PRACE INSTYTUTU GEODEZJI I KARTOGRAFII

Tom XXV, Zeszyt 3(60), 1978

ANDRZEJ HERMANOWSKI

528.33:528.113:528.14

Średnie błędy obserwacji w sieciach poziomych wyrównywanych z warunkami nawiązania

1. Wstęp

Państwowe sieci niższych klas wyrównuje się z przymusem nawiązania do punktów sieci klas wyższych, przy czym współrzędne punktów nawiązania przyjmuje się za bezbłędne lub za wielkości obserwowane. Z punktu widzenia praktyki geodezyjnej nawiązanie sieci jest niezbędnym, ze względu na konieczność:

— utrzymania w całej sieci państwowej takiej samej skali i orientacji, jaką nadano osnowie I klasy;

— nadania wszystkim punktom sieci współrzędnych w jednolitym państwowym układzie współrzędnych.

Założenie bezbłędności punktów nawiązania przyjmowane jest ze względów praktycznych, przede wszystkim ma ono na celu utrzymanie w stanie niezmiennym skatalogowanych współrzędnych punktów sieci państwowej.

Przyjmując współrzędne punktów nawiązania za bezbłędne, tym samym przyjmujemy, że:

— błędy wyznaczenia tych współrzędnych nie spowodują znaczącej deformacji materiału obserwacyjnego;

— spowodowane wprowadzeniem warunków nawiązania zmiany wielkości wyznaczanych elementów sieci oraz zmiany w ocenie ich dokładności nie będą miały praktycznego znaczenia.

W wypadku gdy dokładność pomiaru sieci nawiązanej jest tego samego rzędu jak dokładność pomiaru sieci, do której punktów ją dowiązujemy, to celem ograniczenia wpływu błędów wzajemnego położenia punktów nawiązania na wielkość poprawek obserwacyjnych, powinno się ją wyrównać z odrzuceniem założenia bezbłędności punktów nawiązania.

Wprowadzenie przy wyrównaniu warunków nawiązania, niezależnie od tego, czy punkty nawiązania przyjmowane są za bezbłędne, czy też za wielkości obserwowane, jest założeniem rachunkowym, które nie ma nic wspólnego z metodą najmniejszych kwadratów. Przyjęcie dodatkowego założenia przy wyrównaniu obserwacji powoduje zmiany oceny dokładności wyznaczanych elementów sieci.

W opracowaniu tym przedstawiono zmiany średnich błędów wyrównanych elementów sieci, jakie występują przy wyrówanniu z przyjęciem punktów nawiązania za bezbłędne, lub przyjęciem ich za wielkości obserwowane, w stosunku do średnich błędów odpowiadających im elementów uzyskanych z wyrównania niezależnego tej samej sieci, tj. takiego wyrównania przy którym nie wprowadza się żadnych dodatkowych założeń rachunkowych. Przy wyrównaniu niezależnym prowadzonym metodą pośredniczącą zakłada się bezbłędność tylko takiej liczby elementów sieci, aby cały układ był wyznaczalny, a jednocześnie aby nie powstały dodatkowe warunki wpływające na kształtowanie się poprawek obserwacyjnych.

Przyjmiemy, że średni błąd wyrównanej obserwacji ma postać:

$$m_i = \pm m_0 \sqrt{K_i}, \tag{1}$$

gdzie m_0 jest średnim błędem pojedynczej obserwacji w układzie zrównoważonym, zaś K jest czynnikiem zależnym od kształtu geometrycznego sieci, stosunków dokładności obserwacji oraz liczby i rozmieszczenia w sieci punktów nawiązania.

Przy wyrównaniu sieci z warunkami nawiązania, obydwa czynniki wzoru (1) w stosunku do odpowiadających im wartości uzyskiwanych przy wyrównaniu niezależnym, zmieniają się w zależności:

m_0 — od błędów położenia punktów nawiązania, ich liczby oraz sposobu rozmieszczenia w sieci;

K — od liczby i sposobu rozmieszczenia w sieci punktów nawiązania.

2. Wyrównanie przy założeniu bezbłędności punktów nawiązania

2.1. Średni błąd pojedynczej obserwacji po wyrównaniu

Zgodnie z metodą najmniejszych kwadratów m_0 określa średni błąd typowej obserwacji po wyrównaniu, a więc wielkość jego powinna być zależna od dokładności wprowadzonych do wyrównania obserwacji.

W praktyce, przy wyrównaniu niezależnym, wielkość m_0 zależy od poprawek wyrównawczych v_i (błędów pozornych), które tak zniekształcają obserwacje, aby spełnione były wszystkie warunki geometryczne wyrównywanej sieci, przy jednoczesnym spełnieniu warunku $[pvv] =$ $=$ min oraz od liczby obserwacji nadliczbowych. W omawianym wypadku elementy sieci muszą dodatkowo spełniać warunki geometryczne narzucone przez przyjęcie punktów nawiązania za wielkości bezbłędne.

W związku z tym wielkości poprawek wyrównawczych v_i' zależą od dokładności obserwacji oraz od dokładności wielkości nie obserwowanych, tj. od dokładności wzajemnego położenia punktów, do których sieć jest nawiązywana. Przedstawimy to symbolicznie w następujący sposób:

$$v_i' = v_i + \delta_i, \tag{2}$$

gdzie:

v_i — poprawka jaką uzyskałaby obserwacja przy wyrównaniu niezależnym;

δ_i — poprawka do obserwacji ze względu na błędność wzajemnego położenia punktów nawiązania.

Zgodnie z metodą najmniejszych kwadratów, za poprawnie określony, należy przyjąć średni błąd pojedynczej obserwacji wyznaczony z wyrównania niezależnego sieci. Różnica między wielkością m_0' otrzymaną w wyniku wyrównania z warunkami nawiązania, a wielkością tegoż błędu określonego w wyniku niezależnego wyrównania m_0, będzie wielkością deformacji jakiej podlega omawiany błąd pod wpływem wprowadzenia warunków nawiązania. Przy założeniach określonych wzorem (2), średni błąd pojedynczej obserwacji przyjmie postać:

$$m_0'^2 = \frac{[v'v']}{n'} = \frac{[(v+\delta)(v+\delta)]}{n'} = \frac{[v\,v]}{n'} + \frac{2\,[v\,\delta] + [\delta\,\delta]}{n'}, \tag{3}$$

gdzie

$n' = l - 2P'$ — liczba obserwacji nadliczbowych;

l — liczba wszystkich obserwacji;

P' — liczba punktów wyznaczanych w sieci nawiązanej.

Jeżeli tą samą sieć wyrównamy jako sieć niezależną, to liczba wyznaczanych punktów zwiększy się, a w konsekwencji zmniejszy się o r liczba obserwacji nadliczbowych. Średni błąd pojedynczej obserwacji po wyrównaniu niezależnym m_0 obliczamy zgodnie z wzorem:

$$m_0^2 = \frac{[v\,v]}{n}, \tag{4}$$

gdzie $n = l - 2P$ — liczba obserwacji nadliczbowych.

Wzór (3) tak przekształcimy, aby jego pierwszy wyraz był równy średniemu błędowi pojedynczej obserwacji w kwadracie, jaki uzyskuje się przy wyrównaniu niezależnym tej samej sieci. Podstawiając do równania (3) $n' = n + r$ oraz biorąc pod uwagę tożsamość

$$\frac{1}{n+r} = \frac{1}{n} - \frac{r}{n\,(n+r)}$$

otrzymamy

$$m_0'^2 = \frac{[v\,v]}{n} - \frac{[v\,v]}{n} \cdot \frac{r}{(n+r)} + \frac{2\,[v\,\delta] + [\delta\,\delta]}{n+r}. \qquad (5)$$

Uwaga: wartość r zależy od rodzaju obserwacji wykonanych w sieci swobodnej, tj. od liczby elementów nieswobodnych.

Kolejne wyrazy tak przekształconego wzoru na kwadrat średniego błędu pojedynczej obserwacji w sieci wyrównywanej z przymusem nawiązania odpowiadają:

1) $\frac{[v\,v]}{n}$ — wartości kwadratu średniego błędu pojedynczej obserwacji, jaki uzyskalibyśmy przy wyrównaniu tej samej sieci, jako sieci niezależnej,

2) $\frac{[v\,v]}{n} \cdot \frac{r}{(n+r)}$ — wartość o jaką zmniejszy się wielkość m_0' ze względu na zwiększenie o r liczby obserwacji nadliczbowych,

3) $\frac{2[v\,\delta]+[\delta\,\delta]}{n+r}$ — wartości wpływu poprawek do obserwacji ze względu na błędność wzajemnego położenia punktów nawiązania.

Wyrazy 2 i 3 wzoru (5) określają wielkość zniekształceń średniego błędu pojedynczej obserwacji pod wpływem wprowadzenia warunków nawiązania. Wielkość zniekształceń określonych wyrazem 2 wzoru (5) jest funkcją liczby obserwacji nadliczbowych przy wyrównaniu niezależnym oraz liczby r o jaką zwiększa się liczba obserwacji nadliczbowych przy wyrównaniu danej sieci z warunkami nawiązania.

$r = 2P_N$, gdzie P_N liczba punktów nawiązania,

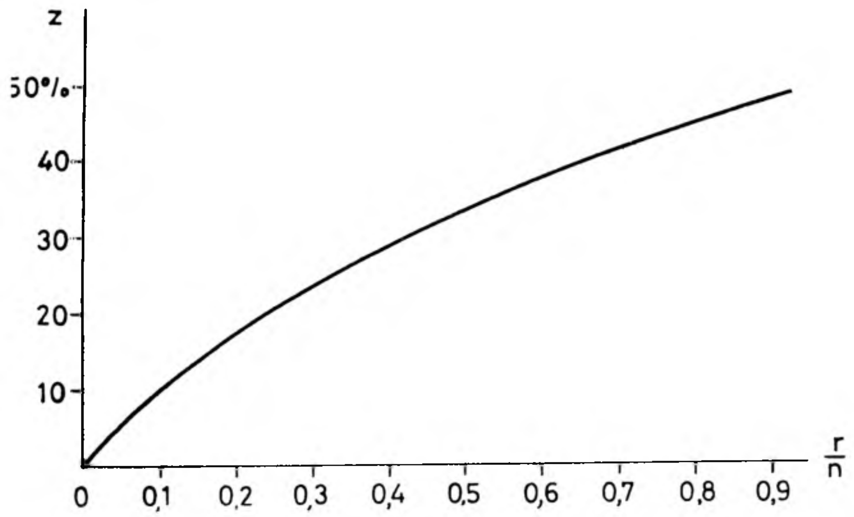
$$\frac{[v\,v]}{n}\, z, \text{ gdzie } z = \frac{r}{n+r} = \frac{\frac{2\,P_N}{n}}{1+\frac{2\,P_N}{n}}$$

Funkcja z określa część kwadratu średniego błędu pojedynczej obserwacji uzyskanego przy wyrównaniu niezależnym, o jaki zmniejszy się kwadrat średniego błędu pojedynczej obserwacji $m_0'^2$, pod wpływem przyjęcia P_N punktów nawiązania. Zależność tą ilustruje wykres przedstawiony a rysunku 1. Z wykresu tego, dla dowolnego stosunku $\frac{2\,P_N}{n}$, można odczytać wyrażoną w procentach wartość funkcji z. Np. przy $\frac{2\,P_N}{n} = 0{,}3$, $z = 23{,}1\%$, oznacza to, że w wypadku gdy trzeci wyraz wzoru (5), tj.

$$\frac{2\,[v\delta]+[\delta\delta]}{n+r}\approx 0$$

to uzyska się

$$m_0' = \sqrt{\frac{[v\,v]}{n} - 0{,}231\,\frac{[v\,v]}{n}} = \pm\, 0{,}88\, m_0$$



Rys. 1

Wielkość zniekształcenia średniego błędu pojedynczej obserwacji spowodowana wpływem trzeciego wyrazu wzoru (5), tj. zniekształceń spowodowanych wpływem błędów wzajemnego położenia punktów nawiązania jest trudna do określenia drogą teoretyczną. W wypadku gdy:

— punkty nawiązania wyznaczone były jednocześnie, z wyrównania dużej powierzchniowej sieci o większej dokładności pomiaru od dokładności pomiaru sieci wyrównywanej;

— w sieci do której punktów nawiązuje się pomiar oraz w sieci obecnie wyrównywanej, centrowano instrumenty geodezyjne względnie wyznaczano elmenty mimośrodów w sposób prawidłowy i z należytą dokładnością;

— znaki pomiarowe punktów nawiązania nie zmieniły swego pierwotnego położenia,

to wyrażenie $\frac{2[v\,\delta]+[\delta\,\delta]}{n+r}$ będzie bliskie zera, a więc nie będzie miało praktycznie wpływu na wartość $m_0'^2$.

W wypadku gdy punkty nawiązania wyznaczone były w sieci o niższej dokładności pomiaru od dokładności pomiaru sieci nawiązywanej to wyrażenie $\frac{2[v\delta]+[\delta\delta]}{n+r}$ może przyjąć znaczną wartość, a jednocześnie rzeczywista dokładność położenia punktów wyrównanej sieci będzie niższa od dokładności jaką można osiągnąć przy danej dokładności pomiaru. W omawianym wypadku, w wyniku wyrównania z warunkami nawiązania uzyska się wartości elementów wyznaczanych zniekształcone w sposób nieuzasadniony oraz nieprawidłową charakterystykę ich dokładności.

2.2. Współczynnik wagowy wyrównanych obserwacji

Wartość współczynnika K, na podstawie którego oblicza się błędy średnie wyrównanych obserwacji

$$m_i = \pm m_0 \sqrt{K_i}$$

wyznacza się na podstawie znajomości krakowianu odwrotności tabeli współczynnikowej układu równań normalnych danej sieci. Porównując współczynniki wagowe wyrównanych obserwacji lub ich funkcji obliczone dla tej samej sieci przy wyrównani uniezależnym $\sqrt{K}$ z odpowiadającymi im współczynnikami $\sqrt{K'}$ obliczonymi przy wyrównaniu z warunkami nawiązania zauważymy, że w tym drugim wypadku są one mniejsze $K_i > K_i'$, przy czym im większa jest liczba punktów przyjętych w danej sieci za punkty nawiązania, tym różnice te są większe.

Korzystając z twierdzenia Otrębskiego, można znaleźć zależność między liczbą punktów przyjętych w danej sieci za punkty nawiązania, a wielkością zmniejszenia przeciętnej wartości współczynnika K.

Zgodnie z twierdzeniem Otrębskiego

$$\frac{m^2}{(m)^2} = p = \frac{u}{l}, \tag{6}$$

gdzie

$\frac{m^2}{(m)^2}$ — przeciętna wartość stosunku kwadratu średniego błędu obserwacji po wyrównaniu do kwadratu tejże obserwacji przed wyrównaniem,

p — przeciętne zmniejszenie kwadratu błędu obserwacji,

l — liczba wszystkich obserwacji,

u — liczba obserwacji niezbędnych, czyli liczba równań normalnych.

Przy wyrównaniu niezależnym przeciętne zmniejszenie kwadratu błędu obserwacji wyniesie

$$p = \frac{m_0^2 \cdot \frac{[K]_1^l}{l}}{m^2}$$

Przy wyrównaniu tej samej sieci z warunkami nawiązania

$$\frac{p'}{p} = \frac{u'}{l} = \frac{m_0'^2 \cdot \frac{[K]_1^l}{l}}{m^2}$$

$$\frac{p'}{p} = q = \frac{u'}{u} = \frac{m_0'^2 \cdot [K']_1^l}{m_0^2 \cdot [K]_1^l}$$

Teoretycznie wartość m_0 zależy tylko od dokładności obserwacji, w związku z tym, przy dalszym wyprowadzaniu wzorów przyjmiemy

$$m_0 = m_0'$$

$$\frac{p'}{p} = \frac{[K']_1^l}{[K]_1^l}$$

Liczba równań normalnych przy wyrównaniu z warunkami nawiązania u' jest mniejsza od liczby równań przy wyrównaniu niezależnym u.

$$u = u' + r,$$

wobec tego $q = \frac{u-r}{u}$, uwzględniając, że $u = (l-n)$ otrzymamy

$$\frac{p'}{p} = q = \frac{l-n-r}{l-n} \tag{8}$$

gdzie q jest to przeciętne zmniejszeni ekwadratu współczynnika wagowego wyrównanych obserwacji, zachodzące pod wpływem wprowadzenia warunków nawiązania.

$$[K']_1^l = q \cdot [K]_1^l \tag{9}$$

Przeciętna wartość średniego błędu obserwacji wyrównanej z warunkami nawiązania wyniesie:

$$m'^2_{\text{przec.}} = q \cdot m_0'^2 \cdot \frac{[K]_1^l}{l} \tag{10}$$

W celu określenia całkowitego zmniejszenia średniego błędu przeciętnej obserwacji wyrównanej z warunkami nawiązania, w stosunku do średniego błędu przeciętnej obserwacji uzyskanej z niezależnego wyrównania tej samej sieci, do wzoru (10), na miejsce m' podstawimy zależność określoną wzorem (5), przyjmując że czynnik $\frac{2[v\,\delta]+[\delta\,\delta]}{n+r}$ jest zaniedbywalny (bliski zera).

$$m'^2_{\text{przec.}} = \frac{[K]_1^l}{l} \cdot \frac{[v\,v]}{n} \cdot \left(1 - \frac{r}{n+r}\right) \cdot q$$

Uwzględniając, że

$$\frac{[K]_1^l}{l} \cdot \frac{[v\,v]}{n} = m^2{}_{\text{przec.}} \text{ otrzymamy:}$$

$$\frac{m'^2_{\text{przec}}}{m^2{}_{\text{przec}}} = q - \frac{r\,q}{r+n} = t,$$

gdzie t jest to przeciętne zmniejszenie kwadratu średniego błędu obserwacji wyznaczonego z wyrównania z przyjęciem punktów nawiązania za bezbłędne, w stosunku do kwadratu przeciętnego średniego błędu obserwacji uzyskanego w drodze niezależnego wyrównania tej samej sieci. Uwzględniając zależność (8) otrzymamy:

$$t = \frac{(l-n-r)}{(l-n)} \cdot \frac{n}{(n+r)} \tag{11}$$

Po uporządkowaniu i uproszczeniu otrzymamy

$$t = \frac{u'\,n}{u\,n'} = q - \frac{n}{(n+r)} \tag{12}$$

Współczynnik t uwzględnia zmniejszenie kwadratu średniego błędu po wyrównaniu oraz przeciętne zmniejszenie współczynnika wagowego wyrównanej obserwacji, jakie zachodzą pod wpływem wprowadzenia warunków nawiązania.

Korzystając z wyprowadzonych wzorów, dla konkretnej sieci można obliczyć liczbę punktów nawiązania, tak aby przeciętne zmniejszenie średniego błędu elementów wyrównanej sieci, w stosunku do wyrównania niezależnej sieci, było równe a. Z wzoru (11) mamy:

$$t = \frac{(l-n-r)\,n}{(l-n)\,(n+r)} = a^2.$$

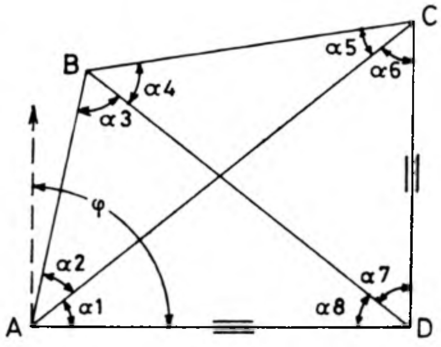
Po przekształceniu otrzymamy

$$r = \frac{(n^2-nl)\,(1-a^2)}{-a^2 l - n\,(1-a^2)} \tag{13}$$

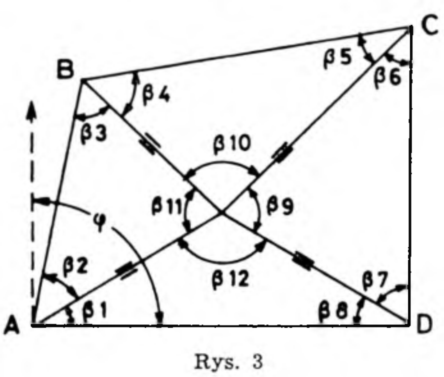
$$P_N = \frac{r}{2} \tag{14}$$

2.3. Przykłady

Podane niżej trzy przykłady ilustrują różnice w ocenie dokładności jaką uzyskuje się przy wyrównaniu niezależnym oraz przy wyrównaniu tej samej sieci z założeniem bezbłędności punktów nawiązania. Z przedstawionej na rysunku 2 sieci, czworobok geodezyjny pełny o przeciętnej długości boków 1400 m, wyznaczono współrzędne punktów *A*, *B*, *C* i *D*, a następnie przyjmowano je jako punkty nawiązania.



Rys. 2



Rys. 3

Niezależne wyrównanie sieci przeprowadzono metodą pośredniczącą dla trzech różnych obserwacji polowych (dane fikcyjne) o następującej charakterystyce dokładności:

1. $m_\alpha = \pm 7''$, $m_L = \pm 0{,}04$ m,
2. $m_\alpha = \pm 3''$, $m_L = \pm 0{,}015$ m,
3. $m_\alpha = \pm 1''$, $m_L = \pm 0{,}005$ m.

Przedstawioną na rysunku 3 sieć rozwiązywano w dwóch wariantach:

— jako sieć niezależną,

— jako sieć nawiązaną do punktów A, B, C i D.

Podobnie jak uprzednio wyrównanie przeprowadzono dla trzech różnych obserwacji polowych o następującej charakterystyce dokładności:

1. $m_\beta = \pm 1''$, $m_L = \pm 0{,}005$ m
2. $m_\beta = \pm 3''$, $m_L = \pm 0{,}015$ m
3. $m_\beta = \pm 6''$, $m_L = \pm 0{,}03$ m

P r z y k ł a d 1

Punkty nawiązania wyznaczone w sieci wyjściowej na podstawie obserwacji o większej dokładności ($m_\alpha = \pm 1''$, $m_L = \pm 0{,}005$ m) od dokładności obserwacji sieci wyrównywanej ($m_\beta = \pm 6''$, $m_L = \pm 0{,}03$ m).

P r z y k ł a d 2

Punkty nawiązania wyznaczone w sieci wyjściowej o takiej samej dokładności ($m_\alpha = \pm 3''$, $m_L = \pm 0{,}15$ m), jak dokładność obserwacji sieci wyrównywanej ($m_\beta = \pm 3''$, $m_L = \pm 0{,}015$ m).

P r z y k ł a d 3

Punkty nawiązania wyznaczone w sieci wyjściowej o dokładności obserwacji niższej ($m_\alpha = \pm 7''$, $m_L = \pm 0{,}04$ m) od dokładności sieci wyrównywanej ($m_\beta = \pm 1''$, $m_L = \pm 0{,}005$ m).

Wyniki uzyskane przy rozwiązaniu w/w trzech przykładów przedstawiono w tablicach: przykład 1 (tablice 1, 2 i 3), przykład 2 (tablice 4, 5 i 6), przykład 3 (tablice 7, 8 i 9).

Tablica 1

Ocena dokładności wyrównanych elementów sieci wyjściowej

$m_0 = \pm 1{,}19$									
punkt	$\pm m_x$ m	$\pm m_y$ m	$\pm m_p$ m	L	$\pm m_L$ m	$\frac{m_L}{L} 10^6$	kąt	$\pm m_\alpha$ $''$	$\frac{m_\alpha}{\rho''} 10^6$
A	—	—	—	AB	0,007	6,864	α_1	0,65	3,151
B	0,007	0,006	0,009	CD	0,007	5,322	α_2	0,86	4,169
C	0,005	0,009	0,010	CD	0,005	4,167	α_3	0,84	4,072
D	—	0,005	0 005	DA	0,009	6,000	α_4	0,69	3,345
				AC	0,004	2,082	α_5	0,73	3,539
				BD	0,006	3,658	α_6	0,80	3,978
							α_7	0,91	4,412
							α_8	0,84	4,072

Tablica 2

Ocena dokładności elementów sieci wyrównanej

punkt	Wyrównanie niezależne $m_0 = \pm 0{,}888$ $\sqrt{Q_{ii}}$ x	$\sqrt{Q_{ii}}$ y	$\pm m_x$ m	$\pm m_y$ m	$\pm m_P$ m	Wyrównanie w nawiązaniu do punktów A, B, C i D $m_0 = \pm 0{,}896$ $\sqrt{Q_{ii}}$ x	$\sqrt{Q_{ii}}$ y	$\pm m_x$ m	$\pm m_y$ m	$\pm m_P$ m
P	0,0124	0,0228	0,011	0,020	0,023	0,0078	0,0089	0,007	0,008	0,011
A	—	—	—	—	—					
B	0,0247	0,0277	0,022	0,025	0,033					
C	0,0281	0,0365	0,025	0,032	0,041					
D	—	0,0301	—	0,027	0,027					

średnie błędy wyrównanych obserwacji

L	$\sqrt{Q_{ii}}$	$\pm m_L$ m	$m_L : L$	$\frac{m_L}{L} \cdot 10^6$	$\sqrt{Q_{ii}}$	$\pm m_L$ m	$m_L : L$	$\frac{m_L}{L} \cdot 10^6$
AP	0,0226	0,020	1 : 43 000	23,250	0,0080	0,007	1 : 119 000	8,138
BP	0,0194	0,017	1 : 41 000	24,042	0,0089	0,008	1 : 88 000	11,313
CP	0,0233	0,021	1 : 51 000	19,755	0,0079	0,007	1 : 152 000	6,585
DP	0,0222	0,020	1 : 48 000	21,200	0,0090	0,008	1 : 116 000	8,480

kąt	$\sqrt{Q_{ii}}$	$\pm m\beta$ $''$	$\frac{m\beta}{\rho''} 10^6$		$\sqrt{Q_{ii}}$	$\pm m\beta$ $''$	$\frac{m\beta}{\rho} 10^6$
β_1	3,098	2,75	13,332		2,077	1,86	9,018
β_2	3,820	3,39	16,435		2,077	1,86	9,018
β_3	4,062	3,61	17,502		2,269	2,03	9,842
β_4	3,732	3,31	16,047		2,269	2,03	9,842
β_5	3,110	2,76	13,381		1,705	1,53	7,418
β_6	3,830	3,40	16,484		1,705	1,53	7,418
β_7	4,000	3,53	17 211		1,657	1,48	7,175
β_8	2,973	2,64	12,799		1,657	1,48	7,175
β_9	4,232	3,76	18,229		2,140	1,92	9,308
β_{10}	4,178	3,71	17,986		2,738	2,45	11,870
β_{11}	4,222	3,75	18,180		3,051	2,73	13,235
β_{12}	4,238	3,76	18,229		2,994	2,68	12,993

W tablicach 1, 4 i 7 podano charakterystykę dokładności wyrównanych elementów sieci wyjściowej. W tablicach 2, 5 i 8 podano charakterystykę dokładności elementów sieci wyrównywanej niezależnie oraz z założeniem bezbłędności punktów nawiązania. W tablicach 3, 6 i 9 podano porównanie poprawek uzyskanych z wyrównania niezależnego z poprawkami uzyskanymi z wyrównania z założeniem bezbłędności punktów nawiązania oraz obliczenie średniego błędu pojedynczej obserwacji po wyrównaniu z rozbiciem na składowe (zgodnie ze wzorem 5).

We wszystkich trzech przykładach, przeciętne zmniejszenie kwadratu średniego błędu obserwacji (twierdzenie Otrębskiego) obliczone dla sieci wyrównanej niezależnie wynosi $p = \frac{7}{16}$, a dla tej samej sieci

Tablica 3

	$\frac{v}{m}$	$\frac{v'}{m}$	$\delta = \frac{v'}{m} - \frac{v}{m}$
β_1	+0,82	−0,73	−1,55
β_2	−0,05	−0,84	−0,79
β_3	+1,06	−0,54	−1,60
β_4	−1,01	+0,74	+1,75
β_5	−0,84	+1,06	+1,90
β_6	+0,48	+0,54	+0,06
β_7	−0,12	−0,84	−0,72
β ę	−0,14	+0,44	+0,58
β_9	+0,30	−0,37	−0,67
β_{10}	−0,78	+0,80	+1,58
β_{11}	+0,79	−0,41	−1,20
β_{12}	+0,54	−0,90	−1,44
L_{AP}	−0,38	−1,28	−0,90
L_{BP}	+0,83	+0,74	−0,09
L_{CP}	+0,46	+1,03	+0,57
L_{DP}	−0,79	−1,37	−0,58
	$[pvv]$ 7,0717	$[pv'v']$ 11,2709	$[\delta\delta]$ 21,0558

$2[v\,\delta]$
$-16,8566$

$m_0 = 0,886 \qquad m'_0 = \pm 0,897$

$n = 9 \qquad n' = 14$

$$m'_0 = \sqrt{\frac{7,0717}{9} + \frac{-16,8566 + 21,0558}{9+5} - \frac{7,0717 \cdot 5}{9(9+5)}}$$

$$m'_0 = \sqrt{0,7857 + 0,2999 - 0,2806} = \pm 0,897$$

Tablica 4

Ocena dokładności wyrównanych elementów sieci wyjściowej

$m_0 = \pm 1,161$

Punkt	$\pm m_x$ m	$\pm m_y$ m	$\pm m_P$ m	L	$\pm m_L$ m	$\frac{m_L}{L} 10^6$	kąt	$\pm m_\alpha$ $''$	$\frac{m_\alpha}{\rho''} 10^6$
A	—	—	—	AB	0,020	19,612	α_1	1,89	9,163
B	0,019	0,020	0,026	BC	0,020	15,206	α_2	2,51	12,169
C	0,014	0,026	0,030	CD	0,014	11,667	α_3	2,45	11,878
D	—	0,015	0,015	DA	0,026	17,333	α_4	2,03	9,841
				AC	0,011	5,726	α_5	2,13	10,326
				BD	0,019	11,585	α_6	2,35	11,393
							α_7	2,67	12,945
							α_8	2,46	11,926

Tablica 5

Ocena dokładności elementów sieci wyrównywanej

	Wyrównanie niezależne $m_0 = \pm 1{,}098$					Wyrównanie w nawiązaniu do punktów *A*, *B*, *C* i *D* $m_0 = \pm 1{,}063$				
punkt	$\sqrt{Q_{ii}}$ x	$\sqrt{Q_{ii}}$ y	$\pm m_x$ m	$\pm m_y$ m	$\pm m_P$ m	$\sqrt{Q_{ii}}$ x	$\sqrt{Q_{ii}}$ y	$\pm m_x$ m	$\pm m_y$ m	$\pm m_P$ m
P	0,0062	0,0114	0,007	0,012	0,014	0,0039	0,0044	0,004	0,005	0,006
A	—	—	—	—	—					
B	0,0123	0,0138	0,014	0,015	0,050					
C	0.0141	0,0182	0,015	0,020	,0,025					
D	—	0,0153	—	0,017	0,017					

średnie błędy wyrównanych obserwacji

L	$\sqrt{Q_{ii}}$	$\pm m_L$ m	$m_L : L$	$\frac{m_L}{L} 10_6$	$\sqrt{Q_{ii}}$	$\pm m_L$ m	$m_L : L$	$\frac{m_L}{L} 10_6$
AP	0,0113	0,012	1 : 69 000	13,950	0,0040	0,004	1 : 205 000	4,650
BP	0,0097	0 011	1 : 67 000	15,556	0,0044	0,005	1 : 150 000	7,071
CP	0,0114	0,013	1 : 83 000	12,230	0,0039	0,004	1 : 253 000	3,763
DP	0,0111	0,012	1 . 77 000	12,720	0,0045	0,005	1 : 196 000	5,300

kąt	$\sqrt{Q_{ii}}$	$\pm m_\beta$ $''$	$\frac{m_\beta}{\rho''} 10^6$		$\sqrt{Q_{ii}}$	$\pm m_\beta$ $''$	$\frac{m_\beta}{\rho''} 10^6$	
β_1	1,549	1,70	8,242		1,039	1,11	5,381	
β_2	1,901	2,10	10,181		1,039	1,11	5,381	
β_3	2,031	2,23	10,811		1,134	1,20	5,818	
β_4	1,866	2,05	9,939		1,134	1,20	5,818	
β_5	1,555	1,71	8,290		0,852	0,91	4,412	
β_6	1,915	2,10	10,181		0,852	0,91	4,412	
β_7	2,000	2,20	10,666		0,829	0,88	4,266	
β_8	1,487	1,63	7,902		0,829	0,88	4,266	
β_9	2,116	2,32	11,248		1,070	1,14	5,527	
β_{10}	2,089	2,29	11,102		1,369	1,46	7,078	
β_{11}	2,111	2,32	11,248		1,526	1,62	7,854	
β_{12}	2,119	2,33	11,296		1,497	1,59	7,709	

wyrównanej z warunkami nawiązania wynosi $p = \frac{2}{16}$. Stosunek przeciętnej wartości kwadratu współczynnika wagowego wyrównanej obserwacji uzyskanego z wyrównania sieci niezależnej od uzyskanego z niezależnego wyrównania tej samej sieci wynosi $q = \frac{2}{7}$ (tabl. 8).

Należy się więc spodziewać znacznego zmniejszenia średnich błędów wyrównanych obserwacji uzyskanych przy wyrównaniu z warunkami nawiązania w stosunku do odpowiadających im błędów uzyskanych przy wyrównaniu niezależnym. Zmniejszenia te powodują, że w wypadku wyrównania z przyjęciem bezbłędności punktów nawiązania, ocena dokładności wyrównanych elementów sieci przestaje być logiczną. Np.

Tablica 6

	$\frac{v}{m}$	$\frac{v'}{m}$	$\delta = \frac{v'}{m} - \frac{v}{m}$
β_1	$-1{,}13$	$+1{,}63$	$+2{,}76$
β_2	$-1{,}29$	$+0{,}37$	$+1{,}66$
β_3	$+0{,}32$	$+0{,}73$	$+0{,}41$
β_4	$-0{,}74$	$+1{,}00$	$+1{,}74$
β_5	$-0{,}12$	$-0{,}31$	$-0{,}19$
β_6	$+1{,}31$	$-1{,}19$	$-2{,}50$
β_7	$+0{,}27$	$-1{,}08$	$-1{,}35$
β ę	$-0{,}02$	$+0{,}25$	$+0{,}27$
β_9	$+0{,}75$	$-0{,}06$	$-{,}081$
β_{10}	$-0{,}47$	$+0{,}64$	$+1{,}11$
β_{11}	$-0{,}23$	$+0{,}10$	$+0{,}33$
β_{12}	$-0{,}52$	$-0{,}25$	$+0{,}27$
L_{AP}	$-1{,}57$	$-2{,}22$	$-0{,}65$
L_{BP}	$+0{,}96$	$+1{,}32$	$+0{,}36$
L_{CP}	$+0{,}93$	$+0{,}44$	$-0{,}49$
L_{DP}	$-0{,}32$	$-1{,}19$	$-0{,}87$
	$[pvv]$ 10,855	$[pv'v']$ 15,834	$[\delta\delta]$ 25,369

$2[v\delta] = -20{,}391$

$n = 9 \quad n' = 14$

$m_0 = \pm 1{,}098 \quad m'_0 = \pm 1{,}063$

$$m'_0 = \pm \sqrt{1{,}2061 + 0{,}3556 - 0{,}4308} = \pm 1{,}063$$

Tablica 7

Ocena dokładności wyrównanych elementów sieci wyjściowej

$m_0 = \pm 0{,}943$

Punkt	$\pm m_x$ m	$\pm m_y$ m	$\pm m_P$ m	L	$\pm m_L$ m	$\frac{m_L}{L}\,10^6$	kąt	$\pm m_\alpha$ $''$	$\frac{m_\alpha}{\rho''}\,10^6$
A	—	—	—	*AB*	0,040	39,223	α_1	3,68	17,841
B	0,020	0,034	0,039	*BC*	0,040	30,411	α_2	4,75	23,029
C	0,030	0,051	0,059	*CD*	0,030	25,000	α_3	4,70	22,786
D	—	0,033	0,033	*DA*	0,051	34,000	α_4	3,96	19,199
				AC	0,023	11,974	α_5	4,05	19,635
				BD	0,039	23,779	α_6	4,50	21,817
							α_7	5,06	24,532
							α_8	4,67	22,641

Tablica 8

Ocena dokładności elementów sieci wyrównywanej

	Wyrównanie niezależne $m_0 = \pm 0{,}989$					Wyrównanie z nawiązaniem do punktów A, B, C i D $m_0 = \pm 1{,}894$				
punkt	$\sqrt{Q_{ii}}$ x	$\sqrt{Q_{ii}}$ y	$\pm m_x$ m	$\pm m_y$ m	$\pm m_P$ m	$\sqrt{Q_{ii}}$ x	$\sqrt{Q_{ii}}$ y	$\pm m_x$ m	$\pm m_y$ m	$\pm m_P$ m
P	0,0021	0,0038	0,002	0,004	0,004	0,0013	0,0014	0,002	0,003	0,004
A	—	—	—	—	—					
B	0,0041	0,0046	0,004	0,005	0,006					
C	0,0047	0,0061	0,005	0,006	0,008					
D	—	0,0051	—	0,005	0,005					

średnie błędy wyrównanych obserwacji

L	$\sqrt{Q_{ii}}$	$\pm m_L$ m	$m_L : L$	$\frac{m_L}{L} 10^6$	$\sqrt{Q_{ii}}$	$\pm m_L$ m	$m_L : L$	$\frac{m_L}{L} 10^6$
AP	0,0038	0,004	1 : 232 000	4,650	0,0013	0,003	1 : 344 000	3,488
BP	0,0032	0,003	1 : 221 000	4,243	0,0015	0,003	1 : 253 000	4,243
CP	0,0039	0,004	1 : 280 000	3,763	0,0013	0,003	1 : 425 000	2,822
DP	0,0037	0,004	1 : 262 000	4,240	0,0015	0,003	1 : 337 000	3,180

kąt	$\sqrt{Q_{ii}}$	$\pm m_\beta$ $''$	$\frac{m_\beta}{\rho''} 10^6$		$\sqrt{Q_{ii}}$	$\pm m_\beta$ $''$	$\frac{m_\beta}{\rho''} 10^6$	
β_1	0,516	0,51	2,472		0,346	0,66	3,200	
β_2	0,637	0,62	3,006		0,346	0,66	3,200	
β_3	0,677	0,66	3,200		0,378	0,72	3,491	
β_4	0,622	0,61	2,957		0,378	0,72	3,491	
β_5	0,518	0,51	2,473		0,284	0,54	2,618	
β_6	0,638	0,62	3,006		0,284	0,54	2,618	
β_7	0,677	0,65	3,151		0,276	0,52	2,521	
β_8	0,496	0,48	2,327		0,276	0,52	2,521	
β_9	0,705	0,69	3,345		0,356	0,66	3,200	
β_{10}	0,696	0,68	3,297		0,456	0,86	4,169	
β_{11}	0,704	0,69	3,345		0,508	0,96	4,654	
β_{12}	0,706	0,69	3,345		0,499	0,95	4,606	

Przeciętne zmniejszenie kwadratu średniego błędu obserwacji

$$p = \frac{7}{16} = 0{,}438 \qquad p' = \frac{2}{16} = 0{,}125$$

$$\frac{\left[\frac{Q_{ii}{}^{l}}{m^2}\right]_1^l}{l} = \frac{7{,}0022}{16} = 0{,}458 \qquad \frac{\left[\frac{Q_{ii}{}^{l}}{m^2}\right]_1^l}{l} = \frac{1{,}992}{16} = 0{,}125$$

Przeciętne zmniejszenie kwadratu współczynnika wagowego uzyskanego z sieci wyrównanej z warunkami nawiązania w stosunku do kwadratu współczynnika wagowego uzyskanego z wyrównania sieci niezależnej

$$q = \frac{0{,}125}{0{,}438} = 0{,}285$$

Tablica 9

	$\frac{v}{m}$	$\frac{v'}{m}$	$\delta = \frac{v'}{m} - \frac{v}{m}$
β_1	$-1{,}08$	$-2{,}95$	$-1{,}87$
β_2	$+0{,}65$	$-0{,}05$	$-0{,}70$
β_3	$+0{,}76$	$+1{,}70$	$+0{,}94$
β_4	$-0{,}68$	$-2{,}40$	$-1{,}72$
β_5	$-0{,}55$	$-0{,}39$	$+0{,}16$
β_6	$+0{,}21$	$+2{,}39$	$+2{,}18$
β_7	$+1{,}15$	$+2{,}61$	$+1{,}46$
β_8	$+0{,}53$	$-0{,}01$	$-0{,}54$
β_9	$+0{,}63$	$+3{,}00$	$+2{,}37$
β_{10}	$-0{,}77$	$+0{,}69$	$+1{,}46$
β_{11}	$+0{,}59$	$+0{,}34$	$-0{,}25$
β_{12}	$-0{,}46$	$+1{,}96$	$+2{,}42$
L_{AP}	$-0{,}72$	$+1{,}25$	$+1{,}97$
L_{BP}	$+0{,}01$	$+0{,}54$	$+0{,}53$
L_{CP}	$-0{,}60$	$-1{,}23$	$-0{,}63$
L_{DP}	$+1{,}28$	$+2{,}02$	$+0{,}74$
	$[pvv]$ 8,65	$[pv'v']$ 50,91	$[\delta\delta]$ 33,81

$2[v\delta] = +8{,}46$

$n = 9 \qquad n = 14$

$m_0 = \pm 0{,}98 \qquad m'_0 = \pm 1{,}91$

$m'_0 = \pm \sqrt{0{,}961+3{,}019-0{,}343} = \pm 1{,}91$

średni błąd kąta ABC wyznaczony z wyrównania sieci nawiązanej uzyskuje mniejszy błąd od błędu tego samego kąta uzyskanego z wyrównania sieci do której dana sieć została nawiązana

Sieć wyjściowa	Sieć nawiązana
Kąt $ABC = \alpha_3+\alpha_4$	Kąt $ABC = \beta_3+\beta_4$

Dane z przykładu 2

$m(\alpha_3+\alpha_4) = \sqrt{2{,}45^2+2{,}03^2} = \pm 3{,}2''$, $\qquad m(\beta_3+\beta_4) = \sqrt{1{,}2^2+1{,}2^2} = \pm 1{,}7''$

Dane z przykładu 3

$m(\alpha_3+\alpha_4) = \sqrt{4{,}70^2+4{,}75^2} = \pm 6{,}7''$, $\qquad m(\beta^3+\beta_4) = \sqrt{0{,}72^2+0{,}72^2} = \pm 1{,}0''$

Podobne nielogiczności zachodzą również przy ocenie dokładności długości boków.

Dane z przykładu 2 — długości boków BP i DP zmierzone zostały z błędem względnym 1 : 60 000 i następnie w wyniku wyrównania z założeniem bezbłędności punktów nawiązania zostały wpasowane do punktów sieci wyjściowej charakteryzującej się średnim błędem wyrównanego boku rzędu 1 : 80 000, a w wyniku wyrównania z warunkami nawiązania uzyskano błędy względne długości BP — 1 : 150 000 i długości DP — 1 : 196 000.

Załączone do niniejszego opracowania przykłady dotyczą małych sieci, w związku z tym przedstawione wyniki przejaskrawiają omówione zagadnienie. Niemniej wskazują one wyraźnie, że przy projektowaniu sieci rozwiązywanych z założeniem bezbłędności punktów nawiązania nie można pomijać problemu zmniejszenia średnich błędów wyrównanych elementów sieci zachodzących pod wpływem założeń rachunkowych, tradycyjnie przyjętych w produkcji geodezyjnej, a niezgodnych z teorią metody najmniejszych kwadratów. Ponadto przykłady te wskazują, że należy ostrożnie podchodzić do oceny dokładności elementów osnowy poziomej wyznaczonych za pomocą wielokrotnych wcięć pojedynczych punktów lub grup punktów wyrównanych z założeniem bezbłędności punktów nawiązania, w których to konstrukcjach z reguły występuje znaczna liczba punktów nawiązania w stosunku do liczby obserwacji oraz liczby punktów wyznaczanych.

3. Wyrównanie z odrzuceniem założenia bezbłędności punktów

3.1. Średni błąd pojedynczej obserwacji po wyrównaniu

Przy wyrównaniu z odrzuceniem założenia bezbłędności punktów nawiązania, wyrównaniu podlegają mierzone elementy sieci, a więc kąty, długości i azymuty oraz przyjęte za wielkości mierzone współrzędne punktów nawiązania (tz. fikcyjne obserwacje). Zgodnie z tym założeniem średni błąd pojedynczej obserwacji, w tym wypadku charakteryzuje łącznie dokładność pomiaru i dokładność wzajemnego położenia punktów nawiązania. Podobnie jak w punkcie 2.1 wzór na średni błąd pojedynczej obserwacji po wyrównaniu $m_0'^2$ przedstawimy w formie rozwiniętej.

Przyjęte oznaczenia

d_i — poprawka do współrzędnych punktów nawiązania,

P, P'' — liczba wyznaczanych punktów w sieci niezależnej (P), w sieci nawiązanej (P''),

r — liczba fikcyjnych obserwacji równa liczbie o którą zwiększy się liczba obserwacji nadliczbowych n przy wyrównaniu tej samej sieci z odrzuceniem założenia bezbłędności punktów nawiązania.

W wypadku gdy w sieci mierzone są długości boków, kąty i azymuty, to

$$P'' = P+1$$

Dla dużych powierzchniowych sieci można przyjąć, że $P'' = P$. Założenie to znacznie uprości wyprowadzane wzory, przy czym nie będzie miało praktycznego wpływu na wyniki wstępnych analiz, do prowadzenia których wzory te są przeznaczone.

Przy wyrównaniu z odrzuceniem założenia bezbłędności punktów nawiązania:

— liczba wszystkich obserwacji $l'' = l+r$;

— liczby obserwacji nadliczbowych $n'' = n+r$;

— błędy wzajemnego położenia punktów nawiązania, w zależności od przyjętych przy wyrównaniu średnich błędów współrzędnych punktów nawiązania, częściowo wpłyną na wielkości poprawek obserwacyjnych

$$v'' = v+\delta$$

a częściowo na wielkości poprawek d_i do przyjętych za wielkości obserwowane współrzędnych punktów nawiązania;

— średni błąd pojedynczej obserwacji po wyrównaniu, przedstawiony w formie rozwiniętej ma postać

$$m_0''^2 = \frac{[vv]}{n} - \frac{[vv]}{n} \cdot \frac{r}{(n+r)} + \frac{2[v\delta] + [\delta\delta] + [dd]}{n+r} \tag{15}$$

Kolejne wyrazy wzoru (15) przedstawiają:

— średni błąd w kwadracie jaki uzyskanoby przy wyrównaniu niezależnym,

— wpływ zwiększenia liczby obserwacji nadliczbowych na wielkość kwadratu błędu,

— wpływ błędów wzajemnego położenia punktów nawiązania na wielkość kwadratu błędu.

3.2. Współczynnik wagowy wyrównanych obserwacji

W celu określenia stosunku przeciętnych wartości kwadratów współczynników wagowych wyrównanych obserwacji, w sieci nawiązanej K'' oraz w sieci niezależnej K, wyjdziemy z twierdzenia Otrębskiego

$$P'' = \frac{u''}{l''}, \quad P = \frac{u}{l}$$

Zgodnie z założeniem $u = u''$, $l'' = l+r$,

$$q' = \frac{K''}{K} = \frac{p''}{p} = \frac{l}{l+r} \tag{16}$$

Stosunek kwadratów przeciętnych wartości średnich błędów wyrównanych obserwacji w sieci nawiązanej i w sieci niezależnej określimy jak poprzednio (w punkcie 2.2) przy założeniu, że

$$\frac{2[v\delta]+[\delta\delta]+[dd]}{n+r} \approx 0$$

$$t' = \frac{m''^2_{\text{przec}}}{m^2_{\text{przec}}} = \left(1 - \frac{r}{n+r}\right) q' = \frac{ln}{(n+r)(l+r)} \tag{17}$$

Korzystając z wzoru (17), dla konkretnej sieci, można obliczyć liczbę punktów nawiązania $P_N = \frac{r}{2}$, tak, aby przeciętne zmniejszenie średniego błędu elementów wyrównanej sieci z odrzuceniem założenia bezbłędności punktów nawiązania było równe a.

$$t' = \frac{ln}{(n+r)(l+r)} = a^2$$

Po uporządkowaniu i uproszczeniu otrzymamy

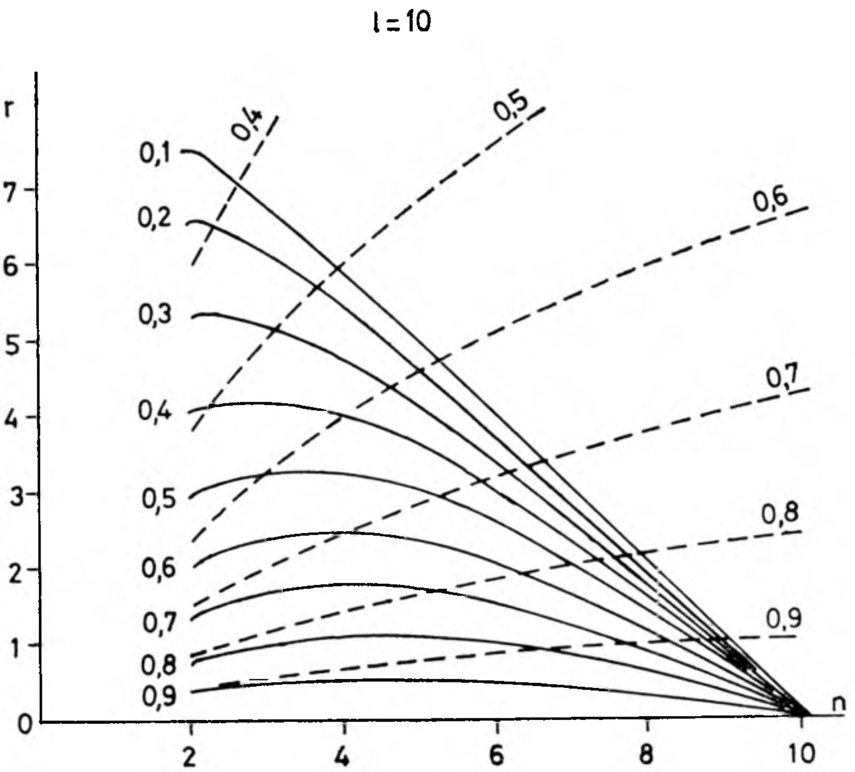
$$r^2 + r(n+l) + nl\left(1 - \frac{1}{a^2}\right) = 0$$

$$r = \frac{1}{2}\left\{-(n+l) + \sqrt{(n+l)^2 - 4nl\left(1 - \frac{1}{a^2}\right)}\right\} \tag{18}$$

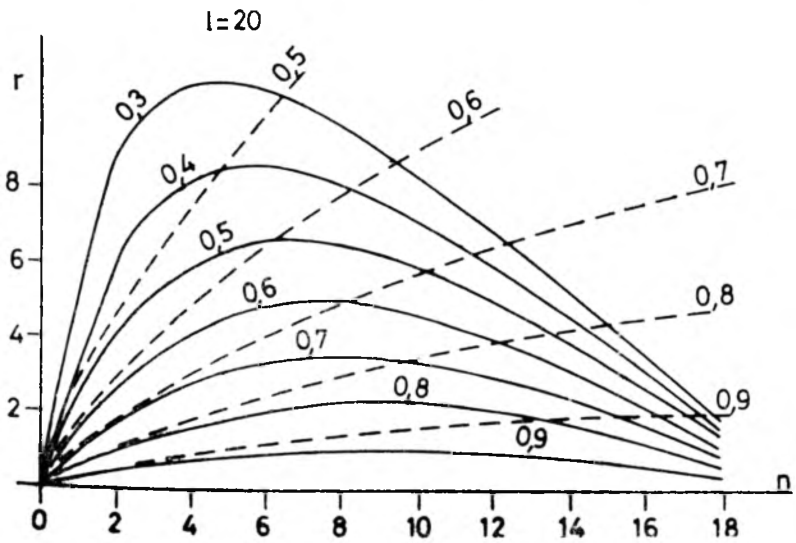
4. Zastosowania

Przy l = constans oraz a = constans, wzory (13) i (18) przedstawiają zależność między liczbą obserwacji nadliczbowych przy niezależnym wyrównaniu $n = l - 2P$ oraz liczbą r, o którą zwiększa się liczba obserwacji nadliczbowych przy wyrównaniu tej samej sieci z warunkami nawiązania.

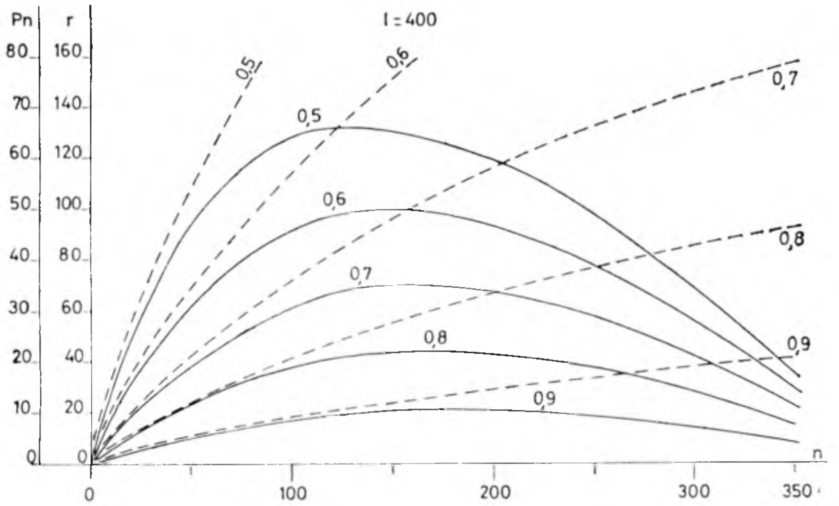
W geodezyjnej praktyce wzory te mogą być wykorzystywane przy projektowaniu sieci poziomych nawiązanych do punktów wyższych klas. Dla sieci o konkretnej liczbie obserwacji l, oraz dla różnych wartości


l = 10
r
n
0,1
0,2
0,3
0,4
0,5
0,6
0,7
0,8
0,9
0,4
0,5
0,6
0,7
0,8
0,9
0
1
2
3
4
5
6
7
2
4
6
8
10

Rys. 4a


l = 20
r
n
0,3
0,4
0,5
0,6
0,7
0,8
0,5
0,6
0,7
0,8
0,9
0,9
2
4
6
8
0
2
4
6
8
10
12
14
16
18

Rys. 4b



Rys. 4c

współczynnika a, na rysunkach: 4^a — ($l = 10$), 4^b — ($l = 20$) i 4^c — ($l = 400$) przedstawiono wykresy funkcji określonych wzorami:

— (13), tj. przy założeniu bezbłędności punktów nawiązania — linie ciągłe,

— (18), tj. przy odrzuceniu założenia bezbłędności punktów nawiązania — linie przerywane.

A. Sieci małe — wcięcia pojedynczych punktów

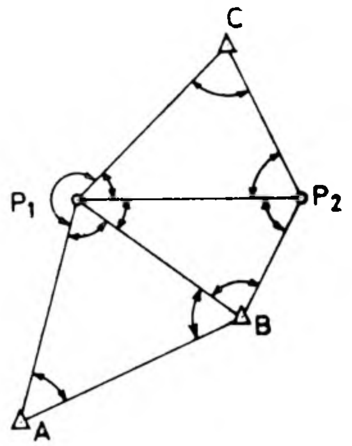
Rozpatrzymy sieć przedstawioną na rysunku 5, w której wyznaczane są punkty P_1 i P_2 na podstawie 10 kątów zaobserwowanych ze średnim błędem $m \pm 12^{cc}$. Sieć ta ma być nawiązana do punktów A, B i C wyznaczonych w sieci charakteryzującej się przeciętną wartością średniego błędu wyrównanego kąta $m = \pm 6^{cc}$.

Przy wyrównaniu niezależnym omawianej sieci trzeba przyjąć dwa punkty za bezbłędne, a więc $n = 10 - 6 = 4$. Przy sieci nawiązanej do punktów A, B i C liczba obserwacji nadliczbowych wzrośnie o 2. Z rysunku 4^a, dla $r = 2$ i $n = 4$, odczytamy $a = 0{,}6$.

Przy wyrównaniu niezależnym, zgodnie z twierdzeniem Otrębskiego, przeciętne zmniejszenie kwadratu średniego błędu obserwacji, dla sieci przedstawionej na rysunku 5, wyniesie

$$p = \frac{u}{l} = 0{,}6,$$

a więc, $m^2_{\beta\,\mathrm{przec}} = 0{,}6(m_\beta)^2$



Rys. 5

Podstawiając dane dla sieci przedstawionej na rysunku 5, otrzymamy

$$m_{\text{przec}} = 0{,}77\ 12^{cc} = 9^{cc}.$$

Przy wyrównaniu z założeniem bezbłędności punktów nawiązania

$$m_{\text{przec}} = a\ 9^{cc} = 5{,}4^{cc}.$$

W wyniku wyrównania sieci przedstawionej na rysunku 5 z założeniem bezbłędności punktów nawiązania (A, B, C) uzyskuje się przeciętną wartość średniego błędu wyrównanej obserwacji mniejszą od średniego błędu wyrównanego kąta charakteryzującego dokładność sieci wyjściowej oraz dwa razy mniejszą od średniego błędu niewyrównanych obserwacji. Wynik ten jest mało prawdopodobny, tak duże zmniejszenie średnich błędów obserwacji wyrównanych z warunkami nawiązania, można uznać za logiczne tylko w wypadku, gdy wszystkie elementy sieci wyjściowej są bezbłędne. W rzeczywistości elementy sieci wyjściowej wyznaczone są na podstawie pomiarów, a dokładność ich określona jest na podstawie wyrównania. Nielogicznym jest, jeżeli średnie błędy wyrównanych elementów sieci nawiązanej uzyskują mniejsze średnie błędy wyrównanych obserwacji od średnich błędów wyrównanych elementów sieci wyjściowej.

Analizując wykresy przedstawione na rysunkach 4^a i 4^b nasuwa się wniosek, że w większości wypadków małych sieci wyrównywanych z założeniem bezbłędności punktów nawiązania, ocena dokładności wyrównanych obserwacji jest zawyżoną. W związku z tym, ze szczególną ostrożnością należy podchodzić do oceny dokładności uzyskanej przy zagęszczeniu sieci metodą wielokrotnych wcięć pojedynczych punktów lub grup punktów wyrównywanych z założeniem bezbłędności punktów nawiązania.

B. Powierzchniowe sieci poziome nawiązane do punktów wyższych klas

Rozpatrzymy sieć kątową, w której liczba wszystkich punktów $P = 80$, liczba obserwacji $l = 400$ oraz średni błąd kąta przed wyrównaniem $(m\ ) = 10^{cc}$.

Sieć tę można rozwiązać przyjmując z wszystkich 80 punktów:

1) 5 punktów nawiązania, przy czym są to punkty sieci I klasy charakteryzujące się przeciętną wartością średniego błędu wyrównawczego kąta $m\ = 3^{cc}$,

2) 30 punktów, tj. wszystkie punkty wyższych klas przy pomiarze włączone do analizowanej sieci, przy czym w tym wypadku sieć punktów nawiązania charakteryzuje przeciętna wartość średniego błędu wyrównanego kąta $m\ = 6^{cc}$.

Przy wyrównaniu niezależnym omawianej sieci otrzymamy

$$p = \frac{160}{400} = 0{,}4$$

czyli $m_{\text{przcc.}} = 0{,}6\ m = 6^{cc}$.

Przy wyrównaniu z przyjęciem punktów nawiązania za bezbłędne, z rysunku 4c odczytamy dla $n = 240$:

1) $a = 0{,}95$,

$$m_{\text{przec.}} = 0{,}95 \cdot 6^{cc} = 5{,}7^{cc}$$

2) $a = 0{,}7$

$$m_{\text{przec.}} = 0{,}7 \cdot 6^{cc} = 4{,}2^{cc}$$

W pierwszym wypadku, uzyskana ocena dokładności jest logiczną.

W drugim wypadku uzyskamy średnie błędy wyrównanych obserwacji mniejsze od średnich błędów charakteryzujących sieć, do której punktów nawiązano sieć wyrównywaną. Projektując sieć należy więc przyjąć za prawidłowe rozwiązanie 1, tj. nawiązanie sieci do 5 punktów I klasy.

Wykorzystując przy projektowaniu sieci wzory (13) i (18), należy pamiętać że:

1) współczynnik $t = a^2$ charakteryzuje przeciętne zmniejszenie wartości kwadratu średniego błędu wyrównanej obserwacji. Jeżeli chcemy, aby zmniejszenie średnich błędów poszczególnych obserwacji nieznacz-

nie odbiegało od założonego przeciętnego zmniejszenia a, to musi być spełniony warunek równomiernego rozmieszczenia punktów nawiązania w wyrównywanej sieci;

2) omawiane wzory wyprowadzono przy założeniu, że wpływ błędów wzajemnego położenia punktów odniesienia na wielkość średniego błędu pojedynczej obserwacji jest pomijalny. Założenie to może być spełnione tylko w wypadku gdy punkty nawiązania wyznaczone były jednocześnie z wyrównania dużej powierzchniowej sieci o dokładności pomiaru znacznie wyższej od dokładności pomiaru nawiązywanej sieci oraz gdy znaki pomiarowe punktów nawiązania nie zmieniły pierwotnego położenia.

W wypadku gdy punkty nawiązania wyznaczone były metodą wcięć, to uzyskana z wyrównania charakterystyka dokładności ich wzajemnego położenia może być znacznie zawyżona. Oznacza to, że dokładność wzajemnego położenia punktów nawiązania może być niższa od dokładności pomiaru sieci wyrównywanej, co w konsekwencji spowoduje zniekształcenie dobrego materiału obserwacyjnego.

W omawianym wypadku można zastosować wyrównanie z odrzuceniem założenia bezbłędności punktów nawiązania, wówczas współczynnik a będzie znacznie większy niż w wypadku przyjęcia założenia bezbłędności punktów odniesienia (rys. 4^c), a w konsekwencji uzyska się lepszą, bardziej logiczną ocenę dokładności wyrównanych obserwacji. Biorąc pod uwagę, że przy dużych (w stosunku do dokładności sieci wyrównywanej) błędach wzajemnego położenia punktów nawiązania, wyrażenie

$$\frac{2[\delta v]+[\delta \delta]+[d d]}{n+r}$$

wzoru (15), może znacznie przekroczyć $\frac{[v v]}{n}$, tj. wartość kwadratu średniego błędu pojedynczej obserwacji przy niezależnym wyrównaniu tej samej sieci, powinno się przyjąć jako obowiązującą zasadę, nawiązywanie powierzchniowych sieci poziomych do punktów wyznaczonych z wyrównania powierzchniowej sieci wyższej klasy.

Recenzował prof. dr hab. inż. Wojciech Janusz

АНДЖЕЙ ХЕРМАНОВСКИ

СРЕДНИЕ КВАДРАТИЧЕСКИЕ ОШИБКИ НАБЛЮДЕНИЙ В ПЛАНОВЫХ СЕТЯХ УРАВНИВАЕМЫХ В УСЛОВИЯХ УВЯЗКИ

Резюме

Введение условий увязки при уравнивании наблюдений влечёт к уменьшению средних квадратических ошибок уравниваемых элементов сети. В сети с большим количеством пунктов данных относительно к количеству определяемых пунктов уменьшение величины средних квадратических ошибок так значительное, что оценка точности уравниваемых наблюдений перестаёт быть логической.

В работе представлено формулы, указывающие чётко на невероятное уменьшение средних квадратических ошибок уравниваемых наблюдений под влиянием увеличения в данной сети количества данных пунктов. При проектировании уравниваемых сетей формулы эти могут быть использованы для определения числа пунктов привязки.

В разработке указано также, что следует особенно осторожно подходить к оценке точности элементов плановой сети, определяемой с помощью многократных засечек единичных пунктов или группы пунктов, в конструкциях которых, как правило, выступает значительное число пунктов данных по отношению к числу определяемых пунктов.

Перевод: Róża Tołstikowa

ANDRZEJ HERMANOWSKI

STANDARD DEVIATIONS OF OBSERVATIONS IN HORIZONTAL NETS ADJUSTED WITH CONNECTION CONDITIONS

Summary

Initiation of connection conditions during the adjustment of observations causes decrease of standard deviations of adjusted elements of a net. In a net with a lot of data points comparatively to the number of determined points, the decrease of the standard deviations values is so high, that the accuracy estimation of adjusted observations stops to be logical.

In this elaboration several formulas were initiated. They clearly point out the improbable decrease of standard deviations of adjusted observations under the influence of the increase of the number of data points in the particular net. During the designing of the connected nets these formulas can be applied for determination of the number of connection points.

It is also pointed out, that one should very carefully consider the estimation of the accuracy of the horizontal net elements, by mean of multiple interesections of single points or groups of points, in which constructions there is usually a lot of data points comparison to the number of determined points.

Translation: Jacek Domański