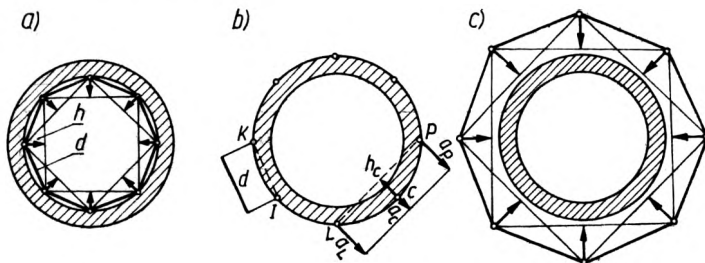


Regularny, zamknięty ciąg strzałek – sposoby obliczeń i analizy dokładności

Przy rozwiązywaniu specyficznych zadań z zakresu geodezji inżynierskiej znajduje zastosowanie konstrukcja geodezyjna w postaci zamkniętego ciągu poligonowego z mierzonymi długościami i strzałkami. Najczęściej jest ona używana w formie ciągu równobocznego, którego punkty są rozmieszczone na okręgu koła. W takim wydaniu konstrukcja ma zastosowanie w pomiarach realizacyjnych, inwentaryzacyjnych i w pomiarach przemieszczeń elementów synchrotronu [5], radioteleskopu [10], chłodni kominowej, zbiornika gazu i wielu innych urządzeń i konstrukcji przemysłowych, mających rzut poziomy podstawy w postaci okręgu lub wieloboku foremnego.

Ciąg poligonowy z mierzonymi długościami i strzałkami ma zastosowanie zwłaszcza w przypadkach, gdy do wykonania pomiarów jest przydatny jedynie wąski obszar przyległy do obwodu budowli wewnątrz lub na zewnątrz. Gdy dysponujemy miejscem po wewnętrznej stronie, zakładamy ciąg, jak to ilustruje rysunek 1a, i mierzymy w nim odległości d i strzałki h . Zależnie od wymaganej dokładności, a także od warunków pomiarów, można stosować różne przyrządy i metody pomiaru odległości – przymiary wstęgowe, druty Jäderina, taśmy niwelacyjne i metodę omówioną w [4], Distometer firmy Kern itp., zaś do pomiaru strzałek – teodolit i podziałkę milimetrową lub strunę i mikroskopy.

Gdy dysponujemy miejscem po stronie zewnętrznej, zakładamy ciąg jak na rysunku 1b, w którym strzałki i długości mierzymy w sposób pośredni, z uwagi na przeszkodę, jaką stanowi dla pomiaru bezpośredniego powierzchnia budowli, lub znaki te odsuwamy od powierzchni, tak aby pomiar bezpośredni był możliwy (rys. 1c).



Rys. 1

Pośredni pomiar odległości i strzałek polega na wykorzystaniu przyrządów lub metod mimosłowodowych, na przykład do pomiaru strzałek można stosować optyczną metodę mimosłowodową [3], zaś do pomiaru odległości przyrządy budowane na zasadzie podobnej do deformetru Huggengera [6].

Pomierzone w ciągu długości d i strzałki h mogą służyć do obliczania współrzędnych punktów ciągu, a także, co ma istotne znaczenie, różnic między tymi współrzędnymi a współrzędnymi projektowymi punktów lub przemieszczeń punktów, jeśli pomiary są okresowo powtarzane.

W opracowaniu koncentruję uwagę na sposobie prowadzenia obliczeń i ocenie dokładności konstrukcji geodezyjnej w postaci foremnego ciągu poligonowego z mierzonymi długościami i strzałkami.

W obliczeniach geodezyjnych jest stosowana zależność

$$d^2 = (x_K - x_I)^2 + (y_K - y_I)^2 \quad (1)$$

między długością d a ograniczającymi ją współrzędnymi prostokątnymi punktów I, K i wynikająca z niej zależność między drobną różnicą długości a różnicami współrzędnych

$$dd = -\sin\varphi dx_I - \cos\varphi dy_I + \sin\varphi dx_K + \cos\varphi dy_K \quad (2)$$

gdzie:

φ – azymut boku IK .

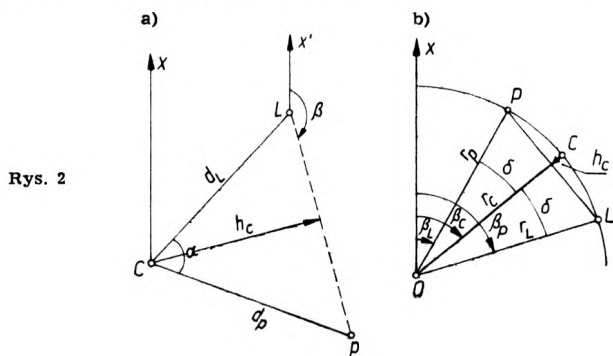
Również znana jest zależność

$$h_C = \frac{(x_L - x_C)(y_P - y_L) - (y_L - y_C)(x_P - x_L)}{\sqrt{(x_P - x_L)^2 + (y_P - y_L)^2}} \quad (3)$$

między strzałką h a ograniczającymi ją współrzędnymi prostokątnymi punktów L, C, P (rys. 2a) i wynikająca z niej [2] zależność między drobną różnicą strzałki a różnicami współrzędnych

$$\begin{aligned} dh_C = & -\sin\beta dx_C + \cos\beta dy_C + \frac{y_P - y_C + h_C \cos\beta}{d_{LP}} dx_L + \\ & + \frac{x_C - x_P + h_C \sin\beta}{d_{LP}} dy_L + \frac{y_C - y_L - h_C \cos\beta}{d_{LP}} dx_P + \\ & + \frac{x_L - x_C - h_C \sin\beta}{d_{LP}} dy_P \quad (4) \end{aligned}$$

Zależności te są przydatne do obliczeń ciągów nieregularnych, natomiast w wypadku ciągu tworzącego wielobok foremny znacznie korzystniejsze jest posłużenie się zależnościami wyrażonymi w układzie biegunowym o początku w środku figury utworzonej przez ciąg.



Rys. 2

Zgodnie z rysunkiem 2b, przy równomiernym rozmieszczeniu punktów możemy napisać zależność

$$r_C - h_C = \cos(\beta_C - \beta_P) r_P = \cos(\beta_L - \beta_C) r_L \quad (5)$$

z której wynika

$$h_C = r_C - \frac{r_P}{2} \cos(\beta_C - \beta_P) - \frac{r_L}{2} \cos(\beta_L - \beta_C) \quad (6)$$

Różniczkując h_C według wzoru (6) względem poszczególnych zmiennych, otrzymujemy zależność między zmianą strzałki dh_C a zmianami współrzędnych biegunowych punktów L, C, P ograniczających strzałkę

$$dh_C = dr_C - \frac{\cos\delta}{2} dr_P - \frac{\cos\delta}{2} dr_L - \frac{\sin\delta}{2} ds_P + \frac{\sin\delta}{2} ds_L \quad (7)$$

gdzie:

dr – zmiana promienia wodzącego r ;

$ds = r d\beta$ – liniowa wartość przemieszczenia punktu wzdłuż stycznej do okręgu o promieniu r ;

$$\delta = \beta_L \quad \beta_C = \beta_C - \beta_P = \frac{360}{n} \quad (n \text{ – liczba punktów})$$

Między mierzonymi odległościami d a współrzędnymi biegunowymi, zgodnie z rysunkiem 3, zachodzi zależność wynikająca ze wzoru cosinusowego

$$d_{IK} = \sqrt{r_I^2 + r_K^2 - 2r_I r_K \cos(\beta_K - \beta_I)} \quad (8)$$

Po zróżniczkowaniu d_{IK} według wzoru (8) względem poszczególnych zmiennych otrzymujemy zależność między zmianą odległości dd_{IK} a zmianami współrzędnych biegunowych punktów I, K ograniczających tę odległość

$$dd_{IK} = \sin \frac{\delta}{2} dr_I + \sin \frac{\delta}{2} dr_K - \cos \frac{\delta}{2} ds_I + \cos \frac{\delta}{2} ds_K \quad (9)$$

Uwzględniając to, że strzałki h i odległości d są mierzone z określonymi błędami oraz że w wyniku wyrównania otrzymamy poprawki różnic tych wielkości v_{dh} , v_{dd} , możemy napisać równanie poprawki różnicy strzałek w formie

$$dr_C - \frac{\cos \delta}{2} dr_P - \frac{\cos \delta}{2} dr_L - \frac{\sin \delta}{2} ds_P + \frac{\sin \delta}{2} ds_L = dh_C + v_{dhC} \quad (10)$$

oraz równanie poprawki różnicy odległości w formie

$$\sin \frac{\delta}{2} dr_I + \sin \frac{\delta}{2} dr_K - \cos \frac{\delta}{2} ds_I + \cos \frac{\delta}{2} ds_K - dd_{IK} + v_{dd} \quad (11)$$

W przypadku pomiaru jednokrotnego ze wzoru (10) i (11) możemy obliczać różnice

$$\begin{aligned} dr &= r_{\text{przybl}} - r_{\text{obs}} \\ ds &= s_{\text{przybl}} - s_{\text{obs}} \end{aligned} \quad (12)$$

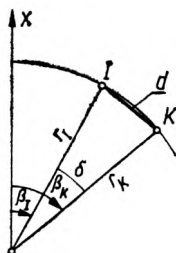
na podstawie różnic

$$\begin{aligned} dh &= s_{\text{przybl}} - h_{\text{obs}} \\ dd &= d_{\text{przybl}} - d_{\text{obs}} \end{aligned} \quad (13)$$

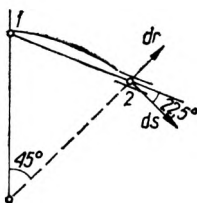
Jeśli współrzędne punktów ciągu mają przyjmować określone, projektowane wartości r_{proj} , $s_{\text{proj}} = r_{\text{proj}} \cdot \beta_{\text{proj}}$, to przyjmujemy

$$\begin{aligned} r_{\text{proj}} &= r_{\text{przybl}} \\ s_{\text{proj}} &= s_{\text{przybl}} \end{aligned} \quad (14)$$

i obliczamy odpowiadające im wartości h_{przybl} , d_{przybl} , korzystając ze wzorów (6), (8), po czym układamy równania



Rys. 3



Rys. 4

poprawek (10), (11) i rozwiązujemy je, otrzymując w rezultacie wartości dr , ds , które trzeba w terenie odłożyć od punktów pomierzonego ciągu odpowiednio wzdłuż promieni i stycznych do okręgu, na którym są one rozmieszczone, aby wytyczyć punkty o współrzędnych projektowych.

W przypadku gdy pomiar jest wykonywany wielokrotnie, to używając wzorów (10), (11) możemy obliczyć składowe dr , ds przemieszczeń punktów na podstawie różnic

$$\begin{aligned} dh &= h' - h \\ dd &= d' - d \end{aligned} \quad (15)$$

gdzie:

h , d — wyniki pomiaru wyjściowego;
 h' , d' — wyniki pomiaru aktualnego tych samych strzałek i długości.

Ułożenie równań poprawek (10), (11) dotyczących obserwacji w ciągu mającym postać wieloboku foremnego jest bardzo łatwe dzięki temu, że przy wyrażeniu równań w układzie biegunowym współczynniki przy niewiadomych są jednakowe dla wszystkich jednoimiennych obserwacji, a zmieniają się jedynie numery punktów i, rzecz oczywista, wartości wyrazów wolnych dh , dd . Jest to wyraźnie widoczne w tablicy 1a.

Rozwiązanie uzyskanego układu równań poprawek powinno nastąpić z zastosowaniem metody najmniejszych kwadratów. W tym celu trzeba przyjąć wcześniej założenia dotyczące dostosowania układu, takie aby nie wpływały one na wielkości poprawek wyrównawczych. Polega to na założeniu stałości trzech elementów, których dobór może być różny, lub na wprowadzeniu do układu równań poprawek odpowiednich warunków. Najczęściej przyjmuje się stałość jednego punktu i jednego kierunku, przy czym dla uzyskiwanych składowych dr , ds i oceny dokładności tych składowych jest nieobojętne, który to punkt i kierunek. Wpływ doboru elementów dostosowania ilustrują wyniki analiz dokładności wykonanych w kilku wariantach.

Wariant I

Przy rozwiązywaniu ciągów poligonowych w układach lokalnych tradycyjnie już przyjęło się zakładanie stałości jednego punktu i azymutu przyległego doń boku. Postępując w taki sposób, wykonano wstępną analizę dokładności regularnego, zamkniętego ciągu poligonowego z mierzonymi długościami boków i strzałkami, zawierającego 8 punktów.

Gdyby nie założyć stałości jakiegokolwiek elementów, to uzyskalibyśmy współczynniki przy niewiadomych układu równań poprawek zestawione w tablicy 1a. Wprowadzenie założenia stałości punktu 1 oznacza $dr_1 = ds_1 = 0$, co umożliwia wyeliminowanie ze współczynnikowej tablicy współczynników przy tych niewiadomych. Wprowadzenie założeń

Tablica 1a

dr_1 ds_1	dr_2 ds_2	dr_3 ds_3	dr_4 ds_4	dr_5 ds_5	dr_6 ds_6	dr_7 ds_7	dr_8 ds_8
-0,354 -0,354	1,000 -0,354 -0,354	-0,354 0,354 1,000 -0,354 -0,354	-0,354 0,354 1,000 -0,354 -0,354	-0,354 0,354 1,000 -0,354 -0,354	-0,354 0,354 1,000 -0,354 -0,354	-0,354 0,354 1,000 -0,354 -0,354	-0,354 0,354 1,000 -0,354 -0,354
-0,354 0,354 1,000	-0,354 0,354	-0,354 0,354	-0,354 0,354	-0,354 0,354	-0,354 0,354	-0,354 0,354	-0,354 0,354
0,383 -0,924	0,383 0,924 0,383 -0,924	0,383 0,924 0,383 -0,924	0,383 0,924 0,383 -0,924	0,383 0,924 0,383 -0,924	0,383 0,924 0,383 -0,924	0,383 0,924 0,383 -0,924	0,383 0,924 0,383 -0,924
0,383 0,924							

Tablica 1b

0,414 -0,501	-0,354 0,354 1,000 -0,354 -0,354	-0,354 0,354 1,000 -0,354 -0,354	-0,354 0,354 1,000 -0,354 -0,354	-0,354 0,354 1,000 -0,354 -0,354	-0,354 0,354 1,000 -0,354 -0,354	-0,354 0,354 1,000 -0,354 -0,354	-0,354 0,354 1,000 -0,354 -0,354
0,207							
1,083 -0,765	0,383 0,924 0,383 -0,924	0,383 0,924 0,383 -0,924	0,383 0,924 0,383 -0,924	0,383 0,924 0,383 -0,924	0,383 0,924 0,383 -0,924	0,383 0,924 0,383 -0,924	0,383 0,924 0,383 -0,924

Tablica 2

Nr punktu	ds_2	s	4	5	6	7	8
m_r	0,0	1,9	2,4	1,9	1,9	2,4	1,7
m_s	0,9	1,1	2,4	3,6	3,6	2,4	1,1
A_{sr}	0,9	1,1	1,4	1,7	1,7	1,4	1,0
B_{sr}	0,0	1,9	3,1	3,8	3,8	3,1	1,8
φ	77,5°	78°	45°	15°	165°	136°	112°
m_p	0,9	2,2	3,4	4,1	4,1	3,4	2,0

nia stałości kierunku przyległego 1—2 oznacza konieczność osiągnięcia stosunku dr_2/ds_2 , przy którym nie nastąpi zmiana kierunku, a w wyniku wyrównania może jedynie nastąpić zmiana długości boku 1—2 w stosunku do przyjętej wartości przybliżonej. Zgodnie z rysunkiem 4, przemieszczenie dd , bez zmiany kierunku boku 1—2, następuje przy zachowaniu stosunku

$$dr_2/ds_2 = \operatorname{tg} 22,5^\circ$$

skąd

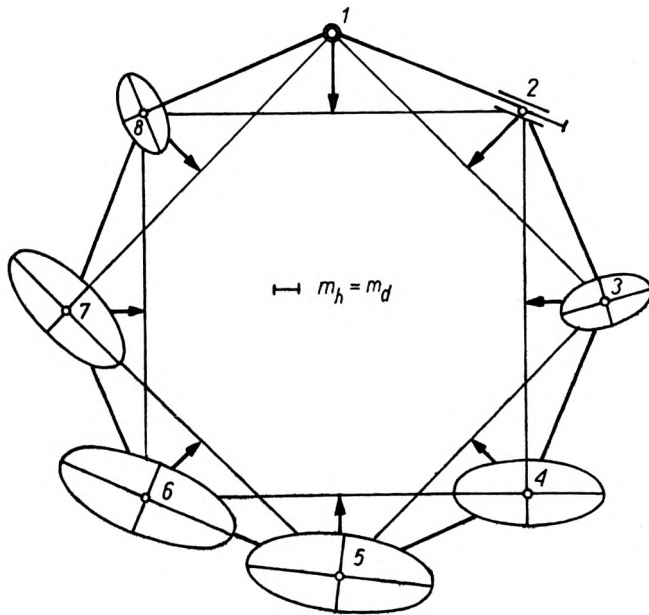
$$dr_2 = 0,414 ds_2$$

Na rysunku 4 oznaczono warunek niezmienności kierunku 1—2 za pomocą dwu linii równoległych, ograniczających przemieszczenie punktu 2 w kierunku poprzecznym do boku 1—2. Symbol taki wprowadził do analiz dokładności W. Prószyński [8].

W tablicy 1b zestawiono współczynniki przy niewiadomych układu równań poprawek, uwzględniające te założenia stałości.

Wynik analizy przedstawiono w tablicy 2 i na rysunku 5.

W tablicy 2 zestawiono błędy średnie m_r , m_s współrzędnych punktów oraz długości półosi elips błędu średniego A_{sr} , B_{sr} i kierunki półosi A w stosunku do osi układu



Rys. 5

współrzędnych. Obliczenie elementów elips błędu średniego przeprowadzono, używając wzorów podanych w [1], § 11.7. Należy podkreślić znamioną cechą obliczonych elementów elips błędów, wynikającą z tego, że tablica 1b zawiera zestawienie współczynników przy niewiadomych, którymi są współrzędne w układzie biegunowym. W bliskim otoczeniu każdego punktu można uznać osie dr , ds prostopadłe i styczne do okręgu, na którym znajdują się punkty ciągu, za osie lokalnych układów współrzędnych prostokątnych, w których wyraża się poprawki dr , ds , błędy m_r , m_s , a także elipsy błędu średniego. W związku z tym w celu wykreślenia elips odłożono kąty φ od kierunków osi dr , uzyskując w rezultacie kierunki półosi A_{sr} i elipsy jak na rysunku 5.

Na rysunku 5 jest widoczne, że wprowadzone założenia stałości spowodowały narastające szybko zwiększenie się błędów położenia punktów ciągu w miarę ich oddalania od elementów przyjętych za stałe. Dążeniem naszym jest uzyskanie obrazu dokładności konstrukcji w miarę możno-

Tablica 3

Nr punktu	dr_s	s	7	8
m_r	1,9	1,4	1,2	1,3
m_s	0,0	1,5	1,8	1,0
A_{sr}	1,9	1,0	1,2	0,8
B_{sr}	0,0	1,9	1,8	1,4
φ	0°	41°	165°	121°
m_p	1,9	2,1	2,2	1,6

ści jak najbardziej wolnego od tak niekorzystnego dostosowania. Konieczne jest zwłaszcza ograniczenie niekorzystnego wpływu zorientowania konstrukcji w stosunku do krótkiego boku.

Wariant II

Wykonano zatem wstępną analizę dokładności przy założeniu stałości punktu 1 i kierunku 1—5, najdłuższego, jaki występuje w rozpatrywanej konstrukcji. W rezultacie analizy otrzymano charakterystykę dokładności przedstawioną w tablicy 3 i na rysunku 8 (rysunek 8 jest połączony z rysunkami 9 i 10).

W tablicy 3 zestawiono tylko dane dotyczące punktów 5—8, ze względu na symetrię wywołaną przyjęciem stałości kierunku 1—5.

Na rysunku 8 jest widoczne znaczne zmniejszenie elips błędu średniego w stosunku do elips przedstawionych na rysunku 5, a co najważniejsze, nastąpiło wyraźne zbliżenie do siebie wartości błędów wyznaczenia położenia punktów.

Założenie stałości punktu 1 i kierunku 1—5 wyraźnie poprawiło sytuację w stosunku do wariantu założenia stałości punktu 1 i kierunku 1—2, jednak w dalszym ciągu odczuwa się niekorzystny wpływ założenia stałości punktu 1.

Wariant III

Wykonano wstępną analizę dokładności w wariantie dostosowania, w którym przyjęto stałość kierunku 1—5, co oznacza $ds_1 = ds_5 = 0$, oraz przyjęto równość poprawek $dr_1 = dr_5$. Założenie równości poprawek oznacza także założenie równości błędów $m_{r1} = m_{r5}$, jest więc równoznaczne z dostosowaniem sieci do jej środka ciężkości wzdłuż kierunku 1—5.

Założenie równości poprawek oznacza, że do układu równań poprawek, z którego wyeliminowano współczynniki przy ds_1 i ds_5 dopisujemy warunek wyrażony równaniem

$$-dr_1 + dr_5 = 0 \quad (16)$$

Warunek ten nie jest sprzeczny z wykonanymi obserwacjami, wobec czego nie wpłynie na poprawki wyrównawcze obserwacji i umożliwi rozwiązanie układu. Występuje jednak kwestia wagi, z jaką warunek ten należy wprowadzić do układu równań poprawek, bowiem ma to pewien wpływ na wynik analizy dokładności. W związku z tym wstępną analizę dokładności wykonano w dwu wersjach różniących się przyjętą wagą warunku (16).

W tablicy 4 i na rysunku 6 przedstawiono wyniki analizy przeprowadzonej przy założeniu wagi warunku (16) wynoszącej $p = 1$, natomiast w tablicy 5 przedstawiono wyniki odpowiadające założeniu wagi warunku (16) równej $p = 1/9$ (przy wagach wykonanych obserwacji równych 1). Z porównania danych zawartych w tablicach 4 i 5 wynika, że znaczne co do wartości różnicowanie wag nie wpłynęło w istotnym stopniu na ocenę dokładności punktów konstrukcji z wyjątkiem składowych dr_1 i dr_5 , które występują w równaniu wyrażającym warunek.

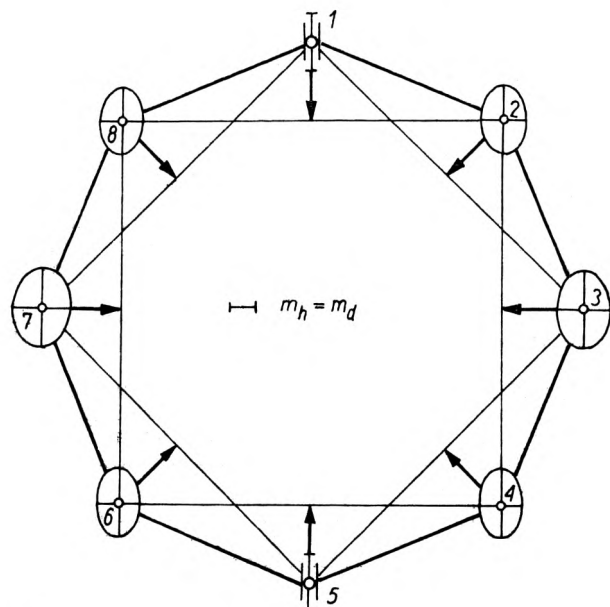
Na rysunku 6 jest widoczne wyraźne zbliżenie wartości błędów wyznaczenia wszystkich punktów rozpatrywanej konstrukcji.

Tablica 4

Nr punktu	dr_s	s	7	8	dr_1
m_r	1,1	1,2	1,2	1,2	1,1
m_s	0,0	1,2	1,6	1,2	0,0
A_{sr}	1,1	1,0	1,2	1,0	1,1
B_{sr}	0,0	1,4	1,6	1,4	0,0
φ	0°	45°	0°	135°	0°
m_p	1,1	1,7	2,0	1,7	1,1

Tablica 5

Nr punktu	dr_s	s	r	e	dr_1
m_r	0,3	1,2	1,2	1,2	0,3
m_s	0,0	1,1	1,5	1,1	0,0
A_{sr}	0,3	0,9	1,2	0,9	0,3
B_{sr}	0,0	1,3	1,5	1,3	0,0
φ	0°	52°	0°	128°	0°
m_p	0,3	1,6	1,9	1,6	0,3



Rys. 6

Można przypuszczać, że obraz najbardziej zbliżony do żądanego otrzymamy, stosując wyrównanie i analizę dokładności metodą uogólnionej macierzy (11) (omówienie w literaturze krajowej [7], [9]), która jest jednak bardzo pracochłonna.

Wariant IV

Omówione dotychczas wstępne analizy dokładności przeprowadzono przy założeniu $m_d = m_h = 1$. Jednak w praktyce, ze względu na duże różnice między długością boku d a długością strzałki h , może się okazać, że strzałki będą łatwiejsze do dokładnego pomiaru niż boki ciągu. Dlatego kolejny wariant wstępnej analizy dokładności wykonano przy założeniach dostosowania odpowiadających wariantowi II, zilustrowanemu w tablicy 3 i na rysunku 8, i przy założeniu $m_d = 2m_h = 1$ (założenie to oznacza, że błąd pomiaru strzałki jest dwukrotnie mniejszy niż uprzednio przy zachowaniu tego samego błędu pomiaru długości boku). Rezultaty tej analizy uwidocznił w tablicy 6 i na rysunku 7.

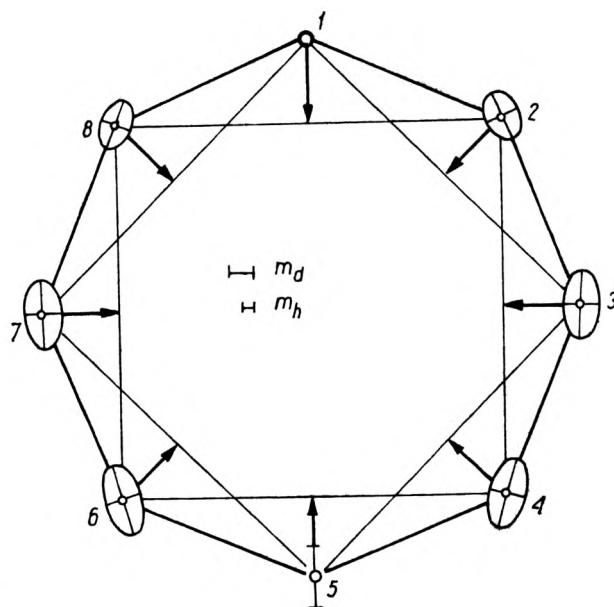
Porównanie tablic 3 i 6 wyraźnie wykazuje, że dwukrotne zmniejszenie błędów pomiaru strzałek, przy zachowaniu takich samych błędów pomiaru długości, spowodowało około 1,5-krotne zmniejszenie błędów położenia punktów. Porównanie rysunków 8 i 7 wykazuje, że nastąpiło przy tym także obrócenie elips błędów, iż zmniejszenie błędów dotyczy głównie składowych promieniowych m_r , zaś błędy składowych stycznych m_s zmniejszają się tylko nieznacznie.

Wariant V

Aby przekonać się, jak na dokładność wyznaczenia punktów w praktyce wpływa długość ciągu, wykonano analizy dokładności ciągu z pomierzonymi długościami i strzałka-

Tablica 6

Nr punktu	dr_s	s	r	e
m_r	1,3	1,0	0,9	0,8
m_s	0,0	1,3	1,4	1,0
A_{sr}	1,3	0,8	0,9	0,8
B_{sr}	0,0	1,4	1,4	1,0
φ	0°	31°	174°	157°
m_p	1,3	1,6	1,7	1,3



Rys. 7

mi, zawierającego 16 i 24 punkty, dwukrotnie i trzykrotnie dłuższymi od poprzednio analizowanych. Analizy wykonano przy założeniach stałości jak w wariantie II. Ich wyniki uwidocznił w tablicach 7, 8 i na rysunkach 9, 10.

Przegląd wyników analiz przedstawionych w tablicach 3, 7, 8 i na rysunkach 8, 9, 10 wykazał, że narastanie błędów wyznaczenia położenia punktów jest w przybliżeniu proporcjonalne do długości ciągu. Maksymalne wartości błędów wyznaczenia położenia punktów wynoszą odpowiednio

w ciągu	$n = 8$	$m_p = 1,9 m_h$
	$n = 16$	$m_p = 3,8 m_h$
	$n = 24$	$m_p = 6,6 m_h$

Położenia i kształty elips błędów w ciągach o różnej liczbie punktów wykazują dosyć duże podobieństwo.

Korzystanie z wykonanych analiz

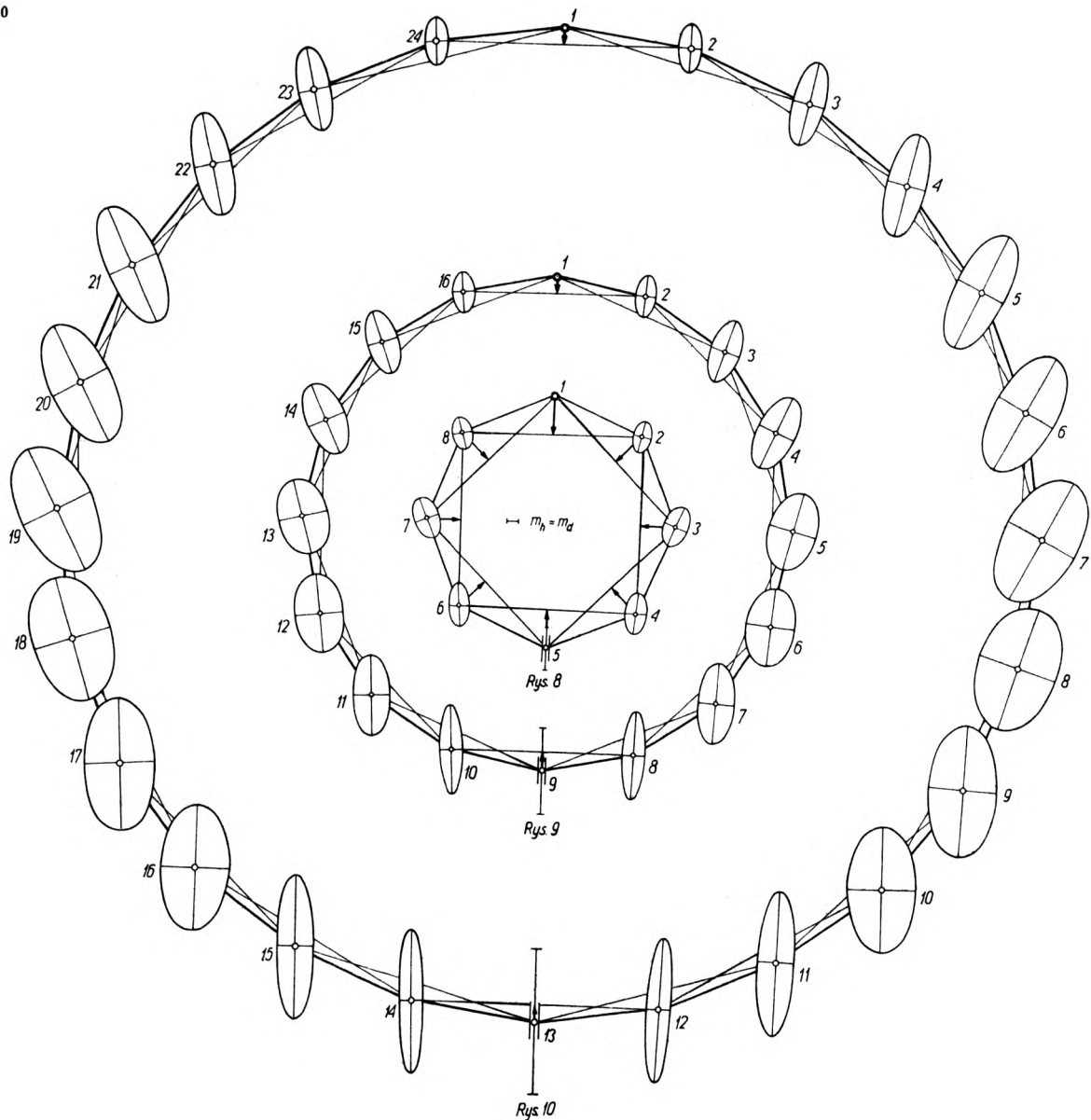
W tablicach 2, 3, 4, 5, 7, 8 zestawiono współczynniki wyrażające błędy średnie m_r , m_s , m_p i pólności elips błędów średniego A_{sr} , B_{sr} jako wielokrotności błędu średniego pomiaru strzałki m_h przy założeniu $m_h = m_d$. A zatem, znając dokładności pomiaru strzałki i długości, zależne od przy-

Tablica 7

Nr punktu	dr_s	10	11	12	13	14	15	16
m_r	3,8	3,4	2,7	2,2	2,4	2,7	2,6	1,7
m_s	0,0	1,8	3,0	3,3	3,2	2,6	1,8	1,1
A_{sr}	3,8	1,0	1,6	2,1	2,1	1,8	1,4	1,0
B_{sr}	0,0	3,8	3,5	3,3	3,3	3,3	2,8	1,7
φ	0°	66°	40°	13°	156°	132°	117°	104°
m_p	3,8	3,9	3,9	4,0	4,0	3,8	3,2	2,0

Tablica 8

Nr punktu	dr_{12}	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
m_r	6,3	6,0	5,3	4,4	3,7	3,4	3,8	4,3	4,6	4,0	3,5	2,1
m_s	0,0	1,9	3,4	4,6	5,2	5,4	5,4	4,5	3,6	2,6	1,7	1,0
A_{sr}	6,3	1,0	1,6	3,3	3,1	3,4	3,3	2,7	2,2	1,7	1,4	1,0
B_{sr}	0,0	6,2	6,1	5,3	5,6	5,3	5,7	5,6	5,3	4,5	3,6	2,1
φ	0°	75°	60°	44°	26°	119°	157°	136°	125°	118°	106°	98°
m_p	6,3	6,3	6,3	6,3	6,3	6,3	6,6	6,2	5,8	4,8	3,9	2,3



jętej metody pomiaru i dokładności użytych instrumentów, możemy łatwo obliczyć błędy średnie m_r , m_s , m_p i A_{sr} , B_{sr} . Na przykład w regularnym, zamkniętym ciągu o liczbie punktów $n = 16$, dostosowanym jak na rysunku 9, w którym strzałki i długości są mierzone z błędem średnim $m_h = m_d = 0,05$ mm, parametry dokładności wyznaczenia punktu 11 obliczamy, korzystając ze współczynników zawartych w tablicy 7

$$\begin{aligned} m_{r11} &= 0,05 \cdot 2,7 = 0,14 \text{ mm} \\ m_{s11} &= 0,05 \cdot 3,0 = 0,15 \text{ mm} \\ A_{sr11} &= 0,05 \cdot 1,6 = 0,08 \text{ mm} \\ B_{sr11} &= 0,05 \cdot 3,5 = 0,18 \text{ mm} \\ m_{p11} &= 0,05 \cdot 3,0 = 0,20 \text{ mm} \end{aligned}$$

Wartości te będą identyczne również dla punktu 15, położonego symetrycznie do punktu 11 względem osi przechodzącej przez punkty 1, 13.

Wyniki dokonanych analiz mogą być użyte także do obliczania błędów m_r , m_s , m_p i pól eliips błędów A_{sr} , B_{sr} w regularnych, zamkniętych ciągach, w których nie mierzono strzałek h , lecz kąty wierzchołkowe i długości błędów d . Dotyczy to jednak ciągów, w których jest zachowany stosunek dokładności $m_a : m_d$, odpowiadający przyjętemu założeniu $m_h = m_d$.

Zgodnie z rysunkiem 2a zachodzi zależność

$$\alpha = 180^\circ - \left(\arcsin \frac{h_C}{d_L} + \arcsin \frac{h_C}{d_P} \right) \quad (17)$$

Błąd średni kąta α wyznaczonego ze wzoru (17) z wykorzystaniem wartości h , d_L , d_P jest równy

$$m_a = \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{d_L^2 - h^2}} + \frac{1}{\sqrt{d_P^2 - h^2}} \right) m_h^2 + \frac{h^2}{d_L^2 (d_L^2 - h^2)} m_{dL}^2 + \frac{h^2}{d_P^2 (d_P^2 - h^2)} m_{dP}^2} \quad (18)$$

Podstawiając do wzoru (18) $d_L = d_P = d$ i $m_h = m_d$ otrzymamy po przekształceniach

$$m_a = \frac{1}{d} \sqrt{\frac{4d^2 + 2h^2}{d^2 - h^2}} m_h \quad (19)$$

a następnie po podstawieniu $\frac{h}{d} = k_1$ otrzymamy

$$m_a = \frac{1}{d} \sqrt{\frac{4 + 2k_1^2}{1 - k_1^2}} m_h = \frac{k_2}{d} m_h \quad (20)$$

z wzoru (20) wynika

$$m_h = \frac{m_a \cdot d}{k_2 \cdot \varrho} \quad (21)$$

Współczynnik k_2 , zależnie od liczby n punktów w zamkniętym, regularnym ciągu, przyjmuje wartości

n	k_2
8	2,242
16	2,058
24	2,026

Wzór (21), współczynniki k_2 i wyniki analiz zawarte w tablicach 2, 3, 4, 5, 7, 8 umożliwiają obliczenie parametrów dokładności wyznaczenia punktów na podstawie znanej dokładności pomiaru kątów α i długości d . Na przykład, w regularnym, zamkniętym ciągu o liczbie punktów $n = 16$, w którym kąty pomierzono z błędem średnim $m_d = 5''$, a długości boków wynoszą $d = 20$ cm, ze wzoru (21) otrzymamy błąd średni strzałki

$$m_h = \frac{5'' \times 20\,000 \text{ mm}}{2,058 \times 9''} = 0,236 \text{ mm}$$

Aby można było korzystać z wyników tych analiz, długości boków należy mierzyć także z błędem $m_d = 0,236$ mm. W ciągu tym, dostosowanym przykładowo jak na rysunku 9, parametry wyznaczenia położenia punktu 11 (15) wynoszą

$$\begin{aligned} m_{r\,11} &= 0,236 \cdot 2,7 = 0,64 \text{ mm} \\ m_{s\,11} &= 0,236 \cdot 3,0 = 0,71 \text{ mm} \\ A_{sr\,11} &= 0,236 \cdot 1,6 = 0,38 \text{ mm} \\ B_{sr\,11} &= 0,236 \cdot 3,5 = 0,83 \text{ mm} \\ m_{p\,11} &= 0,236 \cdot 3,9 = 0,92 \text{ mm} \end{aligned}$$

LITERATURA

- [1] Hausbrandt S.: Rachunek wyrównawczy i obliczenia geodezyjne. PPWK, Warszawa 1970
- [2] Janusz W.: *Zagadnienie automatycznego wyznaczania odkształceń budowli przy pomocy modelu konstrukcji geodezyjnej w postaci stałej instalacji zespołu urządzeń pomiarowych*. Prace IGiK. XI: 1964 z. 2 (24)
- [3] Janusz W.: Obsługa geodezyjna budowli i konstrukcji. PPWK, Warszawa 1975
- [4] Janusz W.: *Metody precyzyjnego pomiaru odległości poziomych i pionowych*. Prace IGiK. XXV: 1978 z. 1 (58)
- [5] Lebediew H. H.: Wysokotocznyje geodeziczieskoje izmierenija dla stroitelstwa i montaža B. Sierpuchowskiego uskori-tiela. Niedra, Moskwa 1968
- [6] Lazzarini T.: Geodezyjne pomiary przemieszczeń budowli i ich otoczenia. PPWK, Warszawa 1977
- [7] Polak M.: *Idea swobodnego wyrównania sieci geodezyjnej i jej znaczenie dla geodezyjnych pomiarów przemieszczeń poziomych*. Prz. Geod. R. 50: 1978 nr 12
- [8] Prószyński W.: Wstępne analizy dokładnościowe geodezyjnych konstrukcji realizacyjnych (praca doktorska). PW, Warszawa 1972
- [9] Sikorski K., Wasilewski A.: *Wyrównywanie siatek realizacyjnych z wykorzystaniem uogólnionej odwrotności macierzy*. Prz. Geod. R. 51: 1979 nr 8
- [10] Szancer S.: *Zastosowanie geodezji inżynierskiej w niektórych problemach kosmicznych*. Prz. Geod. R. 51: 1979 nr 1
- [11] Bjerhammar A.: Estimation with singular inverses. Tellus. Uppsala 1971