

MARIA CISAK
ANDRZEJ SAS

TRANSFORMACJA WSPÓLRZĘDNYCH PUNKTÓW Z UKŁADU „BOROWA GÓRA” DO UKŁADU „1942”

ZARYS TREŚCI: W niniejszym artykule przedstawiono wyniki prac związanych z transformacją współrzędnych geodezyjnych z układu „Borowa Góra” na układ współrzędnych „1942”. Zbadano cztery warianty rozwiązania zagadnienia z uwzględnieniem dwóch poziomów dokładności. Wykonano transformację współrzędnych płaskich X i Y metodą Ryšavego oraz współrzędnych sferycznych B i L metodą Buršy–Wolfa, które są metodami ścisłymi. Zaprezentowano również możliwość dokonania transformacji współrzędnych metodami przybliżonymi: metodą średnich wartości ΔX i ΔY dla arkuszy map w skali 1:100 000 oraz metodą strefową. W wyniku przeprowadzonych na wybranym materiale mapowym testów opracowano algorytm i program obliczeniowy, który posłużył do przeliczenia, z dokładnością ± 4.5 m, współrzędnych punktów z układu „Borowa Góra” na układ „1942”. Dokonano również porównania, w formie graficznej, wyników uzyskanych przy użyciu ścisłych i przybliżonych metod transformacji.

1. WSTĘP

Wprowadzenie ujednoliconego, zgodnego ze standardem europejskim układu współrzędnych w dziedzinie do kumentacji geodezyjnych oraz geologiczno-geofizycznych jest zadaniem priorytetowym zarówno dla służby geodezyjnej, jak i geologicznej z uwagi na dokonującą się integrację europejską. Złożoność zadania wpływa z faktu wykorzystania w tych dokumentacjach map topograficznych sporządzonych w różnych układach współrzędnych. Jest to istotny problem przy podejmowanej obecnie próbie opracowania założeń do utworzenia geoidy centymetrowej, gdyż dla wysokiej dokładności jej wyznaczenia, między innymi, ważna jest również jednoznaczność w określeniu lokalizacji punktów geodezyjnych i grawimetrycznych w obowiązującym

jednolitym europejskim układzie współrzędnych. Przy tworzeniu map numerycznych coraz częściej pojawia się zatem potrzeba transformacji współrzędnych pomiędzy różnymi układami obowiązującymi w Polsce na przestrzeni ostatnich kilkudziesięciu lat. W celu określenia metodyki przeliczenia tych podstawowych danych do jednolitego, międzynarodowego układu współrzędnych niezbędna jest również analiza jednorodności i dokładności tych danych.

Przed przystąpieniem do transformacji należy wybrać jej rodzaj, czyli ustalić postać równania transformacyjnego. Do jej wykonania niezbędna jest znajomość parametrów transformacji. Przy odpowiednio zdefiniowanych układach mogą być one określone na podstawie znanych zależności pomiędzy tymi układami. Gdy zależności te nie są znane, parametry transformacji określa się na podstawie współrzędnych punktów wspólnych, zwanych również punktami dostosowania.

W niniejszym artykule przedstawiono wyniki prac związanych z problemem transformacji układu współrzędnych geodezyjnych „Borowa Góra” („BG”) na układ współrzędnych „1942”. Problem ten szczególnie dotyczy zagadnienia dokumentacji geologiczno-geofizycznych, ponieważ wszystkie punkty zawarte w tych dokumentacjach, w tym również punkty zdjęć grawimetrycznych wykonanych po wojnie do 1987 r., były lokalizowane na mapach sporządzonych w układzie współrzędnych „BG”, po roku 1987 zaś w układzie współrzędnych „1942”.

Obecnie międzynarodowe europejskie organizacje geodezyjne rekomendują jednolity układ o nazwie Europejski Ziemi Układ Odniesienia – ETRF89, stanowiący w konsekwencji podzbiór rozwiązania globalnego, jakim jest Międzynarodowy Ziemi Układ Odniesienia – ITRF (McCarthy 2003).

Przeliczenie współrzędnych z układu „1942” na ETRF89 nie stanowi problemu. Procedurę przeliczania podają odpowiednie wytyczne (Kadaj 2001). Celem niniejszej pracy było opracowanie takiej metody, która pozwalałaby na znalezienie na odpowiednim poziomie dokładności relacji między współrzędnymi punktów w układzie „BG” a współrzędnymi tych punktów w układzie „1942”.

2. CHARAKTERYSTYKA UKŁADÓW WSPÓLRZĘDNYCH „BG” I „1942”

2.1. Układ współrzędnych „BG”

Układ „BG” został opracowany przez Wojskowy Instytut Geograficzny (WIG) w 1936 r. Podstawę do obliczeń geodezyjnych i prac kartograficznych w Polsce do roku 1952, stanowiła elipsoida Bessela z punktem przyłożenia Borowa Góra.

Układ ten, oficjalnie obowiązujący w Polsce do roku 1952, charakteryzował się następującymi parametrami (Warchałowski 1952):

- powierzchnia odniesienia – elipsoida Bessela o dużej półosi $a = 6377397.15500$ m i spłaszczeniu $f = 1/299.152813$ (mała półoś $b = 6356078.96325$ m),
- przyłożenie elipsoidy do geoidy w punkcie Borowa Góra o współrzędnych geodezyjnych:
 $B = 52^{\circ}28'32''.85$
 $L = 21^{\circ}02'2''$
- orientacja elipsoidy odniesienia na punkt Modlin o azymucie $261^{\circ}53'15''.9$

Do sporządzenia map topograficznych w skali 1:100 000 dla obszaru Polski w tym układzie zastosowane zostało przez WIG odwzorowanie Roussilhe’a. Jest to odwzorowanie quasi-stereograficzne, równokątne, uwzględniające elipsoidalny kształt ziemi, o następujących parametrach (Biernacki 1932):

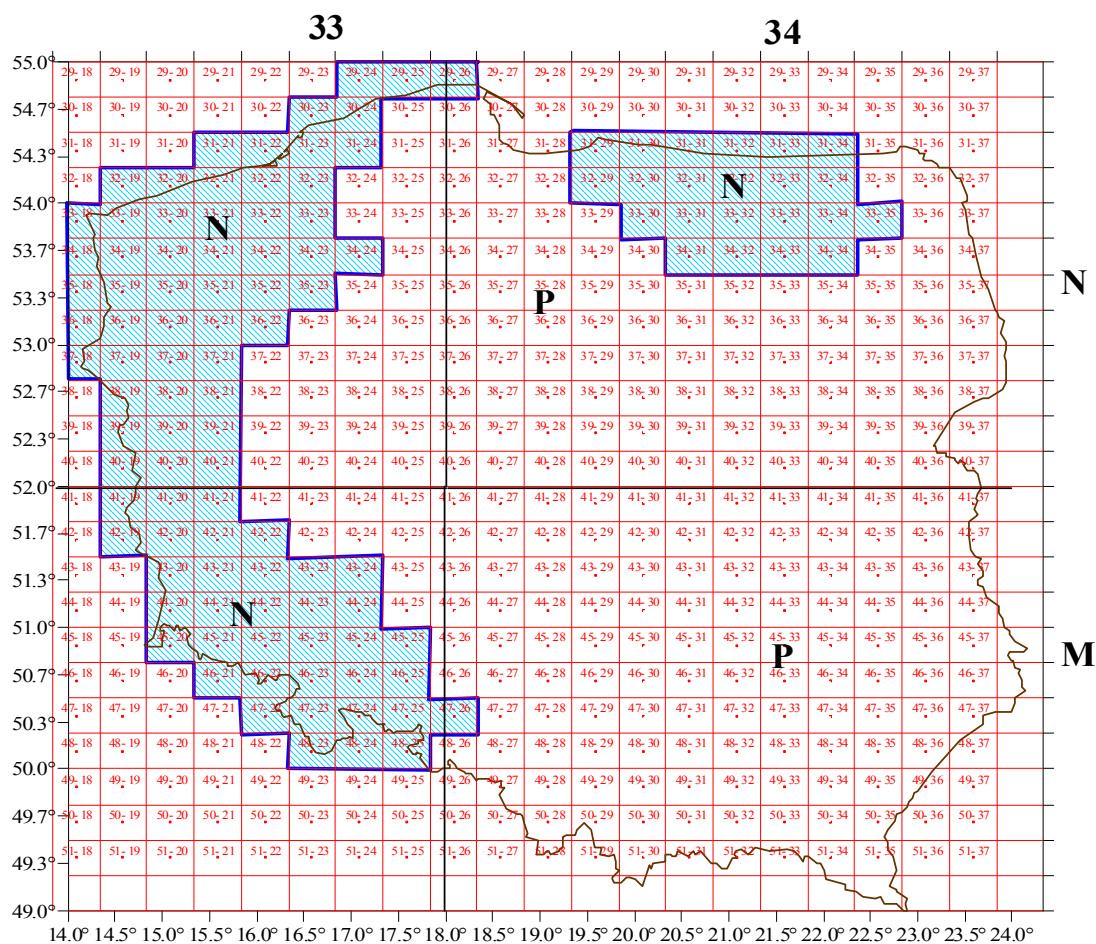
- początek układu współrzędnych w punkcie $B = 52^{\circ}$ i $L = 22^{\circ}$ na wschód od Greenwich,
- współczynnik zniekształcenia skali $m_0 = 0.9995$,
- oś X jest obrazem południka $L = 22^{\circ}$,
- współrzędne początku układu mają wartości: $X_0 = + 500\ 000$ m, $Y_0 = + 600\ 000$ m.

W odwzorowaniu tym, w celu uniknięcia dużych zniekształceń, zastosowano płaszczyznę sieczną przecinającą elipsoidę wzdłuż elipsy zbliżonej do okręgu o promieniu około 284 km, licząc od punktu głównego.

Po wojnie zaszła konieczność opracowania nowych map topograficznych w skali 1:100 000, obejmujących również Ziemię Odzyskaną. Postanowiono zachować ten sam system odniesienia, zmieniając odwzorowanie quasi-stereograficzne na Gaussa–Krügera. Dla terenów Polski w nowych granicach wykorzystano wszystkie dotychczasowe

opracowania kartograficzne zarówno polskie, jak i niemieckie w celu stworzenia jednolitej podstawy dla wszelkich opracowań geodezyjnych i kartograficznych (pokrycie terenu materiałami polskimi i niemieckimi przedstawiono na rys. 1). W tej sytuacji w pierwszej kolejności przystąpiono do powiązania istniejących sieci triangulacyjnych wykonywanych w różnych systemach odniesienia i obliczanych w różnych układach współrzędnych. Powstały dwie niezależne sieci (jedna obejmowała Ziemię Odzyskaną, a druga tereny Polski sprzed 1939 r.). Do opracowania niemieckich sieci triangulacyjnych była przyjęta elipsoida Bessela, styczna do powierzchni geoidy w punkcie o współrzędnych astronomicznych $\varphi = 52^{\circ}22'54''.81$ i $\lambda = 13^{\circ}04'01''.72$ znajdującym się na terenie obserwatorium astronomicznego w Poczdamie. Punkt ten był podstawowym punktem niemieckich sieci geodezyjnych i był brany pod uwagę przy przeliczaniu współrzędnych sieci triangulacyjnych niemieckich na układ polski na obszarze Ziemi Odzyskanych (Różycki 1950). Sieci te odrębnie wyrównano, przeliczając współrzędne wszystkich istniejących punktów triangulacyjnych na układ współrzędnych płaskich X i Y „BG”, w odwzorowaniu Gaussa–Krügera. Takie podejście umożliwiło kosztem niezgodności występujących w wąskim paśmie styku, wzdłuż 18 południka, na uzyskanie większej dokładności na obszarach objętych poszczególnymi sieciami (Podlacha i Zwierzyński 1996).

Do sporządzenia 375 arkuszy map topograficznych w skali 1:100 000 i 750 arkuszy map w skali 1:50 000 w układzie współrzędnych płaskich „BG”, zastosowano odwzorowanie Gaussa–Krügera, jako odwzorowanie poprzeczne walcowe, wiernokątne, w pasach 6-stopniowych o południkach osiowych 15° i 21° i współczynniku zniekształcenia skali $m_0 = 0.999935$, a od 1949 r. $m_0 = 1.000000$ (Różycki 1950). Każdy z pasów jest odwzorowany oddzielnie i stanowi oddzielny układ współrzędnych płaskich X i Y, gdzie oś X jest obrazem południka osiowego odwzorowania, a współrzędne początków układów mają wartości: dla 3 strefy odwzorowanej 6 stopniowej $X_0 = 0$, $Y_0 = 3\,500\,000$ m, a dla 4 strefy $X_0 = 0$ i $Y_0 = 4\,500\,000$ m. Przyjęty został przedwojenny podział na arkusze o wymiarach $\Delta B = 15'$, $\Delta L = 30'$. Na arkuszach tych wniesione są dwie siatki: siatka kartograficzna oraz siatka kilometrowa.



N - materiały niemieckie, mapy topograficzne 1:100 000

P - materiały polskie, mapy topograficzne 1:100 000

Rys. 1. Skorowidz w układzie „BG” z zasięgiem polskich i niemieckich map

Do oznaczenia arkuszy map przyjęto podział na pasy i słupy, które numerowano liczbami arabskimi. Równoleżnikowe pasy ponumerowane były kolejno od 29 na północy do 52 na południu, a numeracja południkowych słupów zaczynała się od 18 na zachodzie kraju i kończyła na 38 na wschodzie. Linie podziałowe pasów arkuszy map w skali 1:100 000 przeprowadzono po równoleżnikach kończących się na 0', 15', 30', 45', natomiast linie podziałowe słupów poprowadzone zostały przez południki o końcówkach minut 50' i 20'. Tak przyjęty podział wynikał z wykorzystania źródłowych materiałów kartograficznych sporządzonych przed I wojną światową, kiedy długości geograficzne liczone były od południka Ferro. Oprócz oznaczenia liczbowego pasa i słupa dodatkowo stosowano nazwę najważniejszej miejscowości na danym arkuszu, np. 48-36 Lubaczów.

2.2. Układ współrzędnych „1942”

Państwowy układ współrzędnych „1942” został wprowadzony do praktyki geodezyjnej i kartograficznej w 1953 r. w celu opracowania i wydania jednolitej mapy topograficznej państwa. Układ współrzędnych „1942”, obowiązujący oficjalnie do połowy lat 60., wykorzystywany był do celów obronnych i gospodarczych. Charakteryzował się następującymi parametrami (Różycki 1950):

- powierzchnia odniesienia elipsoida Krasowskiego o dużej półosi $a = 6378245.00000$ m i spłaszczeniu $f = 1/298.3$ (mała półosi $b = 6356863.01877$ m),
- przyłożenie elipsoidy do geoidy w punkcie Pułkowo o współrzędnych:
 $B = 59^{\circ}46'18''.55$
 $L = 30^{\circ}19'42''.0$
- orientacja elipsoidy odniesienia na punkt Bugry o azymucie $121^{\circ}40'38''.79$.

Mapy topograficzne w układzie „1942” sporządzone zostały w poprzecznym walcowym, stycznym odwzorowaniu Gaussa–Krügera. Mapy w skalach 1:10 000, 1:25 000, 1:50 000, 1:100 000 i 1:200 000 odwzorowane są w trzech 6-stopniowych pasach o południkach osiowych 15° , 21° , 27° . Mapy zaś w skalach 1:500 i większych odwzorowane są w czterech 3-stopniowych pasach o południkach osiowych 15° , 18° , 21° , 24° . Południk osiowy, zwany też południkiem środkowym, odwzorowuje się wiernie ($m_0 = 1.000000$) (Różycki 1950).

Arkusze map topograficznych są sporządzone w podziale na sekcje trapezowo-elipsoidalne, przy czym linie podziału na arkusze pokrywają się z obrazami i równoleżnikami i południkami. Na arkuszach map w układzie „1942” wniesione są dwie siatki: siatka współrzędnych geodezyjnych B i L oraz współrzędnych płaskich X i Y.

Wymiary arkuszy i przykładowe godła map w układzie „1942” wynoszą:

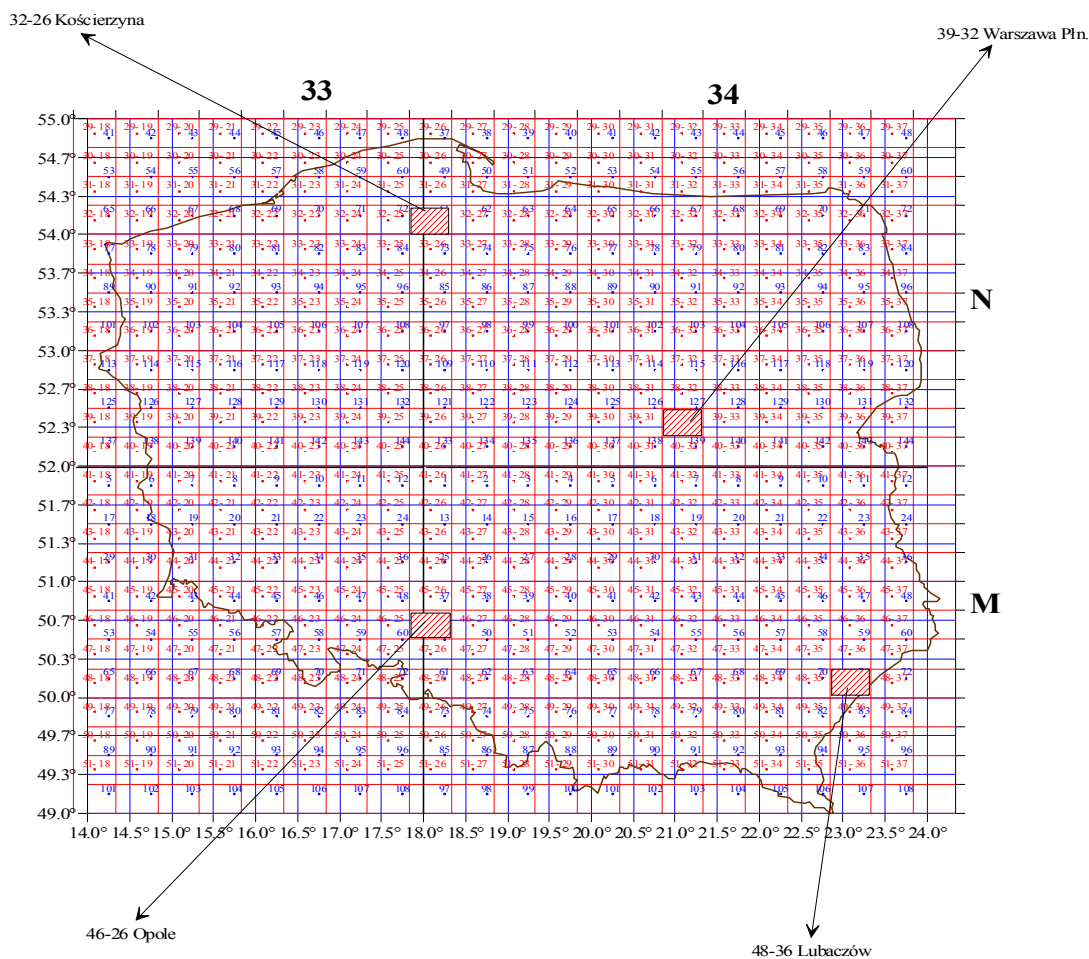
- dla mapy w skali 1:1 000 000: $\Delta B = 4^\circ$, $\Delta L = 6^\circ$ M-33
- dla mapy w skali 1:500 000: $\Delta B = 2^\circ$, $\Delta L = 3^\circ$ M-33-D
- dla mapy w skali 1:200 000: $\Delta B = 40'$, $\Delta L = 1^\circ$ M-33-XXX
- dla mapy w skali 1:100 000: $\Delta B = 20'$, $\Delta L = 30'$ M-33-136
- dla mapy w skali 1:50 000: $\Delta B = 10'$, $\Delta L = 15'$ M-33-136-B
- dla mapy w skali 1:25 000: $\Delta B = 5'$, $\Delta L = 7.5'$ M-33-136-B-b
- dla mapy w skali 1:10 000: $\Delta B = 2.5'$, $\Delta L = 3.75'$ M-33-136-B-b-2
- dla mapy w skali 1:5 000: $\Delta B = 1.25'$, $\Delta L = 1.85'$ M-33-136-B-b-2-1

3. PRZELICZANIE WSPÓLRZĘDNYCH METODAMI ŚCISŁYMI Z UKŁADU „BG” NA UKŁAD „1942”

3.1. Wybór punktów do transformacji

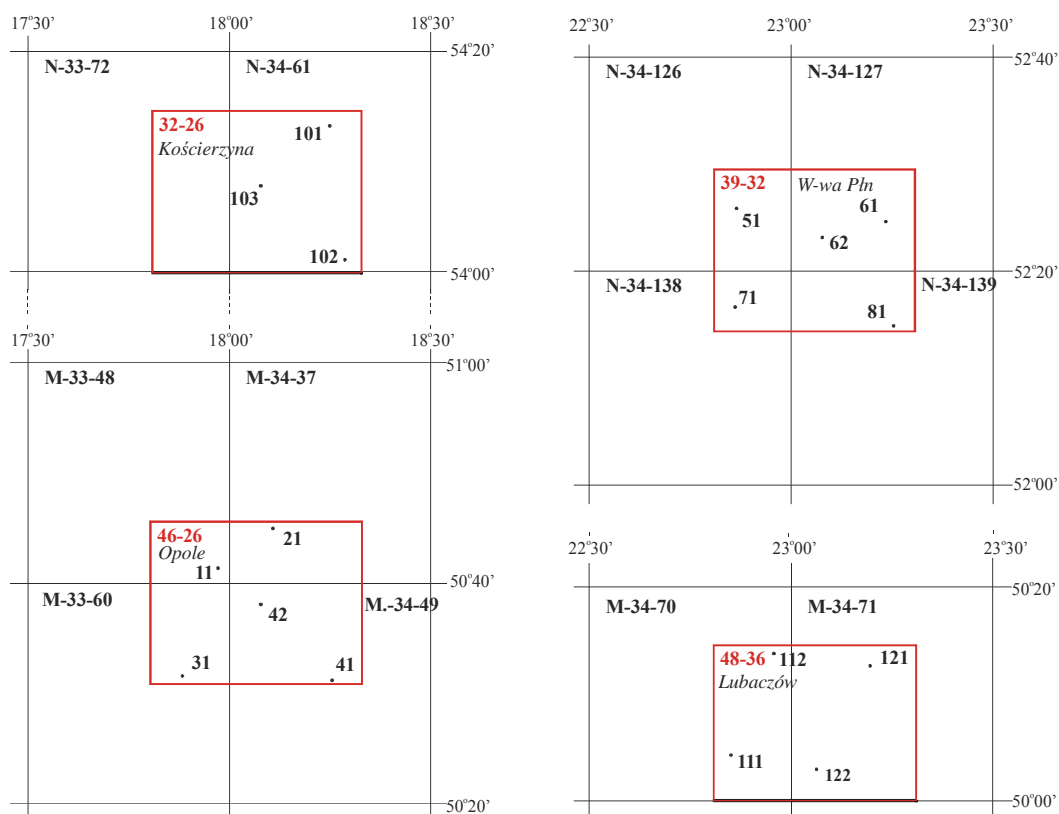
Próbie przeprowadzono na mapach w układzie „BG” w skali 1:100 000 o następujących godłach: (32-26) Kościerzyna, (46-26) Opole, (39-32) Warszawa Płn., (48-36) Lubaczów, które zaznaczono na rysunku 2.

Dwa pierwsze arkusze, ograniczone południkami $\lambda = 17^\circ 50'$ i $\lambda = 18^\circ 20'$, leżą na granicy 3 i 4 strefy odwzorowawczej, a więc w rejonie największych zniekształceń odwzorowawczych, które występują wokół 18 południka. Zniekształcenia odwzorowawcze wokół tego południka spowodowane są wykorzystaniem różnych sieci triangulacyjnych polskich i niemieckich, jak również niespójnych materiałów kartograficznych (Podlacha i Zwierzyński 1996). Wybór do testowania arkuszy Kościerzyna i Opole był uzasadniony tym, że zjawisko zniekształceń uwidacznia się na arkuszach map w układzie „BG” położonych w słupie 26. Arkusz Warszawa Płn. znajduje się w pobliżu Borowej Góry, czyli punktu przyłożenia elipsoidy Bessela do geoidy i jest przecięty południkiem osiowym $\lambda = 21^\circ$. Arkusz Lubaczów wybrano z uwagi na to, że znajduje się on w pobliżu wschodniej granicy czwartego pasa odwzorowawczego, czyli południka 24° .



Rys. 2. Skorowidz map w układach „BG” (kolor czerwony) i „1942” (kolor niebieski) z zaznaczonymi testowanymi arkuszami

Na wymienionych wyżej arkuszach wybrano 17 charakterystycznych punktów (punkty siłki triangulacyjnej lub wyraźnie zaznaczone skrzyżowania dróg) (rys. 3), mających swoje odpowiedniki na mapach w skali 1:100 000 w układzie „1942” i odczytano ich współrzędne B i L, a następnie na podstawie parametrów elipsoidy Bessela przeliczono je programem standardowym $BL \rightarrow XY(BG)$ na współrzędne płaskie X i Y w odwzorowaniu Gaussa–Krügera w celu przygotowania ich do transformacji współrzędnych.



Rys. 3. Rozmieszczenie 17 testowanych punktów na arkuszach map w skali 1:100 000

Korzystając z zasobów w Składnicy Materiałów Geodezyjnych i Kartograficznych w Lesznowoli, dokonano wyboru punktów dostosowania, leżących na ww. arkuszach map, mających współrzędne płaskie X i Y zarówno w układzie „BG”, jak i w układzie „1942”. Istniejące w składnicy katalogi zawierają jedynie współrzędne płaskie X i Y punktów sieci triangulacyjnej od 1 do 4 kl. Współrzędne płaskie punktów wspólnych, wypisane z katalogów, podane były dla 3-stopniowych pasów odwzorowawczych o południkach osiowych 18° i 21°. Wyjątek stanowiły wspólne punkty zlokalizowane na arkuszach M-34-70 i M-34-71, które w tych katalogach podane były dla 6-stopniowych pasów odwzorowawczych o południkach osiowych 15° i 21°. Do dalszych obliczeń przyjęto współrzędne X i Y przeliczone dla pasów 6-stopniowych.

3.2. Transformacja współrzędnych płaskich metodą Ryšavego

Spółród wielu metod transformacji współrzędnych płaskich z układu pierwotnego na wtórny w niniejszym opracowaniu wybrano metodę Ryšavego (Anders 1962) wykorzystując program o nazwie XY(BG) \rightarrow XY(42). Program ten najlepiej pasował do transformacji tak wyjątkowego układu, jak układ „BG”, w którym nie można określić jednej wspólnej dla całego terenu Polski funkcji odwzorowawczej.

Podstawowym warunkiem transformacji w tej metodzie jest założenie, że „suma kwadratów różnic, między przetransformowanymi współrzędnymi punktów dostosowania z układu „BG” na układ „1942”, a współrzędnymi tych punktów w układzie „1942” wypisanymi z katalogów ma być minimum”.

$$[V_p^2] = [V_x^2 + V_y^2] = \min$$

$$\text{gdzie: } V_x = X_{kat} - X_{trans} \\ V_y = Y_{kat} - Y_{trans}$$

Współrzędne X_p i Y_p dowolnego punktu P w układzie „1942”, nie wchodzącego w skład grupy punktów dostosowania, obliczamy na podstawie wzorów:

$$X_p = X'_p + a - (Y'_p - Y'_o) \cdot \alpha + (X'_p - X'_o) \cdot \beta$$

$$Y_p = Y'_p + b - (X'_p - X'_o) \cdot \alpha + (Y'_p - Y'_o) \cdot \beta$$

gdzie: X'_p, Y'_p – współrzędne dowolnego punktu P w układzie „BG”,

$$X'_o = \frac{[X']_1^n}{n}, \quad Y'_o = \frac{[Y']_1^n}{n} \quad \text{– współrzędne punktu obrotu układu}$$

„BG” przyjęte dla uproszczenia jako średnie arytmetyczne współrzędnych środka figury utworzonej przez punkty dostosowania, dookoła którego skręcane są osie X i Y aż do uzyskania równoległości z osiami układu „1942”, aby następnie przesunąć go o odpowiednie wielkości a i b .

$$a = \frac{[X]_1^n}{n} - \frac{[X']_1^n}{n}, \quad b = \frac{[Y]_1^n}{n} - \frac{[Y']_1^n}{n}, \quad n \text{ – liczba punktów wspólnych}$$

$$\alpha = \frac{[X'_r(Y_r - Y'_r) - Y'_r(X_r - X'_r)]_1^n}{[X_r'^2 + Y_r'^2]_1^n}$$

$$\beta = \frac{[X'_r(X_r - X'_r) - Y'_r(Y_r - Y'_r)]_1^n}{[X_r'^2 + Y_r'^2]_1^n}$$

Współrzędne punktów dostosowania zredukowane do odpowiednich środków figur utworzonych przez te punkty w układzie „BG” i „1942” otrzymuje się ze wzorów:

$$X_{ri} = X_i - \frac{[X]_1^n}{n}, \quad X'_{ri} = X'_i - \frac{[X']_1^n}{n}$$

$$Y_{ri} = Y_i - \frac{[Y]_1^n}{n}, \quad Y'_{ri} = Y'_i - \frac{[Y']_1^n}{n}$$

Parametry a i b oraz α i β są współczynnikami transformacji, obliczonymi na podstawie wszystkich punktów dostosowania w ilości n , przy zachowaniu warunku minimum sumy kwadratów odchyłek współrzędnych tych punktów przetransformowanych do ich współrzędnych katalogowych w układzie „1942”.

Programem XY(BG) \rightarrow XY(42) dokonano transformacji punktów testowanych. Dokładność dostosowania zbiorów punktów obliczono na podstawie poniżej podanych wzorów:

$$M_x = \pm \sqrt{\frac{[V_x^2]_1^n}{n}}, \quad M_y = \pm \sqrt{\frac{[V_y^2]_1^n}{n}}$$

$$M_p = \pm \sqrt{\frac{[V_p^2]_1^n}{n}} = \pm \sqrt{\frac{[V_x^2]_1^n + [V_y^2]_1^n}{n}}$$

Błąd położenia punktu wyznaczony na podstawie punktów dostosowania w liczbie n dla wybranych arkuszy map w skali 1:100 000 przedstawiono w tabeli 1.

Przegląd katalogów, dotyczących badanego obszaru, a znajdujących się obecnie w dyspozycji Zarządu Geografii Wojskowej, wykazał, że zaledwie trzy arkusze (N-34-126, N-34-127, N-34-139) z 12 badanych posiadają odpowiednie katalogi. Z wymienionych powyżej arkuszy wybrano dodatkowo 13 punktów wspólnych mających współrzędne w obu układach. Punkty te posłużyły do kontroli poprawności stosowania metody Ryšavego. Wartości współrzędnych tych punktów przeliczono programem XY(BG) \rightarrow XY(42) i porównano z wartościami tych współrzędnych w układzie „1942” wypisanymi z katalogów wojskowych. Porównanie wyników transformacji współrzędnych X i Y punk-

tów metodą Ryšavego z ich katalogowym i wartościami w układzie „1942 przedstawiono w tabeli 2.

Tabela 1. Błędy położenia punktów dla wybranych arkuszy

Godła map w układach „BG” i „42”	n	M_x [m]	M_y [m]	M_p [m]
32-26 Kościerzyna				
N-34-61	4	0.148	0.112	±0.185
46-26 Opole				
M-33-48	4	0.146	0.122	±0.191
M-34-37	5	0.303	0.389	±0.493
M-33-60	3	0.273	0.322	±0.422
M-34-49	3	0.058	0.143	±0.154
39-32 Wa-wa Płn.				
N-34-126	4	0.060	0.030	±0.067
N-34-127	6	0.100	0.093	±0.137
N-34-138	5	0.046	0.031	±0.056
N-34-139	5	0.035	0.035	±0.050
48-36 Lubaczów				
M-34-70	5	0.343	0.342	±0.484
M-34-71	4	0.122	0.062	±0.137

Tabela 2. Porównanie wyników transformacji z katalogowymi wartościami współrzędnych punktów

Godła map w ukł. „42” i nr pkt.	DX [m]	DY [m]	m_p [m]
N-34-126 52	0.272	0.196	±0.335
N-34-126 53	-0.088	-0.093	±0.128
N-34-126 54	-0.013	-0.017	±0.021
N-34-126 55	-0.019	-0.005	±0.020
N-34-126 56	0.062	-0.035	±0.071
N-34-127 63	-0.031	0.112	±0.116
N-34-127 64	-0.090	0.023	±0.093
N-34-127 65	-0.074	-0.101	±0.125
N-34-127 66	-0.010	-0.029	±0.031
N-34-139 82	-0.047	-0.031	±0.056
N-34-139 83	-0.012	-0.078	±0.079
N-34-139 84	-0.054	-0.096	±0.110
N-34-139 85	-0.146	-0.116	±0.186

Wyniki porównania potwierdzają słuszność przyjęcia metody Ryšavego do transformacji współrzędnych między układami, gdyż na 13 badanych punktów błąd położenia punktu waha się od ± 0.021 m do ± 0.186 m, a tylko w jednym przypadku osiąga wartość ± 0.335 m.

3.3. Transformacja współrzędnych sferycznych metodą Buršy–Wolfa

Transformacja według Buršy–Wolfa jest bezpo średnią 7-parametrową metodą przeliczania współrzędnych kartezjańskich odniesionych do jednej elipsoidy, w tym wypadku elipsoidy Bessela, do współrzędnych kartezjańskich odniesionych do drugiej elipsoidy – w tym przypadku do elipsoidy Krasowskiego. Transformację tę można zapisać następującym równaniem:

$$r_i'' = (1 + k) \cdot R(\alpha, \beta, \gamma) \cdot r_i' + r_0$$

gdzie: $R(\alpha, \beta, \gamma)$ – przestrzenna macierz obrotowa o trzech param e trach rotacji,

k – współczynnik skali,

r_0 – wektor przesunięcia układu pierwotnego względem układu wtórnego (o trzech param e trach translacji x_0, y_0, z_0),

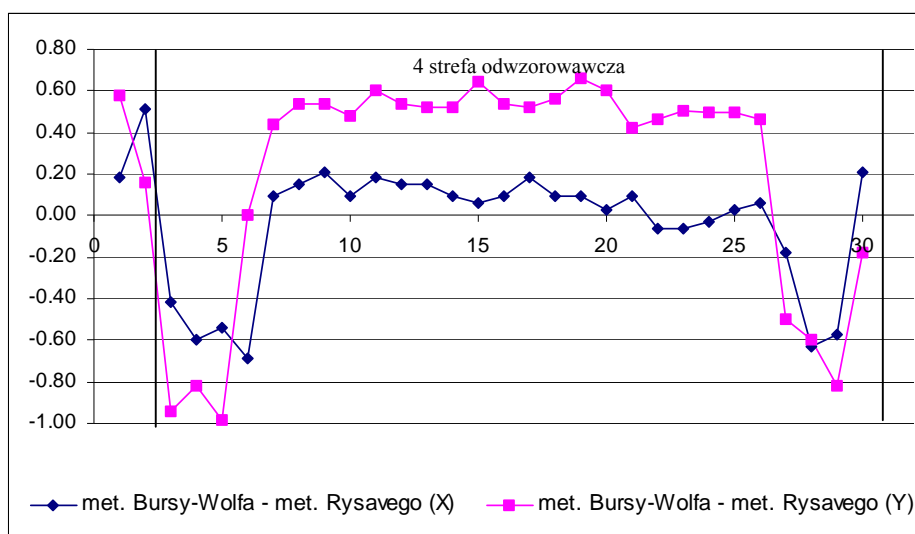
r_i' i r_i'' – wektory wodzące punktów w układach kartezjańskich XYZ odpowiednio przed i po transformacji (Czarnecki 1994).

Zakładając, że obroty przyjm ują nieduże wartości tzn. $\alpha = \beta = \gamma \leq 5''$ wprowadza się uproszczoną liniową macierz obrotów, które zapewniają dokładność obliczeń ± 1 cm.

Danymi wyjściowymi w algorytmie Bušy–Wolfa są współrzędne geodezyjne B i L punkt ów wspólnych w obu uk ładach oraz parametry geometryczne obu elipsoid. Na podstawie ty ch danych wylicza si ę wektory wodzące punktów w obu uk ładach, a nast ępnie metodą najmniejszych kwadratów parametry transformacji. Parametry transformacji wyznaczono w oparciu o współ rzędne 52 punktów wspólnych, a nast ępnie obliczono dla 30 punktów warto ści współrzędnych B i L w układzie „1942”. W wyniku transformacji otrzymano następujące błędy wyznaczenia współrzędnych: $M_B = \pm 0.''0120$, $M_L = \pm 0.''0299$. Wielkości te odpowiadają następującym wartościom błędów współrzędnych

płaskich X i Y: $M_x = \pm 0.36$ m, $M_y = \pm 0.60$ m, a błąd położenia punktu $M_p = \pm 0.70$ m.

Na rysunku 4 przedstawiono różnice współrzędnych X i Y punktów po transformacji obliczonych metodami Buršy–Wolfa i Ryšavego.



Rys. 4. Różnice we współrzędnych X i Y punktów po transformacji metodami Buršy–Wolfa i Ryšavego

Z porównania dwóch metod transformacji wynika, że są one równorzędne pod względem dokładnościowym. Różnice we współrzędnych X wahają się od -0.05 m do 0.20 m, a po osi Y od 0.40 m do 0.70 m, natomiast dla punktów położonych na granicy stref odwzorowawczych różnice te wahają się po osi X od -0.70 m do 0.20 m, a po osi Y od -1.00 m do 0.60 m.

4. PRZELICZANIE WSPÓŁRZĘDNYCH METODAMI PRZYBLIŻONYMI

Mapy w układzie współrzędnych „BG” opracowane w latach 1949–1956 stały się jednym z podstawowych materiałów źródłowych do opracowania treści map topograficznych w skali 1:100 000 w układzie „1942”. W 1956 r. Wojskowa Szkoła Geodezyjna opracowała dla środków każdego arkusza mapy topograficznej w skali 1:100 000 w układzie współrzędnych „1942” średnie wartości różnic współrzędnych

płaskich ΔX i ΔY otrzymane przez porównanie współrzędnych punktów wspólnych w obu układach. W oparciu o te różnice przetransformowana została treść map topograficznych z układu „BG” na układ „1942”.

4.1. Metoda średnich wartości ΔX i ΔY dla arkuszy map w skali 1:100 000 (metoda średnich)

Zbiory wartości ΔX i ΔY , wykorzystywanych przy tworzeniu treści pierwszych map w układzie „1942” dla terenu Polski, zgromadzono w 1994 r. w Instytucie Geodezji i Kartografii w ramach projektu badawczego Nr PB 1052/56/94106. Dane te wykorzystano do opracowania algorytmu transformacji współrzędnych punktów z układu „BG” na odpowiadające im współrzędne w układzie „1942”. W tym celu zbiory wartości ΔX i ΔY , odpowiadające środkom arkuszy map w skali 1:100 000 układu „1942”, zostały zagęszczone przez wyliczenie wartości ΔX i ΔY dla narożników tych map jako średnie arytmetyczne różnic z czterech arkuszy, a dla arkuszy skrajnych z trzech lub dwóch arkuszy. Średnie wartości ΔX i ΔY dla środków ramek obliczono z dwóch przylegających do siebie arkuszy. Tym sposobem uzyskano dla każdego arkusza mapy po 9 wartości ΔX i ΔY . Tak przygotowany zbiór posłużył do opracowania siatki interpolacyjnej, zmian wartości ΔX i ΔY , o wymiarach 1 km x 1 km. Siatka interpolacyjna została opracowana oddzielnie dla obszarów odpowiadającym arkuszom map 1:100 000 o następujących godłach: N-33, M-33, N-34, M-34. Tak przygotowane dane posłużyły do opracowania programu BG/42, za pomocą którego można przeliczać dowolne współrzędne zarówno X i Y, jak i B i L punktów określonych w układzie „BG” na odpowiadające im współrzędne w układzie „1942”.

Programem BG/42 przeliczono z układu „Borowa Góra” na układ „1942” współrzędne 17 punktów testowanych i 13 punktów dodatkowo wybranych z katalogów wojskowych. Wyniki przeliczeń współrzędnych metodą średnich porównano z metodą Ryšavego i przedstawiono na rysunkach 5 i 6.

4.2. Metoda strefowa

Metoda ta jest uproszczoną wersją metody opisanej powyżej i dogodna jest do stosowania dla celów opracowań kartograficznych wykonywanych na mapach topograficznych z dokładnością graficzną. Jest to sposób przeliczenia współrzędnych z układu „Borowa Góra” na układ „1942”, polegający na przyjęciu średniej wartości zmian współrzędnych płaskich oddzielnie dla 3 i 4 strefy odwzorowawczej wyliczonych z posiadanych przez IGiK zbiorów wartości ΔX i ΔY dla każdej mapy w skali 1:100 000, leżącej w strefie 3 o południku osiowym $L_0 = 15^\circ$ oraz w strefie 4 o południku osiowym $L_0 = 21^\circ$.

Dla 3 strefy odwzorowawczej wartości te wynoszą:

$$\Delta X_{sr} = 669.2 \pm 1.7 \text{ m}$$

$$\Delta Y_{sr} = 12.2 \pm 3.2 \text{ m}$$

$$X_{1942} = X_{BG} + 669.2 \text{ m}$$

$$Y_{1942} = Y_{BG} + 12.2 \text{ m}$$

Dla 4 strefy odwzorowawczej wartości te wynoszą:

$$\Delta X_{sr} = 670.5 \pm 4.0 \text{ m}$$

$$\Delta Y_{sr} = -46.8 \pm 1.7 \text{ m}$$

$$X_{1942} = X_{BG} + 670.5 \text{ m}$$

$$Y_{1942} = Y_{BG} - 46.8 \text{ m}$$

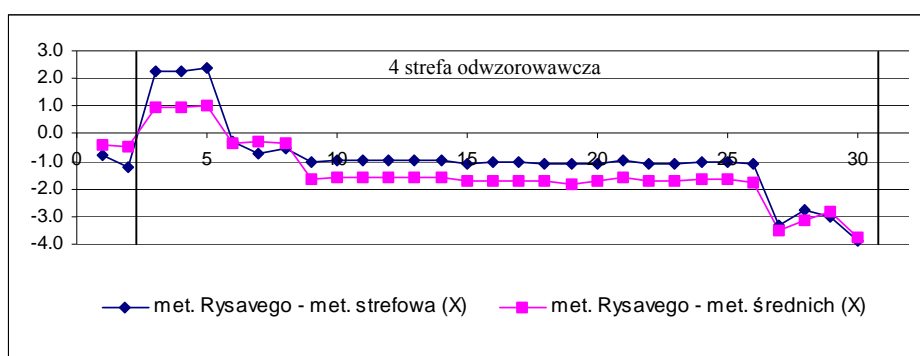
Powyższe wartości ΔX_{sr} i ΔY_{sr} zapewniają dokładność przeliczenia współrzędnych lepszą niż ± 5 m w rejonach o łagodnym przebiegu zmian tych współczynników, natomiast w rejonach o dużej ich zmienności należy się liczyć z dokładnością przeliczeń rzędu ± 8 m. Wyniki przeliczeń współrzędnych metodą strefową porównano z metodą Ryšavego i przedstawiono na rysunkach 5 i 6.

5. ANALIZA WYNIKÓW

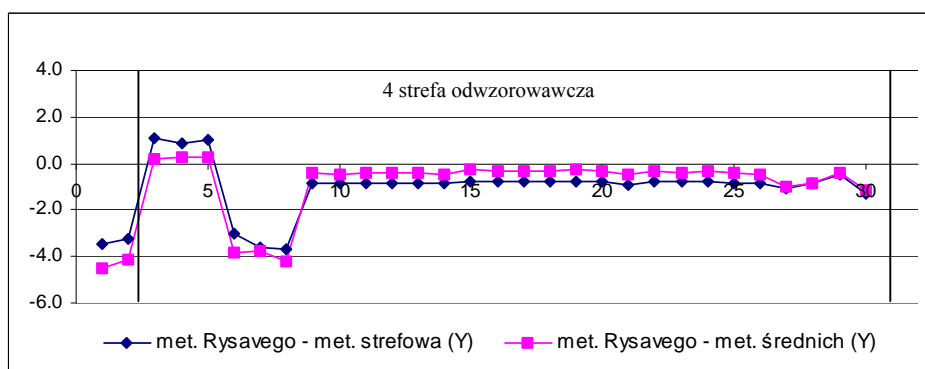
W przedstawionym opracowaniu zaprezentowano cztery warianty rozwiązania przeliczenia współrzędnych z układu „BG” na układ „1942”. Jako założenie przy wyborze wariantu transformacji, najbardziej optymalnego do oczekiwań potencjalnych użytkowników geologiczno-geofizycznej bazy danych, przyjęto zasadę jak największej precyzji przeliczania współrzędnych oraz prostotę jej stosowania. Największą precyzję przeliczania współrzędnych ($m_p = \pm 0.7$ m) zapewniają metody transformacji Ryšavego i Buršy–Wolfa, wykorzystujące punkty

o znanych współrzędnych w obu układach. Jednakże zastosowanie ich staje się coraz bardziej utrudnione z uwagi na brak katalogów współrzędnych punktów dostosowane dla coraz większych obszarów kraju. Jest to spowodowane procesem niszczenia opracowanych w latach 50. katalogów.

Na rysunkach 5 i 6 zestawiono residua wyników przeliczenia współrzędnych płaskich X i Y testowanych punktów, uzyskanych z dwóch przybliżonych metod (metody strefowej i metody średnich wartości ΔX i ΔY) w odniesieniu do wyników transformacji Ryšavego (przyjętej za bezbłędną). Porównanie tych dwóch przybliżonych metod z metodą transformacji Ryšavego wykazało, że różnice we współrzędnych płaskich X i Y w obu przybliżonych metodach dla testowanych punktów są zgodne co do znaku i wahają się w granicach od -4 m do 2 m.



Rys. 5. Porównanie dwóch przybliżonych metod z metodą transformacji Ryšavego po osi X



Rys. 6. Porównanie dwóch przybliżonych metod z metodą transformacji Ryšavego po osi Y

Analiza residuów wykazała, że nie przekraczają one wartości 4 m po osi X, a po osi Y 4.5 m, co w skali mapy 1:100 000 wynosi odpowiednio 0.040 mm i 0.045 mm. Należy zaznaczyć, że największe różnice we współrzędnych występują na arkuszach leżących na skraju stref odwzorowawczych, czyli na arkuszach (32-26) Kościerzyna, (46-26) Opole i (48-36) Lubaczów, natomiast na arkuszach leżących w środku stref odwzorowawczych różnice te nie przekraczają 2 m. Na przedstawionych rysunkach różnice, we współrzędnych 30 testowanych punktów, między metodą ścisłą a metodami przybliżonymi (metoda strefowa i metoda średnich wartości) są zbliżone do siebie. Zmiany we współrzędnych ΔX i ΔY pomiędzy układami „BG” i „1942” wahają się w 3 strefie odwzorowawczej od 667.1 m do 670.6 m dla współrzędnej X oraz od 10.2 m do 16.6 m dla współrzędnej Y, a w strefie 4 od 664.4 m do 672.3 m dla współrzędnej X i od -48.8 m do -45.2 m dla współrzędnej Y. Z dwóch metod przybliżonych dokładniejszą metodą jest metoda średnich wartości. Wykorzystuje ona opracowaną mapę numeryczną zmian wartości ΔX i ΔY współrzędnych, na podstawie której możemy wyznaczyć zmiany współrzędnych dla dowolnego punktu na terenie kraju. W przypadku metody strefowej przyjmowana jest jedna wartość zmiany współrzędnej X i Y, odpowiadająca jej wartości średniej, reprezentatywnej dla całej strefy odwzorowawczej, co w konsekwencji generalizuje obraz zmian wartości ΔX i ΔY . Z tego powodu do dalszego opracowania wybrano metodę średnich wartości, którą przetestowano dodatkowo na 65 punktach dostosowania rozmieszczonych na 12 arkuszach map w skali 1:100 000 w układzie „1942” i odpowiadającym im czterem arkuszom map w układzie „BG”. Błędy położenia punktu po transformacji dla poniżej wymienionych arkuszy wynoszą:

46-26	M-33-48	±4.29 m
	M-34-37	±3.68 m
	M-33-60	±4.36 m
	M-34-49	±3.92 m
39-32	N-34-126	±1.62 m
	N-34-127	±2.00 m
	N-34-138	±1.76 m
	N-34-139	±1.62 m
32-26	N-33-72	±1.14 m
	N-34-61	±0.98 m
48-36	M-34-70	±3.63 m
	M-34-71	±3.04 m

Można przyjąć, że zaproponowana metoda średnich zapewnia dokładność przeliczeń ± 2.00 m w rejonie centralnej Polski, a w rejonach położonych w pobliżu granicy stref odwzorowawczych, tj. w pobliżu południków 18° i 24° , zapewnia dokładność ± 4.5 m, co w zupełności wystarcza dla celów opracowania banku danych geologicznych.

6. WNIOSKI KOŃCOWE

Badania nad możliwością przejścia od układu współrzędnych „BG” do układu „1942” zostały podjęte w celu sprowadzenia danych grawimetrycznych do jednolitego, obowiązującego obecnie układu współrzędnych oraz do jednolitego systemu grawimetrycznego w ramach projektu badawczego dotyczącego wyznaczenia centymetrowej geoidy na obszarze Polski. Opracowana metoda określa relację między współrzędnymi punktów w układzie „Borowa Góra” a współrzędnymi tych punktów w układzie „1942”. Przebadano cztery warianty rozwiązania zagadnienia z uwzględnieniem dwóch poziomów dokładności. Poziom pierwszy stanowią ściśle metody transformacji współrzędnych płaskich metodą Ryšavego oraz transformacji współrzędnych sferycznych metodą Buršy-Wofa, zapewniające dokładność przeliczenia położenia punktu maksymalnie do ± 0.7 m. Poziom drugi stanowią metody przybliżone: metoda średnich wartości zapewniająca dokładność przeliczenia ± 4.5 m oraz metoda strefowa zapewniająca dokładność od ± 5 m do ± 8 m.

Metoda średnich wartości, dla której opracowano algorytm i program obliczeniowy, przeznaczona jest do przeliczenia z układu „Borowa Góra” na układ „1942” współrzędnych około miliona punktów grawimetrycznych zawartych w geologicznej bazie danych. Z przeprowadzonych testów wynika, że uzyskana dokładność jest wystarczająca na potrzeby dokumentacji geologiczno-geofizycznej.

7. PODZIĘKOWANIA

Niniejszą pracę wykonano w ramach grantu zamawianego PBZ-KBN-081/T12/2002 oraz badań statutowych Instytutu Geodezji i Kartografii.

Autorzy wyrażają podziękowania: prof. Krystynie Podlasze, dr. Lucjanowi Siporskiemu, płk. Wiesławowi Graszce, dr Elżbiecie Welker, mgr. Marcinowi Sękowskiemu, oraz kierownikowi Zakładu

Geodezji i Geodynamiki prof. dr. hab. Janowi Kryńskiemu, którzy swoją pomocą przyczynili się do powstania tego artykułu.

BIBLIOGRAFIA

- Anders Z., 1962, *Programowe tematy ćwiczeń z geodezji wraz z rozwiązaniami*. Wyd. 2. d W arszawa: Wydawnictwa Politechniki Warszawskiej.
- Biernacki F., 1932, *Odzworowanie quasi-stereograficzne Wojskowego Instytutu Geograficznego*, Warszawa, Wojskowy Instytut Geograficzny.
- Czarnecki K., 1994, *Geodezja współczesna w zarysie*, Warszawa, Wiedza i Życie.
- MacCarthy D., 2003, *IERS Conventions (2003)*.
- Kadaj R., 2001, W ytyczne TechniczneG-1.10 „*Formuły odwzorowawcze i parametry układów współrzędnych*”, Główny Urząd Geodezji i Kartografii, Warszawa.
- Podlacha K., Zwierzyński J., 1996, *Metody geodezji i kartografii w zastosowaniu do badania geodynamiki Ziemi na obszarze szczególnego zainteresowania Polskiej części programu „EURO-PROBE”*, maszynopis Warszawa.
- Podlacha K., Szeliga K., 1999, *Układy odniesień przestrzennych w aspekcie tworzenia i funkcjonowania systemu informacji przestrzennej w Polsce*, Prace IGiK t. XLVI, z. 99, s. 33–56.
- Różycki J., 1950, *Odzworowanie Gaussa–Krügera i jego zastosowanie w Polsce*, Wyd. 2 zmienione, Warszawa, Prace Geodezyjnego Instytutu Naukowo-Badawczego.
- Warchałowski E., 1952, *Geodezja Wyższa – Część matematyczna*, Warszawa, PWN.

MARIA CISAK
ANDRZEJ SAS

TRANSFORMATION OF COORDINATES OF POINTS
FROM "BOROWA GORA" TO "1942" COORDINATE SYSTEM

S u m m a r y

Studies on transformation of "Borowa Gora" to "1942" coordinate system were undertaken in order to express geological gravimetric data in uniform, presently obligatory coordinate system and in homogeneous gravimetric system. Four variants of solution of this problem were studied, considering two levels of accuracy.

First level consists of two precise transformation methods:

- Ryšavy method, which ensure a accuracy of re-calculation of ± 0.50 m;
- Buršy-Wolf method, ensuring accuracy of re-calculation of ± 0.7 m.

Second level comprises approximate methods:

- method of mean values, ensuring accuracy of transformation of ± 4.5 m;
- zonal method, which ensures accuracy from ± 5 m to ± 8 m.

It was found in the course of the tests, conducted on the selected maps, that method of mean values, ensuring accuracy of transformation of ± 4.5 m is the most useful for geological-geophysical documentation.

Method of mean values, for which special algorithm and calculation program was prepared at the Institute of Geodesy and Cartography, was applied for transformation from "Borowa Gora" to "1942" coordinate system of about million gravimetric points stored at the geological database.

Translation: Zbigniew Bochenek

