PRACE INSTYTUTU GEODEZJI I KARTOGRAFII
Tom XLV, zeszyt 96, 1998

JERZY JANUSZ

WYZNACZENIE WARTOŚCI CIĘŻARÓW SKUPIONYCH OBCIĄŻAJĄCYCH W PRZELOCIE WISZĄCE CIĘGNO ORAZ OSZACOWANIE DOKŁADNOŚCI ICH WYZNACZENIA

Pracę wykonano w ramach projektu badawczego nr 9T12E01212
finansowanego przez Komitet Badań Naukowych w latach 1997-98

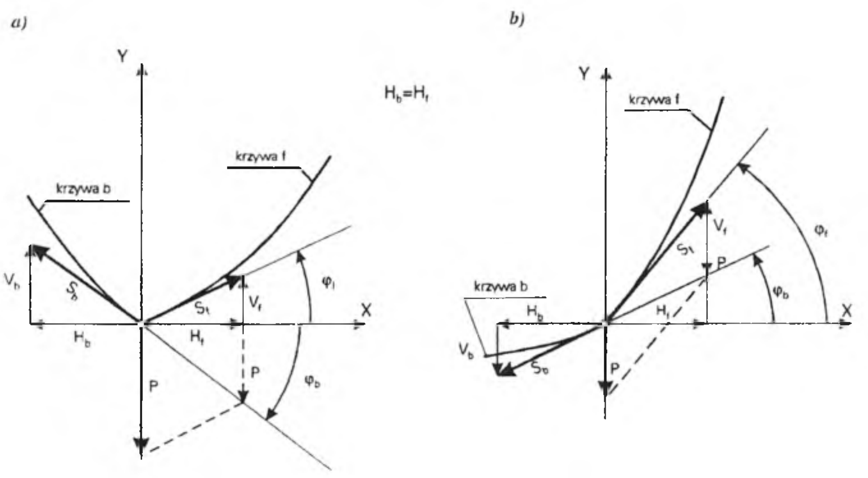
ZARYS TREŚCI: Przedstawiono sposób sformułowania i rozwiązania układu równań wiążących wyznaczane parametry geometryczne krzywej zwisu rzeczywistej liny obciążonej w przelocie siłami skupionymi lub w sposób ciągły, niejednorodny i współrzędne punktów obserwowanych, rozproszonych, leżących na osi tej liny, na odcinkach o stałej, znanej wartości ciężaru jednostkowego, umożliwiający wyznaczenie siły naciągu tego cięgna i oszacowanie błędu wyznaczenia wartości sił skupionych.

Zdarza się, że lina odciągowa, lub w konstrukcji cięgnowej, charakteryzująca się stałą wartością ciężaru jednostkowego własnego q na całej długości, obciążona jest dodatkowo w przelocie siłami skupionymi działającymi pionowo.

W pracach [1], [2] i [3] podałem sposób obliczania wartości pionowo skierowanych sił skupionych P obciążających cięgno, z wykorzystaniem wartości parametru a krzywej łańcuchowej opisującej rzeczywistą krzywą zwisu cięgna, obliczanej oddzielnie dla każdego z odcinków cięgna (w liczbie r) ograniczonego punktami przytwierdzenia cięgna i punktami, w których przyłożone są siły skupione. Siłę P wyraża wzór (por. rys. 1):

$$P = H \cdot tg(\varphi_f - \varphi_b) \cdot (1 + tg\varphi_f \cdot tg\varphi_b) = V_f - V_b \tag{1}$$

gdzie: H – pozioma składowa siły naciągu cięgna, której wartość zgodnie z warunkiem równowagi sił jest jednakowa w każdym punkcie cięgna, niezależnie od tego, czy cięgno to jest, czy nie jest obciążone w przelocie pionowo skierowanymi siłami skupionymi lub innymi siłami.



Rys. 1

Wartość siły H we wzorze (1) zostaje obliczona ze wzoru:

$$H = \sum_{i=I}^{r} \frac{a_i}{r} q \tag{2}$$

gdzie: a_I, a_{II}, ... ,a_r - wartości parametrów krzywych łańcuchowych opisujących krzywe zwisu poszczególnych odcinków cięgna o stałym ciężarze jednostkowym q, ograniczonych punktami jego przytwierdzenia i punktami, w których przyłożone są siły skupione. Siła H może też być obliczana jako średnia ważona, z uwzględnieniem wag (oszacowań wariancji) wyznaczonych wartości parametrów a_i.

Cytowana powyżej metoda prowadzenia obliczeń nie pozwala oszacować dokładności wielkości wyrażanej za pomocą wybranych parametrów więcej niż jednej krzywej łańcuchowej. Jest to spowodowane brakiem informacji dotyczących korelacji wybranych parametrów krzywych opisujących krzywizny poszczególnych odcinków cięgna. Niemożliwe jest więc oszacowanie m.in. błędu siły P wyrażonej wzorem (1), bowiem obliczenia prowadzone odrębnie dla każdego odcinka cięgna charakteryzującego się stałą wartością ciężaru jednostkowego, ograniczonego punktami zamocowania lub obciążenia dodatkowymi ciężarami, nie dostarczają pełnej tablicy wagowej wartości H, φ_f, φ_b (lecz jedynie ich wariancje).

W niniejszej pracy przedstawiam taki sposób sformułowania i rozwiązania układu równań wiążących wyznaczane parametry geometryczne krzywej przybliżającej krzywą rzeczywistego zwisu liny i współrzędne punktów obserwowanych, rozproszonych, leżących na osi rzeczywistego cięgna obciążonego w przelocie siłami skupionymi działającymi pionowo, aby możliwe było dokonanie oszacowania błędu wyznaczenia wartości sił skupionych.

Możliwość powiązania współrzędnych wszystkich obserwowanych punktów na cięgnie we wspólnym układzie równań uwarunkowana jest posiadaniem danych do utworzenia zbiorów punktów zaobserwowanych na odcinkach liny o stałej wartości q i ograniczonych punktami przytwierdzenia liny i punktami, w których przyłożone są siły skupione. Możliwość ta uwarunkowana jest także założeniem, że krzywą przybliżającą zwis rzeczywistego cięgna, na poszczególnych jego odcinkach o stałej wartości q, ograniczonych punktami przytwierdzenia cięgna i punktami, w których przyłożone są siły skupione, jest krzywa łańcuchowa, której parametr a służy do oszacowania poziomej składowej siły naciągu cięgna wg wzoru:

$$H = a \cdot q \tag{3}$$

Wszystkie te odcinki cięgna są przybliżane odcinkami jednej krzywej łańcuchowej, charakteryzowanej poszukiwaną wartością a :

$$\frac{H}{q = const.} = \boxed{const. = a},$$

(por. rys. 2) co jest oczywiste, wobec spełniania się $H = const.$ w każdym punkcie rozwieszonego i znajdującego się w stanie równowagi cięgna.

Wszystkie powyższe warunki i twierdzenia uwzględnimy, redagując równania wiążące wyznaczane parametry krzywej przybliżającej zwis cięgna i dane współrzędne punktów leżących na poszczególnych odcinkach cięgna o stałej wartości q między punktami, w których przyłożone są dodatkowe siły skupione. Pomoże nam w tym przykładowy rysunek 2, na którym liczba odcinków o stałej wartości q, oddzielonych od siebie siłami skupionymi, wynosi trzy, tj. $r = III$.

W przypadku ogólnym pionowo skierowane siły skupione przyłożone do cięgna w r-I punktach dzielą cięgno na r odcinków. Punktom leżącym na poszczególnych odcinkach: $I, II, \ldots, r$ rzeczywistego cięgna, reprezentowanym odpowiednio przez $n_I, n_{II}, \ldots, n_r$ par zmiennych - współrzędnych $x_{j(i)}, y_{j(i)}$, gdzie $i = I, II, \ldots, r$ oraz $j(i) = 1, 2, \ldots, n_i$, wyrażonych w układzie współrzędnych $0x'y'$, odpowiadają punkty o współrzędnych

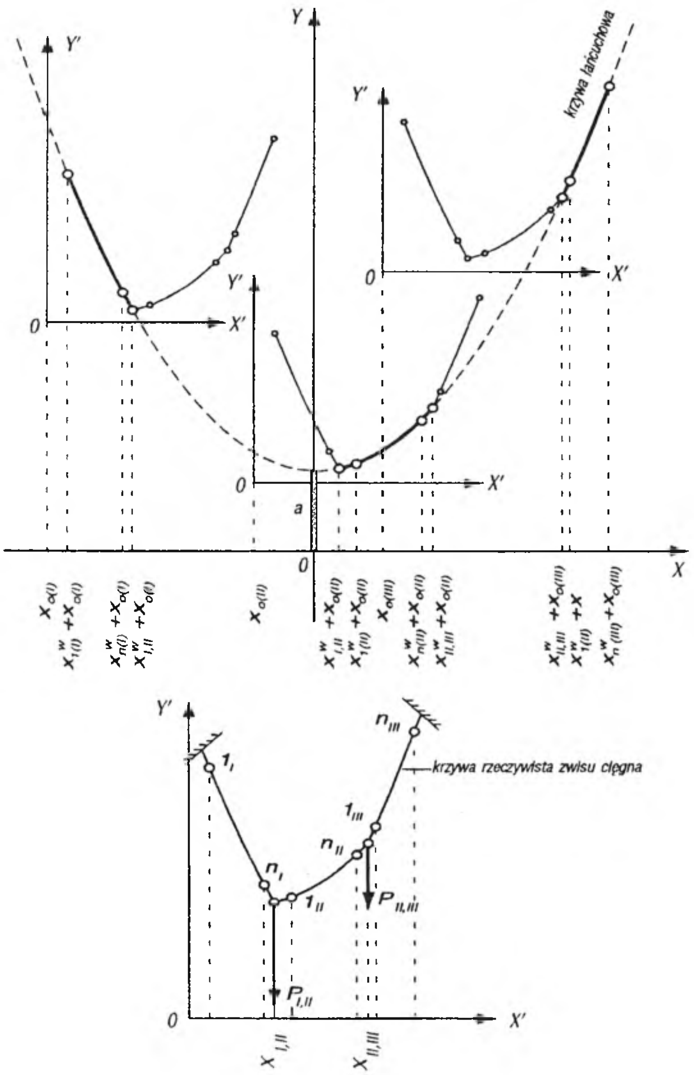
$$x^{w}_{j(i)} + x_{o(i)} = x_{j(i)} + v_{x_{j(i)}} + x_{o(i)},$$

$$y^{w}_{j(i)} + y_{o(i)} = y_{j(i)} + v_{y_{j(i)}} + y_{o(i)}$$

leżące na krzywej łańcuchowej

$$f_{j(i)} = y_{j(i)} + v_{y_{j(i)}} + y_{o(i)} - a \cdot \cosh\frac{x_{j(i)} + v_{x_{j(i)}} + x_{o(i)}}{a} = 0 \tag{4}$$

wyrażonej w układzie współrzędnych *Oxy*,
gdzie: a - poszukiwana odległość wierzchołka krzywej (4) od osi *0x*,
$x_{o(i)}, y_{o(i)}$ - współrzędne w układzie *0xy* punktów początkowych r lokalnych układów współrzędnych *0x'y'*, w których wyrażone są współrzędne $x^w_{j(i)}, y^w_{j(i)}$.



Rys. 2

Parom *punktów końcowych*: $\left(x_{1(I)}, y_{1(I)}\right), \left(x_{n_I}, y_{n_I}\right)$ oraz $\left(x_{1(II)}, y_{1(II)}\right), \left(x_{n_{II}}, y_{n_{II}}\right), \ldots \left(x_{1(r)}, y_{1(r)}\right), \left(x_{n_r}, y_{n_r}\right)$ poszczególnych odcinków realnego cięgna o stałym q, na których nie występują dodatkowe ciężary odpowiadają *punkty końcowe r* odcinków krzywej łańcuchowej (4).

Pomiędzy *punktami końcowymi* cięgna przechodzą obserwowane geodezyjnie linie pionowe zawierające środki ciężkości dodatkowych ciężarów skupionych obciążających cięgno. Ich odciętym $x_{i,i+1}$, $i< r$, wyznaczonym w układzie współrzędnych *Ox'y'*, odpowiadają na krzywej (4) odcięte: lewostronna $x^{w}_{i,i+1} + x_{o(i)} = x_{i,i+1} + v_{x_{i,i+1}} + x_{o(i)}$ i prawostronna $x^{w}_{i,i+1} + x_{o(i+1)}$. Zapiszemy to równaniem postaci

$$c_{i,i+1} = a\cosh\frac{x_{i,i+1} + v_{x_{i,i+1}} + x_{o(i)}}{a} - a\cosh\frac{x_{i,i+1} + v_{x_{i,i+1}} + x_{o(i+1)}}{a} + y_{o(i+1)} - y_{o(i)} = 0 \tag{5}$$

Za pomocą współrzędnych $x^{w}_{j(i)}, y^{w}_{j(i)}$, odciętych dwustronnych $x^{w}_{i,i+1}$ oraz parametrów $x_{o(i)}, y_{o(i)}, a$ zawartych w równaniach (4) i (5) można wyrazić m.in. siły skupione obciążające cięgno.

Najprawdopodobniejsze wartości $\left(2 \cdot \sum_{i=1}^{r} n_r\right) + r - 1$ zmiennych $x_{j(i)}, y_{j(i)}, x_{i,i+1}$ i $(2r+1)$ parametrów $x_{o(i)}, y_{o(i)}, a$ uzyskamy w wyniku rozwiązania układu równań typu (4) i (5) pod warunkiem *[pvv] = min.*, gdzie v – poprawki współrzędnych $x_{j(i)}, y_{j(i)}, x_{i,i+1}$, p zawarte są w danej tablicy wagowej P współrzędnych $x_{j(i)}, y_{j(i)}, x_{i,i+1}$.

Jeżeli jednak środki ciężkości dodatkowych ciężarów skupionych zawieszonych na linie nie były obserwowane, to $x_{i,i+1} = u_{i,i+1}$ stają się niewiadomymi układu równań typu (4) i (6)

$$a\cosh\frac{u_{i,i+1} + x_{o(i)}}{a} - a\cosh\frac{u_{i,i+1} + x_{o(i+1)}}{a} + y_{o(i+1)} - y_{o(i)} = 0 \tag{6}$$

Rozwiązanie tego układu wiąże się z koniecznością dokonania redukcji liczby równań, bowiem równania typu (6) wiążą tylko niewiadome. Dla uniknięcia tej niedogodności obliczę przybliżone wartości $u_{i,i+1}$ i potraktuję je jako zmienne $x_{i,i+1}$ układu równań typu (4) i (5). Aby jednak wynik rozwiązania tego układu był tożsamy z rozwiązaniem formalnie poprawnego układu równań typu (4) i (6) założę, że zmienne $x_{i,i+I} = u_{i,i+I}$ są nieskorelowane wzajemnie i z pozostałymi zmiennymi $x_{j(i)}, y_{j(i)}$, przypiszę im w tablicy $\underline{P}$ wielkie wariancje i będę poprawiać je z iteracji na iterację o wartości $v_{x_{i,i+I}}$. Obliczenia iteracyjne zakończę, gdy poprawki $v_{x_{i,i+I}}$ osiągną wartości bliskie zera (ułamka milimetra, jeżeli współrzędne $x_{j(i)}, y_{j(i)}$ są wyznaczone z dokładnością milimetrową), poprawki do niewiadomych $x_{o(i)}, y_{o(i)}$, a będą bliskie zera i spełnione zostaną wszystkie równania typu (4) i (5).

Przed przystąpieniem do aproksymacji – rozwiązania układu n-równań typu (4) i r-I równań typu (5), zakładamy, że $n = n_I + n_{II} + \ldots + n_r$, przy czym, co najmniej jeden podzbiór zawiera więcej niż trzy punkty, a pozostałe po więcej niż dwa punkty. Praktycznie, satysfakcjonujące wyniki obliczeń uzyskamy dopiero, gdy każdy z poszczególnych podzbiorów będzie zawierał nie mniej niż pięć punktów. Współrzędne $x_{j(i)}, y_{j(i)}$ wyznaczamy przy założeniu, że cięgno leży dokładnie w płaszczyźnie pionowej $0x'y'$.

Tablicę $\underline{X}$ poprawek

$$da, dx_{o(I)}, dy_{o(I)}, dx_{o(II)}, dy_{o(II)}, \ldots, dx_{o(r)}, dy_{o(r)}$$

do parametrów przybliżonych (niewiadomych) krzywych łańcuchowych i tablicę $\underline{V}$ poprawek $v_{x_{j(i)}} = x^w_{j(i)} - x_{j(i)}$, $v_{y_{j(i)}} = y^w_{j(i)} - y_{j(i)}$, $v_{x_{i,i+I}} = x^w_{i,i+I} - x_{i,i+I}$ uzyskuje się na drodze minimalizacji funkcji $[pvv]$

$$[pvv] = \underline{V}^T \underline{PV} - 2\underline{K}^T(\underline{HV} + \underline{GX} + \underline{\Omega}) \tag{7}$$

gdzie

$$\underset{(1,n+r-1)}{\underline{\Omega}^T} = \left| \; f_{1(I)} \;\vdots\; f_{n_I(I)} \quad f_{1(II)} \;\vdots\; f_{n_{II}(II)} \;\vdots\; \quad \vdots\; f_{1(r)} \;\vdots\; f_{n_r(r)} \quad c_{I,II} \;\vdots\; c_{r-I,r} \; \right|_{obs}$$

$$
\underset{(n+r-1,2n+r-1)}{\underline{H}} =
\left[\begin{array}{cc|cc}
\begin{array}{|cc|}\hline \frac{\partial f_{1(I)}}{\partial x_{1(I)}} \; 1 & \\ & \frac{\partial f_{n_I(I)}}{\partial x_{n_I}} \; 1 \\ \hline \end{array} & & & \\
& \begin{array}{|cc|}\hline \frac{\partial f_{1(II)}}{\partial x_{1(II)}} \; 1 & \\ & \frac{\partial f_{n_{II}(II)}}{\partial x_{n_{II}}} \; 1 \\ \hline \end{array} & & \\
\hline
& & \begin{array}{|cc|}\hline \frac{\partial f_{1(r)}}{\partial x_{1(r)}} \; 1 & \\ & \frac{\partial f_{n_r(r)}}{\partial x_{n_r}} \; 1 \\ \hline \end{array} & \\
& & & \begin{array}{|cc|}\hline \frac{\partial c_{I,II}}{\partial x_{I,II}} & \\ & \frac{\partial c_{r-1,r}}{\partial x_{r-1,r}} \\ \hline \end{array}
\end{array}\right]
$$

$$\underset{(n+r-1,2r+1)}{G} = \left[\begin{array}{c|cccccccccc}
\frac{\partial f_{1(I)}}{\partial a} & \frac{\partial f_{1(I)}}{\partial x_{o(I)}} & 1 & & & & & & & & \\
\vdots & \vdots & \vdots & & & & & & & & \\
\frac{\partial f_{n_I(I)}}{\partial a} & \frac{\partial f_{n_I(I)}}{\partial x_{o(I)}} & 1 & & & & & & & & \\
\frac{\partial f_{1(II)}}{\partial a} & & & \frac{\partial f_{1(II)}}{\partial x_{o(II)}} & 1 & & & & & & \\
\vdots & & & \vdots & \vdots & & & & & & \\
\frac{\partial f_{n_{II}(II)}}{\partial a} & & & \frac{\partial f_{n_{II}(II)}}{\partial x_{o(II)}} & 1 & & & & & & \\
\hline
\frac{\partial f_{1(r-1)}}{\partial a} & & & & & \ddots & \frac{\partial f_{1(r-1)}}{\partial x_{o(r-1)}} & 1 & & & \\
\vdots & & & & & & \vdots & \vdots & & & \\
\frac{\partial f_{n_{r-1}(r-1)}}{\partial a} & & & & & & \frac{\partial f_{n_{r-1}(r-1)}}{\partial x_{o(r-1)}} & 1 & & & \\
\frac{\partial f_{1(r)}}{\partial a} & & & & & & & & \frac{\partial f_{1(r)}}{\partial x_{o(r)}} & 1 & \\
\vdots & & & & & & & & \vdots & \vdots & \\
\frac{\partial f_{n_r(r)}}{\partial a} & & & & & & & & \frac{\partial f_{n_r(r)}}{\partial x_{o(r)}} & 1 & \\
\frac{\partial c_{I,II}}{\partial a} & \frac{\partial c_{I,II}}{\partial x_{o(I)}} & -1 & \frac{\partial c_{I,II}}{\partial x_{o(II)}} & 1 & & & & & & \\
\hline
\vdots & & & & & \ddots & & & & & \\
\frac{\partial c_{r-1,r}}{\partial a} & & & & & & \frac{\partial c_{r-1,r}}{\partial x_{o(r-1)}} & -1 & \frac{\partial c_{r-1,r}}{\partial x_{o(r)}} & 1 &
\end{array}\right]$$

w których:

$$\frac{\partial f_{j(i)}}{\partial x_{o(i)}} = \frac{\partial f_{j(i)}}{\partial x_{j(i)}} = -\sinh\frac{x_{j(i)} + x_{o(i)}}{a},$$

$$\frac{\partial f_{j(i)}}{\partial a} = -\left(\cosh\frac{x_{j(i)} + x_{o(i)}}{a} - \frac{x_{j(i)} + x_{o(i)}}{a}\sinh\frac{x_{j(i)} + x_{o(i)}}{a}\right),$$

$$\frac{\partial c_{i,i+1}}{\partial x_{i,i+1}} = \sinh\frac{x_{i,i+1} + x_{o(i)}}{a} - \sinh\frac{x_{i,i+1} + x_{o(i+1)}}{a},$$

$$\frac{\partial c_{i,i+1}}{\partial x_{o(i)}}=\sinh\frac{x_{i,i+1}+x_{o(i)}}{a},$$

$$\frac{\partial c_{i,i+1}}{\partial x_{o(i+1)}}=-\sinh\frac{x_{i,i+1}+x_{o(i+1)}}{a},$$

$$\frac{\partial c_{i,i+1}}{\partial a}=\cosh\frac{x_{i,i+1}+x_{o(i)}}{a}-\cosh\frac{x_{i,i+1}+x_{o(i+1)}}{a}-\frac{x_{i,i+1}+x_{o(i)}}{a}\sinh\frac{x_{i,i+1}+x_{o(i)}}{a}+$$

$$+\frac{x_{i,i+1}+x_{o(i+1)}}{a}\sinh\frac{x_{i,i+1}+x_{o(i+1)}}{a}$$

$$1=\frac{\partial f_{j(i)}}{\partial y_{j(i)}}=\frac{\partial f_{j(i)}}{\partial y_{o(i)}}=\frac{\partial c_{i,i+1}}{\partial y_{o(i+1)}}=-\frac{\partial c_{i,i+1}}{\partial y_{o(i)}},$$

których wyrazy liczone są dla wartości "obserwowanych" współrzędnych $x_{j(i)}, y_{j(i)}$ punktów na cięgnie, przybliżonych wartości parametrów $(a, x_{o(i)}, y_{o(i)})$ i "obserwowanych" odciętych $x_{i,i+1}$ środków ciężkości ciężarów skupionych zawieszonych na cięgnie. Ostatecznie otrzymujemy:

$$\underline{K}=-\left(\underline{H}\underline{P}^{-1}\underline{H}^{T}\right)^{-1}\left(\underline{G}\underline{X}+\underline{\Omega}\right), \tag{8}$$

$$\underline{X}=-\left(\underline{G}^{T}\left(\underline{H}\underline{P}^{-1}\underline{H}^{T}\right)^{-1}\underline{G}\right)^{-1}\underline{G}^{T}\left(\underline{H}\underline{P}^{-1}\underline{H}^{T}\right)^{-1}\underline{\Omega}, \tag{9}$$

$$\underline{V}=\underline{P}^{-1}\underline{H}^{T}\underline{K}. \tag{10}$$

Tablicę oszacowań wariancji i kowariancji parametrów $a, x_{o(i)}, y_{o(i)}$ wpasowanej krzywej łańcuchowej obliczamy po ostatniej iteracji wg wzoru

$$Cov\left(x_{o(i)}, y_{o(i)}, a\right)=\frac{\underline{V}^{T}\underline{P}\underline{V}}{(n+r-1)-(2r+1)}\left(\underline{G}^{T}\left(\underline{H}\underline{P}^{-1}\underline{H}^{T}\right)^{-1}\underline{G}\right)^{-1} \tag{11}$$

natomiast wartości oszacowań wariancji i kowariancji współrzędnych $x^{w}_{j(i)}, y^{w}_{j(i)}, x^{w}_{i,i+1}$ obliczymy następująco:

$$Cov\left(x^w_{j(i)}, y^w_{j(i)}, x^w_{i,i+1}\right) = \frac{\underline{V}^T \underline{PV}}{(n-r-2)} \begin{pmatrix} \underline{P}^{-1} - \underline{P}^{-1}\underline{H}^T\left(\underline{HP}^{-1}\underline{H}^T\right)^{-1}\underline{HP}^{-1} + \\ +\underline{P}^{-1}\underline{H}^T\left(\underline{HP}^{-1}\underline{H}^T\right)^{-1}\underline{G}\left(\underline{G}^T\left(\underline{HP}^{-1}\underline{H}^T\right)^{-1}\underline{G}\right)^{-1} \cdot \\ \cdot \underline{G}^T\left(\underline{HP}^{-1}\underline{H}^T\right)^{-1}\underline{HP}^{-1} \end{pmatrix} \tag{12}$$

Siłę pionową $V_{j(i)}$ napinającą cięgno w punkcie o współrzędnych $x_{j(i)}$ oszacujemy korzystając z własności, która mówi, że siła $V_{j(i)}$ jest równa iloczynowi ciężaru jednostkowego q cięgna i długości łuku $s_{j(i)}$ krzywej (4) przybliżającej zwis cięgna, między jej punktami (0,a) i $(x^w_{j(i)} + x_{o(i)}, y^w_{j(i)} + y_{o(i)})$

$$s_{j(i)} = a \sinh \frac{x^w_{j(i)} + x_{o(i)}}{a}, \tag{13}$$

tj.

$$V_{j(i)} = q \cdot s_{j(i)} \, . \tag{14}$$

Wartość ciężaru skupionego zawieszonego na cięgnie w punkcie o odciętej $x_{i,i+1}$ wyznaczamy jako różnicę sił pionowych działających na cięgno (→ krzywą łańcuchową), w odpowiadającym mu punkcie krzywej łańcuchowej (4) o odciętych $t_{i,i+1} = \left(x^w_{i,i+1} + x_{o(i+1)}\right)$, $p_{i,i+1} = \left(x^w_{i,i+1} + x_{o(i)}\right)$

$$P_{i,i+1} = V_{t_{i,i+1}} - V_{p_{i,i+1}} = q\left(s_{t_{i,i+1}} - s_{p_{i,i+1}}\right). \tag{15}$$

W celu wyznaczenia oszacowania wariancji różnicy odległości mierzonej wzdłuż krzywej → cięgna, między dowolnymi punktami, tj. np. długości $\left(s_{t_{i,i+1}} - s_{p_{i,i+1}}\right)$, postępujemy następująco:

- zestawiamy tablicę $\underline{D}''_{((2r+1)+2n+(r-1),n+2(r-1))}$ współczynników zlinearyzowanych równań długości $s_{j(i)}, s_{p_{i,i+1}}, s_{t_{i,i+1}}$ krzywej łańcuchowej między punktem wierzchołkowym krzywej o współrzędnych (0,a) i punktami o odciętych $(x^w_{j(i)} + x_{o(i)})$, $p_{i,i+1}$, $t_{i,i+1}$

$$
\underline{D}'' = \left|\begin{array}{cccccccccccc}
\frac{\partial s_{1(I)}}{\partial a} & \frac{\partial s_{n_I}}{\partial a} & \frac{\partial s_{p_{I,II}}}{\partial a} & \frac{\partial s_{t_{I,II}}}{\partial a} & \frac{\partial s_{1(II)}}{\partial a} & \frac{\partial s_{n_{II}}}{\partial a} & \frac{\partial s_{p_{II,II+I}}}{\partial a} & \frac{\partial s_{t_{II,II+I}}}{\partial a} & \frac{\partial s_{p_{r-I,r}}}{\partial a} & \frac{\partial s_{t_{r-I,r}}}{\partial a} & \frac{\partial s_{1(r)}}{\partial a} & \frac{\partial s_{n_r}}{\partial a} \\
\frac{\partial s_{1(r)}}{\partial x_{o(I)}} & \frac{\partial s_{n_I}}{\partial x_{o(I)}} & \frac{\partial s_{p_{I,II}}}{\partial x_{o(I)}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \frac{\partial s_{t_{I,II}}}{\partial x_{o(II)}} & \frac{\partial s_{1(II)}}{\partial x_{o(II)}} & \frac{\partial s_{n_{II}}}{\partial x_{o(II)}} & \frac{\partial s_{p_{II,III}}}{\partial x_{o(II)}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial s_{t_{II,III}}}{\partial x_{o(III)}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial s_{p_{r-I,r}}}{\partial x_{o(r-I)}} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial s_{t_{r-I,r}}}{\partial x_{o(r)}} & \frac{\partial s_{1(r)}}{\partial x_{o(r)}} & \frac{\partial s_{n_r}}{\partial x_{o(r)}} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
\frac{\partial s_{1(I)}}{\partial x_{1(I)}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \frac{\partial s_{n_I}}{\partial x_{n_I}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial s_{1(II)}}{\partial x_{1(II)}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial s_{n_{II}}}{\partial x_{n_{II}}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial s_{1(r)}}{\partial x_{1(r)}} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial s_{n_r}}{\partial x_{n_r}} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & \frac{\partial s_{p_{I,II}}}{\partial x_{I,II}} & \frac{\partial s_{t_{I,II}}}{\partial x_{I,II}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial s_{p_{II,III}}}{\partial x_{II,III}} & \frac{\partial s_{t_{II,III}}}{\partial x_{II,III}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial s_{p_{r-I,r}}}{\partial x_{r-I,r}} & \frac{\partial s_{t_{r-I,r}}}{\partial x_{r-I,r}} & 0 & 0
\end{array}\right|
$$

gdzie:

$$
\frac{\partial s_{j(i)}}{\partial x_{o(i)}} = \cosh \frac{x_{j(i)}^{w} + x_{o(i)}}{a} \ ,
$$

$$
\frac{\partial s_{p_{i,i+I}}}{\partial x_{o(i)}} = \cosh \frac{x_{i,i+I}^{w} + x_{o(i)}}{a} \ ,
$$

$$\frac{\partial s_{t_{i,i+1}}}{\partial x_{o(i)}} = \cosh \frac{x^{w}_{i,i+1} + x_{o(i+1)}}{a} \; ,$$

$$\frac{\partial s_{j(i)}}{\partial a} = \sinh \frac{x^{w}_{j(i)} + x_{o(i)}}{a} - \frac{x^{w}_{j(i)} + x_{o(i)}}{a} \cosh \frac{x^{w}_{j(i)} + x_{o(i)}}{a} \; ,$$

$$\frac{\partial s_{p_{i,i+1}}}{\partial a} = \sinh \frac{x^{w}_{i,i+1} + x_{o(i)}}{a} - \frac{x^{w}_{i,i+1} + x_{o(i)}}{a} \cosh \frac{x^{w}_{i,i+1} + x_{o(i)}}{a} \; ,$$

$$\frac{\partial s_{t_{i,i+1}}}{\partial a} = \sinh \frac{x^{w}_{i,i+1} + x_{o(i+1)}}{a} - \frac{x^{w}_{i,i+1} + x_{o(i+1)}}{a} \cosh \frac{x^{w}_{i,i+1} + x_{o(i+1)}}{a} \; ,$$

$$\frac{\partial s_{j(i)}}{\partial x_{j(i)}} = \cosh \frac{x^{w}_{j(i)} + x_{o(i)}}{a} \; ,$$

$$\frac{\partial s_{p_{i,i+1}}}{\partial x_{i,i+1}} = \cosh \frac{x^{w}_{i,i+1} + x_{o(i)}}{a} \; ,$$

$$\frac{\partial s_{t_{i,i+1}}}{\partial x_{i,i+1}} = \cosh \frac{x^{w}_{i,i+1} + x_{o(i+1)}}{a} \; ,$$

- obliczamy tablicę N wariancji i kowariancji długości $s_{j(i)}, s_{p_{i,i+1}}, s_{t_{i,i+1}}$

$$\underset{(n+2r-2,n+2r-2)}{\underline{N}} = \underset{(n+2(r-1),(2r+1)+2n+(r-1))}{\underline{D}''^{T}} \cdot \underset{((2r+1)+2n+(r-1),(2r+1)+2n+(r-1))}{\underline{Z}''} \cdot \underset{((2r+1)+2n+(r-1),n+2(r-1))}{\underline{D}''} \qquad (16)$$

gdzie:

$$\underline{Z}'' = \begin{vmatrix} \boxed{Cov\left(x_{o(i)}, y_{o(i)}, a\right)} & \\ & \boxed{Cov\left(x^{w}_{j(i)}, y^{w}_{j(i)}, x^{w}_{i,i+1}\right)} \end{vmatrix}$$

- zestawiamy tablicę funkcyjną Y wybranej długości, np. $s_{t_{i,i+1}} - s_{p_{i,i+1}}$:

$$\underset{(n+2r-2,1)}{\underline{Y}} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \dotfill \\ \dfrac{\partial\left(s_{t_{i,i+1}} - s_{p_{i,i+1}}\right)}{\partial s_{p_{i,i+1}}} = -1 \\ \dfrac{\partial\left(s_{t_{i,i+1}} - s_{p_{i,i+1}}\right)}{\partial s_{t_{i,i+1}}} = 1 \\ \dotfill \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

Oszacowanie wariancji różnicy długości $s_{t_{i,i+1}} - s_{p_{i,i+1}}$ otrzymujemy z wzoru:

$$Var\left(s_{t_{i,i+1}} - s_{p_{i,i+1}}\right) = \underline{Y}^T \underline{N}\underline{Y} \; . \tag{17}$$

Ostatecznie błąd ciężaru skupionego $P_{i,i+1} = q\left(s_{t_{i,i+1}} - s_{p_{i,i+1}}\right)$, $i < r$, wyznaczamy na podstawie prawa przenoszenia się błędów niezależnych zmiennych q i $\left(s_{t_{i,i+1}} - s_{_{i,i+1}}\right)$.

Przykładowe obliczenie wartości sił skupionych P obciążających cięgno w przelocie przedstawionym sposobem dotyczy lin B3 i B4 masztu w Raszynie. Ciężary łączników lin, stanowiących dodatkowe siły skupione, obliczone wg wzorów (1) i (2), na podstawie współrzędnych wg tablicy 1, zamieszczone są w kolumnie 3 tablicy 2. Wartości tych sił oraz ich błędy średnie, obliczone na podstawie wyników rozwiązania układów równań typu (4) i (5), zamieszczone są w kolumnie 4 tablicy 2.

Dodatkowo w tablicy 3 podane są wartości parametru a, obliczone w wyniku rozwiązania układu równań typu (4) i (5) dla lin B4 i B3, które można porównać z podanymi za [1] wartościami parametru a krzywych łańcuchowych przybliżających krzywiznę zwisu poszczególnych odcinków lin B4 i B3 o stałym ciężarze jednostkowym q i z średnimi ważonymi a_r. Błędy średnie oszacowane omówioną tu metodą okazały się ok. 1,5-krotnie większe od błędów średnich ważonych, obliczonych w [1], na podstawie parametrów a niezależnie traktowanych odcinkowych krzywych łańcuchowych. Różnice między obliczonymi w niniejszej pracy wartościami parametru a i wartościami a_r wg [1], obliczonymi jako średnie ważone, są mniejsze od oszacowań ich błędów średnich.

Wyniki obliczeń prezentowaną powyżej metodą, zawarte w tablicach 1–3, zostały uzyskane z wykorzystaniem diagonalnej, jednostkowej tablicy wagowej współrzędnych punktów zaobserwowanych na linach B4 i B3.

Tablica 1

Oznaczenie liny							
B4				B3			
$j(i)$	$x_{j(i)}$	$y_{j(i)}$	Uwagi	$j(i)$	$x_{j(i)}$	$y_{j(i)}$	Uwagi
	[m]	[m]			[m]	[m]	
1(I)	0,000	9,565		1(I)	0,000	37,180	
2(I)	13,628	24,811		2(I)	3,806	41,210	
3(I)	13,629	24,811		3(I)	7,622	45,279	
4(I)	18,108	29,848		4(I)	18,571	56,994	
5(I)	33,535	47,341		5(I)	31,089	70,512	$x^w_{I,II}=$
6(I)	48,718	64,771			$x_{I,II}=$ *31,839m*		*31,791m*
7(I)	67,275	86,356		1(II)	32,696	72,274	
8(I)	71,414	91,207		2(II)	36,258	76,245	
9(I)	73,054	93,129	$x^w_{I,II}=$	3(II)	51,390	93,268	
	$x_{I,II}=$ *73,838m*		*74,476m*	4(II)	70,957	115,562	
1(II)	74,621	95,011		5(II)	87,768	134,959	$x^w_{II,III}=$
2(II)	94,390	119,084			$x_{II,III}=$ *88,574m*		*88,539m*
3(II)	98,604	124,258		1(III)	89,381	136,857	
4(II)	103,417	130,195		2(III)	91,123	138,944	
5(II)	125,423	157,631		3(III)	96,480	145,328	
6(II)	136,738	171,932		4(III)	124,979	179,838	
7(II)	144,059	181,198	$x^w_{II,III}=$	5(III)	142,308	201,163	
	$x_{II,III}=$ *144,866m*		*145,082m*				
1(III)	145,673	183,264					
2(III)	161,889	204,575					
3(III)	168,702	213,612					
4(III)	192,239	245,139					
5(III)	211,717	271,645					
6(III)	211,839	271,834					

Tablica 2

Oznaczenie liny	Granica podzbioru między punktami nr ...	***P***	
		według wzorów (1) i (2)	według wzorów (13) -(17)
		[kG]	[kG]
1	2	3	4
B4	9(I) / 1(II) 7(II) / 1(III)	816 789	829 ± 30,9 801 ± 32,0
B3	5(I) / 1(II) 5(II) / 1(III)	808 798	809 ± 34,6 808 ± 38,7

Tablica 3

Oznaczenie liny	Podzbiór punktów	*a*		
		według [1]		z rozwiązania układu równań typu (4) i (5)
			średnia ważona	
		[m]	[m]	[m]
B4	1(I) – 9(I) 1(II) – 7(II) 1(III) – 6(III)	1729 ± 16,6 1674 ± 44,0 1719 ± 33,9	1721 ± 12,0	1711 ± 20,5
B3	1(I) – 5(I) 1(II) – 5(II) 1(III) – 5(III)	1773 ± 97,8 1839 ± 34,9 1760 ± 78,4	1823 ± 22,6	1802 ± 32,3

LITERATURA

[1] Janusz J.: *Metodyka geodezyjnego badania naprężeń i wydłużeń lin w konstrukcjach cięgnowych.* Prace IGiK t. XLIII 1996 z.94

[2] Janusz J.: *Geodezyjna metoda wyznaczania sił w cięgnach obciążonych w przelocie siłami skupionymi.* Przyjęte do druku w kwartalniku Komitetu Geodezji PAN "Geodezja i Kartografia"

[3] Janusz J.: *Geodezyjny pomiar sił w cięgnach obciążonych w przelocie siłami skupionymi.* Referat na Międzynarodowe Sympozjum "Geodezja i Geometria Inżynierska w Budownictwie i Inżynierii". Rzeszów 1996

Recenzował: prof. Józef Czaja
Przyjęto do opublikowania w grudniu 1997

JERZY JANUSZ

DETERMINATION OF DENSE LOADS WEIGHTING TRANSIENTLY THE HANGING TIE AND ASSESSMENT OF ACCURACY OF THEIR DETERMINATION

The work was conducted within the research project No 9T12E01212,
financed by the Committee for Scientific Research in 1997-98.

S u m m a r y

The method of formulating and solving set of equations, which connect geometrical parameters of curve of sag of real rope, weighted transiently with dense loads or in continuous-heterogeneous way, and coordinates of the observed dispersed points, located on the rope's axis in the parts with constant, known unit weight, was presented in the article. This method enables to determine tension forces of the tie and to assess errors of determination of concentrated forces.

The example, which demonstrates determination of tension forces by geodetic method for two stay ropes of the 335 m mast, determination of weights of rope's couplers and assessment of their accuracy was also given.

Translation: Zbigniew Bochenek

ЕЖИ ЯНУШ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕЛИЧИН СОСРЕДОТОЧЕННЫХ НАГРУЗОК, ОБРЕМЕНЯЮЩИХ В ПРОЛЁТЕ ВИСЯЩУЮ ТЯГУ И ОЦЕНКА ТОЧНОСТИ ИХ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Работа выполнена в рамках исследовательского проекта N° 9T12E01212,
финансированного Комитетом научных исследований в 1997-98 годах

Р е з ю м е

Представлен способ формулирования и решения системы уравнений, связывающих определяемые геометрические параметры кривой провеса реального тросса, нагруженного в пролёте сосредоточенными силами или в постоянно-неоднородный способ, и координаты наблюдаемых, рассеянных пунктов, лежащих на оси этого троса, на отрезках с постоянной, известной величиной удельной тяги,

дающей возможность определения силы натяжения этой тяги и оценки ошибки определения величин сосредоточенных сил.

Дан пример измерительно-вычислительного определения геодезическим методом сил натяжки двух оттягивающих тросов мачты высотой 335 м, величин тяжести соединителей этих тросов и оценки их точности.

Перевод: Róża Tołstikowa

АНТОНИ КЕГЛЕР

ХОД СУТОЧНОГО ГРАДИЕНТА ТЕМПЕРАТУРЫ В ПРИЗЕМНОМ СЛОЕ ВОЗДУХА КАК ОСНОВА ОЦЕНКИ ОШИБОК РЕФРАКЦИИ ПРИ НИВЕЛИРОВАНИИ

Р е з ю м е

В работе представлены результаты измерений градиента температуры в приземном слое воздуха /до 3 м./, на основе которых вычислен коэффициент рефракции. Представлены также величины ошибок нивелирования, вызванных дифференцированной рефракцией. Установлено, что ошибки рефракции могут вызывать ошибку нивелирования большую, чем 4мм/1км. Определено оптимальное время нивелирования – утренние и послеобеденные часы.

Перевод: Róża Tołstikowa