

JERZY JANUSZ

**ORTOGONALNE WPASOWANIE KRZYWEJ TEORETYCZNEJ
W EMPIRYCZNY ZBIÓR PUNKTÓW**

ZARYS TREŚCI: Podano sposób wpasowania krzywej teoretycznej w empiryczny zbiór punktów, przy nałożonym warunku minimum sumy kwadratów odległości punktów od krzywej. Wyprowadzono algorytmy wpasowania krzywej łańcuchowej w empiryczny zbiór punktów leżących na rozwieszonym ciągu, np. linie odciągowej masztu lub komina, mających wyznaczone z pomiaru współrzędne x i y . Algorytmy opracowano w dwóch wariantach:

I. - przy spełnieniu warunku $[v_y^2] = \min$, lub $[v_x^2] = \min$.

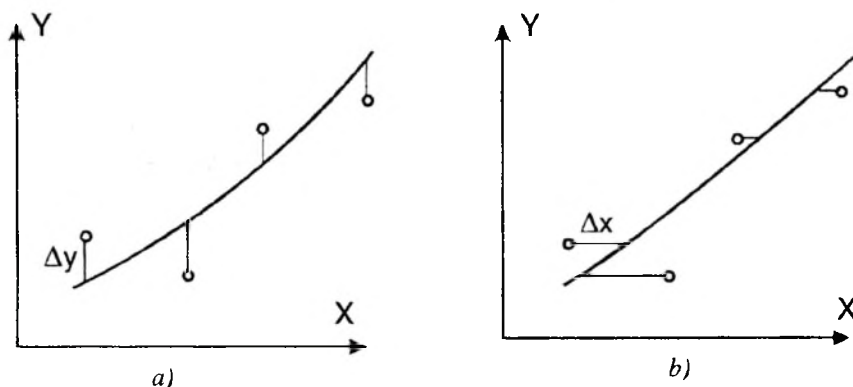
II. - przy spełnieniu warunku $[v_y^2 + v_x^2 + v_{par}^2] = \min$.

Wykazano ortogonalność obliczonych odchytek $\Delta r = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ wpasowania krzywej łańcuchowej w wariacie II, w przypadku gdy błędy a priori $m_x = m_y$. Zilustrowano przykładami efekty uzyskiwane algorytmem II przy różnych stosunkach błędów m_x , m_y , m_{par} .

1. WPROWADZENIE

W wielu dziedzinach uzyskuje się przez pomiar empiryczne zbiory współrzędnych punktów. Często w zbiory te są wpasowywane określone krzywe, których parametry zależą od wzajemnego położenia pomierzonych punktów, dokładności pomiaru oraz zastosowanego kryterium wpasowania. Wpasowanie może być dokonane graficznie lub analitycznie. W przypadku wpasowania graficznego można posługiwać się np. krzywikiem, przykładając go odpowiednio do zbioru punktów przedstawionego w formie graficznej.

Przyjęte jest, że wpasowanie analityczne krzywej o określonej postaci odbywa się przy założeniu, że suma kwadratów różnic wartości obliczonych i pomierzonych jednej ze składowych wynosi minimum. Jeżeli położenia punktów wyznaczonych z pomiaru wyrażone są w prostokątnym układzie współrzędnych XY (rys. 1), to wpasowanie krzywej płaskiej następuje przy dyrektywie minimum sumy kwadratów odstępów krzywej wzdłuż osi Y lub X , co oznacza uzyskiwanie, w wyniku obliczeń, odchyłek wpasowania krzywej Δy (rys. 1a), lub Δx (rys. 1b). Takie sposoby wpasowania omówione są m.in. w pracy [14].



Rys. 1

Postępowanie zilustrowane na rys. 1a, mające na celu wyznaczenie parametrów wielomianu i krzywej łańcuchowej, wyrażających krzywe zwisu lin odciągowych, zostało zastosowane np. w pracach [1], [5]. Ze względu na założenie w procesie wpasowania bezbłędności współrzędnych x punktów (składowe te nie otrzymują poprawek i spełniają wyznaczane równanie) postępowania te prowadzą do wyznaczenia przybliżonych parametrów funkcji i nie są miarodajne dla dokonania oceny prawidłowości doboru postaci funkcji i analizy błędów pomiaru współrzędnych. W pracy [8] stwierdziłem, że do oceny dokładności wpasowania krzywej teoretycznej w empiryczny zbiór punktów najbardziej miarodajne jest operowanie odchyłkami skierowanymi wzdłuż normalnych do krzywej, które oznaczmy tu Δr i nazwiemy odchyłkami ortogonalnymi. Odchyłki Δr uzyskuje się w wyniku obliczenia parametrów krzywej z uwzględnieniem błędności wyznaczenia współrzędnych x , y , lecz przy założeniu, że błędy m_x i m_y wyznaczenia obu współrzędnych punktu mają jednakowe wartości. Takie założenie jest przypadkiem szczególnym doboru

błędów współrzędnych, dlatego w niniejszej pracy przedstawię algorytm wpasowania krzywej płaskiej w empiryczny zbiór punktów według ogólnego kryterium

$$\sum \left\{ \left(\frac{\Delta x}{m_x} \right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{m_y} \right)^2 + \left(\frac{\Delta par}{m_{par}} \right)^2 \right\} = \sum v^2 = \min. \quad , \quad (1)$$

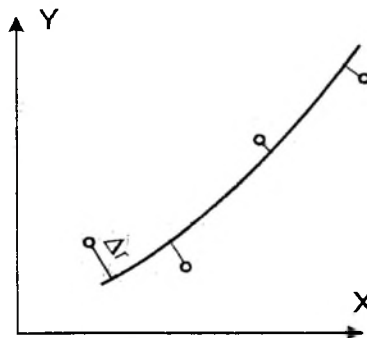
gdzie Δpar - poprawka parametru przybliżonego funkcji wyrażającej krzywą wpasowywaną, m_{par} - błąd *a priori* parametru funkcji. Proces pomiarowo-obliczeniowy, prowadzący do uzyskania odchyłek ortogonalnych nazwiemy wpasowaniem ortogonalnym. Wpasowanie ortogonalne umożliwia obliczanie nie tylko odległości Δr empirycznego punktu od wpasowanej krzywej, lecz także wyznaczenie współrzędnych spodku prostopadłej opuszczonej na krzywą z punktu empirycznego oraz wartości współczynników kierunkowych normalnej i stycznej do krzywej w spodku prostopadłej (por. rys. 2). Odległość Δr wyraża się wzorem $\Delta r = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$. Współrzędne spodków prostopadłych uzyskujemy dodając poprawki wpasowania do odpowiednich składowych empirycznych $x'' = x + \Delta x$, $y'' = y + \Delta y$. Współczynnik kierunkowy normalnej obliczamy ze wzoru

$$a_n = \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad ,$$

a współczynnik kierunkowy stycznej - ze wzoru

$$a_s = -\frac{\Delta x}{\Delta y} \quad .$$

Informacje te są pożyteczne i często pożądane.



Rys. 2

Przedstawiona w niniejszej pracy, na przykładzie krzywej łańcuchowej, metoda wpasowania ortogonalnego dowolnej krzywej płaskiej może być zastosowana również do wpasowania krzywej przestrzennej lub powierzchni w empiryczny zbiór punktów. Wówczas obliczenie parametrów równania krzywej przestrzennej lub powierzchni następuje przy jednoczesnym spełnieniu ogólnego kryterium

$$\sum \left\{ \left(\frac{\Delta x}{m_x} \right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{m_y} \right)^2 + \left(\frac{\Delta z}{m_z} \right)^2 + \left(\frac{\Delta par}{m_{par}} \right)^2 \right\} = \sum v^2 = \min. , \quad (1a)$$

gdzie: $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ - składowe wektora $\vec{\Delta r}$, wyrażone w prostokątnym układzie współrzędnych XYZ;

Δpar - poprawki parametrów równania krzywej przestrzennej lub powierzchni.

W przypadku, gdy $m_x = m_y = m_z$ wektor $\vec{\Delta r}$ o długości $\Delta r = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}$ jest normalny do krzywej przestrzennej lub powierzchni. Problem ortogonalizacji wpasowania rozwiązywany jest na innych zasadach w pracach [3], [6], [9] i [10].

Z potrzebą uzyskania odchyłek ortogonalnych spotkałem się w trakcie badań nad zastosowaniem krzywej łańcuchowej do przybliżania realnych linii zwisów lin odciągowych. Proces uzyskiwania odchyłek ortogonalnych zobrazuję na przykładzie wpasowania krzywej łańcuchowej w zbiór pseudoobserwacji współrzędnych prostokątnych wybranych punktów leżących na realnej krzywej zwisu.

Krzywą łańcuchową przedstawia równanie

$$y' = a \cosh \frac{x'}{a} \quad i \quad a > 0 , \quad (2)$$

którego argumenty x' i parametr a uwikłane są w funkcji hiperbolicznej, co uniemożliwia wyznaczenie jego parametrów przez rozwiązanie jednoznacznego układu równań metodą rugowania niewiadomych. Stwarza to konieczność wykonywania obliczeń etapami, z których pierwszy oparty jest o metodę numeryczną i w przypadku wykorzystania w nim większej liczby pseudoobserwacji niż niezbędna prowadzi do uzyskania, poza wartościami poprawek do grubo przybliżonych parametrów krzywej łańcuchowej, także poprawek Δy . Obliczenia prowadzone w tym etapie wg kryterium $[v_y^2] = \min.$ i z wykorzystaniem wszystkich pseudoobserwacji wolnych od błędów systematycznych zwykle kończą proces wpasowania. Gdy jednak pragniemy dokonać wpasowania z warunkiem (1), to parametry uzyskane w pierwszym etapie mogą być uznane w dalszych rachunkach jako wyjściowe - przybliżone.

**2. ALGORYTM WPASOWANIA KRZYWEJ ŁAŃCUCHOWEJ
W EMPIRYCZNY ZBIÓR PUNKTÓW Z WARUNKIEM $[v_y^2] = \min.$**

Zadanie definiujemy następująco:

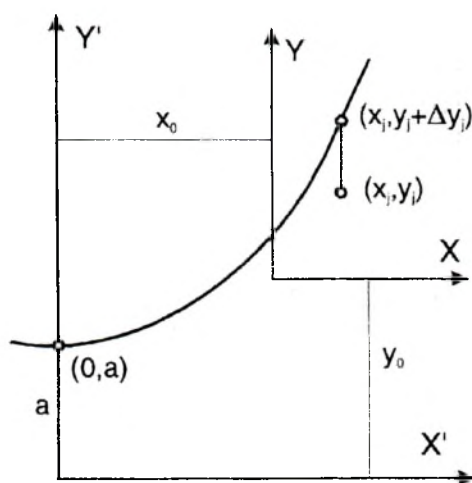
- dany jest zbiór pseudoobserwacji x_j, y_j współrzędnych prostokątnych punktów leżących na linii zamocowanej na końcach, obciążonej jednorodnym ciężarem własnym i znajdującej się w polu grawitacji. Współrzędne x_j, y_j wyznaczone są w lokalnym układzie współrzędnych XY; $j = 1, 2, 3, \dots, n$. Oś X i Y układu współrzędnych leżą w płaszczyźnie linii; oś Y skierowana jest pionowo do góry, a oś pozioma X jest skierowana w prawo od najniższego w stronę najwyższego punktu linii,
- należy obliczyć wartości parametrów a, x_0, y_0 równania

$$y_j + \Delta y_j + y_0 = a \cosh \frac{x_j + x_0}{a} \quad (3)$$

wyrażającego krzywą wpasowaną w empiryczny zbiór pseudoobserwacji x_j, y_j według kryterium

$$\sum_{j=1}^n \left(\frac{\Delta y_j}{m_{y_j}} \right)^2 = \sum_{j=1}^n v_y^2 = \min., \quad (4)$$

gdzie m_{y_j} jest to błąd wyznaczenia wartości empirycznej y_j . Poszukiwane równanie (3) ma być spełnione przez wszystkie pary współrzędnych $(x_j, y_j + \Delta y_j)$.



Rys. 3

Przyjmijmy oznaczenia:

$$\begin{aligned} r_1 &= x_0 \\ r_2 &= y_0 \\ r_3 &= a \end{aligned} \quad (5)$$

Dla n pseudoobserwacji x_j i poszukiwanych wartości r_1, r_2 i r_3 równania typu (3), zapisane w układzie współrzędnych XY' (rys. 3), w formie

$$f(x_j | r_1, r_2, r_3) = r_3 \cosh \frac{x_j + r_1}{r_3} - r_2 \quad (6)$$

uzyskałyby n wartości $f(x_j | r_1, r_2, r_3)$ różnych od odpowiadających im wartości współrzędnych pomierzonych (pseudoobserwacji) y_j o wartości Δy_j

$$f(x_j | r_1, r_2, r_3) - y_j = \Delta y_j. \quad (7)$$

W celu uzyskania jednoznacznego rozwiązania układu n równań (6), który po uwzględnieniu (7) zapisujemy następująco:

$$\begin{cases} \Delta y_1 + y_1 = r_3 \cosh \frac{x_1 + r_1}{r_3} - r_2 \\ \Delta y_2 + y_2 = r_3 \cosh \frac{x_2 + r_1}{r_3} - r_2 \\ \dots\dots\dots \\ \Delta y_n + y_n = r_3 \cosh \frac{x_n + r_1}{r_3} - r_2 \end{cases}, \quad (8)$$

zgodnie z założeniem (4) formułujemy funkcję

$$g(r_1, r_2, r_3) = \sum_{j=1}^n v_{y_j}^2 = \sum_{j=1}^n \left(\frac{\Delta y_j}{m_{y_j}} \right)^2. \quad (9)$$

Funkcja (9) osiąga minimum dla jednoznacznego zestawu wartości poszukiwanych parametrów r_1, r_2, r_3 . Dla uproszczenia wzorów dalsze wywody w tym rozdziale poprowadzimy przy założeniu jednorodności dokładnościowej wszystkich pseudoobserwacji y_j .

Dyrektywa (4) jest spełniona, gdy spełniony jest układ

$$\begin{cases} \frac{\partial g}{\partial r_1} = \sum_{j=1}^n 2 \left(r_3 \cosh \frac{x_j + r_1}{r_3} - r_2 - y_j \right) \sinh \frac{x_j + r_1}{r_3} = 0 \\ \frac{\partial g}{\partial r_2} = \sum_{j=1}^n -2 \left(r_3 \cosh \frac{x_j + r_1}{r_3} - r_2 - y_j \right) = 0 \\ \frac{\partial g}{\partial r_3} = \sum_{j=1}^n 2 \left(r_3 \cosh \frac{x_j + r_1}{r_3} - r_2 - y_j \right) \left(\cosh \frac{x_j + r_1}{r_3} - \frac{x_j + r_1}{r_3} \sinh \frac{x_j + r_1}{r_3} \right) = 0 \end{cases} \quad (10)$$

Każde z trzech równań układu (10) jest nieliniowe względem niewiadomych r_1, r_2, r_3 - zawodzi przeto metoda rugowania dla wyznaczenia jego pierwiastków. Zatem podejmujemy się znaleźć niewiadome układu równań (8) metodą numeryczną. W tym celu, dla każdej pary składowych empirycznych x_j, y_j i przybliżonych wartości $r_{1,0}, r_{2,0}, r_{3,0}$ parametrów r_1, r_2, r_3 zapisujemy równanie (6) w postaci sumy szeregu potęgowego

$$\begin{aligned} & f(x_j | (\Delta r_1 = r_1 - r_{1,0}), (\Delta r_2 = r_2 - r_{2,0}), (\Delta r_3 = r_3 - r_{3,0})) = \\ & f(x_j | r_{1,0}, r_{2,0}, r_{3,0}) + \Delta r_1 \left(\frac{\partial f}{\partial r_1} \right)_{(x_j, r_{1,0}, r_{2,0}, r_{3,0})} + \Delta r_2 \left(\frac{\partial f}{\partial r_2} \right)_{(x_j, r_{1,0}, r_{2,0}, r_{3,0})} + \\ & + \Delta r_3 \left(\frac{\partial f}{\partial r_3} \right)_{(x_j, r_{1,0}, r_{2,0}, r_{3,0})} + \dots + \\ & + \frac{1}{m!} f(x_j | r_1, r_2, r_3) \left(\frac{\partial}{\partial r_1} \Delta r_1 + \frac{\partial}{\partial r_2} \Delta r_2 + \frac{\partial}{\partial r_3} \Delta r_3 \right)^m + \text{reszta}, \end{aligned} \quad (11)$$

które po odrzuceniu wyrazów o potęgach większych niż 2 uzyskują postać

$$\begin{aligned} & f(x_j | (r_1 - r_{1,0}), (r_2 - r_{2,0}), (r_3 - r_{3,0})) = \left(r_{3,0} \cosh \frac{x_j + r_{1,0}}{r_{3,0}} - r_{2,0} \right) + \\ & + \left(\sinh \frac{x_j + r_{1,0}}{r_{3,0}} \right) (r_1 - r_{1,0}) + (-1)(r_2 - r_{2,0}) + \\ & + \left(\cosh \frac{x_j + r_{1,0}}{r_{3,0}} - \frac{x_j + r_{1,0}}{r_{3,0}} \sinh \frac{x_j + r_{1,0}}{r_{3,0}} \right) (r_3 - r_{3,0}). \end{aligned} \quad (12)$$

Dla n równań liniowych względem $(r_1 - r_{1,0}), (r_2 - r_{2,0}), (r_3 - r_{3,0})$, analogicznie jak w przypadku układu równań (8), formułujemy funkcję celu

$$h = \sum_{j=1}^n \left[f(x_j | (r_1 - r_{1,0}), (r_2 - r_{2,0}), (r_3 - r_{3,0})) - y_j \right]^2 \quad (13)$$

lub konkretnie, z uwzględnieniem (12):

$$\begin{aligned} h = \sum_{j=1}^n & \left[\left(r_{3,0} \cosh \frac{x_j + r_{1,0}}{r_{3,0}} - r_{2,0} \right) + \left(\sinh \frac{x_j + r_{1,0}}{r_{3,0}} \right) (r_1 - r_{1,0}) + \right. \\ & + (-n)(r_2 - r_{2,0}) + \\ & \left. + \left(\cosh \frac{x_j + r_{1,0}}{r_{3,0}} - \frac{x_j + r_{1,0}}{r_{3,0}} \sinh \frac{x_j + r_{1,0}}{r_{3,0}} \right) (r_3 - r_{3,0}) - y_j \right]^2 \quad (14) \end{aligned}$$

Funkcja (14) osiąga minimum dla jednoznacznego zestawu wartości niewiadomych $(r_1 - r_{1,0}) = \Delta r_1$, $(r_2 - r_{2,0}) = \Delta r_2$, $(r_3 - r_{3,0}) = \Delta r_3$. Wartości niewiadomych Δr_1 , Δr_2 , Δr_3 obliczamy z układu trzech równań liniowych względem trzech niewiadomych, które uzyskujemy dzięki realizacji warunków koniecznych istnienia minimum funkcji h , tj. przyrównania pierwszych pochodnych funkcji h względem Δr_1 , Δr_2 , Δr_3 do zera.

Zauważając analogię różnic $f[x_j | (r_1 - r_{1,0}), (r_2 - r_{2,0}), (r_3 - r_{3,0})] - y_j$, tworzących szereg (14) do zrównoważonych różnic wartości wielkości wyrównanych i wyników pomiarów, wyrażanych w procedurze zmiennych pośredniczących równaniami poprawek w funkcji przyrostów zmiennych pośredniczących, możemy obliczyć niewiadome Δr_1 , Δr_2 , Δr_3 , korzystając z oprogramowanych algorytmów rozwiązywania układów równań normalnych.

Na podstawie obliczonych wartości $r_1 = x_0$, $r_3 = a$ obliczamy wartość parametru $y_{0,p}$ ze wzoru

$$y_{0,p} = r_3 \cosh \frac{x_1 + r_1}{r_3} - y_1, \quad (15)$$

a następnie dla $j = 1, 2, 3 \dots n$ wyznaczamy zbiór różnic:

$$r_3 \cosh \frac{x_j + r_1}{r_3} - y_{0,p} - y_j = \varepsilon_j \quad (16)$$

Jeżeli wartości elementów zbioru (16) przekraczają znacznie błędy wyznaczenia (pomiaru) współrzędnych x_j , y_j , wówczas przyjmując obliczone wartości r_1 , $y_{0,p}$, r_3 odpowiednio za wyjściowe $r_{1,0}$, $r_{2,0}$ i $r_{3,0}$ formułujemy ponownie funkcję celu (13) i znajdujemy jej pierwiastki w punkcie, w którym osiąga minimum.

Jeżeli po kolejnej iteracji wartość $\sum \varepsilon_j \varepsilon_j$ nie staje się znacząco mniejsza niż w iteracji poprzedniej, wówczas przyjmujemy, że dla wartości niewiadomych

$$\begin{aligned} r_1 & (= x_0) \\ r_2 & (= y_0) = y_{0,p} + \frac{1}{n} \varepsilon \\ r_3 & (= a) \end{aligned} \quad (17)$$

uzyskanych z ostatniej iteracji, funkcja (9) osiągnęła najmniejszą wartość (dla charakterystycznej dokładności pomiaru składowych y_j oraz przeważnie nienaturalnego założenia bezbłędności składowych x_j).

Konieczność iteracyjnego poszukiwania pierwiastków funkcji h wynika z przyjęcia we wzorze (12) jedynie wyrazów o potęgach poprawek parametrów mniejszych niż dwa, oraz grubo przybliżonych wartości parametrów $r_{1,0}$, $r_{2,0}$, $r_{3,0}$, co powoduje, że przybliżenie (12) funkcji (11) nie jest, dla pierwszej iteracji skorelowane z dokładnością wyznaczenia współrzędnych y_j . Pierwsze wartości parametrów przybliżonych $r_{1,0}$, $r_{2,0}$, $r_{3,0}$ stanowią wartości parametrów paraboli

$$y + r_{2,0} = r_{3,0} + \frac{(x + r_{1,0})^2}{2r_{3,0}}, \quad (18)$$

posiadającej z wyznaczoną krzywą łańcuchową wspólny wierzchołek i leżącej poniżej wyznaczonej krzywej łańcuchowej. Tak obliczone wartości parametrów $r_{1,0}$, $r_{2,0}$, $r_{3,0}$ (na podstawie współrzędnych x , y dowolnych trzech punktów na linii) mogą się różnić od poszukiwanych zgodnie z dyrektywą (9) wartości tych parametrów o kilkadziesiąt procent. Uniemożliwia to wpasowanie krzywej łańcuchowej w empiryczny zestaw punktów na linii z uwzględnieniem rzeczywistej dokładności wyznaczenia każdej składowej x_j , y_j i zmusza do etapowych obliczeń, z których pierwsze zakończyliśmy.

Wyniki uzyskane w powyższym etapie mogą stanowić zakończenie zadania wyznaczania wartości parametrów krzywej łańcuchowej, pod warunkiem, że błędami obciążone są tylko wyznaczone empirycznie wartości y_j .

Jakość dokonanego wpasowania charakteryzuje błąd

$$m_{0y} = \pm \sqrt{\frac{[v_y^2]}{n-3}} \quad (19)$$

na którego wartość mają wpływ błędy pomiarów pseudoobserwacji y_j , założenie bezbłędności pseudoobserwacji x_j oraz założenie postaci funkcji wpasowywanej.

W przypadku gdy $m_y = 1$ wzór (19) możemy wyrazić w formie

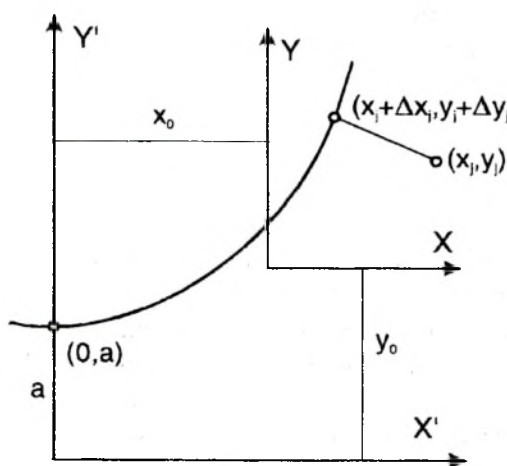
$$m_{0y} = \pm \sqrt{\frac{[\Delta y^2]}{n-3}} \quad (19a)$$

Otrzymane wartości parametrów a , x_0 , y_0 możemy przyjąć jako wartości przybliżone do wpasowania ortogonalnego.

3. ALGORYTM WPASOWANIA KRZYWEJ ŁAŃCUCHOWEJ W EMPIRYCZNY ZBIÓR PUNKTÓW Z WARUNKIEM

$$[v_x^2 + v_y^2 + v_{par}^2] = \min.$$

Przyczyną opracowania niniejszego algorytmu, poza omówionym dążeniem do ortogonalizacji wpasowania jest to, że stosowana dotychczas dyrektywa $[v_y^2] = \min.$ jest równoznaczna z przyjęciem bezbłędności empirycznego wyznaczenia wartości pseudoobserwacji x_j , co kłóci się na ogół z rzeczywistością. Świadomość tego stanu wykazał autor pracy [11], który jednak nie wykorzystał jej do użytecznego uwzględnienia błędów obu składowych. Temat ten był również poruszony w publikacji [16].



Rys. 4

Celem do jakiego będziemy tu zdążać jest wykonanie wpasowania, dla którego suma kwadratów poprawek zrównoważonych

$$v_{x_j} = \frac{\Delta x_j}{m_{x_j}}, \quad v_{y_j} = \frac{\Delta y_j}{m_{y_j}} \quad (20)$$

od punktów empirycznych x_j , y_j do wyznaczonej krzywej o równaniu

$$y_j + \Delta y_j + y_0 = a \cosh \frac{x_j + \Delta x_j + x_0}{a} \quad (21)$$

będzie miała wartość najmniejszą:

$$[v_r^2] = [v_x^2 + v_y^2] = \min. \quad (22)$$

Funkcję (22) realizuję przy uzmiennieniu parametrów przybliżonych, tj. przy spełnieniu warunku (1).

W przypadku gdy $m_{x_j} = m_{y_j}$, to wektory wypadkowe wektorów $\Delta x_j, \Delta y_j$ są zgodnie z (22) prostopadłe do wyznaczonej krzywej (21).

Przyjmijmy oznaczenia:

$$\begin{aligned} y_j + \Delta y_j &= f(x_j) = y_j^w \\ x_j + \Delta x_j &= x_j^w \\ t_{1,0} + \Delta t_1 &= t_1 \\ t_{2,0} + \Delta t_2 &= t_2 \\ t_{3,0} + \Delta t_3 &= t_3 \end{aligned} \quad (23)$$

gdzie $t_{1,0}, t_{2,0}, t_{3,0}$ są to odpowiednio wartości x_0, y_0, a zbioru (17) lub parametry o założonych wartościach.

Dla n par pseudoobserwacji x_j, y_j wyrażam funkcję (6), w formie szeregu potęgowego

$$\begin{aligned} f(x_j^w, t_1, t_2, t_3) = y_j + \Delta y_j &= f(x_j, t_{1,0}, t_{2,0}, t_{3,0}) + \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} \right)_0 \Delta x_j + \\ &+ \left(\frac{\partial f}{\partial t_1} \right)_0 \Delta t_1 + \left(\frac{\partial f}{\partial t_2} \right)_0 \Delta t_2 + \left(\frac{\partial f}{\partial t_3} \right)_0 \Delta t_3 + \text{reszta} \end{aligned} \quad (24)$$

gdzie wskaźniki 0 przy pochodnych cząstkowych oznaczają, że pochodne te liczone są dla wartości $x_j, t_{1,0}, t_{2,0}, t_{3,0}$ tj.

$$\begin{aligned} y_j - \left(t_{3,0} \cosh \frac{x_j + t_{1,0}}{t_{3,0}} - t_{2,0} \right) &= -\Delta y_j + \Delta x_j \left(\sinh \frac{x_j + t_{1,0}}{t_{3,0}} \right) + \\ &+ \Delta t_1 \left(\sinh \frac{x_j + t_{1,0}}{t_{3,0}} \right) + \Delta t_2 (-1) + \\ &+ \Delta t_3 \left(\cosh \frac{x_j + t_{1,0}}{t_{3,0}} - \frac{x_j + t_{1,0}}{t_{3,0}} \sinh \frac{x_j + t_{1,0}}{t_{3,0}} \right) \end{aligned} \quad (25)$$

Przechodząc do zapisu krakowianowego oznaczamy tablicę różnic

$y_j - \left(t_{3,0} \cosh \frac{x_j + t_{1,0}}{t_{3,0}} \right)$ jako $\underline{\Delta}$ (wymiar tablicy 1 x n), tablicę współczynników przy niewiadomych $\Delta y_j, \Delta x_j$ oraz $\Delta t_1, \Delta t_2, \Delta t_3$ jako \underline{w} (wymiar tablicy $(2n+3) \times n$), oraz tablicę niewiadomych $\Delta x_j, \Delta y_j, \Delta t_1, \Delta t_2, \Delta t_3, j=1,2,3,\dots,n$ jako $\underline{\Delta l}$ (wymiar 1 x $(2n+3)$).

Układ równań (25) zapisuję następująco

$$\underline{\Delta l} \tau \underline{w} = \underline{\Delta} . \quad (26)$$

W celu wyrażenia niewiadomych we wspólnej jednostce precyzji, zestawiamy tablicę błędów (o wymiarach $2n+3 \times 2n+3$) i obliczamy wartości elementów tablicy $\underline{\Delta}$ wykonując działanie:

$$\underline{m} \tau \underline{w} = \underline{A} . \quad (27)$$

Po podstawieniu \underline{A} ze wzoru (27) w miejsce \underline{w} we wzorze (26) otrzymujemy zestaw n równań liniowych wiążących wszystkie niewiadome, już jednorodne pod względem dokładnościowym

$$\left(\underline{\Delta l} \underline{m}^{-1} \right) \tau \underline{A} = \underline{\Delta} , \quad (28)$$

co umożliwia postawienie warunku zapewniającego obliczenie jednoznacznego zestawu wartości poprawek normalnych wpasowania \underline{v}

$$\underline{\Delta l} \underline{m}^{-1} = \underline{v} , \quad (29)$$

w formie dyrektywy

$$\underline{v} \underline{v} = v_{t_{1,0}}^2 + v_{t_{2,0}}^2 + v_{t_{3,0}}^2 + \sum_{j=1}^n (v_{x_j}^2 + v_{y_j}^2) = \min . \quad (30)$$

Do rozwiązania tego zadania przyjmujemy algorytm T.Banachiewicza [2],[7]. Po obliczeniu wartości elementów tablicy $\underline{\Delta}$ i \underline{A} wykonujemy przeto następujące działania:

- obliczamy tablicę korelat $\underline{k} = \underline{\Delta} ((\tau \underline{A})^2)^{-1}$,
- obliczamy tablicę poprawek $\underline{v} = \underline{k} \underline{A}$
- obliczamy tablicę $\underline{\Delta l} = \underline{v} \underline{m}$, której elementy stanowią wartości poprawek Δx_j , Δy_j , Δt_1 , Δt_2 , Δt_3 .

Znane już wartości niewiadomych układu (26) pozwalają wyznaczyć wartości parametrów równania (21) oraz współrzędnych wpasowanych, spełniających to równanie.

Błędy *a priori* zmiennych $t_{1,0}$, $t_{2,0}$, $t_{3,0}$, w stosunku do błędów pozostałych niewiadomych, poszukujemy z zastosowaniem analizy wartości sumy (30) oraz wartości

$$suma = \sum_{j=1}^n (\Delta x_j^2 + \Delta y_j^2) \quad (31)$$

uzyskanych z kilku wpasowań przeprowadzonych wg wzorów (25) - (30), przy założonych wartościach błędów t_1 , t_2 , t_3 różnych każdorazowo o rząd wielkości. Za ostateczne przyjmujemy wyniki wpasowania dokonanego dla takiego zestawu wartości błędów zmiennych $t_{1,0}$, $t_{2,0}$, $t_{3,0}$, dla którego wartość (31) jest najmniejsza. Uzyskane ostatecznie wartości poprawek Δx_j , Δy_j do współrzędnych empirycznych x , y wynikają z założenia bliskości kształtu zwisu liny i krzywej łańcuchowej, błędów wyznaczenia współrzędnych empirycznych oraz błędów oszacowania błędów *a priori*.

Jakość dokonanego wpasowania ortogonalnego, wyrażoną za pomocą wyznaczonych odstępów punktów empirycznych od wpasowanej krzywej, możemy przedstawić w postaci

$$m_{or} = \pm \sqrt{\frac{[\Delta r^2]}{n-3}} \quad (32)$$

4. PRZYKŁAD LICZBOWY WPASOWANIA ORTOGONALNEGO

W wyniku pomiarów pewnego zjawiska uzyskano zbiór współrzędnych siedmiu punktów - tabl. 1 i rys. 5.

Tablica 1

Nr pktu	1	2	3	4	5	6	7	
x	1.5	3.5	5.5	7.5	9.0	10.5	12.0	cm
y	1.5	2.5	4.0	6.0	7.5	10.0	12.5	cm

Zadanie polega na sprawdzeniu, czy ten zespół punktów może być dobrze wyrażony za pomocą krzywej łańcuchowej (3) i (21).

W tym celu, korzystając z algorytmów przedstawionych w p. 2 i 3 oraz odpowiednich programów* dokonałem wpasowania krzywej łańcuchowej w empiryczny zbiór punktów. Zadanie wykonałem w dwóch wariantach:

1° - przy założeniu $[v_y^2] = \min$.

2° - przy założeniu $[v_r^2] = \min$. i przy założeniu, że błędy $m_{x_j} = m_{y_j} = 1 \text{ cm}$ dla każdego j ze zbioru $(1, 2, \dots, 7)$ oraz $m_{t_{10}} = m_{t_{20}} = m_{t_{30}} = 100 m_{x_j}$.

W pierwszym wariacie, odpowiadającym tradycyjnemu potraktowaniu wpasowania, tj. przyjmując $m_{x_j} = 0$, otrzymałem następujące wartości (tabl.2):

Tablica 2

Parametry		x_0 [cm]	y_0 [cm]	a [cm]			
obliczone (krzywej wpasowanej)		2.491373	9.711963	10.458677			
Nr pktu	1	2	3	4	5	6	7
Δy	0.0176	0.0103	-0.0488	±0.1066	0.2210	-0.0923	-0.0012 cm
$m_{0y} = \pm 0.134 \text{ cm}$							

* Serdecznie dziękuję dr inż. Lucjanowi Siporskiemu za przełożenie algorytmów wpasowania krzywej łańcuchowej na język PASCAL.

W drugim wariancie, przy założonych bardzo dużych błędach parametrów $m_{t_{1,0}} = m_{t_{2,0}} = m_{t_{3,0}} = 100m_{x_j}$ i parametrach przybliżonych $t_{1,0}$, $t_{2,0}$, $t_{3,0}$ uzyskanych z pierwszego wariantu otrzymałem następujące wartości (tabl. 3).

W przykładzie widoczne jest uzyskanie $m_{0r} < m_{0y}$, co jest efektem ortogonalizacji wpasowania.

Ilustracją przykładu jest rys. 5, na którym pokazałem rozmieszczenie punktów empirycznych, wykres krzywej łańcuchowej, odchyłki Δy z pierwszego wariantu wpasowania oraz wektory Δr wpasowania ortogonalnego w skali powiększonej. Widoczne jest, że odchyłki Δr z pewnym przybliżeniem w większości przypadków mogą być traktowane jako rzuty prostokątne odchyłek Δy , liczonych wg kryterium $[v_y^2] = \min.$, na normalne do krzywej.

Tablica 3

Parametry	x_0 [cm]	y_0 [cm]	a [cm]					
przybliżone	2.491373	9.711963	10.458677					
obliczone	2.618294	9.901966	10.598646					
Nr pktu	1	2	3	4	5	6	7	
Δy	0.0058	0.0089	-0.0229	-0.0428	0.0822	-0.0268	-0.0043	cm
Δx	-0.0023	-0.0054	0.0193	0.0474	-0.1096	0.0425	0.0081	cm
Δr^*	0.0062	0.0104	-0.0299	-0.0639	0.1370	-0.0502	-0.0092	cm
$\frac{\Delta y}{\Delta x}$	-2.52	-1.65	-1.19	-0.90	-0.75	-0.63	-0.53	
$m_{0r} = \pm 0.081$ cm								

5. WŁAŚCIWOŚCI UŻYTKOWE METODY WPASOWANIA ORTOGONALNEGO

W toku wpasowania ortogonalnego wyznaczeniu podlegają poprawki do uzmiennionych parametrów przybliżonych przyjętej funkcji wyrażającej wpasowywaną krzywą. Uzmiennienie to dokonywane jest przez wprowadzenie do rachunku błędów parametrów. Różnicowanie proporcji błędów parametrów w stosunku do błędów współrzędnych przynosi różne efekty wpasowania.

* Przyrosty Δr liczone są ze znakiem "+", gdy punkt empiryczny znajduje się pod wpasowaną krzywą.

1. Jeżeli zależy nam na uzyskaniu największej dokładności wpasowania, możliwej przy przyjętej postaci funkcji przybliżającej, to formułując układ (28) zakładamy bardzo duże błędy parametrów przybliżonych w stosunku do błędów współrzędnych. Wówczas wynik wpasowania jest zawsze praktycznie jednakowy, nawet jeśli przyjmie się nieznacznie różniące się wartości wyjściowe parametrów przybliżonych. (Pamiętać przy tym należy, aby dla przyjętych wartości przybliżonych parametrów zależność (21) była spełniona przez wszystkie pary pseudoobserwacji x, y w granicach rzędu dokładności wyznaczenia x, y . Wówczas pominięcie reszt w rozwinięciach (25) nie spowoduje konieczności podjęcia obliczeń iteracyjnych.)

Aby to pokazać, wykonałem wpasowanie według danych z tabl. 1 przy $m_{t_{1,0}} = m_{t_{2,0}} = m_{t_{3,0}} = 100 m_{x_j}$, przyjmując inne niż w tabl. 3 przybliżone wartości parametrów. W rezultacie otrzymałem następujące wartości (tabl. 4):

Tablica 4

Parametry	x_0 [cm]		y_0 [cm]		a [cm]		
przybliżone	2.5		9.75		10.50		
obliczone	2.619110		9.903352		10.599844		
Nr pktu	1	2	3	4	5	6	7
Δy	0.0058	0.0089	-0.0230	-0.0430	0.0827	-0.0270	-0.0044 cm
Δx	-0.0022	-0.0054	0.0193	0.0474	-0.1098	0.0426	0.0081 cm
$m_{or} = \pm 0.082$ cm							

Porównanie danych zawartych w tabl. 3 i 4 wskazuje na otrzymanie dobrej zgodności odchyłek wpasowania przy różnych wyjściowych wartościach parametrów.

2. Niekiedy może zachodzić potrzeba wpasowania krzywej o zadanych parametrach w empiryczny zbiór punktów. Wówczas wpasowanie wykonujemy przyjmując bardzo małe błędy parametrów przybliżonych, których niezmiennosc w toku wpasowania pragniemy utrzymać.

Aby to pokazać wykonałem wpasowanie według danych z tabl. 1, przyjmując $m_{t_{1,0}} = m_{t_{2,0}} = m_{t_{3,0}} = 0.01 m_{x_j}$. Wynik tego wpasowania zawarty jest w tabl. 5.

Tablica 5

Parametry	x_0 [cm]	y_0 [cm]	a [cm]					
przybliżone	2.50	9.75	10.50					
obliczone	2.500005	9.749997	10.500000					
Nr pktu	1	2	3	4	5	6	7	
Δy	0.0184	0.0084	-0.0306	-0.0528	0.0734	-0.0344	-0.0095	cm
Δx	-0.0072	-0.0051	0.0256	0.0583	-0.0975	0.0544	0.0176	cm
Δr	0.0198	0.0098	-0.0399	-0.0787	0.1220	-0.0644	-0.0200	cm
$m_{or} = \pm 0.083$ cm								

Osiągnięta zgodność parametrów przybliżonych z obliczonymi jest potwierdzeniem skuteczności postępowania polegającego na przyjęciu małych wartości błędów parametrów.

Zastosowanie wpasowania ortogonalnego w tym przypadku sprowadza się do obliczenia odległości punktów empirycznych od określonej krzywej oraz współrzędnych $x + \Delta x$, $y + \Delta y$ spodków prostopadłych opuszczonych z punktów empirycznych na krzywą.

3. W przypadku gdy $m_x \neq m_y$, wektory $\vec{\Delta r}$ ulegają odchyleniu od prostopadłości do wpasowywanej krzywej; przy $m_y > m_x$ odchylają się w kierunku osi OY, zaś przy $m_x > m_y$ odchylają się w kierunku osi OX. Przy bardzo dużej wartości stosunku m_x/m_y lub m_y/m_x wektory te przyjmują kierunki praktycznie równoległe odpowiednio do osi OX lub OY, zaś długości tych wektorów $\Delta r_d = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ stają się praktycznie równe odchyłkom Δx lub Δy , liczonym zgodnie z warunkiem $[v_x^2] = \min.$ lub $[v_y^2] = \min.$

Ilustrują to wyniki wpasowania dokonanego przy założeniu $m_y = 10 m_x$ i $m_{par} = 100 m_x$ zestawione w tabl. 6.

Widoczne jest, że odchylenia kierunków wektorów Δr_d od kierunku osi OY nie przekraczają tu 53'.

Porównanie długości Δr_d z tabl. 6 z odchyłkami Δy z tabl. 2 wskazuje na wysoką ich zgodność.

Dużą zgodność wykazują też wartości obliczone parametrów krzywej łańcuchowej zestawione w tabl. 6 i w tabl. 2, oraz błędu m_{or_d} z tabl. 6 z błędem m_{or} z tabl. 2.

Tablica 6

Parametry	x_0 [cm]			y_0 [cm]			a [cm]	
przybliżone	2.491373			9.711966			10.458677	
obliczone	2.492648			9.713904			10.460174	
Nr pktu	1	2	3	4	5	6	7	
Δy	0.0176	0.0103	-0.0483	-0.1052	0.2172	-0.0900	-0.0014	cm
Δx	-0.0001	-0.0001	0.0004	0.0012	-0.0029	0.0014	0.0000	cm
Δr_d	0.0176	0.0103	-0.0483	-0.1052	0.2172	-0.0900	-0.0014	cm
$m_{0rd} = \pm 0.131$ cm								

4. W przypadku gdy pragniemy do wpasowania krzywej wykorzystać współrzędne empiryczne części punktów zbioru, natomiast pozostałe punkty zbioru mają mieć wyznaczone odległości Δr od wpasowanej krzywej, lecz nie mają wpływać na wynik wpasowania, możemy zadanie rozwiązać, przyjmując znacznie większe błędy *a priori* współrzędnych punktów, które nie uczestniczą praktycznie we wpasowaniu. Postępowanie takie ilustruje przykład wpasowania, którego wyniki zawarte są w tabl. 7.

Tablica 7

Parametry	x_0 [cm]			y_0 [cm]			a [cm]	
przybliżone	2.976588			10.378917			10.929294	
obliczone	2.857625			10.204818			10.802281	
Nr pktu	1	2	3	4	5	6	7	
$m_x = m_y$	1 cm	1 cm	1 cm	100 cm	100 cm	1 cm	1 cm	
Δy	-0.0101	0.0164	-0.0028	-0.0199	0.1033	-0.0105	0.0070	cm
Δx	0.0042	-0.0102	0.0024	0.0222	-0.1373	0.0165	-0.0129	cm
Δr	-0.0109	0.0194	-0.0037	-0.0298	0.1718	-0.0196	0.0147	cm
$m_{0r} = \pm 0.023$ cm								

W przykładzie tym przyjąłem $m_x = m_y = 1$ cm, dla punktów 1, 2, 3, 6 i 7, w zbiór których wpasowałem krzywą, oraz $m_x = m_y = 100$ cm dla punktów 4 i 5, których odległości od wpasowanej krzywej pragnąłem wyznaczyć. W przykładzie przyjąłem $m_{par} = 100$ cm.

Dla sprawdzenia, czy wprowadzone do rachunku z dużymi błędami współrzędne punktów 4 i 5 nie wpływają na wynik wpasowania, wykonałem ponowne wpasowanie z pominięciem tych punktów, tj. wyłącznie na podstawie punktów 1, 2, 3, 6 i 7 z błędami $m_x = m_y = 1$ cm, $m_{par} = 100 m_x$. Otrzymane wyniki zawiera tabl. 8.

Porównanie wyników zawartych w tabl. 7 i 8 wykazuje, że wprowadzenie do rachunku punktów 4 i 5 z dużymi błędami nie wpłynęło praktycznie na odchyłki Δr punktów 1, 2, 3, 6 i 7. Podkreślić należy prostotę i szybkość uzyskiwania niniejszym sposobem odległości Δr punktów niewykorzystywanych do wpasowania - od wpasowanej krzywej.

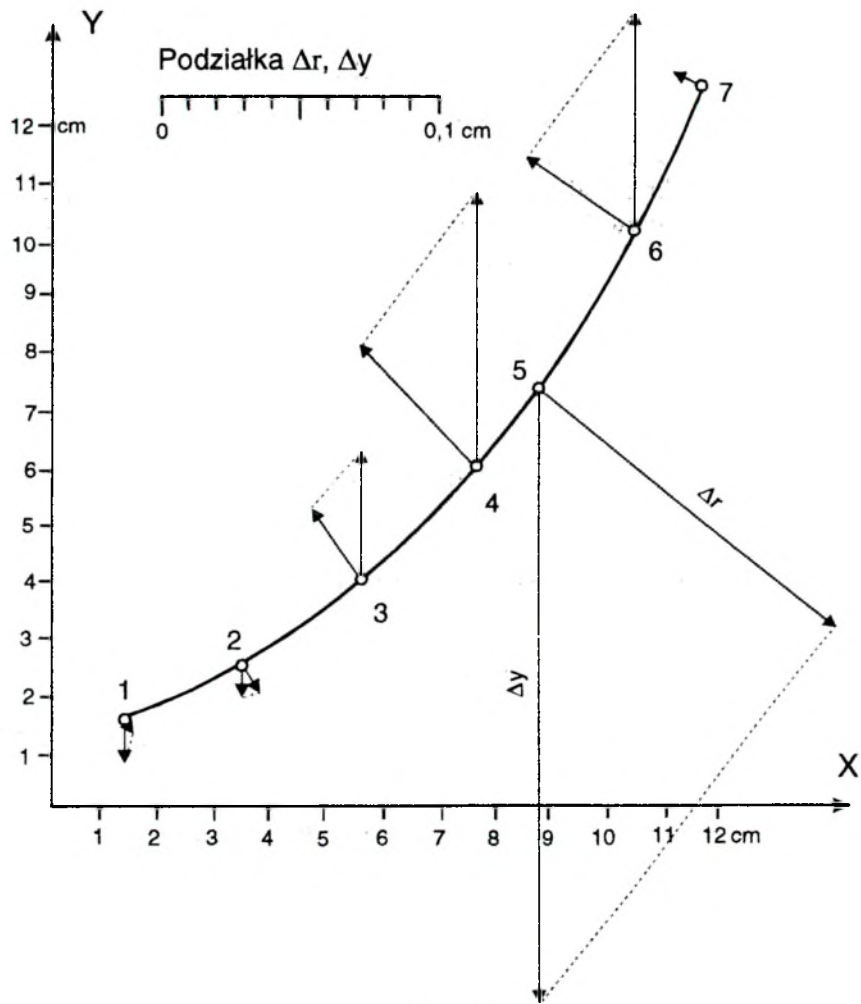
Tablica 8

Parametry	x_0 [cm]			y_0 [cm]		a [cm]	
przybliżone	2.976588			10.378917		10.929294	
obliczone	2.857686			10.204900		10.802339	
Nr pktu	1	2	3	4	5	6	7
Δy	-0.0101	0.0164	-0.0028			-0.0105	0.0070 cm
Δx	0.0042	-0.0103	0.0024			0.0165	-0.0129 cm
Δr	-0.0109	0.0194	-0.0037			-0.0196	0.0147 cm
$m_{or} = \pm 0.023$ cm							

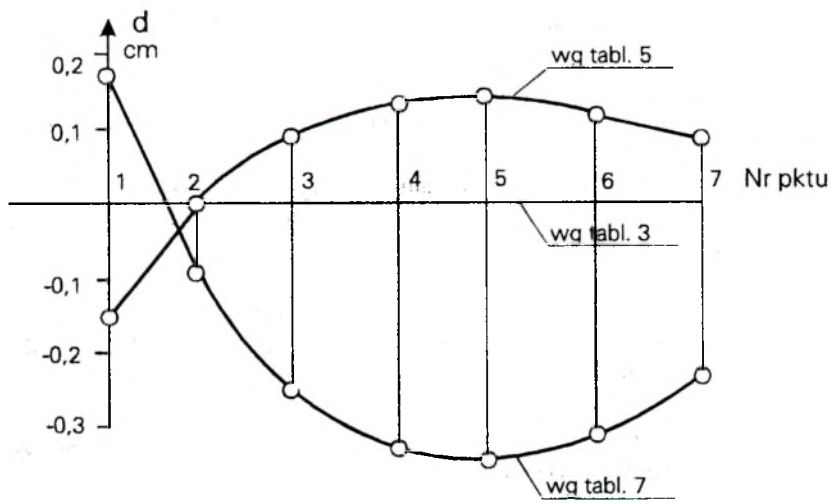
5. Korzystając z wartości Δr obliczonych w różnych wariantach wagowania i przy różnych założeniach możemy obliczyć odległości wzajemne d wpasowanych krzywych w przekrojach normalnych przechodzących przez poszczególne punkty empiryczne, obliczając odpowiednie różnice Δr .

Tablica 9

Nr pkt.	tabl.3	tabl.4	tabl.5		tabl.7
1	0.0062	0.0062	0.0198		-0.0109
2	0.0104	0.0104	0.0098		0.0194
3	-0.0299	-0.0300	-0.0399		-0.0037
4	-0.0639	-0.0640	-0.0787		-0.0298
5	0.1370	0.1375	0.1220		0.1718
6	-0.0502	-0.0504	-0.0644		-0.0196
7	-0.0092	-0.0092	-0.0200		0.0147



Rys. 5



Rys. 6

W tabl. 9 zestawiono wartości Δr z tabl. 3, 4, 5 i 7 (dane w tabl. 6 są nieporównywalne z uwagi na brak ortogonalności). Rysunek 6 zawiera wykresy odległości krzywych wpasowanych jak w tabl. 5, 7, względem krzywej wpasowanej jak w tabl. 3. Zauważmy, że uzyskana graficznie ciągłość wykresów stanowi tu potwierdzenie poprawności wykonania obliczeń związanych z wpasowaniem krzywych.

LITERATURA

- [1] Adamczewski Z.: Krzywa łańcuchowa jako linia realna. Przegląd Geodezyjny, nr 4, 1992
- [2] Banachiewicz T.: Rachunek krakowianowy. PWN, Warszawa 1959
- [3] Czaja J.: Uogólniona metoda wyznaczania położenia i kształtu budowli obrotowych o powierzchni stopnia drugiego. Geodezja i Kartografia, 1984, nr 3
- [4] Demidowicz B.P.: Metody numeryczne. PWN, Warszawa 1955
- [5] Gocał J.: Aproksymacja średniokwadratowa w badaniach kształtu elementów konstrukcyjnych. Geodezja i Kartografia, 1979, nr 3
- [6] Gocał J.: Geodezyjne metody wyznaczania położenia i kształtu zbiorników stalowych. Geodezja i Kartografia, 1989, nr 2
- [7] Hausbrandt St.: Rachunki geodezyjne. PPWK, Warszawa 1953
- [8] Janusz J.: Wpasowanie krzywej teoretycznej w układ punktów wyznaczonych na linii odciągowej. Biuletyn IGiK w Przeglądzie Geodezyjnym, 1994, nr 9
- [9] Kadaj R.: Wyznaczanie położenia i kształtu niektórych przestrzennych tworów geometrycznych metodami geodezyjnych wcięć stożkowych. Rozprawa doktorska, AGH, Kraków, 1973
- [10] Kadaj R.: Geodezyjne metody pomiaru krzywoliniowych form przestrzennych z przykładami zastosowań w zagadnieniach inżynierskich. Wyd. Politechniki Rzeszowskiej, Rozprawy 3, 1975
- [11] Koronowski R.: Metoda określania najprawdopodobniejszej krzywej aproksymującej wyniki szeregu obserwacji. Geodezja i Kartografia, 1964, nr 4

- [12] Koronowski R.: Metoda geodezyjnego wyznaczania równań określających kształt obiektów walcowych oraz odchyłeń kształtu tych obiektów od kształtów wyrażonych wyznaczonymi równaniami. Zeszyty naukowe PW, Geodezja, 1964, z.13
- [13] Linkwitz K.: Formfinding of lightweight surface structures by geodetic methods. Applications of Geodesy to Engineering, Springer-Verlag Berlin Heidelberg 1993
- [14] Niczyporowicz E.: Krzywe płaskie. PWN, Warszawa 1991
- [15] Piotrowski R.: Niepublikowane komentarze do ćwiczeń z przedmiotu „Rachunek wyrównawczy”. Politechnika Warszawska, 1978/79
- [16] Skórczyński A.: Wyrównanie układów obserwacyjnych prowadzących do wyznaczenia parametrów równań tworów geometrycznych płaskich i trójwymiarowych. Geodezja i Kartografia, 1968, nr 4
- [17] Tymowski St. J.: Strzałka zwisu i jej pomiar. Przegląd Geodezyjny, 1971, nr 7

*Recenzował: prof. dr hab. Jan Gocał
Przyjęto do opublikowania w styczniu 1995 r.*

JERZY JANUSZ

ORTHOGONAL ADJUSTMENT OF THEORETICAL CURVE TO EMPIRICAL SERIES OF POINTS

S u m m a r y

Empirical series of points obtained from measurements of various phenomena often form curves, which we need to describe mathematically. In order to determine, if the theoretical curve expressed by the particular function well describes the empirical series of points, we must adjust curve to these points, compute function parameters and calculate deviations in relation to this curve. The smaller deviations of points are, the better adjustment of the curve is.

Curve is adjusted to empirical series of points usually with assumption, that sum of square distances of points from the curve, measured along one coordinate axis, reaches minimum. This principle of curve adjustment is presented in fig. 1a, where

$$[\Delta y^2] = \min$$

or in fig. 1b, where

$$[\Delta x^2] = \min.$$

The aim of this work was to prepare such a method of adjustment, which would fulfil the following condition

$$[\Delta r^2] = [\Delta x^2 + \Delta y^2] = \min.$$

Author presented methods of adjusting catenary curve, described by equation

$$y = a \cosh \frac{x}{a} \quad i \quad a > 0$$

fulfilling conditions:

$$1^\circ \quad \left[\left(\frac{\Delta y}{m_y} \right)^2 \right] = \min$$

$$2^\circ \quad \left[\left(\frac{\Delta y}{m_y} \right)^2 + \left(\frac{\Delta x}{m_x} \right)^2 + \left(\frac{\Delta par}{m_{par}} \right)^2 \right] = \min$$

where

Δpar - correction of the determined parameter of function

m_x, m_y, m_{par} - "a priori" assumed errors of coordinates and approximate parameters of function.

In particular case - $m_x = m_y$ solution of the task according to criterion 2 leads to fulfilment of the condition $[\Delta r^2] = \min$; then vectors of deviations $\vec{\Delta r}$ are oriented perpendicularly to the curve, as it was presented in fig. 2. Such an adjustment, called the orthogonal adjustment, has an advantage of giving the smallest sum of squares $(\Delta x^2 + \Delta y^2)$ for the approximating function at a given form. Moreover, this adjustment gives $\Delta x, \Delta y$ corrections, which can be used for calculating:

- distance of empirical point from the curve

$$\Delta r = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2},$$

- nadir coordinates for the empirical point in relation to curve

$$x^w = x + \Delta x$$

$$y^w = y + \Delta y,$$

- directional coefficient of the nadir line

$$a_n = \frac{\Delta y}{\Delta x},$$

- directional coefficient of the tangent line

$$a_s = -\frac{\Delta x}{\Delta y}.$$

Effects of adjusting catenary curve according to condition 2 were presented using numerical example, for different values of error ratios m_x, m_y, m_{par} .

Case study - catenary curve exemplifies method of orthogonal adjustment, which can be applied for adjusting spatial curve or surface to empirical series of points. Then

parameters of function describing this curve or surface can be calculated, while the following condition is fulfilled:

$$\left[\left(\frac{\Delta x}{m_x} \right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{m_y} \right)^2 + \left(\frac{\Delta z}{m_z} \right)^2 + \left(\frac{\Delta \text{par}}{m_{\text{par}}} \right)^2 \right] = \min$$

where XYZ - orthogonal coordinate system.

Translation: Zbigniew Bochenek

ЕЖИ ЯНУШ

ОРТОГОНАЛЬНОЕ СОВМЕЩЕНИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ КРИВОЙ С ЭМПИРИЧЕСКИМ МНОЖЕСТВОМ ТОЧЕК

Р е з ю м е

Эмпирическое множество точек, полученное из измерений разных явлений, укладывается часто вдоль кривых, выраженных с помощью функции, параметры которой желаем определить. Утверждение, что теоретическая кривая, выраженная определенной функцией, хорошо изображает данное эмпирическое множество точек, заключается в совмещении кривой с комплексом точек, в вычислении параметров функции и вычислении отклонений относительно совмещенной кривой. Кривая тем лучше выражает комплекс точек, чем отклонения точек относительно кривой меньше.

Совмещение кривой с эмпирическим множеством точек производится в общем при предположении, что сумма квадратов отдаленности точек от кривой, измеряемых вдоль одной из осей системы координат - достигает минимума. Этот принцип совмещения кривой иллюстрирует рисунок 1а, где

$$\left[\Delta y^2 \right] = \min$$

либо рисунок 1в, где

$$\left[\Delta x^2 \right] = \min.$$

Целью данной работы была разработка такого метода совмещения, при котором достигается исполнение условия

$$\left[\Delta r^2 \right] = \left[\Delta x^2 + \Delta y^2 \right] = \min.$$

В работе представлены методы совмещения цепной кривой с уравнением

$$y = a \cosh \frac{x}{a} \quad \text{и} \quad a > 0$$

при исполнении условий:

$$1^\circ \quad \left[\left(\frac{\Delta y}{m_y} \right)^2 \right] = \min$$

$$2^\circ \quad \left[\left(\frac{\Delta y}{m_y} \right)^2 + \left(\frac{\Delta x}{m_x} \right)^2 + \left(\frac{\Delta \text{par}}{m_{\text{par}}} \right)^2 \right] = \min$$

где

Δpar - поправка определяемого параметра функции,

m_x, m_y, m_{par} - принятые "a priori" ошибки координат и приближённых параметров функции.

В исключительном случае, где $m_x = m_y$ решение задачи согласно критерию 2 ведёт к выполнению $[\Delta r^2] = \min$; при котором векторы отклонений $\vec{\Delta r}$ достигают направления перпендикулярные к кривой, как это показано на рисунке 2. Такое совмещение, названное здесь ортогональным, имеет свойство получения суммы квадратов $(\Delta x^2 + \Delta y^2)$ наименьшей из возможных для функции приближённой к заданному виду. Кроме того, при этом совмещении получаются поправки $\Delta x, \Delta y$, из которых можно вычислить:

- расстояние эмпирической точки от кривой

$$\Delta r = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2},$$

- координаты основания перпендикуляра, опущенного из эмпирической точки на кривую

$$x^w = x + \Delta x$$

$$y^w = y + \Delta y,$$

- направленный коэффициент нормали к кривой

$$a_n = \frac{\Delta y}{\Delta x},$$

- направленный коэффициент касательной к кривой

$$a_s = -\frac{\Delta x}{\Delta y}.$$

На числовом примере иллюстрированы эффекты совмещения цепной кривой согласно условию 2, при разных значениях соотношений ошибок m_x, m_y, m_{par} .

Иллюстрированный на примере цепной кривой метод ортогонального совмещения может быть применён для совмещения с эмпирическим множеством точек - пространственной кривой или поверхности. Тогда вычисление параметров функции, выражающей эту кривую или поверхность, происходит при выполнении условия:

$$\left[\left(\frac{\Delta x}{m_x} \right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{m_y} \right)^2 + \left(\frac{\Delta z}{m_z} \right)^2 + \left(\frac{\Delta \text{par}}{m_{\text{par}}} \right)^2 \right] = \min$$

где XYZ - прямоугольная система координат.

Перевод: Róża Tołstikowa