PRACE INSTYTUTU GEODEZJI I KARTOGRAFII

Tom XXX, Zeszyt 1, 1983

WOJCIECH JANUSZ

Obliczanie poziomych przemieszczeń punktów sieci kontrolnych

Zarys treści. Przedstawiono metodykę i technologię identyfikowania punktów stałych i obliczania poziomych przemieszczeń punktów poruszonych na podstawie okresowych pomiarów kątów, kierunków, długości lub azymutów. Sformułowano kryteria stałości kształtu, skali i orientacji figur, użyteczne w zależności od rodzaju wykonywanych obserwacji. Uwzględniono dwa warianty postępowania — obliczania metodą różnicową lub metodą współrzędnych w zależności od tego, czy pomiarom podlegają stale te same wielkości, czy też rodzaj obserwacji i struktura sieci podlegają zmianom.

W 1978 roku odbyło się w Bonn drugie sympozjum na temat pomiarów deformacji zorganizowane przez grupę roboczą C, działającą w ramach 6 Komisji FIG. Jedna z rezolucji sympozjum brzmi: „Rezultaty pomiarów deformacji powinny być obliczane, wyrównywane i testowane na różnych drogach. Do badania różnych postępowań przy użyciu tych samych danych pomiarowych zostanie zaproszony komitet „ad hoc" grupy C, 6 Komisji FIG".

Powodem uchwalenia powyższej rezolucji jest, że w wielu przypadkach geodezyjne metody pomiarów zostają użyte do wyznaczania małych przemieszczeń, o wielkościach nieznacznie przekraczających błędy ich wyznaczenia. Wiadomo, że w przypadku takim bardzo trudne jest jednoznaczne ustalenie, które punkty sieci zachowały stałość położenia i że wynik dociekań zależy od przyjętej metody analizy rezultatów pomiarów. Również od przyjętej metody postępowania zależą wówczas wyznaczone wielkości przemieszczeń punktów.

Jest oczywiste, że należy prowadzić badania służące ustaleniu metody najbardziej wiarogodnej, które polegać powinny na wyznaczaniu różnymi metodami przemieszczeń punktów w sieciach eksperymentalnych, w których prawdziwe wartości przemieszczeń zostały wyznaczone. Takie postępowanie stosowane było przez wiele lat przez zespół współpracowników prof. Tadeusza Lazzariniego, w celu ocenienia faktycznej dokładności wyznaczania przemieszczeń w kątowych sieciach kontrolnych i w celu sprawdzenia prawidłowości zastosowanych metod obliczeń. Eksperymenty te prowadzono w sieciach kontrolnych zapory w Rożnowie i zapory w Porąbce, które zaopatrzone były w podwójne urządzenia centrujące, co umożliwiało porównanie przemieszczeń wyznaczonych z prawdziwymi.

Przy rozpatrywaniu omawianego tu wyznaczania przemieszczeń małych w stosunku do błędów, to znaczy będących na poziomie szumów, trzeba jednak liczyć się z tym, że wyniki takich badań mogą nie dać zdecydowanej odpowiedzi na pytanie, która metoda jest najbardziej wiarogodna. Może się okazać, że kilka metod postępowania przynosi wyniki równorzędne pod względem ich zbliżenia do wartości prawdziwych.

W takich właśnie przypadkach, zgodnie z rezolucją sympozjum, właściwe jest kilkakrotne opracowanie wyników pomiarów określonej sieci, przy użyciu kilku różnych metod postępowania i konfrontowanie uzyskiwanych rezultatów, to jest wyników identyfikacji punktów stałych i obliczonych przemieszczeń punktów poruszonych. Aby to było możliwe, trzeba w pierwszej kolejności poinformować potencjalnych użytkowników o metodach opracowanych i stosowanych w różnych ośrodkach naukowych. Takiej prezentacji służą pierwsze prace wspomnianego wyżej komitetu „ad hoc" zawiązanego w ramach grupy studiów C, 6 Komisji FIG. Rezultatem pracy tego Komitetu jest publikacja 602.3 zawarta w materiałach XVI Kongersu FIG w Montreux 1981 pt. „Porównanie różnych postępowań przy analizie wyników pomiarów deformacji" — A. Chrzanowski z udziałem uczestników Komitetu „ad hoc" [1]. W publikacji tej przedstawiono 5 metod postępowania:

— postępowanie oparte na metodzie B testowania, opracowane w Delft (JJ Kok),

— postępowanie oparte na ogólnej zgodności testu korzystającego z analizy wariancji, opracowane w Hannowerze (W. Niemeier, H. Pelzer),

— postępowanie oparte na analizie wariancji i wykorzystaniu regionów (obszarów) zaufania dla wektorów przemieszczeń punktów, opracowane w Karlsruhe (B. Heck),

— postępowanie oparte na badaniu rodzaju (charakteru) deformacji z wykorzystaniem danych geodezyjnych, opracowane w Monachium (W. Welsch, R. Baumer),

— postępowanie oparte na analizie niezmienności funkcji przemieszczeń, opracowane w Fredericton (A. Chrzanowski, A. Szostak-Chrzanowski, P. Tobin).

Prezentacja w/w metod postępowania została dokonana w [1], na przykładzie zastosowania ich do analizy danych z pomiarów sieci testowej Huaytapallana, założonej przez Uniwersytet Fredericton w Andach Peruwiańskich, w celu badania przemieszczeń terenu wokół uskoku tektonicznego. W sieci tej mierzono czterokrotnie w latach 1975, 1976, 1977, 1978 kąty, kierunki i długości nie zachowując identyczności obserwacji i ich dokładności w poszczególnych cyklach (epokach). W okresie badań zmiany wielkości mierzonych oraz kątów i długości obliczanych z niezależnie wyrównanych współrzędnych były małe — na poziomie szumów. Z tego powodu wyniki identyfikacji punktów stałych i obliczenia przemieszczeń dokonane wymienionymi metodami okazały się nieidentyczne. Jest rzeczą charakterystyczną, że stopień niepewności odpowiedzi przy użyciu różnych metod był większy w stosunku do wyników pomiarów z lat 1975, 1976 aniżeli w stosunku do wyników z lat późniejszych, kiedy to rzeczywiste wielkości przemieszczeń zapewne nieco się powiększyły.

Autorzy pracy [1] wyrazili pogląd, że poza zaprezentowanymi metodami postępowania, w wielu ośrodkach badawczych na świecie istnieją ważne osiągnięcia w studiach nad analizą wyników pomiarów deformacji i zaprosili ich autorów do współpracy w Komitecie „ad hoc". Zachęca to mnie do zaprezentowania postępowania, którego jestem zwolennikiem, zwłaszcza wobec tego, że na przeszkodzie wcześniejszemu włączeniu się do prac stanęła moja nieobecność na sympozjum w Bonn w 1978 roku.

Postępowanie i poglądy, które pragnę tu przedstawić, nie zasługują na nazwanie ich „Warszawskimi", wzorem rozwiązań zaprezentowanych w pracy [1], bowiem w Polsce i w środowisku naukowym Warszawy są autorzy kilku różniących się od siebie postępowań. Trzeba to ocenić pozytywnie, jako wyraz żywotności badań naukowych w rozpatrywanym zakresie w Polsce. Prezentując swe osobiste stanowisko co do postępowania przy analizie wyników pomiarów deformacji pragnę podkreślić, że jest ono najbardziej zbliżone do prezentowanego przez A. Chrzanowskiego, spośród przedstawionych w pracy [1].

Na wstępie wspomnę, że przy pomiarach sieci kontrolnych występują dwa typy postępowania pomiarowo-obliczeniowego:

1) w założonej sieci kontrolnej mierzy się okresowo stale te same wielkości, dzięki czemu opracowanie wyników pomiarów, to jest identyfikowanie punktów stałych i obliczanie przemieszczeń punktów poruszonych polega na operacjach rachunkowych nad *różnicami wyników pomiarów tych samych wielkości,*

2) w założonej sieci kontrolnej mierzy się za każdym razem (przy każdym pomiarze okresowym) wielkości niezbędne do wyznaczenia współrzędnych punktów sieci, niekoniecznie te same, wskutek czego identyfikowanie punktów stałych i obliczanie przemieszczeń punktów poruszonych musi polegać na operacjach rachunkowych *nad funkcjami współrzędnych wyznaczonych niezależnie w każdym cyklu.*

Pierwsze z wymienionych postępowań, znane pod nazwą „metody różnicowej" prof. T. Lazzariniego, jest przez Niego stawiane wyżej od postępowania drugiego jako: dokładniejsze, eliminujące wpływy niektórych błędów systematycznych, bardziej „czyste" pojęciowo i łatwiejsze w użyciu przy obliczeniach. Całkowicie podzielam ten pogląd, jakkolwiek jestem zdania, że w praktyce możliwości stosowania metody różnicowej są ograniczone. Mianowicie nawet w przypadku, gdy intencją jest stosowanie tej metody, to wraz z upływem czasu mogą powstawać przeszkody uniemożliwiające okresowe powtarzanie pomiarów stale tych samych wielkości. Może to być spowodowane na przykład stwierdzeniem podczas analizy rezultatów wykonanych pomiarów, że niektóre wyniki są obciążone nadmiernymi błędami i nie powinny być włączane do wyrównania, a jednocześnie, ze względu na upływ czasu od momentu zakończenia pomiaru okresowego, nie jest dopuszczalne włączenie do wyrównania wyniku powtórnego pomiaru, wykonanego po analizie, mającego zastąpić wynik obciążony nadmiernym błędem. Ponadto może zachodzić konieczność zmienienia struktury sieci wskutek „wypadania" niektórych punktów. Ma to miejsce zwłaszcza w czasie budowy, a także wówczas, gdy przedmiotem badań są przemieszczenia na czynnych osuwiskach. Praktycznie metoda różnicowa jest możliwa do stosowania (ale bez gwarancji w całym okresie badań) przy badaniach deformacji obiektów eksploatowanych, gdzie nie następują poważniejsze zmiany zagospodarowania terenu ani deformacje podłoża na obszarze całej sieci kontrolnej.

Stanowisko swoje w tej sprawie mogę wyrazić następująco: należy dążyć przy projektowaniu, zakładaniu i okresowych pomiarach sieci do mierzenia stale tych samych wielkości, jednocześnie jednak należy brać pod uwagę, że po pewnym czasie może się to stać niemożliwe do kontynuowania, w związku z czym należy projektować sieci kontrolne o strukturze umożliwiającej również prowadzenie obliczeń na drodze wykorzystującej niezależne wyrównania sieci w każdym cyklu.

Przestrzeganie powyższej zasady chroni nas przed zerwaniem ciągłości wyznaczania przemieszczeń w przypadkach, gdy kontynuowanie stosowania metody różnicowej okazuje się niemożliwe.

Prezentowane tu postępowanie przy obliczaniu przemieszczeń poziomych przedstawia się następująco:

Krok 1. Wstępna analiza rezultatów wykonanych pomiarów

Analiza ma na celu wykrycie wyników obciążonych nadmiernymi błędami i niedopuszczenie, aby wyniki te były brane pod uwagę przy dalszych obliczeniach. Podkreślam, że nie jest celem wstępnej analizy poszukiwanie punktów stałych, a tylko sprawdzenie poprawności wykonanych pomiarów.

Analiza powinna być dokonywana w czasie trwania każdego pomiaru okresowego i bezpośrednio po jego zakończeniu na tyle szybko, aby możliwe było ewentualne powtórzenie tych pomiarów, które wykazały nadmierne błędy i wykorzystanie wyników pomiarów powtórzonych bez obawy, że odpowiadają one zmienionemu już stanowi przemieszczeń

Podczas analizy należy sprawdzić spełnienie wszystkich możliwych warunków geometrycznych, jakie wynikają ze związków między wielkościami pomierzonymi. Jeśli stosowana jest metoda różnicowa, to sprawdza się związki między różnicami wyników pomiarów $dl = l'' - l'$ oraz możliwe do sprawdzenia związki między wynikami z pomiaru wyjściowego l' i oddzielnie z pomiaru aktualnego l''. Należy podkreślić, że często liczba warunków jakim podlegają niezależnie traktowane wyniki pomiaru wyjściowego i aktualnego jest przy stosowaniu metody różnicowej ograniczona wskutek zastosowania uproszczeń w konstrukcji sieci, jakie są możliwe przy tej metodzie (na przykład nieidentyczność celów przy celowaniu na ten sam punkt z różnych stanowisk). Jeśli stosowana jest metoda dopuszczająca mierzenie zmieniających się wielkości (zwana popularnie metodą współrzędnych), to sprawdzaniu podlegają wszystkie warunki geometryczne, podobnie jak w każdej sieci geodezyjnej o innym przeznaczeniu (np. zamknięcia w trójkątach, wielobokach, warunki sinusowe).

Krok 2. Wyrównanie

a) Gdy stosowana jest metoda różnicowa to należy wyrównać różnice $dl = l'' - l'$ w sieci kontrolnej przy minimalnych ograniczeniach stopni swobody [4]. Rezultatem takiego wyrównania są przemieszczenia pozorne dx, dy wszystkich punktów sieci kontrolnej, poprawki v_{dl} różnic obserwacji i matryca wariancyjno-kowariancyjna $(apa)^{-1}$

b) Gdy stosowana jest metoda współrzędnych, to należy wyrównać oddzielnie obserwacje l' sieci wyjściowej i obserwacje l'' sieci aktualnej przy minimalnych ograniczeniach stopni swobody. Rezultatem takich wyrównań są współrzędne x', y' wszystkich punktów sieci wyjściowej i współrzędne x'', y'' wszystkich punktów sieci aktualnej, poprawki v_l', v_l'' i matryce wariancyjno-kowariancyjne $(a'p'a')^{-1}$, $(a''p''a'')^{-1}$.

Krok 3. Obliczenie względnych różnic odległości $d\beta$ i różnic kierunków $d\alpha$ oraz ich błędów

Względne różnice odległości i różnice kierunków należy obliczyć dla odcinków łączących punkty sieci kontrolnej we wszystkich kombinacjach. Oczywiście obliczeniu podlegają różnice na odcinkach między tymi samymi punktami, występującymi w sieci wyjściowej i sieci aktualnej. Gdy następuje przestabilizowanie i włączenie do sieci nowych punktów należy przyjąć, że pomiarem wyjściowym staje się do dalszych obliczeń pomiar okresowy wykonany po przestabilizowaniu i włączeniu nowych punktów.

a) Gdy stosowana jest metoda różnicowa, to obliczenie względnych różnic odległości i różnic kierunków wykonujemy z wykorzystaniem przemieszczeń pozornych dx, dy otrzymanych z wyrównania według kroku 2a. Korzystamy przy tym z wzorów:

$$d\beta_{ik} = \frac{dd_{ik}}{d_{ik}} = -b_{ik}(dx_k - dx_i) - a_{ik}(dy_k - dy_i), \tag{1}$$

$$d\alpha_{ik} = -a_{ik}(dx_k - dx_i) - b_{ik}(dy_k - dy_i), \tag{2}$$

gdzie $-a = \frac{\Delta y \varrho}{d^2}$, $b = \frac{\Delta x \varrho}{d^2}$.

Błędy $m_{d\beta_{ik}}$, $m_{d\alpha_{ik}}$ obliczamy korzystając z wzoru na błąd funkcji wyrównanych spostrzeżeń i matrycy wariancyjno-kowariancyjnej obliczonej w ramach kroku 2

$$m_{d\beta_{ik}} = m_0 \sqrt{\underline{f}_\beta(\underline{apa})^{-1}\underline{f}_\beta} = m_0' \sqrt{\begin{Vmatrix} b_{ik} \\ a_{ik} \\ -b_{ik} \\ -a_{ik} \end{Vmatrix} (\underline{apa})^{-1} \begin{Vmatrix} b_{ik} \\ a_{ik} \\ -b_{ik} \\ -a_{ik} \end{Vmatrix}}, \tag{3}$$

$$m_{d\alpha_{ik}} = m_0 \sqrt{\underline{f}_\alpha(\underline{apa})^{-1}\underline{f}_\alpha} = m_0' \sqrt{\begin{Vmatrix} a_{ik} \\ b_{ik} \\ -a_{ik} \\ -b_{ik} \end{Vmatrix} (\underline{apa})^{-1} \begin{Vmatrix} a_{ik} \\ b_{ik} \\ -a_{ik} \\ -b_{ik} \end{Vmatrix}}, \tag{4}$$

gdzie w kolumnach i wierszach krakowianu $(\underline{apa})^{-1}$ występują kolejno elementy odpowiadające niewiadomym dx_i, dy_i, dx_k, dy_k.

b) Gdy stosowana jest metoda współrzędnych, to obliczenie względnych różnic odległości i różnic kierunków wykonujemy z wykorzystaniem współrzędnych otrzymanych z wyrównania sieci wyjściowej x', y' i współrzędnych z wyrównania sieci aktualnej x'', y''. Korzystamy przy tym z wzorów:

$$d\beta_{ik} = \frac{\sqrt{(x_k''-x_i'')^2+(y_k''-y_i'')^2} - \sqrt{(x_k'-x_i')^2+(y_k'-y_i')^2}}{\sqrt{(x_k'-x_i')^2+(y_k'-y_i')^2}}, \tag{5}$$

$$d\alpha_{ik} = \operatorname{arc\,tg}\frac{y_k''-y_i''}{x_k''-x_i''} - \operatorname{arc\,tg}\frac{y_k'-y_i'}{x_k'-x_i'}. \tag{6}$$

Błędy $m_{d\beta_{ik}}$, $m_{d\alpha_{ik}}$ obliczamy korzystając z wzoru na błąd funkcji wyrównanych spostrzeżeń i matryc wariancyjno-kowariancyjnych obliczonych w ramach kroku 2

$$m_{d\beta_{ik}} = \sqrt{m_0'^2\, \underline{f}_{\beta_{ik}}'(\underline{a'p'a'})^{-1}\underline{f}_{\beta_{ik}}' + m_0''^2\, \underline{f}_{\beta_{ik}}''(\underline{a''p''a''})^{-1}\underline{f}_{\beta_{ik}}''}, \tag{7}$$

$$m_{d\alpha_{ik}} = \sqrt{m_0'^2\, \underline{f}_{\alpha_{ik}}'(\underline{a'p'a'})^{-1}\underline{f}_{\alpha_{ik}}' + m_0''^2\, \underline{f}_{\alpha_{ik}}''(\underline{a''p''a''})^{-1}\underline{f}_{\alpha_{ik}}''}, \tag{8}$$

gdzie wskaźnik $''$ oznacza dane dotyczące sieci z pomiaru aktualnego, a wskaźnik $'$ oznacza dane sieci z pomiaru wyjściowego.

Krok 4. Identyfikacja punktów stałych

Rozwinięta tu idea postępowania przy identyfikowaniu punktów stałych została przedstawiona w pracy [3] z 1962 roku oraz zilustrowana w pracy [2] z 1964 roku. Zgodnie z tą ideą za punkty stałe sieci kontrolnej uznajemy wierzchołki tych figur, które zachowały cechy niezmienności. W zależności od tego, jakie wielkości podlegają w sieci kontrolnej pomiarom, możemy sprawdzić zachowanie przez jej figury cech niezmienności: kształtu, wymiarów (skali), orientacji. Przedmiotem pomiarów mogą być: kierunki, kąty, odległości, kierunki orientacyjne (azymuty lub kierunki do odległych, praktycznie nieruchomych celów). Tablica 1 określa zgodnie z [3], które cechy niezmienności i na podstawie jakich przejawów możemy sprawdzić w zależności od rodzaju wykonanych pomiarów.

Tablica 1

Lp.	Wykonane pomiary	Identyfikacja cech stałości	Oczekiwane wartości	
			$d\beta$	$d\alpha$
1	Kierunki lub kąty	kształt	dowolne	dowolne
2	Długości	wymiary	0	dowolne
3	Kierunki lub kąty i długości	wymiary	0	dowolne
4	Kierunki lub kąty i kierunki orientacyjne	kształt orientacja	dowolne	0
5	Kierunki lub kąty, długości i kierunki orientacyjne	wymiary orientacja	0	0
6	Długości, kierunki orientacyjne	wymiary orientacja	0	0

Uwaga: Spełnienie cech niezmienności *wymiarów* i *orientacji* jest nadrzędne w stosunku do stwierdzenia cechy niezmienności *kształtu*. Oznacza to, że jeśli stwierdzimy spełnienie niezmienności *wymiarów* lub *orientacji*, to jednocześnie spełniona jest cecha niezmienności *kształtu*, natomiast nie zachodzi zależność odwrotna, to znaczy, że spełnienie cechy niezmienności *kształtu* nie oznacza spełnienia cechy niezmienności *wymiarów* lub *orientacji*. Cechy niezmienności *wymiarów i orientacji* są równorzędne lecz nie zastępują się, to znaczy dopiero spełnienie obu tych cech równocześnie daje najwyższy aktualnie, możliwy do osiągnięcia stopień pewności, że identyfikacja jest poprawna.

Sprawdzenie cech niezmienności odbywa się w figurach o przyjętej liczbie wierzchołków analizowanych w sieci we wszystkich kombinacjach. Możliwe są dwa warianty postępowania. Jeśli przypuszczamy, że przeważająca liczba punktów sieci zachowała stałość wzajemnego położenia to rozpoczynamy analizę od sprawdzenia, czy cechy niezmienności zostały zachowane w figurze utworzonej przez wszystkie n punktów sieci. W przypadku odpowiedzi negatywnej sprawdzamy spełnienie cech niezmienności w figurach utworzonych przez $n-1$ punktów. Jeśli w żadnej z figur o tej liczebności punktów nie stwierdzimy spełnienia cech niezmienności, kontynuujemy poszukiwania, sprawdzając spełnienie cech niezmienności we wszystkich figurach utworzonych przez $n-2$ punkty. Takie postępowanie kontynuujemy aż do uzyskania wyniku pozytywnego, to znaczy stwierdzenia, że jedna z figur utworzonych przez $n-r$ punktów sieci wykazuje spełnienie cech niezmienności. Figurę taką uznajemy za utworzoną przez punkty o niezmiennym wzajemnym położeniu.

Drugi wariant postępowania stosujemy, gdy przypuszczamy, że w sieci występuje mało punktów o zachowanej wzajemnej stałości położenia. Wówczas rozpoczynamy analizę od sprawdzenia spełnienia cech stałości w figurach tworzonych przez minimalną liczbę punktów m, przy której jesteśmy w stanie stwierdzić spełnienie tych cech. Możemy oczekiwać, że jeśli w sieci jest m punktów stałych, to w jednym przypadku stwierdzimy spełnienie cech niezmienności (w jednej figurze o m wierzchołkach). Jeśli w sieci jest więcej punktów stałych, to stwierdzimy spełnienie cech niezmienności w większej liczbie figur o m punktach. Wówczas niezbędne jest kolejne sprawdzanie spełnienia cech stałości w figurach tworzonych przez $m+1$ wierzchołków, $m+2$ wierzchołków i tak dalej, aż do spełnienia cech stałości w jednej tylko figurze o $m+k$ wierzchołkach. Będzie to figura utworzona przez wszystkie punkty o zachowanej wzajemnej niezmienności położenia.

Wyżej opisane postępowanie można skrócić pomijając poszukiwanie figur o zachowanych cechach stałości składających się z kolejno powiększanej liczby punktów. W tym celu po dokonaniu analizy figur m-punktowych należy wynotować numery wszystkich punktów, tworzących figury o m wierzchołkach, w których stwierdzono spełnienie cech stałości. Jeśli numery te powtarzają się we wszystkich kombinacjach figur o m wierzchołkach spełniających cechy niezmienności, to z dużym prawdopodobieństwem można wnosić, że są to numery punktów o zachowanej niezmienności wzajemnego położenia. Wówczas należy jedynie sprawdzić spełnienie cech niezmienności w figurze utworzonej przez punkty o tych numerach. Trzeba dodać jednak, że postępowanie takie może być zawodne, bowiem w figurach tworzonych przez minimalną liczbę punktów, przy której jesteśmy w stanie stwierdzić spełnienie cech stałości, cechy te mogą być spełnione w sposób przypadkowy, nawet wówczas, gdy faktycznie punkty wierzchołkowe tych figur nie wchodzą do grupy punktów sieci kontrolnej spełniających warunek stałości wzajemnego położenia. Przypadek taki daje się wykryć w postaci spełnienia w grupach m-punktowych niektórych tylko cech stałości. Tego rodzaju przypadek stwierdzono na przykład przy obliczeniach eksperymentalnych, omówionych w pracy [2].

Do sprawdzenia cech stałości służą wartości obliczane z wzorów

$$d\beta_{śr} = \frac{[p_\beta\, d\beta]}{[p_\beta]}; \quad d\alpha_{śr} = \frac{[p_\alpha\, d\alpha]}{[p_\alpha]}, \tag{9}$$

$$m_{0\beta} = \sqrt{\frac{[p_\beta\,(d\beta - d\beta_{śr})^2]}{s-1}}; \quad m_{0\alpha} = \sqrt{\frac{[p_\alpha\,(d\alpha - d\alpha_{śr})^2]}{s-1}}, \tag{10}$$

gdzie $p_{\beta ik} = \frac{1}{m^2_{d\beta_{ik}}}$; $p_{\alpha ik} = \frac{1}{m^2_{d\alpha_{ik}}}$; s — liczba odcinków między wierzchołkami analizowanej figury.

Wartości według wzorów (9—10) należy obliczyć w każdej analizowanej figurze na podstawie $d\beta_{ik}$, $d\alpha_{ik}$, $m_{d\beta ik}$, $m_{d\alpha ik}$ obliczonych w kroku 3 odpowiednio z wzorów (1—4) lub (5—8) we wszystkich kombinacjach.

W każdym przypadku, niezależnie od tego, które cechy stałości podlegają sprawdzaniu, powinny być spełnione nierówności:

$$\boxed{m_{0\beta} \leqslant K; \quad m_{0\alpha} \leqslant K,} \tag{11}$$

gdzie $K = 1 + \frac{1}{\sqrt{2\,(s-1)}}$.

Spełnienie tych nierówności oznacza stwierdzenie niezmienności kształtu analizowanej figury.

Kryteria (11) wyrażają warunek wewnętrznej zgodności parametrów $d\beta$, $d\alpha$ w rozpatrywanej figurze. Są to kryteria, których spełnienie jest wystarczające (z konieczności) do stwierdzenia niezmienności wzajemnego położenia wierzchołków figury w tych przypadkach, gdy zgodnie z tablicą $d\beta$, $d\alpha$ mogą przyjmować dowolne wartości. Oznacza to na przykład, że w sieci, w której mierzone są wyłącznie kąty lub kierunki stwierdzamy, iż wierzchołki figury nie zmieniły położenia wzajemnego, na podstawie zachowania kształtu figury (bez możliwości stwierdzenia niezmienności wymiarów i orientacji figury).

W tych przypadkach, gdy zgodnie z tablicą $d\beta$, $d\alpha$ powinny być z zasady równe 0 (zeru), niezbędne jest również spełnienie przez wartości $d\beta_{śr}$, $d\alpha_{śr}$ według wzorów (9) odpowiednio nierówności:

$$\boxed{d\beta_{śr} \leqslant R \cdot \frac{m_{0\beta}}{\sqrt{[p_\beta]}}; \quad d\alpha_{śr} \leqslant R \cdot \frac{m_{0\alpha}}{\sqrt{[p_\alpha]}}}, \tag{12}$$

gdzie R — wielokrotność błędu średniego, odpowiadająca przyjętemu poziomowi ufności. Spełnienie pierwszej z tych nierówności oznacza stwierdzenie niezmienności wymiarów zaś spełnienie drugiej nierówności oznacza stwierdzenie niezmienności orientacji analizowanej figury.

Krok 5. Obliczanie przemieszczeń punktów

Po zidentyfikowaniu punktów stałych możliwe staje się obliczenie przemieszczeń wszystkich pozostałych — poruszonych punktów sieci kontrolnej. Stosowane są dwa warianty postępowania przy obliczaniu przemieszczeń:

1) przetransformowanie przemieszczeń pozornych dx, dy na przemieszczenia $\underline{\mathrm{dx}}$, $\underline{\mathrm{dy}}$ lub współrzędnych x'', y'' sieci aktualnej do układu określonego przez współrzędne x', y' tych punktów sieci wyjściowej, które zostały zidentyfikowane jako stałe,

2) wyrównanie różnic dl lub obserwacji l', l'' sieci kontrolnej przy dostosowaniu jej do wszystkich punktów zidentyfikowanych jako stałe.

Każdy z tych dwu wariantów ma swych zwolenników i przeciwników.

Wariant 1 był stosowany wcześniej, bowiem jest mniej pracochłonny i stąd łatwiejszy do stosowania przy dysponowaniu arytmometrami. Większość badaczy uważa jednak wariant 2 za doskonalszy, a jego stosowanie uzależnia wyłącznie od tego czy dysponuje środkami elektronicznej techniki obliczeniowej.

Muszę stwierdzić, że również przez dłuższy czas ulegałem fascynacji wariantem drugim. Po gruntownym przemyśleniu sprawy dochodzę jednak do wniosku, że z punktu widzenia „czystości pojęciowej" bardziej właściwy jest wariant 1 obliczania przemieszczeń.

Uważam, że przy wyborze wariantu trzeba brać pod uwagę dwa czynniki: dążenie do osiągnięcia możliwie jak najlepszych rezultatów i spełnienie wymagań wynikających z logiki procesu. Inaczej mówiąc, nie jestem zwolennikiem dążenia do osiągania możliwie najlepszych wyników za wszelką cenę, również za cenę zaniedbania logicznych przesłanek rozwiązywania zadania. Chodzi mianowicie o to, że nie jest logicznie uzasadnione by wyniki pomiarów były w toku wyrównania zniekształcane z jakiegokolwiek innego powodu aniżeli ich wzajemna niezgodność w sieci kontrolnej. Zwłaszcza powodem takim nie może być wynikające z identyfikacji domniemanie, że pewne punkty są stałe, bowiem w gruncie rzeczy stwierdzamy jedynie, że nie są one ruchome w stopniu przekraczającym błędy wyznaczenia, a ponadto przy identyfikowaniu opieramy się na wynikach tych samych pomiarów, które posłużyły do wyrównania. Uważam, że pozytywny wynik identyfikacji upoważnia nas jedynie do takich operacji, które maksymalnie zbliżają do siebie układ sieci wyjściowej i układ sieci aktualnej z wykorzystaniem punktów zidentyfikowanych jako stałe, nie upoważnia nas natomiast do dodatkowego zniekształcania wyników pomiarów.

Zgodnie z tym poglądem obliczanie przemieszczeń powinno więc polegać na takim przetransformowaniu aktualnej sieci kontrolnej przy dostosowaniu do zidentyfikowanych punktów stałych, aby w konsekwencji nie nastąpiła zmiana wymiarów figury utworzonej przez punkty stałe sieci, gdy mierzone są w niej długości ani orientacja tej figury, gdy w sieci mierzone są kierunki orientacyjne. Są to dodatkowe warunki do stosowania wariantu polegającego na transformowaniu, które dotychczas nie były brane pod uwagę. Dodam, że warunki takie nie musiały być brane pod uwagę w sieciach, w których mierzono wyłącznie kąty lub kierunki, bowiem w tych przypadkach możliwe było stwierdzenie stałości wyłącznie na podstawie spełnienia warunku zachowania kształtu figury (warunki wyrażone wzorami (11) lub warunki wynikające wprost z metody transformacyjnej poszukiwania punktów stałych [7]).

Transformowanie przy zachowaniu warunku niezmienności wymiarów figury utworzonej przez punkty stałe (łączne) sprowadza się do spełnienia równości $q = 1$ (gdzie q — współczynnik zmiany skali). Transformowanie przy zachowaniu tego warunku zostało opisane w pracach [5], [6]. Transformowanie przy zachowaniu warunku niezmienności orientacji figury utworzonej przez punkty łączne sprowadza się do równoległego przemieszczenia, czyli wywołania jednakowych przesunięć wszystkich punktów łącznych ($\alpha = 0$).

Transformację współrzędnych x'', y'' do układu sieci wyjściowej należy wykonać w taki sposób, że w pierwszej kolejności oblicza się wartości współczynników transformacyjnych α, β, a, b ze znanych wzorów (13—15) na podstawie współrzędnych punktów zidentyfikowanych jako stałe:

$$\alpha = \frac{[x_r''(y_r'-y_r'')-y_r''(x_r'-x_r'')]}{[y_r''^2+x_r''^2]} = q \sin \varepsilon, \tag{13}$$

$$\beta = \frac{[x_r''(x_r'-x_r'')+y_r''(y_r'-y_r'')]}{[y_r''^2+x_r''^2]} = q \cos \varepsilon - 1, \tag{14}$$

$$a = \frac{[x']}{n} - \frac{[x'']}{n}; \quad b = \frac{[y']}{n} - \frac{[y'']}{n}, \tag{15}$$

gdzie r oznacza, że współrzędne są zredukowane do średniej ze współrzędnych punktów stałych, n — liczba punktów dostosowania, ε — skręt.

Następnie w celu osiągnięcia warunku $q = 1$ oblicza się:

$$\alpha' = \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+(1-\beta)^2}}, \tag{16}$$

$$\beta' = 1 - \frac{1-\beta}{\sqrt{\alpha^2+(1-\beta)^2}}. \tag{17}$$

Współrzędne wszystkich punktów sieci aktualnej $(x'')'$, $(y'')'$ wyrażone w układzie sieci wyjściowej przez dostosowanie do punktów stałych przy zachowaniu warunku $q = 1$ obliczamy z wzorów:

$$\begin{aligned} (x'')_P' &= x_P''+a-y_{Pr}''\alpha'+x_{Pr}''\beta', \\ (y'')_P' &= y_P''+b+x_{Pr}''\alpha'+y_{Pr}''\beta'. \end{aligned} \tag{18}$$

Wobec tego, że współrzędne $(x'')'$, $(y'')'$ sieci aktualnej wyrażone są w układzie sieci wyjściowej, możemy obliczyć przemieszczenia punktów z wzorów:

$$\underline{\mathrm{dx}}_P = (x'')_P' - x_P'; \quad \underline{\mathrm{dy}}_P = (y'')_P' - y_P'. \tag{19}$$

W przypadku, gdy stosowana jest metoda różnicowa, to znaczy gdy w ramach kroku 2 obliczamy przemieszczenia pozorne dx, dy, obliczenie przemieszczeń $\underline{\mathrm{dx}}$, $\underline{\mathrm{dy}}$ przebiega w sposób omówiony w [7], przy czym korzystamy ze współczynników α', β' obliczonych z wzorów (16—17), na podstawie współczynników α, β obliczonych jak w [7].

Jeśli przy transformowaniu współrzędnych lub przemieszczeń pozornych pragniemy uwzględnić różnice dokładności wyznaczenia poszczególnych punktów zidentyfikowanych jako punkty stałe, to obliczenie możemy prowadzić przy wykorzystaniu równań:

$$\begin{aligned} x_0' + x'' q \cos\varepsilon - y'' q \sin\varepsilon &= x' + \underline{\mathrm{dx}}', \\ y_0' + y'' q \cos\varepsilon + x'' q \sin\varepsilon &= y' + \underline{\mathrm{dy}}', \end{aligned} \tag{20}$$

które traktować można jako równania poprawek. Równania typu (20) układamy dla wszystkich punktów dostosowania, równoważymy je dokładnościowo i uzyskany układ rozwiązujemy przy spełnieniu warunku $[p\, \underline{\mathrm{dx}}'\underline{\mathrm{dx}}'] + [p\, \underline{\mathrm{dy}}'\underline{\mathrm{dy}}'] = \min$. Rozwiązanie takiego układu prowadzimy do momentu obliczenia niewiadomych $q \cos\varepsilon$, $q \sin\varepsilon$, po czym obliczamy:

$$\begin{aligned} \sin\varepsilon &= \frac{q \sin\varepsilon}{\sqrt{(q\cos\varepsilon)^2 + (q\sin\varepsilon)^2}}, \\ \cos\varepsilon &= \frac{q \cos\varepsilon}{\sqrt{(q\cos\varepsilon)^2 + (q\sin\varepsilon)^2}}. \end{aligned} \tag{21}$$

Następnie zamiast $q \cos\varepsilon$, $q \sin\varepsilon$ podstawiamy do rozwiązywanego układu obliczone z wzorów (21) $\cos\varepsilon$, $\sin\varepsilon$ i w rezultacie obliczamy kolejne niewiadome x_0, y_0 zamiast x_0', y_0'. W rezutacie zamiast układu równań (20) rozwiązujemy układ równań:

$$\begin{aligned} x_0 + x'' \cos\varepsilon - y'' \sin\varepsilon &= x' + \underline{\mathrm{dx}}, \\ y_0 + y'' \cos\varepsilon + x'' \sin\varepsilon &= y' + \underline{\mathrm{dy}}, \end{aligned} \tag{22}$$

spełniając warunek $q = 1$.

Obliczone niewiadome x_0, y_0, $\cos\varepsilon$, $\sin\varepsilon$ podstawiamy do równań (22) ułożonych dla wszystkich pozostałych punktów, obliczając składowe przemieszczeń $\underline{\mathrm{dx}}$, $\underline{\mathrm{dy}}$.

— • —

Na zakończenie pragnę ponownie nawiązać do cytowanej na wstępie rezolucji sympozjum. Mianowicie, uważam, że rezultaty pomiarów deformacji nie tylko powinny być obliczone, wyrównywane i testowane na różnych drogach, ale postępowanie na każdej z tych dróg powinno być pod każdym względem niezależne od pozostałych. Chodzi mianowicie o to, że zasady identyfikowania punktów stałych różnymi metodami zawsze pozostawiają pewną możliwość subiektywizmu, na przykład w zakresie doboru poziomu ufności. W tej sytuacji, przy poszukiwaniu punktów stałych jedną z metod, lepiej nie znać wyników uzyskanych wcześniej innymi metodami zastosowanymi do tych samych rezultatów pomiarów. Z tego wynika, że rezultaty pomiarów powinny być obliczane, wyrównywane i testowane różnymi metodami i przez różne osoby na zasadach poufności takich, jak przy obliczeniach geodezyjnych prowadzonych na dwie (lub więcej) ręce.

LITERATURA

[1] Chrzanowski A. (z udziałem komitetu „ad hoc").: *A comparison of different approaches into the analysis of deformation measurements.* XVI International Congress of Surveyors. 6 Comission 1981.

[2] Gaździcki J., Janusz W.: *Próby wykorzystania elektronowej maszyny cyfrowej UMC-1 do rachunkowego opracowania wyników pomiaru odkształceń budowli hydrotechnicznych,* Prace Instytutu Gospodarki Wodnej t. 2, z. 3, 1964.

[3] Janusz W.: *Zagadnienia identyfikacji punktów stałych w sieciach kontrolnych dla pomiarów odkształceń,* Prace IGiK t. 9, z. 1 (19), 1962.

[4] Janusz W.: *Sposoby obliczania poziomych przemieszczeń punktów sieci geodezyjnych w zależności od rodzaju wykonywanych okresowo obserwacji,* Przegląd Geodezyjny 2/1964.

[5] Janusz W.: *Obsługa geodezyjna budowli i konstrukcji,* PPWK, Warszawa 1975.

[6] Janusz W.: *Transformacja współrzędnych bez zniekształceń.* Przegląd Geodezyjny, 4/1976.

[7] Lazzarini T.: *Geodezyjne pomiary przemieszczeń budowli i ich otoczenia,* PPWK, Warszawa 1977.

Recenzował: prof. dr hab. inż. Aleksander Płatek

PROCEEDINGS OF THE INSTITUTE OF GEODESY AND CARTOGRAPHY

Vol. XXX, No. 1, 1983

WOJCIECH JANUSZ

Determination of horizontal displacements of control network points

Abstract. The paper presents methods and technology for identifying stable points, and for computing horizontal displacements of points on the basis of periodical measurements of angles, distances or azimuths. Criterions are formulated to determine the constancy of shape, scale and orientation of figures, which are useful in dependence on the type of observations carried out. In order to obtain the required solutions, two procedures have been taken into account: computations *via* the difference method or the other method with using the coordinate system. The choice of the method is conditioned by the fact whether the same values subject constantly to measurements of whether the type of observation and the networks structure undergo changes.

The second symposium on measurements of deformations, organized by Working Group C, being part of VI FIG Commission was held in Bonn in 1978. One of the symposium resolutions is: "The results of measurements of deformations should be computed, adjusted and tested using various ways. For the assessment of various methods utilizing the same measuring data, "ad hoc" organized committee of Working Group C, VI FIG Commission, will be invited."

Such a resolution was adopted, as in several cases surveying methods are used for determination of small displacements, characterized by magnitudes insignificantly exceeding errors of their determination. It is known that in such a case it is difficult to establish explicitly which points have kept stable position, and that the result of studies is largely dependent on the assumed method of analysis of measurements. The method then influences also values of point displacements determined. It is obvious that studies leading to the most reliable method should be carried out. They should be based on determining displacements of points in experimental networks, where the real values of displacements were determined with the using various methods. Such an approach was applied for a long time by Prof. Lazzarini's group, in order to assess the real accuracy of determining displacements in angular control networks, and in order to check correctness of the used computational methods. These experiments were conducted at control networks on Rożnów and Porąbka dams, which were equipped with the double centring devices, enabling comparison of the displacements determined with the real displacements.

During the discussion on determining small displacements in relation to their errors, i.e. reaching the level of "white noise" it must be taken into account that the results of such studies can, however, give no explicit answer, which of the methods of approaching is the most reliable one. It can be revealed that a few approaches give equivalent results, as far as their proximity to the true values is concerned.

In such cases, according to the symposium resolution, repeated elaboration of the results of measurements is an appropriate using of several methods, as well as confrontation of the obtained results, i.e. the results of identification of the fixed points and computed displacements of moving points. In order to make it possible, it is necessary first to inform potential users about the methods prepared and applied in various scientific centres. Such a presentation is done through the first works of the above mentioned "ad hoc" committee, organized within the Working Group C of VI FIG Commission.

The result of current work of "ad hoc" committee is the publication No. 602.3, included in the Proceedings of XVI FIG Congress in Montreux (1981), entitled: "Comparison of various approaches to analysis of the measurements of deformations" prepared by A. Chrzanowski in common with the participants of "ad hoc" committee [1]. In this publication the following five approaches were presented:

— Delft approach based on the B-method of testing (by J. J. Kok),

— Hannover approach based on global congruency tests using analysis of variances (by W. Niemeier and H. Pelzer),

— Karlsruhe approach based on the analysis of variance and use of confidence regions for point displacement vectors (by B. Heck),

— Munich approach based on investigation and description of deformation in consideration of the geodetic datum (by W. Welsch and R. Baumer),

— Frederiction approach based on the analysis of invariant functions of displacements (by A. Chrzanowski, A. Szostak-Chrzanowski and P. Tobin).

Presentation of the above mentioned methods was done in [1], using the example of their application for data analysis from measurements of Huaytapallana test network, established by the Fredericton University in Peruvian Andes, in order to examine the terrain displacements around downcast. In 1975—6—7—8 directions and angles were measured four times at this network, without keeping identity of observations and their accuracy at particular cycles (epochs). At the period of investigations changes of measured magnitudes, as well as changes of angles and lengths computed from independently adjusted coordinates were small — at the level of "noise". Therefore, the results of identification of fixed points and computations of displacements done with the using the above mentioned methods, proved to be non-identical. This is characteristic that the degree of answer "uncertainty" with the use of various methods was greater for the measurements done in 1975—1976 than for those carried out later, when the true values of displacements surely slightly increased.

The authors of the work [1] expressed the opinion that besides the approaches, presented at several research centres in the world, there were the important achievements concerning studies on the analysis of deformation measurements, and they invited their authors to co-operate an "ad hoc" committee. This encourages me to present the approach which I prefer, specially seeing that earlier participation in the works has been impossible owing to my non-attendance on the symposium in Bonn in 1978 year.

The approach and the opinion, which I would like to present, are not worthy of being called "Warsaw approach", like the solutions presented in the work [1], because in Poland and in Warsaw scientific circle there are the authors of different approaches. It should be positively evaluated, as the expression of liveliness of scientific investigations in this field in Poland. Presenting my particular opinion concerning the approach to the analysis of deformation measurements, I would like to emphasize that it is relatively the closest to the approach, presented by A. Chrzanowski, from among those considered in the work [1].

To begin with I should like to mention that there are two types of measuring-computational approach for control networks:

1. The same magnitudes are measured periodically at the control network, which causes that elaboration of measurements, i.e. identification of fixed points and computation of displacements of dislocated points consists in mathematical operations connected with *differences of measurements of the same magnitudes.*

2. At control network each time (during each periodical measurement) magnitudes necessary for determination of coordinates of network points are measured (not necessarily the same magnitudes), which causes that identification of fixed points and calculation of displacements of dislocated points must be based on mathematical operations connected with *functions of coordinates, determined independently at each cycle.* The first mentioned method, known as the Prof. Lazzarini's "difference method" is appreciated more by Professor than the second approach, called "coordinate method", as it is more accurate, eliminating the influence of some systematic errors, more "clear" notionally and easier for computations. I agree entirely with this opinion, however, supposing that practically possibilities of applying difference method are limited. Namely, even in the case, when the usage of that method is assumed,

after a lapse of several years arise the obstacles, which will make impossible periodically repeated measurements of the same magnitudes. It can be caused, for instance, by revealing during the analysis of measurements, that some results appear with the excessive errors attached, and these results should not be included into adjustment, and at the same time, considering a lapse of several years from the completion of periodical measurements, it is not allowable to include the repeated measurement into adjustment, which would be done after an analysis and would replace the result with the excessive error attached. Moreover, it can be necessary to change the structure of network because of "dropping out" some points and setting up additional points, in accordance to the previous investigations. It particularly occurs in the course of construction, and also in the case, when displacements of the active landslides are axamined. Practically, the difference method is possible to apply (but without guarantee at the whole period of investigations) in examining deformations of the structures under operation, where the major terrain management changes, and the bedding deformations of the whole control network, do not exist.

My opinion related to that matter I can express as follows: during designing, setting up periodical network measurement one should aim at a measurement of the same magnitudes. At the same time one should consider that after a certain period it may be impossible to continue, and so taking it into account, such control networks should be designed, as having the structure which enables computations based on independent adjustment of network at each cycle.

Keeping this principle prevents from interrupting continuity of determination of displacements in the cases when continuation of applying difference method proves to be impossible.

The approach presented for computation of horizontal displacements can be described as follows:

Step No 1. Preliminary analysis of the results of the performed measurements

The analysis aims at detection of the results with the excessive errors attached, and should prevent from taking these results into further computations. It should be performed during each periodical measurement and directly after its completion, as quickly to be able to repeat the measurements with excessive errors, and to use the results of repeated measurements without anxiety that they are related to the changed displacements. The compliance with geometrical requirements, derived from the relations between measured magnitudes, should be checked during the analysis.

If the difference method is used, the relations between differences of the results of measurements $dl = l'' - l'$ and verifiable relations between the results of initial measurement l', and separately from the current measurement l'', are controlled. It should be emphasized that often number of requirements, connected with independently treated results of initial and current measurement is limited, if differential method is used, as a result of applying simplifications in network construction, possible at this method (for instance, non-identity of targets during aiming at the same point from different positions). If the method permitting measuring various magnitudes at periodical measurements (coordinate method) is used, all geometrical requirements are checked, similar to the geodetic network of any other type (triangle and polygon closures, sine conditions).

Step No 2. Adjustment

a) If the differential method is used, the difference $dl = l'' - l'$ at the control network should be adjusted with the only required limitations of degrees of freedom [4]. As a result of such an adjustment, apparent displacements dx, dy for all points of control network are given, as well as corrections of observation differences v_{dl} and covariance matrix $(\underline{apa})^{-1}$.

b) If the coordinate method is used, observations of initial network l' and observations of current network l'' should be adjusted separately with the only required limitations of degrees of freedom. As a result of such adjustments x', y' coordinates for all points of initial network are given, as well as x'', y'' coordinates for all points of current network, corrections v_l', v_l'' and variance-covariance matrices $(\underline{a'p'a'})^{-1}$, $(\underline{a''p''a''})^{-1}$.

Step No 3. Computation of relative differences of distances $d\beta$, differences of directions $d\alpha$ and their errors

The relative difference of distances and differences of directions should be computed for the linear segments coupling points of the control network al all combinations. Certainly, differences for the linear segments between the same points at the initial and the current network are computed. If the network is newly stabilized, and new points are included, it should be assumed that a periodical measurement done after the new stabilization and inclusion of the new points is the initial measurement for further computations.

a) If the differential method is applied, computation of relative differences of distances and differences of directions is done, using apparent displacements dx, dy, obtained from the adjustment performed at step No 2a. Then, we use the following formulas:

$$d\beta_{ik} = \frac{dd_{ik}}{d_{ik}} = -b_{ik}(dx_k - dx_i) - a_{ik}(dy_k - dy_i), \tag{1}$$

$$d\alpha_{ik} = -a_{ik}(dx_k - dx_i) - b_{ik}(dy_k - dy_i), \tag{2}$$

where: $-a = \frac{\Delta y \, \varrho}{d^2}$, $\quad b = \frac{\Delta x \, \varrho}{d^2}$.

Errors $m_{d\beta_{ik}}$, $m_{d\alpha_{ik}}$ are computed using the formula for the error of function of adjusted observations and the variance-covariance matrix calculated at step No 2

$$m_{d\beta_{ik}} = m_0 \sqrt{\underline{f}_\beta \, (\underline{apa})^{-1} \, \underline{f}_\beta} = m_0 \sqrt{\begin{Vmatrix} b_{ik} \\ a_{ik} \\ -b_{ik} \\ -a_{ik} \end{Vmatrix} (\underline{apa})^{-1} \begin{Vmatrix} b_{ik} \\ a_{ik} \\ -b_{ik} \\ -a_{ik} \end{Vmatrix}}, \tag{3}$$

$$m_{d\alpha_{ik}} = m_0 \sqrt{\underline{f}_\alpha \, (\underline{apa})^{-1} \, \underline{f}_\alpha} = m_0 \sqrt{\begin{Vmatrix} a_{ik} \\ b_{ik} \\ -a_{ik} \\ -b_{ik} \end{Vmatrix} (\underline{apa})^{-1} \begin{Vmatrix} a_{ik} \\ b_{ik} \\ -a_{ik} \\ -b_{ik} \end{Vmatrix}}, \tag{4}$$

where at columns at lines of cracovian $(\underline{apa})^{-1}$ appear subsequently elements corresponding with unknowns dx_i, dy_i, dx_k, dy_k.

b) If the coordinate method is applied, computation of relative differences of distances and directions is done using x', y' coordinates obtained from the adjustment of initial network and x'', y'' coordinates obtained from the adjustment of the current network.

Then the following formulas are used:

$$d\beta_{ik} = \frac{\sqrt{(x_k'' - x_i'')^2 + (y_k'' - y_i'')^2} - \sqrt{(x_k' - x_i')^2 + (y_k' - y_i')^2}}{\sqrt{(x_k' - x_i')^2 + (y_k' - y_i')^2}}, \tag{5}$$

$$d\alpha_{ik} = \operatorname{arc\,tg} \frac{y_k'' - y_i''}{x_k'' - x_i''} - \operatorname{arc\,tg} \frac{y_k' - y_i'}{x_k' - x_i'}, \tag{6}$$

$m_{d\beta_{ik}}$, $m_{d\alpha_{ik}}$ errors are computed using the formula for the error of the function of adjusted observations and variance-covariance matrices calculated at step No 2

$$m_{d\beta_{ik}} = \sqrt{m_0'^2 \, \underline{f}'_{\beta_{ik}} \, (\underline{a'p'a'})^{-1} \, \underline{f}'_{\beta_{ik}} + m_0''^2 \, \underline{f}''_{\beta_{ik}} \, (\underline{a''p''a''})^{-1} \, \underline{f}''_{\beta_{ik}}}, \tag{7}$$

$$m_{d\alpha_{ik}} = \sqrt{m_0'^2 \, \underline{f}'_{\alpha_{ik}} \, (\underline{a'p'a'})^{-1} \, \underline{f}'_{\alpha_{ik}} + m_0''^2 \, \underline{f}''_{\alpha_{ik}} \, (\underline{a''p''a''})^{-1} \, \underline{f}''_{\alpha_{ik}}}, \tag{8}$$

where: index mark $''$ denotes the data referring to the network from the actual survey, whereas index mark $'$ stands for the data of the network from the preliminary survey.

Step No 4. Identification of fixed points

Presented here the approaching idea for identification of fixed points was described in the work [3] (1962) and illustrated in the work [2] (1964). According to that idea, vertices of these figures, which kept features of constancy, are accepted as fixed points of control network.

According to the kind magnitudes measured at the control network, one can check its features of constancy: shape, size and orientation, examining network figures. The following magnitudes can be measured: directions, angles, distances, indicatory directions (azimuths or directions to the distant, practically stationary targets). Table 1 determines, in agreement with [3], the features of constancy of which can be checked, and symptoms of constancy of which should be used, according to the kind of measurements performed.

Table 1

No	Type of measurements	Features of constancy	Expected values	
			$d\beta$	$d\alpha$
1	Directions or angles	shape	any	any
2	Lengths	sizes	0	any
3	Directions of angles and lengths	sizes	0	any
4	Directions or angles and indicatory directions	shape orientation	any	0
5	Directions or angles, lengths and indicatory directions	sizes orientation	0	0
6	Lengths and indicatory directions	sizes orientation	0	0

Note: Compliance of feature of invariability of sizes and *orientation* is superior in relation to the ascertainment of the feature of invariability of *shape*. It means that if we ascertain compliance of invariability of *sizes* or *orientation*, then, simultaneously, the feature of invariability of *shape* is complied, but there does not take place the reverse relation, i.e. that compliance of the feature of invariability of *shape* does not imply compliance of the feature of invariability of *sizes* or *orientation*. Features of invariability of *sizes* and *orientation* are of equal rank, but none of them can do the duty of the other, i.e. only compliance of both these features at the same time yields the highest degree (actually possible to be obtained) of reliability that the indentification is correct.

Checking of features of constancy takes place in figures with the number of vertices analyzed at network at all combinations. Two approaches are possible here. If we suppose that major number of points kept constancy of mutual position, we begin analysis checking, whether features of constancy have been kept at the figure formed from all the n points of the network. In case of negative answer we check features of constancy at figures formed from $n-1$ points. If there are no figures with this number of points complying with the requirements of constancy, searching is continued using all figures formed from $n-2$ points. This approach is repeated until positive answer is obtained; it means, until we can ascertain that one of figures formed from $n-r$ points complies with the requirements of constancy. This figure can be assumed as a figure formed from points characterized by the invariable mutual position.

We use the second approach, if we suppose that there is a shortage of points at network, keeping mutual invariable position. Then, we begin analysis checking features of constancy at figures formed by minimum number of points m, which ensures that control. We can presume that if there are m points constant at the network, at one figure with m vertices, we ascertain features of constancy. If there are more constant points, we will be able to ascertain these features at greater number of figures with m points. Then, the next checking is necessary, at figures formed by $m+1$ points, $m+2$, etc., until features of constancy will be complied at one figure with $m+k$ vertices. This figure will be formed by points, keeping mutual invariability of position. Both the mentioned above approaches lead to identification of the figure formed by fixed points. Utilizing both of them, we obtain the result, if $n-r = m+k$.

The above mentioned analysis can be shortened, neglecting searching for figures with features of constancy, which consist of increasing number of points. For this purpose, after carrying out the analysis of m-point figures, one should note numbers of all points, forming figures with m vertices, which keep features of constancy. If these numbers are repeated at all combinations of figures with m vertices, keeping features of constancy, one can conclude with the great probability that these points keep invariability of mutual position. Then, one should only check features of constancy at the figure formed by these points. However, it must be added that such approach can be deceptive, as at figures formed by minimum number of points, sufficient for checking features of constancy, these features can be complied by chance, even in the case, when vertices of these figures do not belong actually to the group of points of the control network, keeping condition of the mutual constant position. Such a case can be revealed through the compliance with some (not all) features of constancy.

The magnitudes used for checking the features of constancy are computed from the following formulas:

$$d\beta_{\text{mean}} = \frac{[p_\beta\, d\beta]}{[p_\beta]}; \quad d\alpha_{\text{mean}} = \frac{[p_\alpha\, d\alpha]}{[p_\alpha]}, \tag{9}$$

$$m_{0\beta}=\sqrt{\frac{[p_\beta\,(d\beta-d\beta_{\text{mean}})^2]}{s-1}}\;; \qquad m_{0\alpha}=\sqrt{\frac{[p_\alpha\,(d\alpha-d\alpha_{\text{mean}})^2]}{s-1}} \tag{10}$$

where: $p_{\beta_{ik}}=\dfrac{1}{m^2_{d\beta_{ik}}}$; $\quad p_{\alpha_{ik}}=\dfrac{1}{m^2_{d\alpha_{ik}}}$.

s denotes the number of line segments coupling vertices of the analyzed figure.

These magnitudes should be computed at each analyzed figure, using $d\beta_{ik}$, $d\alpha_{ik}$, $m_{d\beta_{ik}}$, $m_{d\alpha_{ik}}$, calculated at step No 3, utilizing formulas (1—4) or (5—8) at all combinations. At any case, regardless which features of constancy are to be checked, the following inequalities should be complied:

$$\boxed{m_{0_\beta}\leqslant K; \quad m_{0_\alpha}\leqslant K}, \tag{11}$$

where $K=1+\dfrac{1}{\sqrt{2(s-1)}}$. Compliance with these inequalities means that constancy of shape of the analyzed figure was ascertained.

Criteria (11) express condition of intrinsic agreement of $d\beta$, $d\alpha$ parameters at the investigated figure. Compliance with these criteria is sufficient to ascertain constancy of mutual position of figure vertices in these cases, when $d\beta$, $d\alpha$ according to Table 1, may assume any values. It means, for example, that for the network, at which angles of directions are only measured, we can ascertain that figure vertices do not change their mutual position, on the basis of keeping the shape of figure, whereas ascertainment of constancy of size and orientation is not possible.

In these cases, when, according to Table 1, $d\beta$, $d\alpha$ should be, as a rule, equal to 0, compliance by magnitudes $d\beta_{\text{mean}}$, $d\alpha_{\text{mean}}$ with the inequalities, is also indispensable, according to Eqs. (9):

$$\boxed{d\beta_{\text{mean}}\leqslant R\cdot\frac{m_{0_\beta}}{\sqrt{[p_\beta]}}; \quad d\alpha_{\text{mean}}\leqslant R\cdot\frac{m_{0_\alpha}}{\sqrt{[p_\alpha]}}}, \tag{12}$$

where R — multiple of the mean error, corresponding to the assumed confidence level.

Compliance with the first inequality means the ascertainment of constancy of the size, while compliance with the second inequality means ascertainment of constancy of orientation of the analyzed figure.

Step No 5. Computation of point displacements

After identification of fixed points, calculation of displacements of the other moving points at the control network becomes possible. Two approaches are applied at this stage:

1) Transformation of apparent displacements dx, dy to displacements $\underline{dx}$, $\underline{dy}$ or transformation x'', y'' coordinates of the current network into the system defined by x', y' coordinates of these points belonging to the initial network, which were identified as the fixed points.

2) Adjustment of dl differences or observations l', l'' of the control network, adapting them to all the points identified as fixed points.

Each of two variants has the followers and opponents. Variant No 1 has been used earlier, as it is less labour-consuming and hence easier, if arithmometers are utilized. But variant No 2 is considered as more perfect by the majority of researchers in this domain finding that it can be used, if computers are available.

I must say that for a long time I also have been a follower of variant No 2. But after thorough consideration I arrived at the conclusion that from the methodical point of view variant No 1 is more appropriate; it is more "clear" than variant No 2. In my opinion during choosing the variant, two factors should be taken into account: trends to obtain as good result as possible and compliance with logic requirements of the process. In other words, I am not the follower of the trend aiming at obtaining the best result at all costs, for instance, neglecting logical circumstances of task solution. I mean that it is not well-founded logically to distort the results of measurements during adjustment, taking into account any other reasons than their mutual inconformity at the control network. Especially one reason should not be taken into consideration, namely a supposition resulting from identification that some points are fixed, because in fact we can only ascertain that they are not moving in the limits of errors of determination and, moreover, we utilize the results of the same measurements, which were used for adjustment. In my opinion positive result of identification allows only for such operations which to the highest degree bring closer the initial network to the current network, using the points identified as fixed, but without distortion of the results of measurements.

According to that opinion, computation of displacements should be based on such a transformation of the current control network adjusting it to the identified fixed points, in order not to change the size of the figure formed by fixed points, in case when lengths are measured at the network, and in order not to change the figure orientation, in case when indicatory directions are measured. These are the additional conditions for the variant based on transformation, which so far have not been taken into account. I shall mention that such conditions had not to be considered at networks, where only angles or directions were measured, because in these cases it was feasible to ascertain constancy only checking condition of keeping the shape of figure (condition expressed by formulas (11) or checking conditions resulting directly from transformation method or searching for fixed points [7]).

Transformation which keeps the condition of invariability of the size of the figure formed by fixed points (junction points) is based on ascertainment of equality $q = 1$ (where q stands for the coefficient of scale change). This transformation was described in works [5] and [6]. Transformation which keeps the condition of invariability of orientation of the figure, formed by junction points, is based on parallel displacement of all transformation — junction points ($\alpha = 0$). Transformation of x'', y'' coordinates to the initial network should be done in such a way that first of all transformation coefficients α, β, a, b are computed, with using the known formulas (13)—(15), on the basis of coordinates of points, identified as fixed:

$$\alpha = \frac{[x_r''(y_r' - y_r'') - y_r''(x_r' - x_r'')]}{[y_r''^2 + x_r''^2]} = \sin \varepsilon, \tag{13}$$

$$\beta = \frac{[x_r''(x_r' - x_r'') + y_r''(y_r' - y_r'')]}{[y_r''^2 + x_r''^2]} = q \cos \varepsilon - 1, \tag{14}$$

$$a = \frac{[x']}{n} - \frac{[x'']}{n}, \quad b = \frac{[y']}{n} - \frac{[y'']}{n}, \tag{15}$$

where r indicates that the coordinates are reduced to the mean value from the coordinates of fixed points, whereas n is the number of adjustment points, ε — means turn.

Next, in order to obtain $q = 1$, the following magnitudes are computed:

$$\alpha' = \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + (1-\beta)^2}}, \tag{16}$$

$$\beta' = 1 - \frac{1-\beta}{\sqrt{a^2 + (1-\beta)^2}}. \tag{17}$$

Coordinates of all the points of current network $(x'')'$, $(y'')'$, being expressed in the coordinate system of the initial network through the adjustment to the fixed points with the condition $q = 1$, are computed using the following formulas:

$$\begin{aligned} (x'')_P' &= x_P'' + a - y_{Pr}''\alpha' + x_{Pr}''\beta', \\ (y'')_P' &= y_P'' + b + x_{Pr}''\alpha' + y_{Pr}''\beta'. \end{aligned} \tag{18}$$

As (x''),' $(y'')'$ coordinates of the current network have been expressed in the coordinate system of the initial network, displacements of points can be computed using the formulas:

$$\underline{\mathrm{d}x}_P = (x'')_P' - x_P'; \quad \underline{\mathrm{d}y}_P = (y'')_P' - y_P'. \tag{19}$$

If the differential method is used, it means if, during step No 2 we have calculated apparent displacements dx, dy, computation of displacements $\underline{dx}$, $\underline{dy}$ is performed with the help of the method described in [7], using α', β' coefficients calculated from formulas (16) and (17), on the basis of α, β coefficients.

If during transformation of coordinates of apparent displacements, we would like to include differences in accuracy of determination of particular points, identified as fixed, we can make computations using the following formulas:

$$\begin{aligned} x_0'+x'' \, q \cos \varepsilon - y'' \, q \sin \varepsilon &= x' + \underline{\mathrm{dx}}', \\ y_0'+y'' \, q \cos \varepsilon + x'' \, q \sin \varepsilon &= y' + \underline{\mathrm{dy}}'. \end{aligned} \tag{20}$$

These equations can be treated as equations of corrections. Equations of that type we arrange for all adjustment points, balance them in accuracy, and the obtained set of equations is solved, keeping condition $[\mathrm{p}\, \underline{\mathrm{dx}}' \, \underline{\mathrm{dx}}'] + [\mathrm{p}\, \underline{\mathrm{dy}}' \, \underline{\mathrm{dy}}'] = \min$. Solving is carried out until unknowns $q \cos \varepsilon$, $q \sin \varepsilon$ are computed, and after that we calculate:

$$\begin{aligned} \sin \varepsilon &= \frac{q \sin \varepsilon}{\sqrt{(q \cos \varepsilon)^2 + (q \sin \varepsilon)^2}}, \\ \cos \varepsilon &= \frac{q \cos \varepsilon}{\sqrt{(q \cos \varepsilon)^2 + (q \sin \varepsilon)^2}}. \end{aligned} \tag{21}$$

Further, instead of $q \cos \varepsilon$, $q \sin \varepsilon$ we substitute to the solved set of equations $\cos \varepsilon$, $\sin \varepsilon$, calculated from formulas (21) and, finally, we compute subsequent unknowns x_0, y_0 instead of x_0', y_0'. In result, instead of Eqs. (20), we solve the following set of equations (balanced in accuracy):

$$\begin{aligned} x_0 + x'' \cos \varepsilon - y'' \sin \varepsilon &= x' + \underline{\mathrm{dx}}, \\ y_0 + y'' \cos \varepsilon + x'' \sin \varepsilon &= y' + \underline{\mathrm{dy}}, \end{aligned} \tag{22}$$

keeping condition $q = 1$.

Computed unknowns x_0, y_0, $\cos \varepsilon$, $\sin \varepsilon$ we substitute to Eqs. (22) arranged for all remaining points, computing components of displacements $\underline{\mathrm{dx}}$, $\underline{\mathrm{dy}}$.

— · —

Concluding, I would like to refer once more to the resolution of the Symposium, which was cited at the beginning of this paper. Namely, in my opinion the results of measurements of deformations should be not only computed, adjusted and tested with using different methods, but also each particular approach should be fully independent. The question is that the principles of identification of the fixed points with the use of quite different methods are always to some extent subjective, for instance, as far as the level of confidence is concerned. In this case, when searching for fixed points with the use of one method, it is better not to know the earlier results, obtained through application of the other methods for the same measurements. It means that results of measurements should be computed, adjusted and tested by different persons working separately, as is the case at the geodetic computations carried out simultaneously by two or more workers.

LITERATURA

[1] Chrzanowski A. (with the participation of "ad hoc" committee): *A comparison of different approaches into the analysis of deformation measurements.* XVI International Congress of Surveyors. VI. Commission, 1981.

[2] Gaździcki J., Janusz W.: *Próby wykorzystania elektronowej maszyny cyfrowej UMC-1 do rachunkowego opracowania wyników pomiaru odkształceń budowli hydrotechnicznych*, Prace Instytutu Gospodarki Wodnej, t. 2, zeszyt 3, 1964 (*Use of UMC-1 computer for elaboration of the measurements of deformations of hydrotechnical structures*, Proceedings of the Institute of Water Economy).

[3] Janusz W.: *Zagadnienie identyfikacji punktów stałych w sieciach kontrolnych dla pomiarów odkształceń.* Prace IGiK, t. 9, zeszyt 1 (19), 1962 (*Problem of identification of fixed points in control networks for measurements of deformations*, Proceedings of the Institute of the Geodesy and Cartography).

[4] Janusz W.: *Sposoby obliczania poziomych przemieszczeń punktów sieci geodezyjnych w zależności od rodzaju wykonywanych okresowo obserwacji*, Przegląd Geodezyjny, 2/1964 (*Methods of computations of horizontal point displacements at geodetic networks dependent on type of periodical observations*, Geodetical Review).

[5] Janusz W.: *Obsługa geodezyjna budowli i konstrukcji*, PPWK, Warszawa, 1975 (*Surveying service of buildings and structures*, State Cartographical Publishing House).

[6] Janusz W.: *Transformacja współrzędnych bez zniekształceń*, Przegląd Geodezyjny, 4/1976 (*Transformation of coordinates without distortions*, Geodetical Review).

[7] Lazzarini T.: *Geodezyjne pomiary przemieszczeń budowli i ich otoczenia*, PPWK, Warszawa, 1977 (*Surveying measurements of displacements of buildings and their surroundings*, State Cartographical Publishing House).

Translation: Zbigniew Bochenek

ВОЙЦЕХ ЯНУШ

ВЫЧИСЛЕНИЕ ГОРИЗОНТАЛЬНЫХ СДВИГОВ ПУНКТОВ КОНТРОЛЬНОЙ СЕТИ

Резюме

Представлен технологический процесс вычисления горизонтальных сдвигов пунктов в контрольной сети, охватывающий очередные этапы:

1) предварительный анализ результатов выполненных измерений,

2) уравнивание,

3) вычисление относительных разниц расстояний $d\beta$ и разниц направлений $d\alpha$, а также их ошибок,

4) идентификация постоянных пунктов,

5) вычисление сдвигов пунктов.

Технологический процесс вычислений представлен в двух вариантах, в зависимости от того:

1) измеряются ли периодически эти самые величины в контрольной сети,

2) или же структура контрольной сети и вид выполняемых периодически измерений подвергается изменениям.

В первом случае вычисления ведутся с применением разниц результатов периодических измерений $dl = l'' - l'$, где l' — результат первичного измерения, l'' — результат актуального измерения той же величины. Во втором случае вычисления ведутся с применением разниц координат тех самых пунктов сети, полученных из независимого уравнивания первичной сети и сети, измеренной актуально.

Сформулированы критерия постоянности, образ действия при идентификации постоянных пунктов, а также объяснены геометрические значения и отношения первенства и второстепенности отдельных критериев в зависимости от того, какие элементы сети измеряются периодически (углы, направления, расстояния, азимуты).

Работа относится к исследованиям, проводимым в рамках комитета „ad hoc" по исследованию разных действий при использовании тех же самых измерительных данных, служащих для определения малых сдвигов относительно ошибок их определения, в рамках рабочей группы 6-C FIG (Международной федерации геодезистов).

Перевод: Róża Tołstikowa