$\frac{\Delta Y_p}{\Delta Y_w}$	przyrosty współrzędnych między dwoma dowolnymi punktami w układzie pierwotnym.
"	"	" tymi samymi punktami w układzie wtórnym.
$\frac{\Delta X_p}{\Delta X_w}$	$\frac{\Delta Y_p}{\Delta Y_w}$	przyrosty współrzędnych między punktami dostosowania w układzie pierwotnym.
"	"	" " " " w układzie wtórnym.

przy czym przez „punkty dostosowania” rozumiemy te punkty, których współrzędne znane są w obu układach.

Dla rozwiązania zadania należy obliczyć współczynniki przekształcenia  $u$   $v$  według wzorów:

$$f = \begin{bmatrix} \overline{\Delta X_P} & \overline{\Delta Y_P} \\ \overline{\Delta X_W} & \overline{\Delta Y_W} \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} \mathbf{u} = f \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ \mathbf{v} = f \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} \end{matrix} \quad . . . . . 24$$

po czym przeliczać przyrosty w układzie pierwotnym na przyrosty w układzie wtórnym według wzoru:

$$\boxed{\begin{array}{c|cc} \text{F} = & \Delta X_P & \Delta Y_P \\ u & v & \end{array}} \quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta X_w = F_1 \\ \Delta Y_w = F_2 \end{array} \right.$$
 . . . . . 25

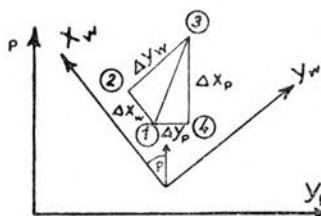
Rachunek przeliczenia rozpoczynamy oczywiście od jednego punktu dostosowania, a kończymy na drugim; sprawdzając przed obliczeniem współrzędnych poszczególnych punktów w układzie wtórnym, czy sumy przyrostów między punktami dostosowania są równe przyrostom między tymi punktami:

$$\Sigma \Delta X_w = \overline{\Delta X_w} \quad \Sigma \Delta Y_w = \overline{\Delta Y_w}$$

Wielkości charakteryzujące przekształcenie pod względem geometrycznym, to znaczy wartość „kąta przejścia“  $p$ , czyli kąta o który należy zwiększyć kąt osiowy dowolnej prostej w układzie pierwotnym dla otrzymania kąta osiowego tej prostej w układzie wtórnym, oraz wartość „współczynnika redukcji“  $r$ , tj. liczby przez którą należy mnożyć dowolną długość w układzie pierwotnym dla otrzymania odpowiadającej długości w układzie wtórnym, wyrażają wzory:

$$\operatorname{tg} p = f_0 \quad r^2 = \frac{\overline{\Delta X_w^2} + \overline{\Delta Y_w^2}}{\overline{\Delta X_p^2} + \overline{\Delta Y_p^2}} \quad \operatorname{Sin} p = \frac{f_1}{r}$$

Rzutując czworobok 1 2 3 4, w którym (1—3) jest dowolnym odcinkiem, (3—4) i (4—1) są równoległe do osi układu pierwotnego, zaś (1—2) i (2—3) równoległe do osi układu wtórnego, otrzymamy dwa równania (por. rysunek i zestawienie):



$$(X) \Delta X_w - \Delta X_p \cdot r \cdot \cos p + \Delta Y_p \cdot r \cdot \sin p = 0 \quad (Y) \Delta Y_w - \Delta X_p \cdot r \cdot \sin p - \Delta Y_p \cdot r \cdot \cos p = 0$$

lub po wprowadzeniu oznaczeń:  $u = r \cdot \sin p$        $v = r \cdot \cos p$

$$\Delta X_w = \Delta X_p \cdot v - \Delta Y_p \cdot u \qquad \Delta Y_w = \Delta X_p \cdot u + \Delta Y_p \cdot v \quad . . . . . (\Delta)$$

Przy wprowadzeniu formy:  $F = \begin{vmatrix} \Delta X_p & \Delta Y_p \\ u & v \end{vmatrix}$  napiszemy te równania pod postacią:

Zastępując w równaniach (Δ) symbole  $\Delta X \Delta Y$  przez symbole  $\overline{\Delta X} \overline{\Delta Y}$  (równanie jest ogólne, a więc słuszne i dla przyrostów między punktami dostosowania) i rozwiązując te równania względem  $u$  i  $v$  znajdziemy po prostych przekształceniach:

Np	Odniesione do ukł. wtórnego długości kąty osiowe	
1		
2	$\Delta X_w$	$0^0$
3	$\Delta Y_w$	$90^0$
4	$\Delta X_{p \cdot r}$	$180^0 + p$
1	$\Delta Y_{p \cdot r}$	$270^0 + p$

$$u = \frac{\left| \frac{\Delta \overline{X}_p}{\Delta \overline{X}_w} \frac{\Delta \overline{Y}_p}{\Delta \overline{Y}_w} \right|_1}{\Delta \overline{X}_p^2 + \Delta \overline{Y}_p^2} \quad v = \frac{\left| \frac{\Delta \overline{X}_p}{\Delta \overline{X}_w} \frac{\Delta \overline{Y}_p}{\Delta \overline{Y}_w} \right|_2}{\Delta \overline{X}_p^2 + \Delta \overline{Y}_p^2} \quad \text{czyli } u = f^{[1]} \quad v = f^{[2]}, \text{ gdzie } f \equiv \left| \frac{\Delta \overline{X}_p}{\Delta \overline{X}_w} \frac{\Delta \overline{Y}_p}{\Delta \overline{Y}_w} \right|$$

Slusznosc wzoru na  $r^2$  wynika z okreslenia  $r$  (tekst)

$$\sin p = \frac{u}{r} = \frac{f[1]}{r} \quad \text{tg } p = \frac{\sin p}{\cos p} = \frac{u}{v} = \frac{f[1]}{f[2]} = \frac{f_1}{f_2} = f_0$$



**Przykład liczbowy**

0.0448 01583 0.9989 88806

NN pun- któw	Układ pierwotny				Układ wtóry				Uwagi
	Współrzędne $X_p$	$Y_p$	Przyrosty $\Delta X_p$	$\Delta Y_p$	Przyrosty $\Delta X_w$	$\Delta Y_w$	Współrzędne $X_w$	$Y_w$	
(2)	5856.43	4193.45					34804.86	43569.90	Wartości liczbowe współczynników przekształcenia napisane na pasku papieru
			-1288.54	-2958.89	-1154.67	-3013.63			
1	4567.89	1234.56				+1	33650.19	40556.27	
			-66.94	+4617.96	-273.76	+4610.29			
3	4500.95	5852.52				-1	33376.43	45166.57	
			-1669.74	-642.05	-1639.29	-716.21			
4	2831.21	5210.47					31737.13	44450.36	
			-905.29	-3680.71	-739.47	-3717.55			
6	1925.92	1529.76					30997.66	40732.81	
			-1279.18	+2216.34	-1377.18	+2156.79			
(5)	646.74	3746.10					29620.48	42889.60	i podsuwać pod przeliczane przyrosty tworząc formy
$\Delta 2-5$	-5209.69	-447.35	$\Sigma \Delta$ -5209.69	-447.35	$\Sigma \Delta$ -5184.37	-680.31 $\Delta 2-5$	-5184.38	-680.30	
					-1	+1			$\begin{matrix} \Delta x & \Delta y \\ u & v \end{matrix}$

$$f = \begin{vmatrix} -5209.69 & -447.35 \\ -5184.38 & -680.30 \end{vmatrix}$$

$$u = f^{[1]} = \frac{1224 \ 919.714}{27340991.919} = 0.0448 \ 01583$$

$$v = f^{[2]} = \frac{273 \ 13344.847}{273 \ 40991.919} = 0.9989 \ 88806$$

**Przekształcenie współrzędnych prostokątnych płaskich przy ilości punktów dostosowania większej od dwóch.** Jeżeli ilość punktów dostosowania przekracza dwa, zagadnienie przekształcenia współrzędnych wymaga postawienia dodatkowych założeń. Przyjmijmy za nowy punkt dostosowania („biegun przekształcenia”) punkt, którego współrzędne w układzie pierwotnym są średnimi arytmetycznymi współrzędnych punktów dostosowania w układzie pierwotnym i którego współrzędne w układzie wtórnym są średnimi arytmetycznymi współrzędnych punktów dostosowania w układzie wtórnym i uważajmy za równoważne między sobą wartości współczynników przekształcenia  $u_1 \ u_2 \dots u_K$  względnie  $v_1 \ v_2 \dots v_K$ , które obliczyć można przyjmując kolejno za punkty dostosowania: 1) biegun i pierwszy z danych punktów dostosowania, 2) biegun i drugi z danych punktów dostosowania itd., wreszcie k) biegun i ostatni z danych punktów dostosowania. Współrzędne układu pierwotnego  $X' \ Y'$  przekształcimy na współrzędne układu wtórnego  $X'' \ Y''$  stosując znane wzory przekształcające (24 i 25) i uważając że najprawdopodobniejszymi wartościami współczynników przekształcenia  $u \ v$  są średnie arytmetyczne z wartości tych współczynników otrzymanych w drodze opisanego wyżej rachunku:

$$U = \frac{\sum_{i=1}^K u_i}{K} \quad V = \frac{\sum_{i=1}^K v_i}{K}$$

Założenie równoważności dokładnościowej wielkości współczynników przekształcenia obliczanych z różnych odcinków dostosowania jest oczywiście nacechowane pewną dowolnością, ma jednak zaletę prostoty, co czyni je wygodniejszym w rachunku w porównaniu z innymi założeniami, zresztą też dowolnymi. O stosowaniu metody najmniejszych kwadratów w sposób ścisły nie może tu oczywiście być mowy.

**Przykład liczbowy**

Przekształcić współrzędne punktów 1,3,5,6,8, układu I na współrzędne tych punktów w układzie II, opierając się na znajomości współrzędnych punktów 2,4,7, w obu układach.

**Współrzędne bieguna wyniosą:**

- 1) w układzie I  $X'_0 = \frac{1}{3}(3150.12 + 1977.80 + 2612.10) = 2580.00$   $Y'_0 = \frac{1}{3}(3320.46 + 2915.60 + 1615.25) = 2617.10$
- 2) w układzie II  $X''_0 = \frac{1}{3}(8750.56 + 7636.03 + 8424.00) = 8270.20$   $Y''_0 = \frac{1}{3}(9790.82 + 9246.16 + 8032.60) = 9023.19$

Wartości współczynników dostosowania  $u \ v$  z odcinków 0,2 0,4 0,7 łączących biegun z punktami dostosowania będą:

$$\begin{aligned} f &= \begin{vmatrix} 570.12 & 703.36 \\ 480.36 & 767.63 \end{vmatrix} & u_1 = f^{[1]} &= 0.121714 & v_1 = f^{[2]} &= 0.992718 \\ f &= \begin{vmatrix} -602.10 & 298.50 \\ -634.17 & 222.97 \end{vmatrix} & u_2 &= 0.121810 & v_2 &= 0.992710 \\ f &= \begin{vmatrix} 32.10 & -1001.85 \\ 153.80 & -990.59 \end{vmatrix} & u_3 &= 0.121710 & v_3 &= 0.992660 \end{aligned}$$

Stąd średnie:  $u = 0.121745$   $v = 0.992696$

Dalsza praca polega na przekształcaniu przyrostów w układzie pierwotnym na przyrosty w układzie wtórnym przy użyciu obliczonych średnich wartości współczynników przekształcenia.

Rachunek rozpoczyna się od bieguna i kończy na biegunie. Współrzędne punktów dostosowania w układzie wtórnym (punkty 2, 4, 7) wykazywać będą rozbieżności, których wielkość charakteryzuje niezgodność układów. W naszym przykładzie rozbieżności nie przekraczają 0.04 m.

NN pun- któw	Układ pierwotny				Układ wtórny				Uwagi
	Współrzędne X'      Y'		Przyrosty ΔX'    ΔY'		Przyrosty ΔX''   ΔY''		Współrzędne X''    Y''		
<b>((0))</b>	2580.00	2617.10					8270.20	9023.19	
			335.10	253.05	301.84	292.00			
1	2915.10	2870.15					8572.04	9315.19	
			235.02	450.31	178.48	475.63			
<b>(2)</b>	3150.12	3320.46					8750.56(52)	9790.82(82)	
			—799.95	—19.54	—791.73	—116.79			
3	2350.17	3300.92					7958.79	9674.03	
			—372,37	—385.32	—322.74	—427.84			
<b>(4)</b>	1977.80	2915.60					7636.03(05)	9246.16(19)	
			262.30	—1243.45	411.77	—1202.43			
5	2240.10	1672.15					8047.82	8043.76	
			—489.70	—246.05	—456,17	—303.87			
6	1750.40	1426.10					7591.65	7739.89	
			861.70	189.15	832.38	292.68			
<b>(7)</b>	2612.10	1615.25					8424.00(03)	8032.60(57)	
			486.16	601.45	409.39	656.24			
8	3098.26	2216.70					8833.42	8688.81	
			—183.16	653.45	—261.38	626.38			
1	2915.10	2870.15					8572.04	9315.19	
			—335.10	—253.05	—301.84	—292.00			
<b>((0))</b>	2580.00	2617.10					8270.20	9023.19	
			0,121745	0.992696					

#### Przekształcenie współrzędnych prostokątnych lokalnych na terenowe i terenowych na lokalne

W szczególnie ważnym w praktyce geodezyjnej wypadku przekształcenia współrzędnych prostokątnych jednego układu na współrzędne prostokątne innego układu: w wypadku przeliczenia lokalnych współrzędnych prostokątnych d i b (miara domiarowa i miara bieżąca), uzyskanych ze zdjęcia taśmo-węgielniczowego, na współrzędne terenowe X i Y — lub odwrotnie — można posługiwać się wzorami:

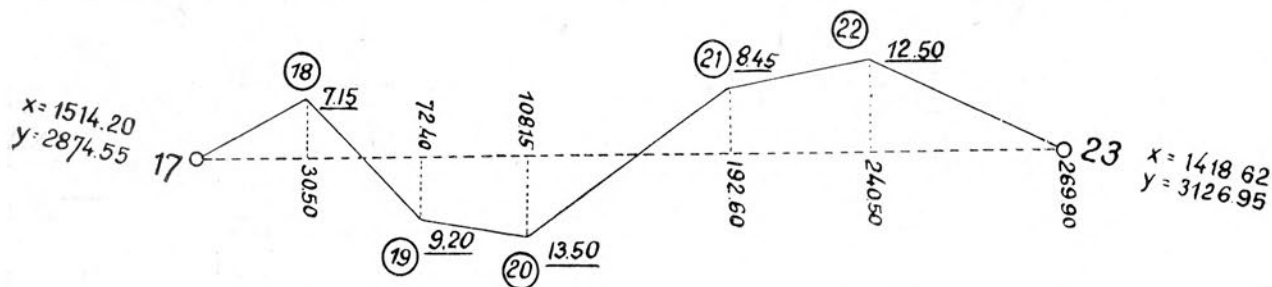
$$\begin{array}{l}
 \text{lub} \\
 \begin{array}{|l|}
 \hline
 \begin{array}{l}
 f = \begin{vmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ \Delta d & \Delta b \end{vmatrix} \quad \Delta X = f_1 \quad \Delta Y = f_2 \\
 F = \begin{vmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ \Delta X & \Delta Y \end{vmatrix} \quad \Delta d = F_1 \quad \Delta b = F_2
 \end{array}
 \end{array}
 \end{array}
 \quad . . . . . 26$$

We wzorach tych  $\Delta d$  i  $\Delta b$  oznaczają: przyrost miary domiarowej i przyrost miary bieżącej między dwoma punktami,  $\Delta X$  i  $\Delta Y$  przyrosty odciętej i rzędnej między tymi punktami, wreszcie  $\varphi$  oznacza kąt kierunkowy („azymut“) osi lokalnej, na którą rzutowano punkty przy zdjęciu.

Wzory (26) wynikają bezpośrednio z wzorów ogólnych na przekształcenie współrzędnych (24, 25)<sup>1)</sup> Przebieg rachunku i kontrole ilustrują przykłady liczbowe.

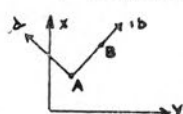
#### Przykład liczbowy

Posługując się danymi liczbowymi szkicu przeliczyć współrzędne lokalne d b zdjęcia taśmowo-węgielniczowego punktów 18, 19, 20, 21, 22 na współrzędne terenowe X Y tych punktów.



NN PP	Układ lokalny				Układ terenowy				Uwagi
	Współrzędne <i>d</i> <i>b</i>		przyrosty $\Delta d$ $\Delta b$		przyrosty $\Delta x$ $\Delta y$		współrzędne <i>X</i> <i>Y</i>		
			−0.35413	0.93517					
(17)	0	0					1514.20	2874.55	$\cos \varphi = \frac{-95.58}{269.90} =$  $= -0.35413$
18	− 7.15	+ 30.50	− 7.15	+30.50	− 4.11	+31.05	1510.09	2905.60	
			+16.35	+41.90	−30.13	+33.39			
19	+ 9.20	+ 72.40					1479.96	2938.99	$\sin \varphi = \frac{252.40}{269.90} =$  $= 0.93517$
			+ 4.30	+35.75	−16.68	+31.91			
20	+13.50	+108.15					1463.28	2970.90	
			−21.95	+84.45	− 9.38	+86.75			
21	− 8.45	+192.60					1453.90	3057.65	
			− 4.05	+47.90	−13.18	+46.23			
22	−12.50	+240.50					1440.72	3103.88	
			+12.50	+29.40	−22.10	+23.07			
(23)	0	+269.90					1418.62	3126.95	
		Kontrola:	0	269.90	−95.58	+252.40	−95.58	+252.40	

1) Przyjmijmy układ XOY za układ pierwotny, zaś układ - d b za układ wtórny i niech A B będzie osią „Y” układu wtórnego



Jest więc przy przyjętych uprzednio oznaczeniach:

$$\Delta X_p = \Delta X \quad \Delta Y_p = \Delta Y \quad \Delta X_p = \Delta X_{AB} \quad \Delta Y_p = \Delta Y_{AB}$$

$$\text{oraz: } \Delta X_w = \Delta d \quad \Delta Y_w = \Delta b \quad \Delta X_w = 0 \quad \Delta Y_w = l \quad \text{gdzie } l \text{ jest długością linii AB}$$

Współczynniki przekształcenia u v obliczymy z wzoru ogólnego (24) znajdując:

$$f = \begin{vmatrix} \Delta X_{AB} & \Delta Y_{AB} \\ 0 & l \end{vmatrix}$$

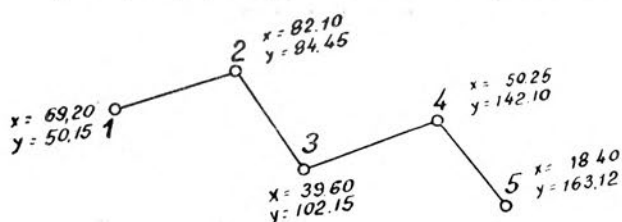
$$u = f[1] = \frac{\Delta X_{AB} \cdot l}{\Delta X_{AB}^2 + \Delta Y_{AB}^2} = \frac{\Delta X_{AB}}{l} = \cos \varphi \quad v = f[2] = \frac{\Delta Y_{AB} \cdot l}{\Delta X_{AB}^2 + \Delta Y_{AB}^2} = \frac{\Delta Y_{AB}}{l} = \sin \varphi \quad \text{Jest więc: } -\Delta d = \Delta X_w =$$

$$= \begin{vmatrix} \Delta X & \Delta Y \\ \cos \varphi & \sin \varphi \end{vmatrix}_1 \quad \text{oraz} \quad \Delta b = \Delta Y_w = \begin{vmatrix} \Delta X & \Delta Y \\ \cos \varphi & \sin \varphi \end{vmatrix}_2 \quad \text{lub też: } +\Delta d = \begin{vmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ \Delta X & \Delta Y \end{vmatrix}_1 \quad \text{oraz} \quad \Delta b = \begin{vmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ \Delta X & \Delta Y \end{vmatrix}_2$$

Jest to drugi z wzorów (26). Dla uzasadnienia słuszności pierwszego z wzorów (26) wystarczy napisać otrzymane wyrażenia na  $\Delta d$  i  $\Delta b$  pod postacią algebraiczną i rozwiązać otrzymany układ dwóch równań względem  $\Delta X$  i  $\Delta Y$ .

#### Przykład liczbowy

Opracować szkic odnowienia na gruncie granicy, wyznaczonej przez punkty 1, 2, 3, 4, 5, których współrzędne prostokątne są znane. Na gruncie zachowały się znaki 2 i 5, które przyjąć można za punkty wyznaczające kierunek osi pomiaru odnawiającego.



Przyjmując za początek osi lokalnej punkt 2, zaś kierunek dodatni osi — kierunek 2—5, znajdziemy  $\cos$  i  $\sin$  osi lokalnej:

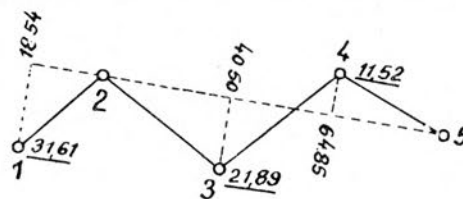
$$\cos \varphi = \frac{\Delta X_{2 \cdot 5}}{\sqrt{\Delta X_{2 \cdot 5}^2 + \Delta Y_{2 \cdot 5}^2}} = \frac{-63.70}{101.23} = -0.62926$$

$$\sin \varphi = \frac{\Delta Y_{2 \cdot 5}}{\sqrt{\Delta X_{2 \cdot 5}^2 + \Delta Y_{2 \cdot 5}^2}} = \frac{+78.67}{101.23} = +0.77714$$

Pozwala to na przeliczenie przyrostów współrzędnych terenowych  $\Delta x$   $\Delta y$  na przyrosty współrzędnych lokalnych  $\Delta d$   $\Delta b$  przy pomocy wzoru (26).

N N PP	Układ terenowy				Układ lokalny				Uwagi
	Współrzędne x            y		Przyrosty Δx        Δy		Przyrosty Δd        Δb		Współrzędne d            b		
(2)	82.10	84.45	−0.62926	0.77714			0	0	
			−12.90	−34.30	+31.61	−18.54			
1	69.20	50.15					+31.61	− 18.54	
			−29.60	+52.00	− 9.72	+59.04			
3	39.60	102.15					+21.89	+ 40.50	
			+10.65	+39.95	− 33.41	+24.35			
4	50.25	142.10					− 11.52	+ 64.85	
			−31.85	+21.02	+11.52	+36.38			
(5)	18.40	163.12					0	+ 101.23	
	−63.70	+78.67	−63.70	+78.67	0	+101.23	0	+ 101.23	

Rachunek ten prowadzi do szkicu polowego:



#### Parę uwag dotyczących rachunku na arytmometrze podwójnym

Arytmometr podwójny pozwala na jednoczesne obliczenie obu iloczynów: wyznacznikowego  $f_1$  i kolumnowego  $f_2$ . Dla jednoczesnego obliczenia obu iloczynów formy:  $f = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$  ustawiamy elementy górnego wiersza na licznikach nastawień — w kolejności zapisu, t.zn. a na lewym liczniku, b na prawym — po czym nadajemy obroty dla wymnożenia obu liczb przez d. W wyniku tej czynności mieć będziemy na licznikach rezultatowych liczby: ad bd. Następnie, nie kasując liczników rezultatowych, zmieniamy kolejność liczb na licznikach nastawień, t.zn. przenosimy b na lewy licznik zaś a na prawy, po czym przesuwamy hebelkę nadający lewej maszynie bieg przeciwny i nadajemy obroty dla wymnożenia obu liczb przez c. W wyniku tej czynności do figurujących na licznikach rezultatowych liczb:

$\begin{matrix} ad & bd \\ -bc & ac \end{matrix}$

dodane zostaną liczby:

i na licznikach rezultatowych znajdą się: iloczyn wyznacznikowy i kolumnowy:

$$f_1 = ad - bc \quad f_2 = ac + bd.$$

Po odczytaniu nie należy zapomnieć o przywróceniu normalnego położenia hebelka (na bieg zgodny obu maszyn).

Należy pamiętać, że zarówno mnożenie przez d jak i przez c wykonujemy tu w tym kierunku w jakim dyktują to znaki tych czynników. Zmianę znaku w drugim mnożeniu dla iloczynu wyznacznikowego dokonał bowiem już mechanizm wskutek przestawienia hebelka na bieg przeciwny.

Jeżeli która z wielkości ustawianych na liczniku nastawień (a lub b) jest ujemna, należy ją ustawić pod postacią uzupełnienia dziesiętnego (t.zn. np. liczbę: 127,15 ustawimy na dziesięciomiejscowym liczniku jako: 9999987285).

Różne sposoby rozwiązania wcięć przy pomocy podwójnego arytmometru opisuje prof. dr Cz. Kamela w „Geodezji“ (Warszawa 1951).

Wydaje się, że rozpatrzone w niniejszej pracy zastosowania przyjętych symboli pomocniczych w dostatecznej mierze uzasadniają potrzebę wprowadzenia tych symboli.

Czytelnik zechce uprzytomnić sobie jak wielką ilość zagadnień rachunkowych łącznie z przykładami liczbowymi i dowodami teoretycznymi zdołaliśmy tu rozpatrzyć.

Dla uniknięcia nieporozumień uważam za wskazane podkreślić, że większość przytoczonych tu rozwiązań jest w literaturze geodezyjnej znana i nie roszczę sobie bynajmniej prawa do ich autorstwa. Istotę mego wkładu pracy stanowi wyłącznie uporządkowanie pojęciowe materiału, osiągnięte przez wprowadzenie odpowiedniej — jak mi się zdaje — symboliki.

**Cena zł 27.—**