PRACE INSTYTUTU GEODEZJI I KARTOGRAFII

Tom XXVI, Zeszyt 3(63), 1979

JERZY GAŹDZICKI

528.1:528.33

Metoda wyrównania zbioru poziomych sieci geodezyjnych

Zarys treści. Podaje się metodę wyrównania zbioru wzajemnie powiązanych sieci, polegającą na iteracyjnym obliczeniu jednoznacznych wartości współrzędnych wszystkich punktów. Uzyskane rozwiązanie spełnia warunek minimalnej deformacji sieci.

1. Wstęp

Typowymi produktami prac geodetów są sieci geodezyjne. Z tego oczywistego faktu wynika, że liczba różnego rodzaju sieci stale rośnie w każdym kraju. Sieci nowe są zakładane na obszarach pokrytych już uprzednio innymi sieciami, zwanymi tu krótko sieciami starymi. Z reguły sieci łączą się ze sobą, mając pewne punkty wspólne.

Pod względem numerycznym powiązanie dwóch sieci wykonuje się różnymi sposobami. Ogólnie rzecz biorąc, można stwierdzić, że stosowane są procesy obliczeniowe prowadzące do jednego z dwóch podstawowych wariantów wyników.

W wariancie I punkty należące wyłącznie do sieci starej zachowują współrzędne określone w wyrównaniu tej sieci wykonanym bez uwzględnienia sieci nowej; współrzędne punktów należących wyłącznie do sieci nowej są otrzymywane w wyrównaniu sieci nowej, natomiast współrzędne punktów wspólnych uzyskuje się w sposób właściwy dla zastosowanej metody.

Jako wypadki szczególne można tu podać:

— klasyczne wyrównanie sieci nowej jako sieci drugiego rzędu w stosunku do sieci starej; zakłada się wówczas, że współrzędne obliczone w wyrównaniu sieci starej są bezbłędne w wyrównaniu sieci nowej,

— wyrównanie sieci nowej przy uwzględnieniu wariancji (metoda Hausbrandta) lub też wariancji i kowariancji współrzędnych punktów wspólnych określonych w wyrównaniu sieci starej.

Wariant II charakteryzuje się tym, że w rezultacie dołączenia sieci nowej zmianie ulegają również współrzędne wszystkich punktów sieci starej. Wyniki tego typu uzyskuje się, stosując, na przykład, jedną z metod łącznego wyrównania sieci spełniającą warunek

$$v^T Q^{-1} v = \min \tag{1}$$

odniesiony do wektora poprawek **v** oraz macierzy kowariancyjnej **Q** wszystkich obserwacji obydwóch sieci.

Generalną wadą rozwiązań według wariantu I jest zniekształcanie jednej lub obydwóch sieci w rejonach punktów wspólnych. Obserwacjom w tych rejonach przyporządkowywane są nadmiernie duże poprawki. Wielkość zniekształcenia uzależniona jest przy tym od stosunku dokładności obserwacji obydwóch sieci, użytej metody oraz sposobu powiązania i kształtu sieci.

Metody realizujące w sposób ścisły warunek (1) stosowane są dość rzadko z przyczyn czysto praktycznych: cena jaką należy płacić za zgodność z teorią jest niejednokrotnie zbyt wysoka. Dotyczy to zwłaszcza zakładanych obecnie sieci szczegółowych, które, na przykład w Polsce, zawierają dziesiątki, a nawet setki tysięcy punktów.

W praktyce geodezyjnej rozwiązaniem bardzo dogodnym jest wyrównywanie każdej sieci szczegółowej bez uwzględnienia powiązań z sąsiednimi sieciami o podobnej dokładności. Biorąc to pod uwagę, w pracy niniejszej rozpatruje się zbiór wzajemnie powiązanych, lecz oddzielnie wyrównanych sieci geodezyjnych pokrywających pewien obszar. Zakłada się, że współrzędne punktów we wszystkich sieciach są obliczone w jednym i tym samym układzie współrzędnych na drodze:

— wyrównania w nawiązaniu do punktów sieci państwowej wyższej klasy, lub

— wyrównania niezależnego oraz późniejszej transformacji współrzędnych.

Pomiędzy wartościami współrzędnych punktów wspólnych otrzymanymi z sąsiednich sieci istnieją zatem pewne różnice wynikające z błędów pomiarowych. Zachodzi więc potrzeba wyrównania i uzyskania jednoznacznych współrzędnych każdego punktu.

Dążąc do uniknięcia wad rozwiązań według wariantu I i jednocześnie rezygnując ze ścisłego spełnienia warunku (1) proponuje się nową metodę wyrównania, stawiając warunek minimalnej deformacji zbioru sieci w sensie określonym w dalszym ciągu pracy. Do zalet tej metody zaliczyć można:

— jednoczesne i jednolite przetworzenie wszystkich wyrównywanych sieci,

— uniwersalność zastosowań,

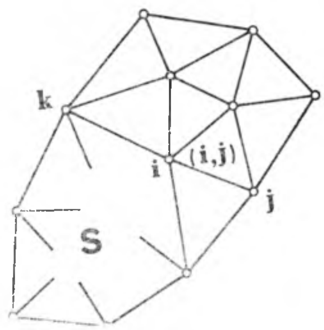
— prostotę algorytmu oraz małą pracochłonność obliczeń,

— niewielką liczbę danych początkowych.

Metoda nie kwalifikuje się, oczywiście, do wyrównania sieci I klasy oraz innych sieci o wysokich standardach dokładności.

2. Podstawowe założenia

W niniejszej pracy sieć geodezyjna S będzie określona przez podanie (rys. 1):



Rys. 1

1) zbioru P oznaczeń punktów sieci,

2) zbioru $B = \{(i, j)\}$ oznaczeń boków sieci, gdzie $i \in P$, $j \in P$ są oznaczeniami pary punktów połączonych bokiem,

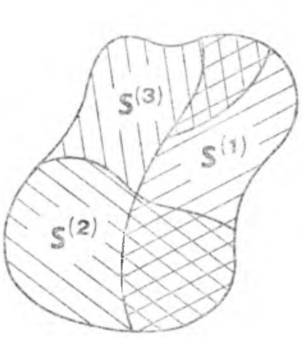
3) zbioru $W = \{(x_k, y_k)\}$, $k \in P$ par współrzędnych punktów sieci,

4) parametru m dokładności sieci, przyjmowanego jako przeciętny średni błąd względny długości boku w sieci.

W sposób ogólny można zatem przedstawić sieć geodezyjną S pisząc

$$S = (P, B, W, m) \tag{2}$$

Wyobraźmy sobie teraz, że dany obszar jest pokryty zbiorem Z sieci geodezyjnych $S^{(1)}, S^{(2)}, \ldots S^{(n)}$ (rys. 2):



Rys. 2

$$Z = \{S^{(1)}, S^{(2)} \ldots S^{(n)}\}, \tag{3}$$

gdzie

$$S^{(h)} = \{P^{(h)}, B^{(h)}, W^{(h)}, m^{(h)}\}. \tag{4}$$

Zakłada się, że:

1) każda sieć $S^{(h)}$ ma co najmniej jeden punkt wspólny z sieciami pozostałymi,

2) każdy punkt geodezyjny w zbiorze sieci Z ma jedno, niepowtarzalne oznaczenie,

3) współrzędne punktów we wszystkich sieciach podane są w jednym układzie współrzędnych,

4) wszystkie sieci są doprowadzone do jednolitej skali oraz do jednolitej orientacji przez uprzednie wyrównania oraz ewentualne transformacje metodą najmniejszych kwadratów,

5) pomiędzy współrzędnymi punktów wspólnych t, tj. punktów należących do co najmniej dwóch sieci $S^{(q)}$, $S^{(r)}$ ($t \in P^{(q)}$, $t \in P^{(r)}$) istnieją pewne różnice o charakterze przypadkowym, wynikające z błędów pomiarowych.

Dla wyrównania tak określonego zbioru sieci i uzyskania jednoznacznych współrzędnych wszystkich punktów stawia się następujący warunek ogólny:

$$\sum_{h=1}^{n} \sum_{(i,j) \in B^{(h)}} w^{(h)} \left[(va_{ij}^{(h)})^2 + (vb_{ij}^{(h)})^2 \right] = \min, \tag{5}$$

$w^{(h)} = \dfrac{c}{(m^{(h)})^2}$ jest wagą sieci $S^{(h)}$ obliczoną przy uwzględnieniu wybranej stałej c,

$va_{ij}^{(h)}$ — jest zmianą azymutu $a_{ij}^{(h)}$ (w radianach) boku (i, j) w tej sieci,

$vb_{ij}^{(h)}$ — jest zmianą logarytmu naturalnego $b_{ij}^{(h)} = \ln l_{ij}^{(h)}$ długości $l_{ij}^{(h)}$ tego boku, równą względnej zmianie długości:

$$vb_{ij}^{(h)} = \frac{vl_{ij}^{(h)}}{l_{ij}^{(h)}}.$$

Warunek (5) nazywany jest w niniejszej pracy warunkiem minimalnej deformacji zbioru sieci. Zgodnie z tym warunkiem poszukuje się takich wartości współrzędnych punktów, aby suma kwadratów zmian azymutów oraz względnych zmian długości pomnożonych przez odpowiednie wagi była równa minimum. Stosuje się przy tym wagi $w^{(h)}$ jednakowe dla azymutów i logarytmów długości w danej sieci $S^{(h)}$. Przyjęcie tak ogólnego modelu stochastycznego znajduje swoje uzasadnienie w wynikach obliczeń testowych, jak też w fakcie, że dla większości sieci, zwłaszcza dawnych, brak jest informacji umożliwiających sformułowanie tego modelu w sposób bardziej szczegółowy.

3. Wyprowadzenie wzorów

Rozwiązanie przedstawionego powyżej problemu uzyskuje się w prosty sposób, stosując metodę najmniejszych kwadratów w odniesieniu do azymutów $a_{ij}^{(h)}$ i logarytmów długości $b_{ij}^{(h)}$ jako wielkości obserwowanych. Zmiany $va_{ij}^{(h)}$, $vb_{ij}^{(h)}$ spełniają wówczas rolę poprawek obserwacji.

Dla każdego boku (i, j) sieci $S^{(h)}$ można zatem napisać dwa równania poprawek:

$$va_{ij}^{(h)} = da_{ij} + a_{ij}^{(0)} - a_{ij}^{(h)}, \tag{6}$$

$$vb_{ij}^{(h)} = db_{ij} + b_{ij}^{(0)} - b_{ij}^{(h)}, \tag{7}$$

gdzie da_{ij}, db_{ij} są zmianami, które należy dodać do wartości przybliżonych $a_{ij}^{(0)}$, $b_{ij}^{(0)}$ obliczonych ze współrzędnych przybliżonych $x_i^{(0)}, y_i^{(0)}, x_j^{(0)}, y_j^{(0)}$ aby uzyskać wyrównane wartości azymutu i logarytmu długości boku (i, j).

Oznaczając dalej

$dx_k = x_k - x_k^{(0)}$, $dy_k = y_k - y_k^{(0)}$ — różnice między współrzędnymi wyrównanymi i przybliżonymi punktu k,

$dx_k^{(h)} = x_k^{(h)} - x_k^{(0)}$, $dy_k^{(h)} = y_k^{(h)} - y_k^{(0)}$ — różnice między współrzędnymi w sieci $S^{(h)}$ oraz współrzędnymi przybliżonymi punktu k,

można przekształcić równania (6), (7) zastępując da_{ij}, db_{ij}, oraz $a_{ij}^{(h)} - a_{ij}^{(0)}$ $b_{ij}^{(h)} - b_{ij}^{(0)}$ odpowiednimi różniczkami zupełnymi:

$$va_{ij}^{(h)} = B_{ij}dx_i - A_{ij}dy_i - B_{ij}dx_j + A_{ij}dy_j - (B_{ij}\,dx_i^{(h)} - A_{ij}\,dy_i^{(h)} - B_{ij}\,dx_j^{(h)} + A_{ij}\,dy_j^{(h)}), \tag{8}$$

$$vb_{ij}^{(h)} = -A_{ij}dx_i - B_{ij}dy_i + A_{ij}dx_j + B_{ij}dy_j - (-A_{ij}\,dx_i^{(h)} - B_{ij}\,dy_i^{(h)} + A_{ij}\,dx_j^{(h)} + B_{ij}\,dy_j^{(h)}), \tag{9}$$

gdzie współczynniki A_{ij}, B_{ij} są podane wzorami

$$A_{ij} = \frac{x_j^{(0)} - x_i^{(0)}}{(x_j^{(0)} - x_i^{(0)})^2 + (y_j^{(0)} - y_i^{(0)})^2}, \quad B_{ij} = \frac{y_j^{(0)} - y_i^{(0)}}{(x_j^{(0)} - x_i^{(0)})^2 + (y_j^{(0)} - y_i^{(0)})^2} \tag{10}$$

Obliczenie niewiadomych różnic między współrzędnymi wyrównanymi i przybliżonymi może być łatwo wykonane przy zastosowaniu procesu iteracyjnego Gaussa-Seidla, który w rozpatrywanym wypadku sieci szczegółowych jest z reguły szybko zbieżny. Odpowiednie wzory iteracyjne otrzymuje się układając równania normalne na podstawie równań poprawek (8) i (9).

Każdemu punktowi o współrzędnych wyrównywanych są przyporządkowane dwa równania normalne:

$$dx_i \sum_h \sum_j w^{(h)}(A_{ij}^2+B_{ij}^2) - \sum_h \sum_j w^{(h)}(A_{ij}^2+B_{ij}^2)dx_j +$$
$$-\sum_h \sum_j w^{(h)}(A_{ij}^2+B_{ij}^2)\, dx_i^{(h)} + \sum_h \sum_j w^{(h)}(A_{ij}^2+B_{ij}^2)\, dx_j^{(h)} = 0, \tag{11}$$

$$dy_i \sum_h \sum_j w^{(h)}(A_{ij}^2+B_{ij}^2) - \sum_h \sum_j w^{(h)}(A_{ij}^2+B_{ij}^2)\, dy_j +$$
$$-\sum_h \sum_j w^{(h)}(A_{ij}^2+B_{ij}^2)\, dy_i^{(h)} + \sum_h \sum_j w^{(h)}(A_{ij}^2+B_{ij}^2)\, dy_j^{(h)} = 0. \tag{12}$$

Podstawiając

$$A_{ij}^2+B_{ij}^2 = \frac{1}{(x_j^{(0)}-x_i^{(0)})^2+(y_j^{(0)}-y_i^{(0)})^2} = u_{ij} \tag{13}$$

oraz rozwiązując równania (11), (12) względem dx_i, dy_i otrzymuje się bezpośrednio wzory procesu iteracyjnego, zapisane tutaj w następującej postaci:

$$dx_i := \frac{\sum_h \sum_j w^{(h)} u_{ij}(dx_i^{(h)}-dx_j^{(h)})}{\sum_h \sum_j w^{(h)} u_{ij}} + \frac{\sum_h \sum_j w^{(h)} u_{ij}\, dx_j}{\sum_h \sum_j w^{(h)} u_{ij}} \tag{14}$$

$$dy_i := \frac{\sum_h \sum_j w^{(h)} u_{ij}(dy_i^{(h)}-dy_j^{(h)})}{\sum_h \sum_j w^{(h)} u_{ij}} + \frac{\sum_h \sum_j w^{(h)} u_{ij}\, dy}{\sum_h \sum w^{(h)} u_{ij}}. \tag{15}$$

Na początku procesu przyjmuje się $dx_k = dy_k = 0$. Po uzyskaniu dostatecznie małych — w sensie wybranego kryterium — różnic między kolejnymi przybliżeniami niewiadomych, oblicza się wyrównane wartości współrzędnych:

$$x_i = x_i^{(0)}+dx_i \tag{16}$$

$$y_i = y_i^{(0)}+dy_i \tag{17}$$

Przy praktycznym stosowaniu wzorów iteracyjnych (14) i (15) należy zwrócić uwagę na to, że wyrażenia

$$\frac{\sum_h \sum_j w^{(h)} u_{ij} (dx_i^{(h)} - dx_j^{(h)})}{\sum_h \sum_j w^{(h)} u_{ij}}, \quad \frac{\sum_h \sum_j w^{(h)} u_{ij} (dy_i^{(h)} - dy_j^{(h)})}{\sum_h \sum_j w^{(h)} u_{ij}} \tag{18}$$

są stałymi, które wystarczy obliczyć jeden raz w pierwszej iteracji. Natomiast w każdej iteracji obliczane są wyrażenia

$$\frac{\sum_h \sum_j w^{(h)} u_{ij} dx_j}{\sum_h \sum_j w^{(h)} u_{ij}}, \quad \frac{\sum_h \sum_j w^{(h)} u_{ij} dy_j}{\sum_h \sum_j w^{(h)} u_{ij}}, \tag{19}$$

które mogą być interpretowane jako ogólne średnie arytmetyczne z aktualnych wartości niewiadomych dx_j oraz dy_j dla wszystkich punktów j połączonych bokami z punktem i w każdej sieci $S^{(h)}$ wyrównywanego zbioru sieci Z.

Dla uproszczenia obliczenia wyrażeń (18) sugeruje się przyjmowanie następujących wartości przybliżonych współrzędnych:

1) jeśli punkt k występuje wyłącznie w sieci $S^{(h)}$, przyjmuje się $(x_k^{(0)}, y_k^{(0)}) = (x_k^{(h)}, y_k^{(h)})$, a wówczas $(dx_k^{(h)}, dy_k^{(h)}) = (0,0)$,

2) jeśli punkt k jest punktem stałym o współrzędnych (x_k, y_k), przyjmuje się $(x_k^{(0)}, y_k^{(0)}) = (x_k, y_k)$, a wówczas $(dx_k^{(h)}, dy_k^{(h)}) = (x_k^{(h)} - x_k, y_k^{(h)} - y_k)$,

3) jeśli punkt k jest punktem wyznaczanym występującym w więcej niż jednej sieci, wówczas jako współrzędne przybliżone przyjmuje się współrzędne dane w jednej z tych sieci, np. $S^{(g)}$, co oznacza, że $(x_k^{(0)}, y_k^{(0)}) = (x_k^{(g)}, y_k^{(g)})$, $(dx_k^{(h)}, dy_k^{(h)}) = (x_k^{(h)} - x_k^{(g)}, y_k^{(h)} - y_k^{(g)})$.

4. Przykład

Przykład dotyczy zbioru $Z = \{S^{(1)}, S^{(2)}\}$ dwóch małych sieci geodezyjnych:

1 $S^{(1)} = (P^{(1)}, B^{(1)}, W^{(1)}, m^{(1)})$,
$P^{(1)} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$
$B^{(1)} = \{(1,6), (1,2), (2,6), (1,7), (1,3), (3,7), (2,3), (2,4), (3,4), (2,5), (4,5)\}$
$W^{(1)} = \{(x_1^{(1)}, y_1^{(1)}), \ldots (x_7^1, y_7^1)\}$
$m^{(1)} = 4{,}2 \cdot 10^{-5}$

2) $S^{(2)} = (P^{(2)}, B^{(2)}, W^{(2)}, m^{(2)})$
$P^{(2)} = \{4, 5, 8, 9, 10\}$

$$B^{(2)} = \{(4,5), (5,8), (8,4), (4,9), (8,9), (5,10), (8,10)\}$$
$$W^{(2)} = \{(x_4^{(2)}, y_4^{(2)}), \ldots (x_{10}^{(2)}, y_{10}^{(2)})\}$$
$$m^2 = 3{,}0 \cdot 10^{-5}$$

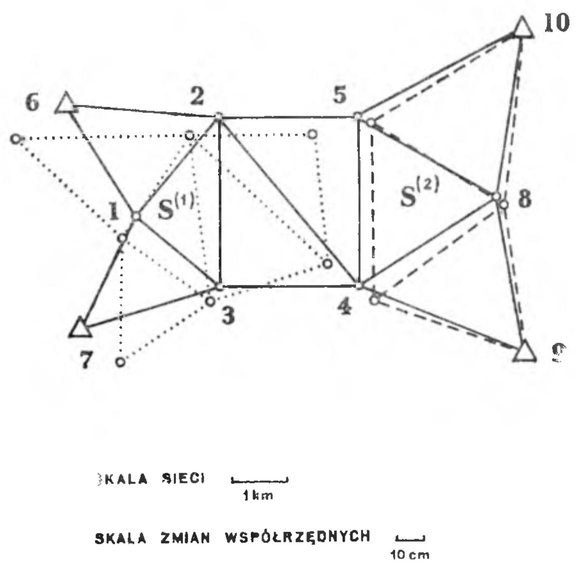
Przeciętna długość boku w sieciach wynosi 3 km.

W procesie wyrównania według opisanej metody przyjęto, że

— współrzędne punktów 6, 7 są stałe o wartościach różnych od wartości danych w sieci $S^{(1)}$,

— współrzędne punktów 9, 10 są stałe o wartościach równych wartościom danym w sieci $S^{(2)}$,

— współrzędne punktów wspólnych 4, 5 w sieci $S^{(1)}$ mają wartości różne od wartości w sieci $S^{(2)}$.



Rys. 3

Na rysunku 3 przedstawiono obydwie sieci po wyrównaniu (linie ciągłe) oraz przed wyrównaniem (linie kropkowane — sieć $S^{(1)}$, linie kreskowane — sieć $S^{(2)}$).

LITERATURA

Gaździcki J.: *Strength analysis of geodetic control networks.* Bulletin Géodésique, IAG, Paris 1976.

Hausbrandt S.: *Rachunek wyrównawczy i obliczenia geodezyjne.* PPWK, Warszawa 1970.

Moritz H.: *The method of least-squares collocation in geometrical geodesy.* IAG Symposium, Oxford 1973.

Wolf H.: *Ausgleichungsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate.* Bonn 1968.

ЕЖИ ГАЗЬДЗИЦКИ

МЕТОД УРАВНИВАНИЯ ГОРИЗОНТАЛЬНЫХ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ СЕТЕЙ

Резюме

В работе рассматривается множество взаимосвязанных, но отдельно уравнённых геодезических сетей. Предполагается, что координаты пунктов во всех сетях вычислены в той же самой одной системе координат путём:

— уравнивания с привязкой к пунктам государственной сети высшего класса, или

— независимого уравнивания и позднейшей трансформации координат.

Между величинами координат общих пунктов, полученными из соседних сетей, существуют разницы, вытекающие из ошибок измерения.

Для уравнивания множества сетей и для получения однозначных координат всех пунктов принимается следующее общее условие:

$$\sum_{h=1}^{n} \sum_{(i,j)\in B^{(h)}} w^{(h)} \left[\left(va_{ij}^{(h)}\right)^2 + \left(vb_{ij}^{(h)}\right)^2 \right] = \min,$$

где:

$w^{(h)} = \frac{c}{(m^{(h)})^2}$ — вес сети $S^{(h)}$, вычисленный с учетом выбранной постоянной c,

$va_{ij}^{(h)}$ — изменение азимута $a_{ij}^{(h)}$ (в радианах) бока (i, j) в той же сети,

$vb_{ij}^{(h)}$ — изменение натурального логарифма $b_{ij}^{(h)} = \ln l_{ij}^{(h)}$ длины $l_{ij}^{(h)}$ того бока, равное относительному изменению длины: $vb_{ij}^{(h)} = \frac{vl_{ij}^{(h)}}{l_{ij}^{(h)}}$.

Это условие называется в данной работе условием минимальной деформации множества сетей. Согласно этому условию отыскиваются такие величины координат пунктов, чтобы сумма квадратов изменений азимутов и относительных изменений длин умноженная на соответствующие весы была равна минимум.

Решение представленной выше проблемы осуществляется простым способом с использованием формул, указанных в разделе 3.

Перевод:
Róża Tołstikowa

JERZY GAŻDZICKI

A METHOD FOR ADJUSTMENT OF A SET OF HORIZONTAL GEODETIC NETWORKS

Summary

A set of mutually connected but separately adjusted geodetic networks, covering a certain area, is considered in this paper.

It is assumed that the point coordinates in all networks are computed in one and the same coordinate system in the way of:

— adjustment with a reference to the higher order national network points,

— independent adjustment followed by transformation of coordinates.

Thus, some differences caused by measurement errors exist between the joint point coordinates obtained from neighbouring networks.

In order to adjust and to obtain unique coordinates of all points, following condition is imposed:

$$\sum_{h=1}^{n} \sum_{(i,j)\in B^{(h)}} w^{(h)} \left[\left(va_{ij}^{(h)}\right)^2 + \left(vb_{ij}^{(h)}\right)^2 \right] = \min,$$

where

$w^h = \frac{c}{(m^{(h)})^2}$ is the weight of the network $S^{(h)}$ computed with regard to a chosen constant c,

$va_{ij}^{(h)}$ is the alteration of the azimuth $a_{ij}^{(h)}$ (in radians) of the side (i, j) in this network,

$vb_{ij}^{(h)}$ is the alteration of the natural logarithm $b_{ij}^{(h)} = \ln l_{ij}^{(h)}$ of the length $l_{ij}^{(h)}$ of this side being equal to the relative length alteration

$$vb_{ij}^{(h)} = \frac{vl_{ij}^{(h)}}{l_{ij}^{(h)}}.$$

In this paper, the condition written above is called as „Minimum network distortion condition". According to this condition, such values are sought for point coordinates, that the sum of squares of azimuth alterations and of relative length alterations multiplied by corresponding weights is equal to the minimum.

The solution of the problem mentioned above is achieved in a simple way be using formulae of chapter 3.

Translation: *Jacek Drachal*