

JERZY JANUSZ

**METODA WYZNACZANIA PRZEMIESZCZEŃ PUNKTÓW  
Z WYKORZYSTANIEM ODBIĆ ZWIERCIADLANYCH  
Cz. II\***

*ZARYS TREŚCI.* Praca zawiera opis metody wyznaczania przestrzennych przemieszczeń punktów za pomocą teodolitu i odbić celowych od zwierciadeł płaskich. Wyniki pomiarów eksperymentalnych wykazały możliwość wyznaczania przemieszczeń z błędem  $\pm 1 \div 1,5$  mm, przy sumie długości celowych: teodolit - zwierciadło - punkt kontrolowany, rzędu 100 m.

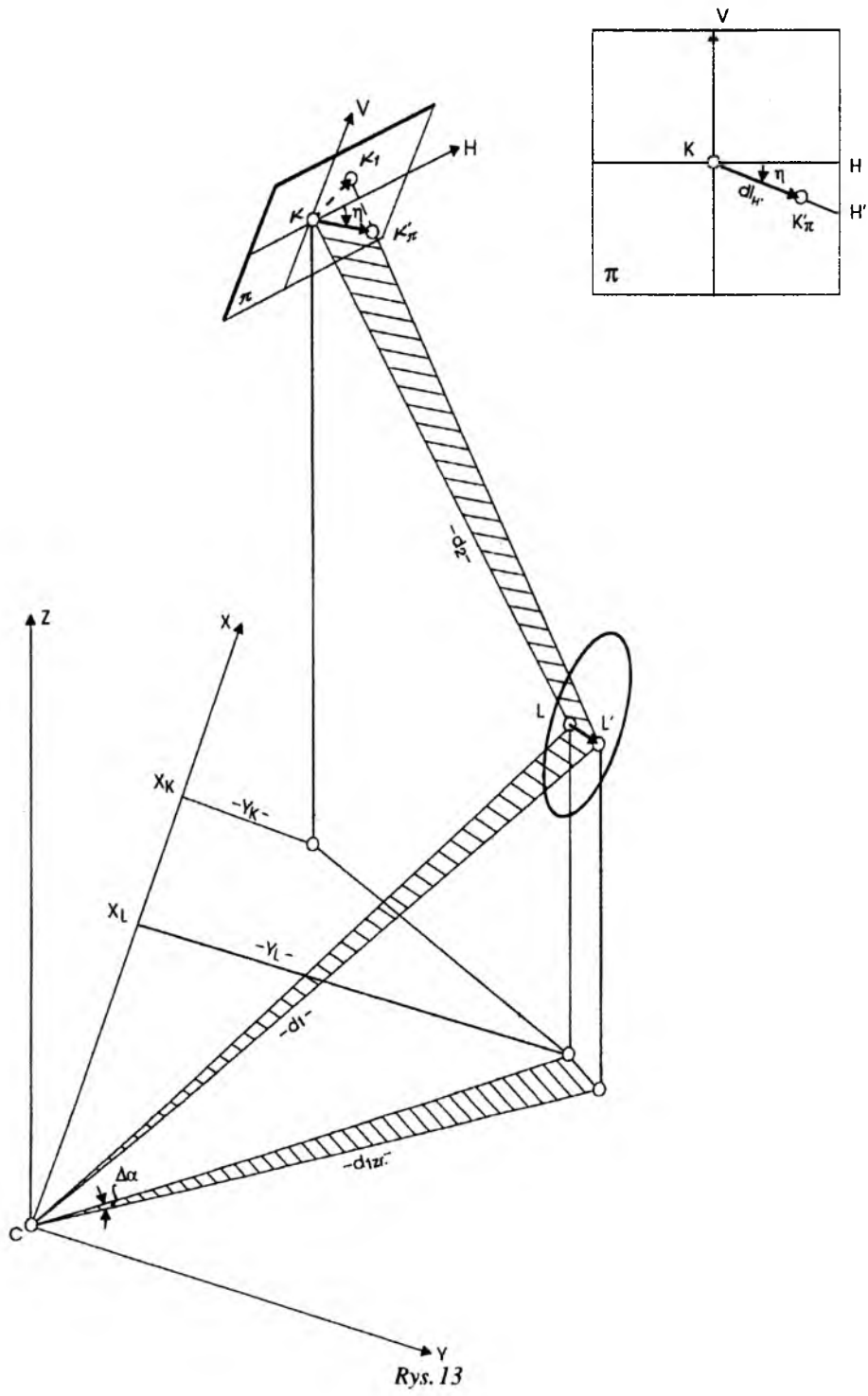
Metoda przeznaczona jest do pomiarów w warunkach utrudnionego dostępu i ograniczonej widoczności. Zilustrowano przykładowo zakres możliwych zastosowań metody.

**Wyznaczanie składowych przemieszczenia dx, dy, dz przy dowolnym  
położeniu punktów C, L, K w przestrzeni**

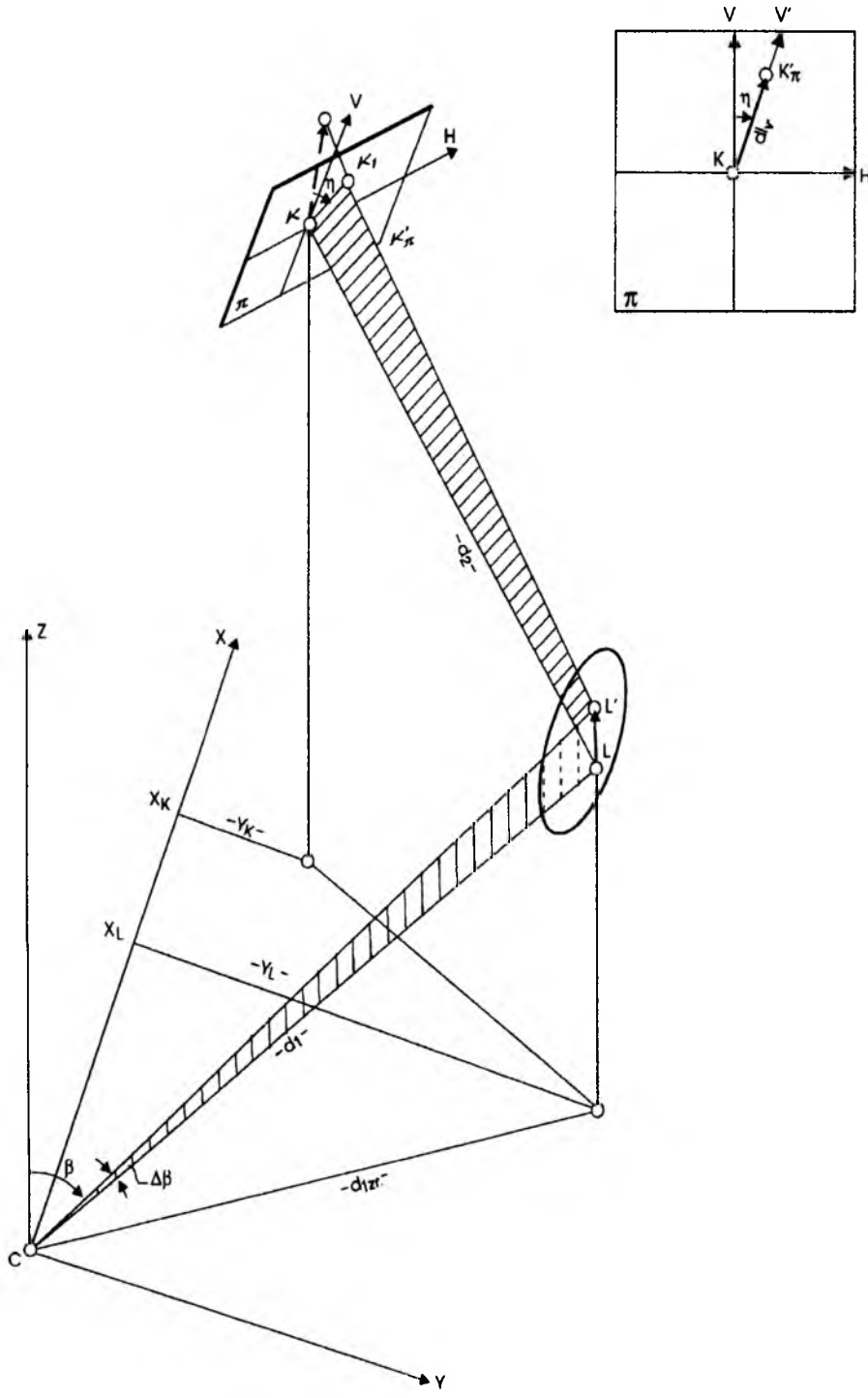
Na rysunku 13 pokazane jest takie przemieszczenie dk punktu K do pozycji  $K_1$ , które - obserwowane lunetą teodolitu ze stanowiska C za pośrednictwem zwierciadła L - wyraża się zmianą kierunku poziomego  $\Delta\alpha$  bez zmiany kąta nachylenia, tj. przy  $\Delta\beta = 0$ . Odpowiada to śledzeniu punktu K wyłącznie przez obracanie alidady wokół osi pionowej. Mowa tu o obracaniu alidady o tak mały kąt  $\Delta\alpha$ , aby ślad osi celowej na płaszczyźnie  $\Pi$  prostopadłej do kierunku lustro-punkt kontrolowany (LK) można było utożsamiać z poziomą linią prostą. Obrótowi alidady o kąt  $\Delta\alpha$ , oznaczonemu na rysunku przez zakreskowanie wycinka między kierunkami  $\alpha$  i  $\alpha'$  na płaszczyźnie poziomej OXY, odpowiada obrót osi celowej CL do pozycji CL', oznaczony przez zakreskowanie płaskiego wycinka CL, CL'. Kąt między obydwoma pozycjami celowej, mierzony na płaszczyźnie CLL', jest równy  $\Delta\alpha \frac{d_{1zr}}{d_1}$ . Po odbiciu od zwierciadła wycinek

---

\*) Część I opublikowana w Pracach IGiK, Tom XL, zeszyt 1(88), 1993



Rys. 13



Rys. 14

CL, CL' transformuje się na płaski wycinek LK, L'K'<sub>π</sub>. Krawędź KK'<sub>π</sub> przecięcia tego wycinka z płaszczyzną Π, przechodzącą przez punkt K i prostopadłą do LK, jest składową dl<sub>H'</sub> przemieszczenia punktu K na płaszczyźnie Π. Składowa ta, o długości

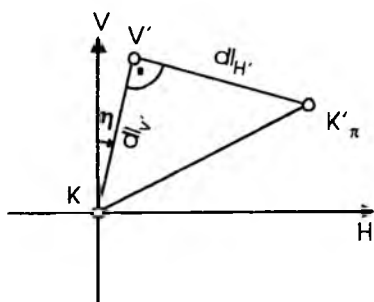
$$KK'_\pi = dl_{H'} = \Delta\alpha \frac{d_{1z}}{\rho} + \Delta\alpha \frac{d_{1z}d_2}{d_1 \rho} = \Delta\alpha \frac{d_{1z}}{d_1} \frac{(d_1 + d_2)}{\rho} \quad (16)$$

jest odchylona od warstwy H płaszczyzny Π o kąt η i skierowana wzdłuż osi H' lokalnego układu współrzędnych.

Na rysunku 14 pokazane jest takie przemieszczenie dk punktu K do pozycji K<sub>1</sub>, które obserwowane lunetą teodolitu ze stanowiska C za pośrednictwem zwierciadła L - wyraża się zmianą kąta pionowego Δβ, bez zmiany kierunku poziomego, tj. przy Δα = 0. Odpowiada to śledzeniu punktu K wyłącznie przez obracanie lunety wokół osi poziomej, przy braku błędów kolimacji i inklinacji. Obrót celowej o kąt Δβ oznaczony jest przez zakreskowany wycinek CLL', który po odbiciu od zwierciadła transformuje się na wycinek LK, L'K'<sub>π</sub>. Krawędź KK'<sub>π</sub> przecięcia tego wycinka z płaszczyzną Π jest składową dl<sub>V'</sub> przemieszczenia punktu K na płaszczyźnie Π. Składowa ta, o długości

$$KK'_\pi = dl_{V'} = \Delta\beta \frac{(d_1 + d_2)}{\rho} \quad (17)$$

jest odchylona od prostej V największego spadku płaszczyzny Π o kąt η i skierowana wzdłuż osi V' lokalnego układu współrzędnych.



Rys. 15

Jeżeli przemieszczenie dk = KK<sub>1</sub>, śledzone lunetą teodolitu z punktu C za pośrednictwem zwierciadła L, wyraża się zmianami Δα ≠ 0, Δβ ≠ 0, to składowe przemieszczenia KK'<sub>π</sub> wyrażają się w lokalnym układzie współrzędnych za pomocą dl<sub>H'</sub>, dl<sub>V'</sub> wg wzorów (16), (17). Wyrażmy przemieszczenie KK<sub>1</sub> za pomocą składowych dl<sub>H</sub> i dl<sub>V</sub>, w układzie współrzędnych płaskich KVH. Zgodnie z rysunkiem 15 zachodzą związki

$$dl_H = dl_{V'} \sin \eta + dl_{H'} \sin(90 + \eta) = dl_{V'} \sin \eta + dl_{H'} \cos \eta \quad (18)$$

$$dl_V = dl_{V'} \cos \eta + dl_{H'} \cos(90 + \eta) = dl_{V'} \cos \eta - dl_{H'} \sin \eta \quad (19)$$

Podstawiając (16), (17) do (18), (19) otrzymujemy

$$dl_H = \Delta\beta \frac{(d_1 + d_2)}{\rho} \sin \eta + \Delta\alpha \frac{d_{1zr}}{d_1} \frac{(d_1 + d_2)}{\rho} \cos \eta \quad (20)$$

$$dl_V = \Delta\beta \frac{(d_1 + d_2)}{\rho} \cos \eta + \Delta\alpha \frac{d_{1zr}}{d_1} \frac{(d_1 + d_2)}{\rho} \sin \eta \quad (21)$$

Wprowadzę założenie, że składowe  $dl_H$ ,  $dl_V$  zostały zaobserwowane z zastępczego punktu (C), znajdującego się na przedłużeniu odcinka KL w odległości  $d_1 + d_2$  od punktu K, rezultatem czego są zastępcze kąty  $\overline{\Delta\alpha}$ ,  $\overline{\Delta\beta}$ . Założenie to wyrażają wzory

$$dl_H = \overline{\Delta\alpha} \rho^{-1} (d_1 + d_2) \cos \varphi_{LK} \quad (22)$$

$$dl_V = \overline{\Delta\beta} \rho^{-1} (d_1 + d_2) \quad (23)$$

gdzie  $\varphi_{LK}$  - kąt nachylenia linii LK.

Nie mierzone w rzeczywistości wartości zmian  $\overline{\Delta\alpha}$ ,  $\overline{\Delta\beta}$ , jakie odczytalibyśmy obserwując lustrzaną składową  $dl_H$  i składową  $dl_V$  przemieszczenia  $KK_1$  bezpośrednio z zastępczego punktu (C), można obliczyć według wzorów otrzymanych po podstawieniu (22) do (20) i (23) do (21)

$$\overline{\Delta\alpha} = \Delta\beta \frac{\sin \eta}{\cos \varphi_{LK}} + \Delta\alpha \frac{\cos \eta}{\cos \varphi_{LK}} \frac{d_{1zr}}{d_1} \quad (24)$$

$$\overline{\Delta\beta} = \Delta\beta \cos \eta - \Delta\alpha \sin \eta \frac{d_{1zr}}{d_1} \quad (25)$$

Różniczkową zmianę  $\overline{\Delta\alpha}$  kąta poziomego L(C)K, przy założeniu stałości punktu "obserwacji" (C) i stałości położenia lustra L wyraża wzór

$$\begin{aligned} \overline{\Delta\alpha} &= \frac{\rho \sin \sigma_{(C)K}}{(d_1 + d_2) \cos \varphi_{LK}} dx - \frac{\rho \cos \sigma_{(C)K}}{(d_1 + d_2) \cos \varphi_{LK}} dy = \\ &= \frac{\rho \sin \sigma_{LK}}{(d_1 + d_2) \cos \varphi_{LK}} dx - \frac{\rho \cos \sigma_{LK}}{(d_1 + d_2) \cos \varphi_{LK}} dy \end{aligned} \quad (26)$$

Przyrównanie (24) i (26) prowadzi do wzoru

$$\begin{aligned} & \frac{\rho \sin \sigma_{LK}}{(d_1 + d_2) \cos \varphi_{LK}} dx - \frac{\rho \cos \sigma_{LK}}{(d_1 + d_2) \cos \varphi_{LK}} dy = \\ & = \Delta\beta \frac{\sin \eta}{\cos \varphi_{LK}} + \Delta\alpha \frac{\cos \eta}{\cos \varphi_{LK}} \frac{d_{1z}}{d_1} = \overline{\Delta\alpha} \end{aligned} \quad (27)$$

Podstawienie  $\overline{\Delta\beta}$  według wzoru (25) w miejsce  $\Delta\beta$  ze wzoru (13) z części I prowadzi do wzoru (28)

$$\begin{aligned} & \frac{\rho \sin \varphi_{LK} \cos \sigma_{LK}}{(d_1 + d_2)} dx + \frac{\rho \sin \varphi_{LK} \sin \sigma_{LK}}{(d_1 + d_2)} dy - \frac{\rho \cos \varphi_{LK}}{(d_1 + d_2)} dz = \\ & = \Delta\beta \cos \eta - \Delta\alpha \frac{d_{1z}}{d_1} \sin \eta = \overline{\Delta\beta} \end{aligned} \quad (28)$$

Wzory (27), (28) umożliwiają wyznaczanie składowych  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$  przemieszczenia punktu K przy dowolnym rozmieszczeniu punktów C, L, K w przestrzeni.

Jeżeli punkty C, L, K znajdują się w płaszczyźnie poziomej, równania (27), (28) sprowadzają się do postaci równań (7), (13).

#### Wyznaczanie kąta $\eta$

Użycie wzorów (27), (28) wymaga znajomości kątów  $\eta$  skrętów lokalnych układów współrzędnych. Kąty te można wyznaczyć analitycznie, w funkcji współrzędnych X, Y, Z punktów C, L, K, lub na podstawie pomiaru.

#### Analityczne wyznaczenie kąta $\eta$

Analityczne wyznaczenie kąta  $\eta$  odchylenia osi V' od kierunku osi V wymaga wykonania kolejno następujących zadań z geometrii analitycznej w przestrzeni:

1. napisać równanie płaszczyzny zwierciadła  $\xi$ , przechodzącej przez punkt L, normalna do której jest dwusieczną kąta CLK,
2. napisać równanie krawędzi  $k_1$  przecięcia płaszczyzny  $\xi$  płaszczyzną pionową zawierającą CL,
3. napisać równanie płaszczyzny  $\gamma_1$ , zawierającej krawędź  $k_1$  i prostą LK,
4. obliczyć kąt  $\eta$  między płaszczyzną  $\gamma_1$  a płaszczyzną pionową zawierającą LK.

Zadania te rozwiązałem i wyraziłem w formie programu komputerowego,

który oblicza na podstawie współrzędnych punktów C, L i K wartość  $\cos\eta$ .

Analityczne wyznaczenie kąta  $90^\circ + \eta$  odchylenia osi  $H'$  od kierunku osi  $V$  wiąże się z koniecznością wykonania kolejno następujących zadań z geometrii analitycznej w przestrzeni:

1. napisać równanie płaszczyzny  $\xi$  zwierciadła,
2. znaleźć krawędź  $k_2$  przecięcia płaszczyzny  $\xi$  płaszczyzną dla której prosta CL jest prostą największego spadku,
3. napisać równanie płaszczyzny  $\gamma_2$ , zawierającej krawędź  $k_2$  i prostą LK,
4. obliczyć kąt  $90^\circ + \eta$  między płaszczyzną  $\gamma_2$  a płaszczyzną pionową zawierającą LK.

Zadania te rozwiązałem dla kontroli i wyraziłem w formie programu komputerowego, który oblicza wartość  $\sin\eta$  na podstawie danych współrzędnych X, Y, Z punktów L, C, i K.

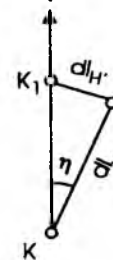
W przypadku braku możliwości wykorzystania oprogramowania, obliczenia te można prowadzić ręcznie, przy użyciu kalkulatora, jednak są to czynności długotrwałe i żmudne. Niedogodności tych unikamy, wyznaczając kąt  $\eta$  metodą pomiarową.

#### Pomiarowe wyznaczanie kąta $\eta$

W miejscu punktu kontrolowanego należy umieścić sygnał w postaci pionowo ustawionej świecy z zaznaczonymi punktami celowania, w znanej wzajemnej odległości pionowej. Środkiem krzyża lunety, za pośrednictwem zwierciadła, należy nacelować na niższy w rzeczywistości znak K (w tym celu oba znaki muszą być wyraźnie rozróżnialne), wykonując przy tym odczyty  $\alpha$ ,  $\beta$  i zaznaczając jednocześnie na szkicu, w której ćwiartce układu krzyża kresek lunety leży drugi (realnie wyższy) znak pomiarowy  $K_1$ . Następnie należy nacelować na drugi znak pomiarowy  $K_1$  i wykonać odczyty  $\alpha'$ ,  $\beta'$  położenia kręgów teodolitu.

Kąt  $\eta$  obliczamy korzystając z zaobserwowanych różnic  $\Delta\alpha$ ,  $\Delta\beta$  oraz odległości  $d_{1zr}$ ,  $d_1$ , obliczonych ze współrzędnych punktów C, L lub pomierzonych. Zgodnie z rysunkiem 16

$$\operatorname{tg}\eta = \frac{dl_{H'}}{dl_{V'}} = \frac{\Delta\alpha d_{1zr}}{\Delta\beta d_1} \quad (29)$$



Rys. 16

Znając różnice wysokości  $dz$  obu znaków oraz kąt  $\varphi$  nachylenia odcinka LK, możemy skontrolować poprawność wyznaczenia danych do obliczenia  $\eta$ , bowiem zgodnie z wzorem (9), cz.I, w przypadku obserwacji przemieszczenia tylko pionowego, powinien być spełniony warunek

$$dz_1 \cos \varphi = dz \cos \varphi = \sqrt{dl_{H'}^2 + dl_{V'}^2} \quad (30)$$

Możliwa do osiągnięcia dokładność wyznaczenia kąta  $\eta$  zależy w metodzie analitycznej od błędów wyznaczenia współrzędnych i od wzajemnego rozmieszczenia punktów L, K, C. Wyrażenie tej dokładności wzorem jest niezmiernie skomplikowane, jednak można się o niej przekonać praktycznie, obliczając wartości kąta  $\eta$  przy zmieniających się wartościach współrzędnych, co nie jest pracochłonne w warunkach dysponowania programem komputerowym na obliczanie  $\eta$ . Taki sposób przybliżonej oceny dokładności pozwala także, dla określonej konfiguracji punktów, obliczyć zmianę wartości kąta  $\eta$  wynikającą ze zmiany kierunku osi celowej do obrazu w lustrze punktu kontrolowanego przed i po przemieszczeniu, i w rezultacie dokonanie oceny poprawności użycia średniej wartości kąta  $\eta$  do obliczenia przemieszczeń.

Dokładność wyznaczenia kąta  $\eta$  z pomiarów zależy od względnej dokładności pomiaru składowych  $dl_H$ ,  $dl_V$ , co wskazuje na potrzebę stosowania pionowych świec z dwoma znakami znajdującymi się niezbyt blisko siebie. Jednocześnie odległość tych znaków ogranicza wspomnianą zmienność kąta  $\eta$ , występująca wraz ze zmianą współrzędnych punktu K. Optymalna odległość między znakami na pionowej świecy równa jest maksymalnej wartości przemieszczenia, możliwej do pomiaru przy wykorzystaniu stosowanego zwierciadła, to jest około 5-10 cm.

### Wyznaczanie przemieszczeń metodą kombinowaną

Określenie składowych  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$  przemieszczenia punktu kontrolowanego z pozycji K do  $K_1$  jest możliwe w wyniku rozwiązania układu zawierającego oprócz równań różnic  $\overline{\Delta\alpha}$ ,  $\overline{\Delta\beta}$ , wynikających z obserwacji przemieszczenia za pośrednictwem luster, także równań zmian kątów poziomych i pionowych pod wpływem przemieszczenia obserwowanego bezpośrednio przez teodolit ze stanowiska C.

Przyrosty  $\Delta\alpha, \Delta\beta$  mierzone bezpośrednio zapisujemy w liniowej funkcji składowych  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$  przemieszczenia  $KK_1$

$$\frac{\rho \sin \sigma_{CK}}{d_{CK} \cos \varphi_{CK}} dx - \frac{\rho \cos \sigma_{CK}}{d_{CK} \cos \varphi_{CK}} dy = -\Delta\alpha \quad (31)$$

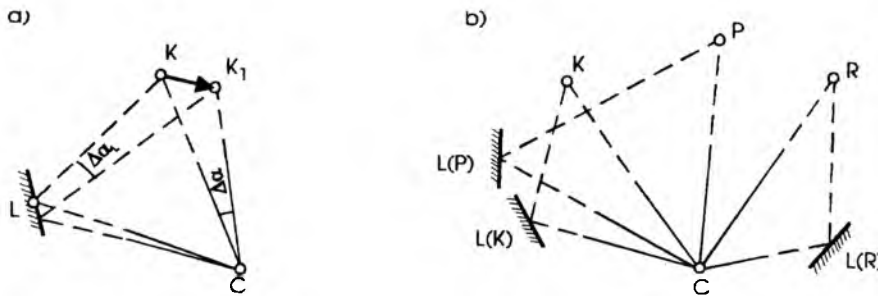
$$\frac{\rho \sin \varphi_{CK} \cos \sigma_{CK}}{d_{CK}} dx + \frac{\rho \sin \varphi_{CK} \sin \sigma_{CK}}{d_{CK}} dy - \frac{\rho \cos \sigma_{CK}}{d_{CK}} dz = \Delta\beta \quad (32)$$



Jeżeli układ równań typu (27), (28), (31), (32) jest nadmiarowy wówczas składowe przemieszczenia uzyskujemy w wyniku jego wyrównania, np. według dyrektywy najmniejszych kwadratów

$$\Sigma (v_{\Delta\alpha}^-)^2 + \Sigma (v_{\Delta\beta}^-)^2 + \Sigma (v_{\Delta\alpha}^+)^2 + \Sigma (v_{\Delta\beta}^+)^2 = \min$$

Na rysunku 17a pokazano przykładowo szkic obserwacji do wyznaczenia przemieszczeń metodą kombinowaną.



Rys. 17

W przypadku, gdy konieczne jest wyznaczanie przemieszczeń większej liczby punktów rozmieszczonych na powierzchni kontrolowanego obiektu - K, P, R, mierzonych ze stanowiska C, najkorzystniejsze jest stosowanie kombinowanego sposobu wyznaczania przemieszczeń w wariancie: jedno stanowisko instrumentu i po jednym lustrze do wyznaczania przemieszczeń każdego punktu, jak to pokazuje przykładowo rysunek 17b. Przemieszczenia każdego punktu K, P, R obserwuje się wówczas przy użyciu celowania bezpośredniego oraz, dodatkowo, przez celowanie za pośrednictwem zwierciadła. W wariancie takim uzyskujemy efekt w postaci pracy obserwatora wyłącznie na jednym stanowisku w punkcie C. Przemieszczenie każdego punktu wyznacza się tu z jedną obserwacją nadliczbową. Gdy pragniemy mieć silniejsze układy wyznaczające oraz dodatkowe kontrole, możemy stosować wariant wzmocniony, polegający np. na obserwacji punktu kontrolowanego bezpośrednio oraz za pośrednictwem dwóch zwierciadeł płaskich umieszczonych w różnych miejscach, co daje możliwość uzyskania trzech obserwacji nadliczbowych.

Wymaga podkreślenia, że obserwowana za pośrednictwem lustra, pod kątem  $\Delta\alpha$  (jako różnicy kierunku poziomego do punktu kontrolowanego po przemieszczeniu i przed przemieszczeniem) składowa pozioma  $dl_H$ , ma w rzeczywistości, zgodnie ze zjawiskiem lustrzanego odbicia, znak przeciwny niż wynikający ze wzoru (18) i (22). W rezultacie wzór (27) i konsekwentnie wzór (31) opisują przyrosty kierunków poziomych przy celowaniu odpowiednio z punktu pozornego (C) i rzeczywistego stanowiska teodolitu C na lustrzane odbicia pozycji K i  $K_1$  punktu kontrolowanego. Jeżeli dodatkowo kierunki pionowe do punktu kontrolowanego przed i po przemieszczeniu obserwowane są w systemie zenitalnym teodolitu, w którym opis koła pionowego jest przeciwny

do zwrotu osi Z układu współrzędnych, to dla uzyskania rzeczywistych składowych przemieszczenia należy otrzymane z rozwiązania układu równań typu (27), (28), (31), (32) niewiadome pomnożyć przez minus jeden.

### Oprogramowanie

Przetwarzanie danych pomiarowych dokonywane jest przy użyciu programów komputerowych.\*)

Pierwszy program służy do zestawiania liniowych równań poprawek wielkości obserwowanych  $\Delta\alpha$ ,  $\Delta\beta$ , wyrażanych w funkcji składowych przemieszczenia  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$  punktu K; przyrosty współrzędnych X,Y,Z punktów C i L przyjęte są za zerowe. Dane do obliczeń parametrów równań poprawek stanowią:

1. współrzędne punktów C, L i K,
2. wartości kątów  $\eta$ ,
3. pomierzone różnice  $\Delta\alpha$ ,  $\Delta\beta$  oraz informacje o ich błędach,
4. informacje na temat, czy wartości  $\Delta\alpha$ ,  $\Delta\beta$  wyznaczone są z obserwacji bezpośrednich, czy za pośrednictwem lustra.

W wyniku wyrównania układu równań program podaje następujące informacje:

1. wartości składowych przemieszczenia  $dx$ ,  $dy$ ;  $dz$ ,
2. poprawki zrównoważone  $v/m$  ( $\bar{v}/\bar{m}$ ) i poprawki niezrównoważone  $v$  ( $\bar{v}$ ),
3. błąd średni po wyrównaniu  $m_0$ ,
4. tablicę pierwiastka kowariancji.

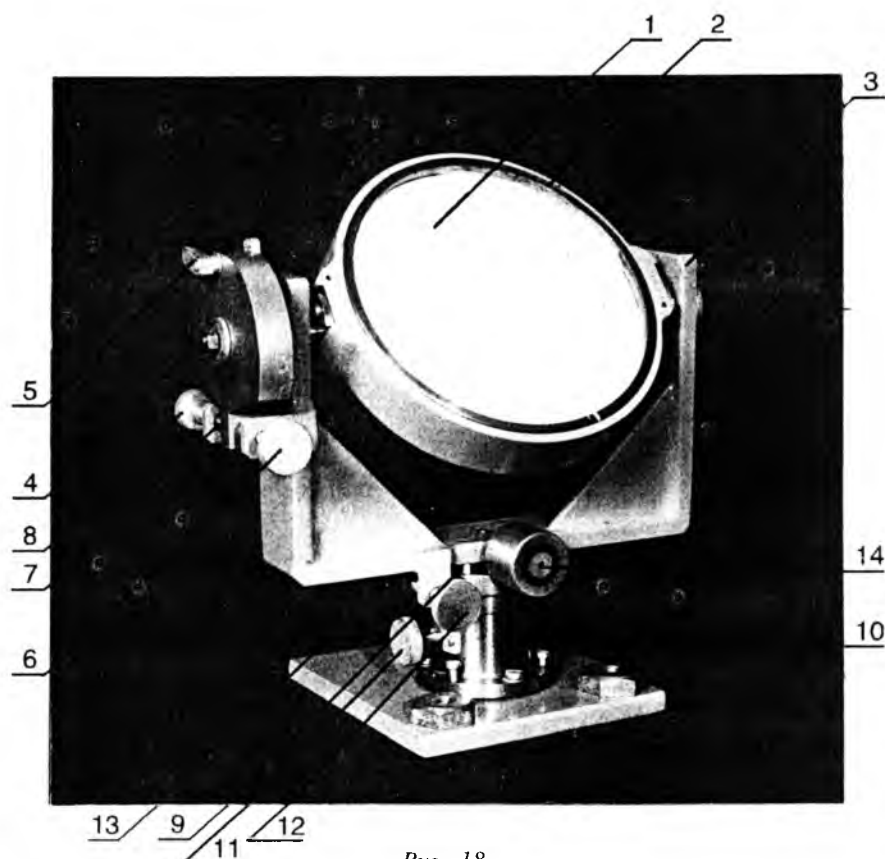
Drugi program służy do obliczania wartości  $\sin\eta$ ,  $\cos\eta$  na podstawie danych współrzędnych punktów C, L i K.

### Oprzysiężowanie - lustro i elementy ustawcze

Lustro płaskie, przedstawione na rysunku 18, wykonane jest ze szkła optycznego w dwu wariantach - z zewnętrzną lub wewnętrzną powierzchnią odbłaskową. Lustro (1) o średnicy  $\Phi$  160 mm osadzone jest w metalowej oprawie (2) obracającej się w ramie (3) wokół osi poziomej (4) w granicach 0-360°. Ruch szybki jest możliwy przy zwolnionym zacisku (5), natomiast ruch leniwy, po dokręceniu zacisku (5) do oporu, dokonuje się pokrętką (6) z wykorzystaniem sprężyny odpychającej (7). Po ustawieniu lustra w wymaganym położeniu utrwała się je przez dokręcenie do oporu pokrętki (8).

---

\*) W opracowaniu programów uczestniczył dr inż. Lucjan Siporski, któremu dziękuję za okazaną pomoc.



Rys. 18

Rama (3) osadzona jest na osi (9) ukształtowanej identycznie jak oś teodolitu firmy Zeiss Jena. Lustro można więc ustawić na spodarce Zeiss na statywie, bądź też w tulei (10), której otwór ukształtowany jest jak wewnętrzna powierzchnia ustawcza spodarki Zeiss Jena. Tuleja (10) może być przytwierdzona do płyty stalowej (rys. 19) lub do wspornika (rys. 20), dzięki czemu lustro może być umocowane na ścianie, stropie lub suficie.

Lustro może być obracane wokół osi tulei w granicach 0-360°. Wstępne zamocowanie w tulei następuje przy użyciu pokrętki dociskowej (11). Ruch leniwy lustra wokół osi tulei wywołuje się pokrętką (12) ze sprężyną odpychającą. Ostateczne zamocowanie lustra w tulei następuje przy użyciu pokrętki dociskowej (13) znajdującej się naprzeciw pokrętki (12). Na ramie (3) znajduje się celownik (14) służący jako cel orientacyjny (punkt B, według rysunku 4, cz. I).

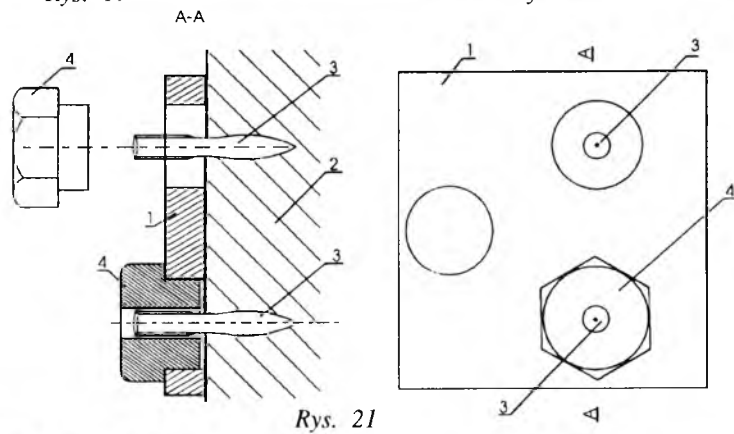
Płyta (rys. 19) lub płyta wspornika (rys. 20) są umocowane trwale na stropie, ścianie lub suficie za pomocą trzech gwintowanych kołków, wstrzeliwanych za pomocą osadzaka firmy Hilti, przez trzy otwory w płycie. Sposób łączenia płyty lub wspornika z budowlą ilustruje rysunek 21. Zgodnie z tym rysunkiem, po przyłożeniu płyty (1) do powierzchni budowli (2) w wymaganym miejscu,



Rys. 19



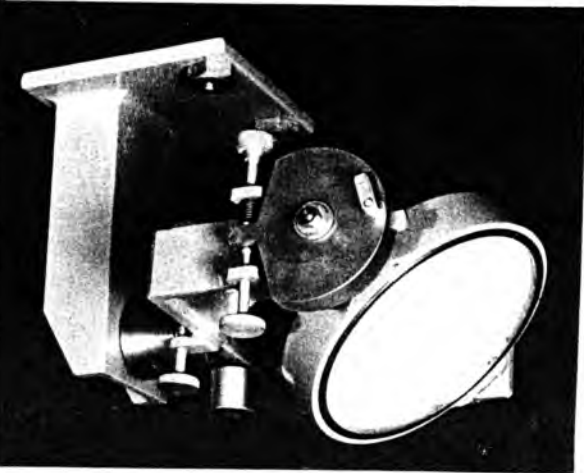
Rys. 20



Rys. 21



Rys. 22 a)



Rys. 22 b)

wstrzeliwuje się przez otwór w płycie kołek (3), po czym na gwint kołka nakręca się do oporu nakrętkę dociskową (4). Następnie wstrzeliwuje się drugi kołek przez drugi otwór w płycie i nakręca nań drugą nakrętkę dociskową; czynność tę powtarza się dla umocowania płyty trzecim kołkiem. Otwory w płycie mają średnice nieznacznie większe od średnicy lufy osadzaka.

Rysunek 22 pokazuje lustro na wsporniku przytwierdzonym do ściany (a) i do stropu (b).

### Oznaczanie punktów kontrolowanych

Jak już wspomniałem, metoda przeznaczona jest do wyznaczania przemieszczeń punktów trudno dostępnych. W skrajnie niekorzystnych przypadkach może więc występować całkowity brak dostępu do miejsc punktów kontrolowanych i niemożliwość zastabilizowania znaków. Może to występować np. na bardzo stromych urwiskach skalnych, gdzie powierzchnia jest tak mało stabilna, że nie należy jej naruszać. Wówczas oczywiście jako cele należy przyjmować naturalne, dobrze widoczne szczegóły powierzchni na obiekcie badań. Zgodnie z zasadą stosowaną przy pomiarach przemieszczeń [6], która legła u podstaw używania celowników dwupłaszczyznowych, w omawianej metodzie można przyjmować jako cele do obserwacji przez poszczególne lustra, bliskie sobie i nieruchome względem siebie różne szczegóły powierzchni badanego obiektu.

W przypadku, gdy istnieje dostęp do kontrolowanych miejsc powierzchni obiektu, można na niej stabilizować typowe celowniki jedno- i dwupłaszczyznowe [5]. Mogą one być przytwierdzone do badanego obiektu drogą betonowania, spawania lub wstrzeliwania.

### Ustawianie teodolitu i luster oraz orientowanie luster

W celu wyznaczenia przemieszczeń określonego punktu K z wymaganą dokładnością, należy odpowiednio rozmieścić stanowisko C teodolitu i stanowiska L luster. Pamiętajć przy tym należy, że przy użyciu określonego lustra wyznacza się składową przemieszczenia punktu K w płaszczyźnie prostopadłej do kierunku LK. Wynika z tego, że lustra powinny być rozmieszczone w taki sposób, aby kierunki LK przecinały się pod kątami w granicach  $30^\circ \div 150^\circ$ , zarówno w płaszczyźnie poziomej jak i płaszczyznach pionowych.

Po wstępnym wybraniu stanowisk teodolitu i luster, z uwzględnieniem możliwości miejscowych i ew. projektu rozbudowy obiektu (zasłanianie celowych), dobrze jest przed dokonaniem instalacji wyznaczyć współrzędne przybliżone tych punktów, ułożyć tablicę współczynników równań poprawek, obliczyć tablicę kowariancyjną i przeprowadzić wstępną analizę dokładności wyznaczenia przemieszczeń, przy założonych błędach obserwacji. Po uzyskaniu

na tej drodze odpowiednich wyników należy w projektowanych miejscach zainstalować płyty (rys.19) lub wsporniki (rys. 20) luster oraz płytę centrującą stanowiska teodolitu [5], [6]. Przy krótkotrwałych badaniach teodolit i lustra mogą być ustawione na statywach.

Po ustawieniu luster na spodarkach lub w tulejach należy je zorientować tak, aby ze stanowiska teodolitu był przez nie widoczny punkt K. Jest to czynność łatwa w sieci poziomej, natomiast dosyć trudna w sieci przestrzennej. Przy orientowaniu najlepiej posługiwać się "zajęczkiem" rzucanym ze stanowiska teodolitu. W tym celu w miejscu teodolitu należy ustawić laser, i skierować emitowaną przez niego wiązkę światła na orientowane lustro. Następnie lustro należy obracać wokół obu osi, doprowadzając do pokrycia się śladu wiązki światła laserowego z celownikiem umieszczonym w punkcie K. Osiągniętą pozycję lustra należy utrwalić pokrętkami dociskowymi. Posługiwanie się laserem jest korzystne w porze nocnej lub w ciemnych pomieszczeniach, natomiast przy dziennym oświetleniu laser może być użyty do orientowania luster tylko przy niedużych odległościach. W związku z tym orientowanie luster w ciągu dnia może być dokonywane za pomocą dodatkowego lustra ustawionego w miejscu teodolitu i zorientowanego tak, aby odbite w nim promienie słońca kierować na orientowane lustro. Dalej postępujemy tak jak przy zastosowaniu lasera. W dni pochmurne orientowanie lustra można wykonać wykorzystując silny reflektor skierowany na lustro pomocnicze ustawione na stanowisku teodolitu lub reflektor ustawiony na stanowisku teodolitu skierowany na orientowane lustro.

### **Prace eksperymentalne i ilustracje zastosowanych w eksperymentach konstrukcji przestrzennych**

Po wyprowadzeniu wzorów i opracowaniu programów umożliwiających wyznaczenie przestrzennych przemieszczeń punktów w sieciach przestrzennych przeprowadziłem eksperymenty służące ocenie poprawności praktycznego działania wzorów i programów, oraz ocenie dokładności wyznaczenia składowych przemieszczeń w układach przestrzennych. Zestawienie wyników końcowych podane jest w tablicy 2.

#### **Eksperyment 9**

Eksperyment ten posłużył do praktycznego sprawdzenia zależności (18),(19). W tym celu wykonałem kolejne czynności. W miejscu punktu C ustawiłem teodolit Wild T2 z okularem laserowym GLO i nasadką anamorfotyczną GL2-NA [7], zaś w miejscu punktu K ustawiłem drugi teodolit z nałożonym na oprawę obiektywu płaskim ekranem, prostopadłym do osi celowej, i wycelowałem lunetą tego teodolitu na środek lustra ustawionego w punkcie L. Tym sposobem płaski ekran zajął pozycję płaszczyzny  $\Pi$  według rysunków 13, 14. Na ekranie tym oznaczyłem układ współrzędnych K, H, V, którego oś H usytuowałem poziomo. Następnie nasadkę anamorfotyczną obróciłem na

oprawy lunety teodolitu w punkcie C do takiej pozycji, w której emitowana wiązka światła jest rozwinięta w płaszczyznę pionową. Po odbiciu od lustra wiązka ta utworzyła na ekranie ślad, wzdłuż którego narysowałem na ekranie oś V'. Następnie obróciłem nasadkę anamorfotyczną wokół oprawy obiektywu o kąt 90°, otrzymując płaską wiązkę światła laserowego, która po odbiciu od lustra utworzyła na ekranie ślad, wzdłuż którego narysowałem na ekranie oś H'. Wyznaczenie osi V', H' wykonałem także drugim sposobem, poprzez nacelowanie środkiem krzyża kresek teodolitu ustawionego w punkcie C na przecięcie osi H, V na ekranie - za pośrednictwem lustra L, i wtyczenie ostrza ołówka przesuwanego przez pomocnika po ekranie, na końcu kreski pionowej i poziomej krzyża kresek teodolitu. Wyznaczone tym sposobem, z celowania w dwóch położeniach lunety, osie H', V' pokryły się z osiami wyznaczonymi przy użyciu lasera.

Kąty  $\eta$  między osiami V i V' oraz H i H' pomierzyłem na ekranie w sposób bezpośredni a następnie wyznaczyłem je analitycznie, na podstawie znanych współrzędnych punktów C, L i K. Uzyskałem wysoką zgodność wyników potwierdzającą poprawność obu sposobów wyznaczenia.

Eksperymenty 10, 11, 12, 13, 14 służyły do oceniania możliwości dokładnościowych metody, przy różnych układach przestrzennych punktów C, L i K. W eksperymencie 10 wyznaczyłem przemieszczenie przy użyciu dwóch lusterek. W eksperymencie 11, 12, 13 zastosowałem metodę kombinowaną, to jest obserwacje z wykorzystaniem lusterek i obserwacje bezpośrednie ze stanowiska C, zaś w eksperymencie 14, przy wykorzystaniu dwóch lusterek i dwóch celowych bezpośrednich ze stanowiska C i pomocniczego stanowiska C'. Pomiarów, których wyniki posłużyły do obliczeń, wykonane zostały w jednej serii, przy zastosowaniu oznaczeń punktu K<sub>1</sub> i kolejnych jego pozycji K<sub>2</sub>, K<sub>3</sub>, K<sub>4</sub> za pomocą celowników przytwierdzonych na stałe do drewnianej beleczki, układanej w poszczególnych eksperymencie w różnych położeniach w stosunku do lusterek i teodolitu (rys. 23a).

Celowniki te zostały przytwierdzone do beleczki tak, że punkty celowania K<sub>1</sub>, K<sub>2</sub>, K<sub>3</sub>, K<sub>4</sub> znajdują się w jednej płaszczyźnie, a ich wzajemne położenie wyznaczone jest przez odległości "prawdziwe" podane na rysunku 23b), uzyskane z pomiaru suwmiarką, z błędem średnim 0.05mm. Dzięki temu w poszczególnych eksperymencie, poza oceną dokładności polegającą na obliczeniu błędów wektorów przemieszczeń dk

$$m_{dk} = \sqrt{m_{dx}^2 + m_{dy}^2 + m_{dz}^2}$$

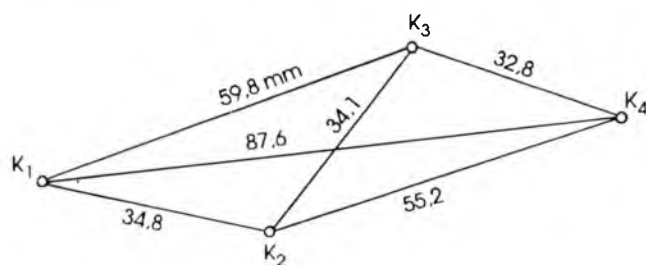
gdzie  $m_{dx}$ ,  $m_{dy}$ ,  $m_{dz}$  obliczane są jako błędy niewiadomych po wyrównaniu, obliczałem również błędy prawdziwe

$$\varepsilon = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} - \overline{dk}$$

gdzie  $\overline{dk}$  - długość wektora zmierzona suwmiarką, przyjmowana jest jako wartość prawdziwa.



Rys. 23 a)



Rys. 23 b)

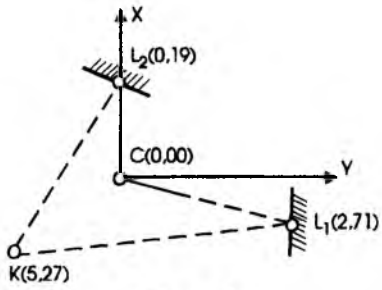
#### Eksperyment 10

Szkic sieci zastosowanej w eksperymencie 10 pokazuje rysunek 24 (na rysunkach 24 - 29 wysokości położenia punktów podane są w metrach). Na podstawie zaobserwowanych kątów  $\Delta\alpha$ ,  $\Delta\beta$  obliczyłem składowe  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$  przemieszczeń i długości wektorów przemieszczeń między oznaczonymi punktami: 1-2, 1-3, 1-4, 2-3, 2-4, 3-4. Przy stosunkowo krótkich celowych i niedużej różnicy wysokości punktu K w stosunku do C,  $L_1$ ,  $L_2$ , otrzymałem średnią wartość  $m \cong 8^{\circ}$  (z pojedynczej serii) oraz błędy prawdziwe przemieszczeń nie przekraczające wartości 0.6 mm, na ogół mniejsze od obliczonych błędów średnich. Przemieszczenia zostały wyznaczone z jedną obserwacją nadliczbową.

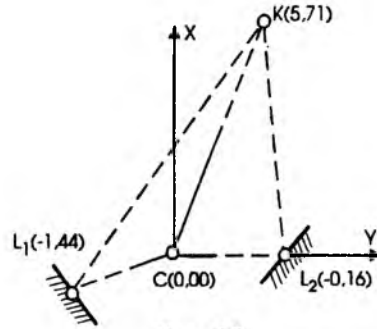
#### Eksperyment 11

Szkic sieci zastosowanej w eksperymencie 11 pokazuje rysunek 25. Sieć ta, o rozmieszczeniu punktów podobnym jak w eksperymencie 10, zawiera dodatkowy element wzmacniający w postaci bezpośredniej celowej z punktu C na K, dzięki czemu wyznaczenie odbywa się z trzema obserwacjami nadliczbowymi. Konstrukcja sieci nie jest jednak dużo silniejsza, gdyż kąty między celowymi wcinającymi są małe. Również w tym przypadku błędy prawdziwe wektorów przemieszczeń okazały się mniejsze od obliczonych błędów średnich.

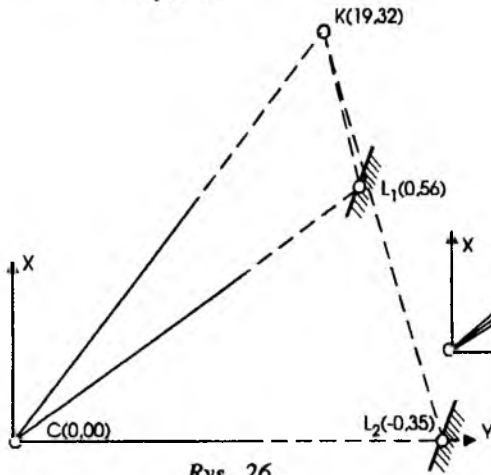




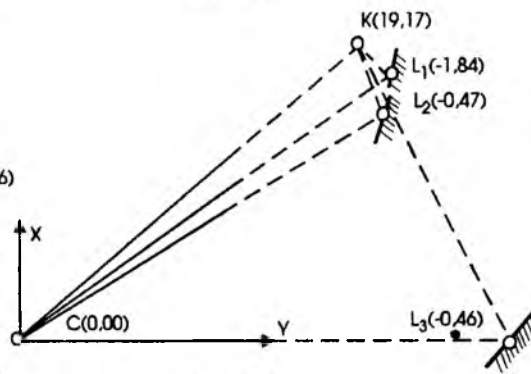
Rys. 24



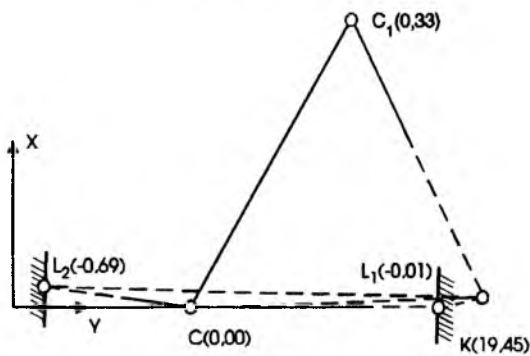
Rys. 25



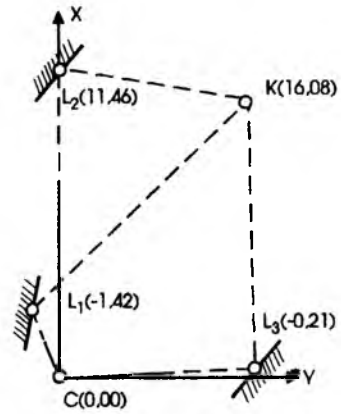
Rys. 26



Rys. 27

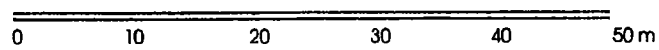


Rys. 28



Rys. 29

Podziałka



### Eksperyment 12

Szkic sieci zastosowanej w eksperymencie 12 pokazuje rys. 26. Rozmiary sieci są większe niż w eksperymentach 10 i 11, znacznie większa jest też różnica wysokości położenia punktu K w stosunku do C,  $L_1$ ,  $L_2$ . Lustra ustawione zostały w przybliżeniu na jednym kierunku, jednak nachylenia celowych wcinających przez poszczególne lustra znacznie się różnią, co przy przestrzennym charakterze sieci umożliwia dobrą wyznaczalność. Dla wzmocnienia i kontroli sieci zastosowałem jednak również celowanie bezpośrednie. Uzyskałem dosyć duże błędy obserwacji po wyrównaniu (średnie  $m_0 = 16^{\circ}$ ), z czego wynikły duże błędy średnie wyznaczenia wektorów przemieszczeń (maksimum 3.4 mm). Jednak błędy prawdziwe wektorów okazały się znacznie mniejsze (maksimum 1.4 mm). Duże błędy pomiarów przypisuję tu stosunkowo małemu jeszcze doświadczeniu w obserwowaniu, za pośrednictwem lusterek, wysoko położonego celu.

### Eksperyment 13

Szkic sieci zastosowanej w eksperymencie 13 pokazuje rysunek 27. W eksperymencie tym zastosowałem celowanie bezpośrednie i celowanie za pośrednictwem trzech lusterek, co umożliwiło wyznaczenie przemieszczeń z pięcioma obserwacjami nadliczbowymi. W eksperymencie tym ustawiłem lustra  $L_1$ ,  $L_2$  blisko siebie i w takich położeniach w stosunku do punktu K aby celowe wcinające były bardzo strome ( $\varphi_{L_1K} = 87^{\circ}$ ). Obydwa te lustra umożliwiają dobre wyznaczenie składowych  $dx, dy$ , natomiast praktycznie nie są przydatne do wyznaczenia składowej  $dz$ , którą osiąga się tu głównie przez obserwacje bezpośrednie i obserwacje przy użyciu lustra  $L_3$ . Otrzymałem średnią wartość  $m_0 = 8^{\circ}$  oraz małe wartości błędów średnich wyznaczenia wektorów przemieszczeń (maksymalnie 1.07 mm) i błędów prawdziwych wektorów (maksimum 0.47 mm).

### Eksperyment 14

Szkic sieci zastosowanej w eksperymencie 14 przedstawia rysunek 28. W eksperymencie tym zastosowałem celowanie bezpośrednie z dwóch stanowisk C i  $C_1$  na punkt K oraz celowanie pośrednie przez lustra  $L_1$ ,  $L_2$ , dzięki czemu wyznaczenie przemieszczeń następuje z pięcioma obserwacjami nadliczbowymi. Punkt C oraz  $L_1$ ,  $L_2$ , K znajdują się blisko jednej płaszczyzny pionowej; punkty  $L_1$ ,  $L_2$  znajdują się po przeciwnych stronach względem punktu C. Otrzymałem średnią wartość  $m_0 = 6^{\circ}$ , maksymalny błąd średni wyznaczenia wektora przemieszczenia - 0.64 mm, maksymalny błąd prawdziwy wektora przemieszczenia - 0.39 mm.

### Eksperyment 15

Eksperyment ten był praktyczną, próbną realizacją pomiarowego wyznaczenia wartości kąta  $\eta$ . W eksperymencie tym, korzystając z pionowej świecy z zaznaczonymi dwoma punktami celowania, we wzajemnej odległości 81 mm,

zmierzyłem kąty  $\Delta\alpha$ ,  $\Delta\beta$  przy wykorzystaniu trzech lusterek rozmieszczonych jak na rysunku 29. Wielkości pomierzone posłużyły do obliczenia wartości kątów  $\eta$  wg. wzoru (29), wraz z kontrolą wg. wzoru (30). Wartości kątów  $\eta$  dla poszczególnych lusterek obliczyłem także analitycznie, z wykorzystaniem programu komputerowego LUSTRA. Otrzymane wartości  $\eta$  zawiera zestawienie.

Tablica 1

Nr lustra	$\eta$ z pomiaru	$\eta$ z obliczenia	$\Delta\eta$
L <sub>1</sub>	72°96	68°59	4°37
L <sub>2</sub>	9°31	8°24	1°07
L <sub>3</sub>	41°45	40°40	1°05

Tablica 2

Epoka	Przemieszczenie dk pomierzone prawdziwe		$\varepsilon$ [mm]	$m_0$ [cc]	$m_{dk}$ [mm]	
	pomierzone	prawdziwe				
1-2	34.22	34.8	-0.58	7.95	0.77	Eksp 10
1-3	60.41	59.8	0.61	5.51	0.53	
1-4	88.00	87.6	0.40	14.68	1.42	
2-3	34.34	34.1	0.24	3.50	0.34	
2-4	55.67	55.2	0.47	6.52	0.63	
3-4	32.23	32.8	-0.57	9.71	0.94	
1-2	35.06	34.8	0.26	2.69	0.27	Eksp 11
1-3	60.54	59.8	0.74	13.45	1.34	
2-3	33.92	34.1	-0.18	11.32	1.13	
1-2	34.39	34.8	-0.41	12.06	1.45	Eksp 12
1-3	58.81	59.8	-0.99	24.60	2.95	
1-4	86.23	87.6	-1.37	28.34	3.40	
2-3	33.23	34.1	-0.87	12.35	1.48	
2-4	54.15	55.4	-1.25	16.75	2.01	
3-4	31.86	32.8	-0.94	3.29	0.39	
1-2	34.96	34.8	0.16	5.25	0.43	Eksp 13
1-3	59.92	59.8	0.12	8.71	0.71	
1-4	87.91	87.6	0.31	6.41	0.53	
2-3	33.63	34.1	-0.47	10.23	0.84	
2-4	55.00	55.2	-0.20	5.53	0.45	
3-4	32.55	32.8	-0.25	13.07	1.07	
1-2	34.74	34.8	-0.06	3.60	0.28	Eksp 14
1-3	59.59	59.8	-0.21	5.82	0.46	
1-4	87.64	87.6	0.04	6.69	0.53	
2-3	33.71	34.1	-0.39	6.79	0.54	
2-4	55.09	55.2	-0.11	8.13	0.64	
3-4	32.47	32.8	-0.33	3.87	0.31	
	81.15	81.0	0.15	8.06	0.79	Eksp 15

Okazało się, że wartości  $\eta$  uzyskane obydwojma sposobami przy wykorzystaniu lusterek  $L_2, L_3$  mają dobrą zgodność, natomiast wartości  $\eta$  uzyskane przy wykorzystaniu lustra  $L_1$  różnią się nadmiernie. Jest to wynikiem zbyt bliskiego umieszczenia lustra  $L_1$  w stosunku do punktu C. Wynika z tego wniosek, że przy rozmieszczeniu punktów C, L, K należy dbać, aby stosunek  $d_1 : d_2$  nie przyjmował zbyt małych wartości; najkorzystniej jest gdy  $d_1 : d_2$  jest większe od jedności.

W eksperymencie tym obliczyłem też przemieszczenie (odległość między punktami celowania), korzystając z obserwacji dokonanych za pośrednictwem lusterek  $L_2, L_3$ ; wyniki podałem w zestawieniu (tablica 2).

#### LITERATURA

- [1] Czernski Z.: *Optyka geometryczna*. Warszawa: Komisja Wydawnicza Tow. Bratniej Pomocy Studentów PW 1948
- [2] Hausbrandt St.: *Rachunki geodezyjne*. Warszawa: PPWK 1953
- [3] Janusz J.: *Metoda wyznaczania przemieszczeń punktów z wykorzystaniem odbić zwierciadlanych*. Cz. I. Prace IGiK 1993 T.40 nr 1(88)
- [4] Janusz J.: *A method of displacements determination with application of mirror reflection*. 2nd Conference on Optical 3-D Measurement Techniques. Zurich, 4-7.10.1993
- [5] *Katalog znaków i urządzeń pomiarowo-kontrolnych do pomiarów przemieszczeń i odkształceń*. Warszawa: IGiK 1973/4
- [6] Lazzarini T.: *Geodezyjne pomiary przemieszczeń budowli*. Warszawa 1977
- [7] Pachuta St.: *Instrumentoznawstwo geodezyjne - zastosowanie techniki laserowej w geodezji*. Warszawa: WAT 1980

Recenzował: prof.dr hab.inż. Adam Żurowski

Przyjęto do opublikowania w październiku 1993 r.

JERZY JANUSZ

#### A METHOD OF DISPLACEMENT DETERMINATION WITH APPLICATION OF MIRROR REFLECTIONS

#### S u m m a r y

The work presents method of determination of spatial displacements of points, using theodolite and reflections from flat mirrors. Horizontal displacements are determined through differences of horizontal directions measured with theodolite, aiming with vertical hair at image of point reflected in a mirror before and after displacement. Vertical component of displacement is determined through measurements of differences of vertical

angles, aiming with horizontal hair at image of point reflected in a mirror before and after displacement. In the 2nd part the author derived generalized formulas, which describe  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$  components of displacement as a function of the observed differences of horizontal directions  $\Delta\alpha$  and vertical angle  $\Delta\beta$ . In these formulas coordination system axis rotation  $\eta$ , caused by inclination of sighting line between theodolite and mirror, is taken into account.

Combined method of displacement determination is presented; in this method  $\Delta\alpha$ ,  $\Delta\beta$  data provided by theodolite aimed at moving point reflected in the mirror and also  $\Delta\alpha$ ,  $\Delta\beta$  readings of theodolite aimed directly at controlled point are utilized. Examples and results of displacement determination for any design of points C, L, K have been presented. Results of experimental measurements revealed possibilities of determining these displacements with the mean error  $\pm 1 \div 1,5$  mm for about 100 m distance between theodolite, mirror and the controlled point. The method is prepared for measurements performed at the conditions of limited visibility and for hardly accessible points.

Translation: Zbigniew Bochenek, Jerzy Janusz

*Ежи Януш*

#### МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ СМЕЩЕНИЯ ТОЧЕК С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ЗЕРКАЛЬНЫХ ОТРАЖЕНИЙ

##### Резюме

Работа содержит описание метода определения пространственных смещений точек с помощью теодолита и отражений визирных линий от плоских зеркал. Горизонтальное смещение определяется на основе разниц горизонтальных направлений, измеряемых теодолитом, при визировании вертикальной нитью на изображение точки, отображённое в зеркале до и после смещения. Вертикальная составляющая смещения определяется на основе измерения разниц вертикальных углов при визировании горизонтальной нитью на изображение точки, отражённое в зеркале до и после смещения.

Во II части автор выводит обобщённые формулы, определяющие составляющие  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$  смещений в функции наблюдаемых разниц горизонтальных направлений  $\Delta\alpha$  и вертикальных углов  $\Delta\beta$ . В этих формулах учтён поворот системы координат  $\eta$ , появляющийся при визировании с помощью зеркал, при зрительной трубе отклонённой от горизонтального положения. Представлен комбинированный метод определения смещений, т.е. такой, при котором используются углы  $\Delta\alpha$ ,  $\Delta\beta$  при непосредственном визировании зрительной трубой теодолита на перемещающуюся точку К и при визировании с использованием зеркал. Представлены примеры и результаты определения смещений при произвольном размещении точек С, L, К. Результаты экспериментальных измерений выявили возможность определения смещений с ошибкой  $\pm 1 \div 1,5$  мм, при сумме длин визирных линий: теодолит - зеркало - контролируемая точка порядка 100 м. Метод предназначен для измерений в условиях трудного доступа и ограниченной видимости.

Перевод: Róża Tołstikowa

