

BOGDAN NEY

528.33

Metoda wyznaczania deformacji poziomych sieci geodezyjnych

SPIS TREŚCI

	str.
1. Wstęp	36
2. Podstawy teoretyczne i zasady metody	38
2.1. Wielomianowy model wektorowego pola przemieszczeń poziomej sieci geodezyjnej	38
2.2. Obliczanie składowych deformacji sieci	41
2.3. Ocena dokładności wyznaczenia składowych deformacji	43
3. Zadania i procedura badań metody na symulowanych sieciach testowych	45
4. Analiza wyników badań testowych	52
4.1. Zagadnienie doboru stopnia wielomianu aproksymującego	52
4.2. Wpływ wielkości, różnic i rozkładu faktycznych przemieszczeń punktów sieci na dokładność metody	57
4.3. Porównanie badanej metody z metodą transformacji poszukiwawczej	60
4.4. Ocena rzeczywistej dokładności metody	66
5. Właściwości metody. Wytyczne i uwagi dotyczące jej praktycznych zastosowań	72
6. Wnioski i uwagi końcowe	79
Bibliografia	81
Załącznik: liczbowy przykład zastosowania metody	

1. Wstęp

Badanie zmian położenia punktów poziomej sieci geodezyjnej jest zagadnieniem kapitalnym. Występuje ono zarówno w zadaniu typowo geodezyjnym, jakim jest utrzymanie w aktualności osnów, jak też w problematyce o szerszym zasięgu, interesującej więcej branż zawodowych. W tym drugim przypadku chodzi o badania przemieszczeń i odkształceń terenu i różnych obiektów pod wpływem czynników naturalnych lub technogennych. W obu przypadkach podstawą badań są odpowiednie pomiary sieci geodezyjnej. Wyznaczenie deformacji sieci na podstawie wyników pomiarów okresowych jest istotnym składnikiem procesu badania deformacji terenu i obiektów; składa się z czynności o charakterze kameralnym, ciąg tych czynności tworzy technologię. Podstawą takiej technologii jest zasada lub zbiór zasad postępowania. Zbiór takich zasad, wzbogacony o sposób lub sposoby ich stosowania, stanowi metodę.

Przedmiotem niniejszej pracy jest metoda wyznaczania zmian (deformacji) poziomej sieci geodezyjnej. W pracy stosowany jest termin „deformacje sieci”, równoznaczny zresztą z terminem „odkształcenia sieci”, który może budzić pewne wątpliwości natury pojęciowej i językowej. Do tychczas bowiem w zagadnieniach tego typu operuje się przeważnie pojęciem „przemieszczenia punktów”. Warto więc zaznaczyć, że nieidentyczne przemieszczenia punktów sieci są podstawowym przejawem jej deformacji i jedną z podstaw do określenia charakterystyki tych deformacji. Również w metodzie stanowiącej przedmiot niniejszej pracy rezultaty numerycznego opracowania pomiarów okresowych będą wyrażone w postaci przemieszczeń punktów badanej sieci. Składniki tych przemieszczeń są jednakże wywołane różnymi przyczynami (źródłami). Jak się okaże, poza faktycznymi przemieszczeniami (ruchy własne punktów), na pozorne przesunięcia składają się również inne przyczyny.

Traktując sieć geodezyjną jako konstrukcję szkieletową, związaną w jej punktach z powierzchnią terenu utożsamianą z powierzchnią ciała stałego o zachowanej ciągłości, można przypisać jej własności ciała stałego i przez analogię przenieść na nią pojęcia i terminy zapożyczone z mechaniki ciała stałego. W ten sposób składniki ogólnego przemieszczenia poziomego punktu sieci są wiązane z różnymi rodzajami deformacji tej sieci. Generalnie deformacje dzielą się na jednorodne i niejednorodne. Deformacje jednorodne charakteryzują zmiany całej sieci, traktowanej analogicznie jak ciało stałe, natomiast deformacje niejednorodne — to faktyczne ruchy punktów (przemieszczenia własne, lokalne). Drugą, obok wyżej przytoczonej, przesłanką do konsekwentnego potraktowania poziomej sieci geodezyjnej w kategorii deformacji ciała stałego jest intencja sformułowania takiej metody, która może służyć nie tylko do wyznaczania

przemieszczeń poszczególnych punktów sieci, ale również do badania i syntetycznej charakterystyki sposobu deformowania się powierzchni terenu, na którym położona jest pozioma sieć geodezyjna.

Podejmując badania nad metodą służącą dwóm wyżej określonym celom, przyjęto założenie, że metoda ta powinna być wolna od założeń wstępnych dotyczących stałości niektórych, określonych punktów sieci. Rezygnacja z tego rodzaju założeń wejściowych uwalnia metodę od skutków ewentualnej błędności tych założeń, dzięki czemu metoda staje się bardziej ogólna i niezawodna. Jednocześnie jednak stanowi to o trudności postawionego zadania badawczego. W niniejszej pracy wysunięto hipotezę, że warunek taki może być spełniony przez metodę, w której dane empiryczne (wyniki pomiarów), odpowiednio opracowane, stanowią podstawę do utworzenia zgeneralizowanego modelu nieznannej rzeczywistości, przy opracowaniu zaś metody skorzystano z dorobku mechaniki ciała stałego, przenosząc ideę pola wektorowego do opisu przemieszczeń punktów poziomej sieci geodezyjnej. Ciągły model pola wektorowego, budowany za pomocą funkcji wielomianowych, pozwala na wyznaczanie przemieszczeń dowolnych punktów z obszaru danej sieci w ustalonym układzie współrzędnych.

Zasadnicza teza pracy polega na wykazaniu, iż metoda wielomianowej aproksymacji wektorowego pola przemieszczeń spełnia postulaty postawione w programie badań nad tematem i nadaje się do wyznaczania deformacji poziomych sieci geodezyjnych oraz pośrednio do badania charakterystycznych cech odkształceń powierzchni terenu. Zasady metody i jej algorytm podane są w drugim rozdziale pracy. Zawarty tam opis obejmuje również sposoby oceny dokładnościowej wyznaczanych wielkości oraz niezbędne uzasadnienia i komentarze metodyczne. Warto podkreślić, że spośród znanych dotąd metod badania deformacji sieci poziomych, metoda stanowiąca przedmiot niniejszej pracy najbardziej konsekwentnie, w pełni realizuje ideę wektorowego pola przemieszczeń.

Najwięcej miejsca w pracy poświęcono na przedstawienie sposobów i wyników testowego badania metody na podstawie sieci i zbiorów danych, symulowanych za pomocą komputera. Te zagadnienia są treścią rozdziałów trzeciego i czwartego. Uzasadnienie słuszności metody na tej drodze autor uważa za podstawowe zadanie badawcze. Argumenty przemawiające za wyborem metody symulacyjnej jako najbardziej właściwej drogi testowania przyjętej hipotezy są przytoczone w rozdziale trzecim. W dwóch ostatnich rozdziałach — piątym i szóstym — podsumowano wyniki badań, dokonując charakterystyki i oceny metody, głównie w aspekcie jej zastosowań. W załączniku do pracy, umieszczonym poza jej tekstem, podany jest liczbowy przykład o charakterze metodycznym. W przykładzie tym, ze względu na konieczność ograniczenia objętości pracy, po-

dano tylko te etapy rozwiązania zadania, które są niezbędne do zilustrowania praktycznej procedury tworzenia modelu, pomijając czynności (etapy) typowe dla metody najmniejszych kwadratów w ujęciu macierzowym lub krakowianowym. W zestawieniu bibliografii wykazano tylko te prace, na które są powołania w tekście. Pominęto więc także wiele pozycji z ostatnich lat, należących do literatury przedmiotu (wśród nich referaty zaprezentowane podczas Międzynarodowego Sympozjum Pomiarów Odkształceń Metodami Geodezyjnymi, Kraków, wrzesień 1975 r.), lecz nie mających ścisłego związku z zagadnieniami rozważanymi w niniejszej pracy. Ponieważ praca nie ma charakteru monografii z zakresu metod wyznaczania poziomych przemieszczeń i odkształceń, można było zrezygnować z umieszczenia w niej przeglądowej systematyki i porównawczej oceny tych metod. Czytelnikowi zainteresowanemu takim tematem można polecić opracowanie [18], ujmujące stan aktualny w roku 1963. Od tamtego czasu nastąpił oczywiście dalszy rozwój metod. Można by go prześledzić na podstawie pozycji [6], [8], [14], [20] i [21] oraz wspomnianego już zbioru referatów krakowskiego sympozjum z roku 1975.

Na zakończenie tego wstępu — parę informacji z historii tematu niniejszej pracy.

Badania nad tematem podjął autor we wczesnych latach siedemdziesiątych, prowadząc je w ramach prac planowych w Instytucie Geodezji Górniczej i Przemysłowej Akademii Górniczo-Hutniczej. W 1973 roku idea metody oraz jej podstawy i procedura były zaprezentowane przez autora na forum Międzynarodowego Sympozjum Metod Obliczeń w Geodezji Geometrycznej, odbytego w Oxfordzie [15]. Temat spotkał się z zainteresowaniem specjalistów, które znalazło wyraz w publicznych wypowiedziach dyskusyjnych. Od 1974 roku prace nad tematem były kontynuowane przez autora w Instytucie Geodezji i Kartografii. Referat [16], wygłoszony na międzynarodowym sympozjum w Krakowie, zawierał oprócz teorii metody również pewne wyniki jej badań testowych. Zarys metody, nie zawierający wyników jej testowania, opublikowany był w Zeszytach Naukowych AGH, seria „Geodezja” w edycji językowej angielskiej [17]. Niniejsza praca poświęcona jest gruntownemu przedstawieniu metody i wyników jej badań testowych.

2. Podstawy teoretyczne i zasady metody

2.1. Wielomianowy model wektorowego pola przemieszczeń poziomej sieci geodezyjnej

Istotnym przejawem deformacji poziomej sieci geodezyjnej są przemieszczenia punktów tej sieci. Zbiór dwuwymiarowych wektorów prze-

mieszczeń określa wektorowe pole przemieszczeń sieci. Wykorzystanie teorii wektorowego pola przemieszczeń opiera się na założeniu, że przemieszczenia punktów sieci Δx i Δy mogą być traktowane jako funkcje ciągłe i różniczkuwalne względem położenia w ortokartezjańskim układzie współrzędnych OXY . W ogólnej postaci można napisać:

$$\Delta x = f_1(x, y); \quad \Delta y = f_2(x, y). \quad (1)$$

Istnieje wiele rodzajów funkcji, które mogłyby być przyjęte do realizacji ogólnych związków (1). Można nadto przypuszczać, że najwłaściwsze byłyby różne funkcje dla różnych pól przemieszczeń. W niniejszej pracy przyjęto następujące kryteria doboru rodzaju funkcji dla związków (1):

— model matematyczny deformacji sieci poziomej powinien być swobodny;

— model ten powinien być praktyczny, czyli, inaczej mówiąc, posługiwanie się funkcjami f_1 i f_2 powinno być łatwe;

— model matematyczny powinien opisywać rzeczywistość z pewną dokładnością, możliwą do wyznaczenia.

Powyższym warunkom odpowiadają funkcje wielomianowe, których zastosowanie w różnorodnych zagadnieniach geodezyjnych jest powszechne. Funkcje wielomianowe posłużyły do opisu zjawisk deformacji w mechanice ciała stałego [5]. W geodezji tego typu funkcje rozpowszechnione są, jak wiadomo, w różnych zagadnieniach aproksymacyjnych. W szczególności znalazły zastosowania w badaniach odkształceń budowli [12], [22], [2], [3], [4].

Jeżeli pozioma sieć geodezyjna zawiera N punktów, to istnieją wielomiany interpolacyjne stopnia q , przy czym $q < N$, dla których zachodzi:

$$\Delta x_i = f_1(x_i, y_i); \quad \Delta y_i = f_2(x_i, y_i); \quad (i = 1, 2, \dots, N); \quad (2)$$

natomiast wszystkie zbiory $\{\Delta x_i, x_i, y_i\}$ oraz $\{\Delta y_i, x_i, y_i\}$ ($i = 1, 2, \dots, N$) dla $q = N-1$ są miejscami zerowymi funkcji

$$\Phi_1 = \Delta x - f_1(x, y); \quad \Phi_2 = \Delta y - f_2(x, y). \quad (3)$$

Dla stopnia wielomianu niższego od q dopuszczamy z góry pewne błędy (niedokładności) v w spełnieniu, dla punktu sieci, warunku (3), czyli będzie:

$$v_i^x = \Delta x_i - f_1(x_i, y_i); \quad v_i^y = \Delta y_i - f_2(x_i, y_i); \quad (i = 1, 2, \dots, N) \quad (4)$$

Dążenie do uproszczenia modelu w uzasadnionych granicach, polegającego na obniżeniu stopnia wielomianu, jest bardzo ważne z praktycznego punktu widzenia i będzie uwzględnione w algorytmie metody.

Wielomianowy model wektorowego pola przemieszczeń punktów sieci poziomej, jako rozwinięcie ogólnej zasady (1), zapisujemy następująco:

$$\Delta x = k_{00}^x + k_{10}^x x + k_{01}^x y + k_{20}^x x^2 + k_{02}^x y^2 + k_{11}^x xy + k_{30}^x x^3 + k_{03}^x y^3 + \\ + k_{21}^x x^2 y + k_{12}^x x y^2 + \dots \quad (5)$$

$$\Delta y = k_{00}^y + k_{10}^y x + k_{01}^y y + k_{20}^y x^2 + k_{02}^y y^2 + k_{11}^y xy + k_{30}^y x^3 + k_{03}^y y^3 + \\ + k_{21}^y x^2 y + k_{12}^y x y^2 + \dots$$

We wzorach (5), napisanych przykładowo dla wielomianów trzeciego stopnia, przyjęto oznaczenia:

$\Delta x, \Delta y$ — składowe wektorów pozornych przemieszczeń punktów sieci, wyznaczone na podstawie pomiarów;

k^x, k^y — współczynniki funkcji wielomianowych.

Wielkości Δx i Δy mogą być wyznaczone na podstawie pomiarów sieci geodezyjnej jednym z dwóch sposobów:

— wariant pierwszy — bezpośrednio jako różnice współrzędnych (przyrosty) z wyrównania dwóch okresowych obserwacji sieci;

— wariant drugi — pośrednio na podstawie nie wyrównanych różnic elementów geometrycznych sieci, pomierzonych w obydwu porównywanych cyklach obserwacyjnych.

W pierwszym przypadku liczba równań (5) równa jest podwojonej liczbie punktów sieci. W wariancie drugim liczba równań elementarnych, biorących udział w tworzeniu modelu, pokrywa się z liczbą pomierzonych różnic elementów geometrycznych sieci. Związek tych równań elementarnych z równaniami typu (5) będzie podany na końcu podrozdziału 2.1.

Model (5) dla konkretnej sieci przy ustalonym układzie współrzędnych i znanych wielkościach Δx i Δy jest całkowicie określony po obliczeniu wartości współczynników k^x i k^y .

W praktyce liczba równań typu (5) przekracza na ogół liczbę współczynników k^x i k^y , przeto wyznaczenie wartości tych współczynników odbywa się na drodze wyrównania. Wprowadźmy oznaczenia:

$\Delta x, \Delta y$ — jednowierszowe macierze składowych wektorów przemieszczeń punktów,

k^x, k^y — jednowierszowe macierze współczynników funkcji wielomianowych postaci (5),

α — macierz współczynników przy niewiadomych k^x i k^y , utworzona z jednomianów współrzędnych poszczególnych punktów sieci.

Równania (5) zapiszemy teraz w formie tabelarycznej:

$$\Delta \mathbf{x} = \mathbf{k}^x \alpha^T; \quad \Delta \mathbf{y} = \mathbf{k}^y \alpha^T, \quad (6)$$

przy czym T oznacza transponowanie macierzy.

Zastosujmy dalej następujące oznaczenia:

$\mathbf{a}_x, \mathbf{a}_y$ — macierze współczynników przy uszeregowanych niewiadomych;

$\mathbf{I}$ — macierz wyrazów wolnych;

$\mathbf{v}$ — macierz poprawek do pomierzonych różnic elementów sieci.

Układ równań poprawek zapisujemy następująco:

$$[\Delta x \Delta y] \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{a}_x^T \\ \mathbf{a}_y^T \end{bmatrix} + \mathbf{I} = \mathbf{v}. \quad (7)$$

Po uwzględnieniu zapisu (6) równania poprawek (7) przyjmą postać:

$$[\mathbf{k}^x \mathbf{k}^y] \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{a}_x \cdot \boldsymbol{\alpha} \\ \mathbf{a}_y \cdot \boldsymbol{\alpha} \end{bmatrix} + \mathbf{I} = \mathbf{v}. \quad (8)$$

W wyniku rozwiązania równań poprawek (8) metodą najmniejszych kwadratów otrzymuje się najbardziej prawdopodobne wartości współczynników k^x i k^y . Wielkości te opisują konkretnie model deformacji sieci poziomej, wyrażony równaniami (5) i (6).

Związki łączące składowe pola przemieszczeń pozornych ze zmianami elementów geometrycznych, obserwowanych w sieci, wyrażają się w postaci równań poprawek następująco:

$$V_{\Delta x} = B_L \Delta x_L - A_L \Delta y_L - B_P \Delta x_P + A_P \Delta y_P - (B_L - B_P) \Delta x_C + \\ + (A_L - A_P) \Delta y_C + \Delta \alpha. \quad (9)$$

$$V_{\Delta L} = B \Delta x_K + A \Delta y_K - B \Delta x_P - A \Delta y_P + \Delta L. \quad (10)$$

Wyrażenie (9) dotyczy zmiany kąta, a wyrażenie (10) — zmiany długości. Symbole A i B oznaczają odpowiednie współczynniki kierunkowe (por. np. [7] lub [10]), natomiast wskaźniki L, P i C po prawej stronie wzoru (9) dotyczą lewego i prawego ramienia oraz środkowego punktu kąta, a wskaźniki P i K po prawej stronie wzoru (10) oznaczają punkty początkowy i końcowy danego boku sieci.

2.2. Obliczanie składowych deformacji sieci

Wielkości Δx i Δy , otrzymane na podstawie dwóch okresowych pomiarów sieci, są pozornymi przemieszczeniami punktów. Każda z nich składa się z czterech części; składowe te będziemy oznaczać następująco:

$\Delta x_0, \Delta y_0$ — przemieszczenia wynikające z równoległego przesunięcia poziomego punktów sieci względem układu odniesienia;

$\Delta x_\varphi, \Delta y_\varphi$ — przemieszczenia spowodowane skręceniem sieci względem układu odniesienia;

$\Delta x_s, \Delta y_s$ — przemieszczenia spowodowane zmianą skali sieci z tytułu przyjęcia do wyrównania ustalonej długości jednego z boków tej sieci;

$\Delta x_d, \Delta y_d$ — faktyczne (własne, lokalne) przemieszczenia punktów charakteryzujące rzeczywistą deformację sieci.

Związek tych wielkości, zgodnie z zasadą superpozycji, jest następujący:

$$\begin{aligned}\Delta x &= \Delta x_0 + \Delta x_s + \Delta x_z + \Delta x_d, \\ \Delta y &= \Delta y_0 + \Delta y_s + \Delta y_z + \Delta y_d.\end{aligned}\quad (11)$$

Trzy pierwsze spośród składników prawej strony równań (11) wyznaczamy na podstawie wektorowego pola przemieszczeń, korzystając z jego geometrycznej interpretacji. Wzory na składowe deformacji, którymi posługujemy się, pochodzą z mechaniki ciała stałego [5]. Na podstawie ogólnych zależności, znajdując odpowiednie pochodne, otrzymuje się praktyczne formuły, stosowane w algorytmie metody. Te wzory praktycznie mają charakter przybliżony na skutek uproszczeń dokonanych w toku ich wyrowadzania. Uproszczenia polegają na pominięciu pochodnych rzędu wyższego niż pierwszy i uzasadnione są założeniem, że przemieszczenia punktów sieci są wielkościami bardzo małymi w porównaniu z wymiarami tej sieci. Okolicznością sprzyjającą omawianemu uproszczeniu jest to, że iloczyn pochodnych występujący przy obliczaniu pochodnych mieszanych do różniczki zupełnej ma wartość o jeden rząd niższą od wartości pojedynczych pochodnych.

Wektor translacji całej sieci z tytułu równoległego przemieszczenia dwóch punktów przyjętych za stałe w wyrównaniu sieci ma składowe:

$$\mu_0 = [\Delta x_0, \Delta y_0] = [k_{00}^x, k_{00}^y]. \quad (12)$$

Jego długość wyraża się wzorem

$$|\mu_0| = \sqrt{(k_{00}^x)^2 + (k_{00}^y)^2}, \quad (13)$$

a kierunek σ tego wektora można obliczyć ze związku

$$\sigma = \arctg \frac{k_{00}^y}{k_{00}^x}. \quad (14)$$

Kąt skręcenia sieci jako konstrukcji sztywnej z tytułu wzajemnego (lecz nie równoległego) przemieszczenia dwóch punktów przyjętych za stałe do wyrównania sieci wyraża się wzorem

$$\widehat{\varphi} = \frac{1}{2} \left[\frac{\Delta y(x, y)}{\partial x} - \frac{\Delta x(x, y)}{\partial y} \right]_{\substack{x=0 \\ y=0}} \quad (15)$$

który prowadzi do praktycznej formuły

$$\widehat{\varphi} = \frac{1}{2} (k_{10}^y - k_{01}^x). \quad (16)$$

Kąt φ liczony jest w mierze łukowej.

Składowe wektorów przemieszczeń punktów sieci z tytułu skręcenia sieci o kąt $\widehat{\varphi}$ oblicza się wzorem macierzowym

$$\begin{bmatrix} \Delta x_\varphi \\ \Delta y_\varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 - \widehat{\varphi} \\ \widehat{\varphi} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad (17)$$

Jednorodne odkształcenie liniowe (zmiana skali) sieci z tytułu zmiany odległości pomiędzy dwoma punktami przyjętymi za stałe do wyrównania sieci określone jest wzorem

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \left[\frac{\Delta x(x, y)}{\partial x} + \frac{\Delta y(x, y)}{\partial y} \right]_{\substack{x=0 \\ y=0}} \quad (18)$$

z którego otrzymuje się formułę uproszczoną

$$\varepsilon = \frac{1}{2} (k_{10}^x + k_{01}^y). \quad (19)$$

Składowe wektorów przemieszczeń punktów sieci z tytułu zmiany skali ε oblicza się według wzoru

$$\begin{bmatrix} \Delta x_\varepsilon \\ \Delta y_\varepsilon \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & \varepsilon \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}. \quad (20)$$

W związku z założeniami przyjętymi w teorii wektorowego pola przemieszczeń i przy wyprowadzeniu powyższych wzorów, należy zwrócić uwagę na zagadnienie doboru układu współrzędnych $0XY$, w którym dokonuje się badania sieci. Otóż początek tego układu powinien leżeć w środku ciężkości sieci albo — co już jest pewnym odstępstwem od tej reguły — w punkcie sieci położonym w pobliżu jej środka ciężkości. Środek ciężkości sieci rozumiany tu jest w sensie geodezyjnym; jest więc nim punkt matematyczny, którego współrzędne są średnimi arytmetycznymi odpowiednich współrzędnych wszystkich punktów danej sieci. Za przestrzeganiem tej zasady, oprócz względów teoretycznych związanych z założeniami przyjętymi przy przejściu od wzorów ogólnych do praktycznych, przemawiają również powody natury praktycznej. Chodzi tu głównie o potrzebę minimalizowania niedokładności wynikających z nieuniknionego zaokrąglania danych w trakcie numerycznego opracowania badanej sieci.

Dysponując wielkościami Δx i Δy , otrzymanymi z dwukrotnego pomiaru sieci, oraz składowymi deformacji pozornych, wyznaczonymi za pomocą wzorów (12), (17) i (20), można już obliczyć składowe wektorów faktycznych przemieszczeń każdego punktu sieci. Na podstawie zasady (11), uwzględniając związki (17) i (20) piszemy w formie macierzowej wzory na najbardziej prawdopodobne wartości składowych faktycznych przemieszczeń:

$$\begin{bmatrix} \Delta x_d \\ \Delta y_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \Delta x_0 \\ \Delta y_0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \varepsilon - \hat{\varphi} \\ \hat{\varphi} & \varepsilon \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}. \quad (21)$$

2.3. Ocena dokładności wyznaczenia składowych deformacji

Znajomość dokładności, z jaką wyznaczane są wielkości opisujące model i odkształcenia sieci, jest niezbędna do interpretacji tych wielkości.

Z praktycznego punktu widzenia najważniejsze są wskaźniki dokładności dopasowania modelu (aproksymacji), współczynników funkcji wielomianowych i składowych wektorów faktycznych ruchów punktów. Poniżej podane są wzory na obliczanie średnich błędów wszystkich wielkości, odgrywających istotną rolę w procesie wyznaczania deformacji poziomej sieci geodezyjnej metodą aproksymacji wielomianowej.

Stopień dopasowania modelu do zmian elementów badanej sieci, otrzymanych w wyniku pomiarów, charakteryzowany jest średnimi błędami jednostkowymi:

$$M_x = \sqrt{\frac{\sum p v^x v^x}{n-u}}; \quad M_y = \sqrt{\frac{\sum p v^y v^y}{n-u}}; \quad M = \sqrt{M_x^2 + M_y^2}. \quad (22)$$

We wzorach (22) przyjęto oznaczenia:

p — wagi wyznaczenia pozornych przesunięć Δx i Δy ;

v — poprawki obliczone na podstawie rozwiązania układów równań typu (8);

n — liczba elementów sieci biorących udział w jej badaniu;

u — liczba współczynników funkcji wielomianowych.

Średnie błędy wyznaczenia współczynników k o wskaźnikach i oraz j funkcji wielomianowych wyrażają się wzorami:

$$m_{x_{ij}}^x = M_x \sqrt{Q_{x_{ij}}^x}; \quad m_{y_{ij}}^y = M_y \sqrt{Q_{y_{ij}}^y}, \quad (23)$$

w których $Q_{k_{ij}}$ oznacza elementy macierzy korelacyjnej, wyznaczanej na podstawie układu równań poprawek (8).

Z wzoru (23), uwzględniając formułę (12), wynikają związki na obliczenie średnich błędów składowych wektora translacji sieci:

$$m_{\Delta x_0} = M_x \sqrt{Q_{k_{00}}^x}; \quad m_{\Delta y_0} = M_y \sqrt{Q_{k_{00}}^y}. \quad (24)$$

Średni błąd wyznaczenia kąta skręcenia φ , uwzględniając związek (16), wyraża się wzorem

$$m_\varphi = M \sqrt{\mathbf{f}_\varphi \mathbf{Q} \mathbf{f}_\varphi^T}, \quad (25)$$

w którym

$$\mathbf{f}_\varphi = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \dots & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}. \quad (26)$$

Średnie błędy wyznaczenia składowych przemieszczeń punktów z tytułu skręcenia sieci o kąt φ będą (por. wzór (17)):

$$\begin{bmatrix} m_{\Delta x_\varphi} \\ m_{\Delta y_\varphi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & m_\varphi \\ m & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}. \quad (27)$$

Średni błąd wyznaczenia zmiany skali sieci (por. wzór (19)) wyraża się zależnością

$$m_s = M \sqrt{\mathbf{f}_s \mathbf{Q} \mathbf{f}_s^T}, \quad (28)$$

w której

$$\mathbf{f}_\varepsilon = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & \dots & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}. \quad (29)$$

Średnie błędy wyznaczenia składowych przemieszczeń punktów z tytułu zmiany skali będą (por. wzór (18)):

$$\begin{bmatrix} m_{\Delta x_\varepsilon} \\ m_{\Delta y_\varepsilon} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_\varepsilon & 0 \\ 0 & m_\varepsilon \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}. \quad (30)$$

Pozostają jeszcze do wyznaczenia średnie błędy składowych faktycznych ruchów punktów sieci. W tym celu trzeba najpierw dokonać pewnej przeróbki wzorów (21). Polega ona na podstawieniu tam odpowiednich wyrażeń operujących współczynnikami funkcji wielomianowych i zapisaniu tych wzorów w postaci zredukowanej:

$$\begin{aligned} \Delta x_d &= \frac{1}{2} k_{10}^x x + \frac{1}{2} k_{01}^x y + k_{11}^x xy + \sum_{i,j=2} k_{ij}^x (x)^i (y)^j + \frac{1}{2} k_{10}^y y - \frac{1}{2} k_{01}^y x; \\ \Delta y_d &= \frac{1}{2} k_{01}^x x - \frac{1}{2} k_{10}^x y + \frac{1}{2} k_{10}^y x + \frac{1}{2} k_{01}^y y + k_{11}^y xy + \sum_{i,j=2} k_{ij}^y (x)^i (y)^j. \end{aligned} \quad (31)$$

Stosując do wyrażeń (31) prawo narastania błędów, otrzymuje się wzory:

$$m_{\Delta x_d} = M_x \sqrt{\mathbf{f}_x \mathbf{Q} \mathbf{f}_x^T}; \quad m_{\Delta y_d} = M_y \sqrt{\mathbf{f}_y \mathbf{Q} \mathbf{f}_y^T}, \quad (32)$$

w których

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_x &= \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} x & \frac{1}{2} y & xy & \dots & (x)^i (y)^j & \dots & 0 & \frac{1}{2} y & -\frac{1}{2} x & \dots & 0 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{f}_y &= \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} x & -\frac{1}{2} y & 0 & \dots & 0 & 0 & \frac{1}{2} x & \frac{1}{2} y & xy & \dots & (x)^i (y)^j & \dots \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (33)$$

3. Zadania i procedura badań metody na symulowanych sieciach testowych

Teza, że metoda aproksymacji wielomianowej wektorowego pola przemieszczeń sieci poziomej może być z pożytkiem stosowana do badania deformacji sieci, wymaga empirycznej weryfikacji. Zasady metody i wzory o charakterze przybliżonym, zestawione w rozdziale drugim, pochodzą — jak już zaznaczono — z mechaniki ciała stałego i słuszność ich została potwierdzona, również praktycznie, dla założeń i warunków właściwych obiektom objętym zainteresowaniem mechaniki teoretycznej. W niniejszej pracy przyjęto założenie, że właściwości ciała stałego odkształcalnego mogą być rozciągnięte (przeniesione) na geodezyjną sieć płaską (poziomą), którą z punktu widzenia mechaniki trzeba uważać za obiekt abstrakcyjny. Chcąc nadać bardziej realny sens rozumowaniu, można jednak potraktować

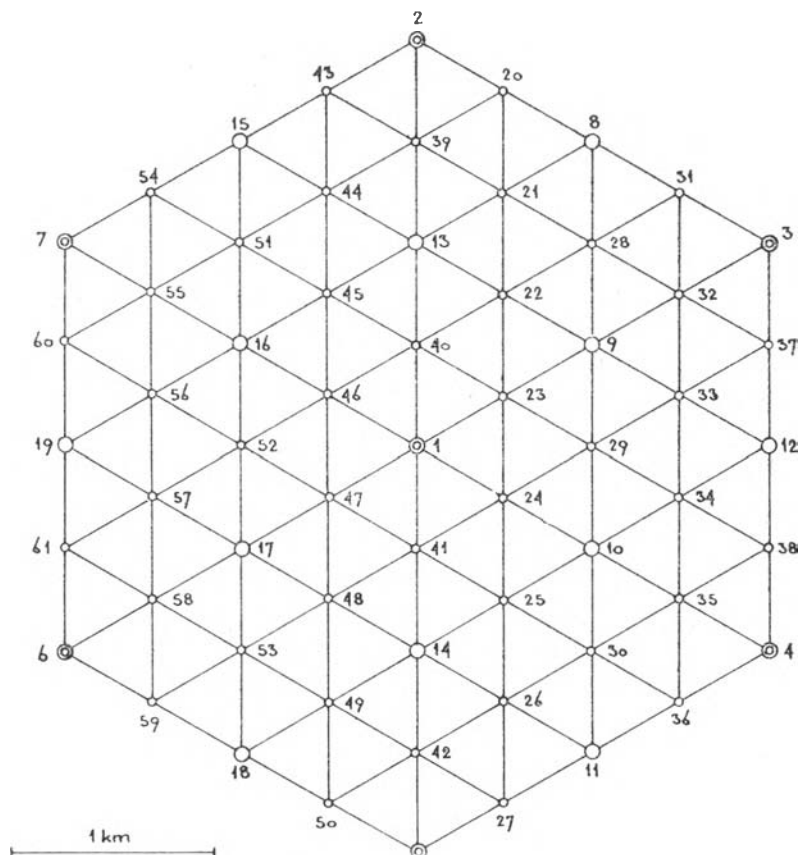
wać geodezyjną sieć poziomą jako zbiór punktów na powierzchni ciała stałego rozpatrywanego wyłącznie w jego płaskim przekroju. Potrzeba dokonania badań empirycznych proponowanej metody wynikała z pewnej odmienności sieci geodezyjnej od obiektów rozpatrywanych w mechanice. W szczególności chodziło o zbadanie możliwości efektywnego modelowania pola przemieszczeń sieci. Ponadto badania takie podyktowane zostały chęcią empirycznego porównania prezentowanej metody z inną, obecnie najbardziej rozpowszechnioną metodą identyfikacji stałych punktów sieci, to jest z metodą transformacji poszukiwawczych, a także chęcią dokonania oceny rzeczywistych możliwości metody aproksymacyjnej pod względem dokładności. Z założenia wyniki badań empirycznych o tak określonym celu miały być podstawą do dokonania wszechstronnej charakterystyki i oceny metody aproksymacyjnej oraz do sformułowania wniosków i zaleceń natury metodycznej, niezbędnych do nadania tej metodzie walorów użyteczności praktycznej. Wyniki badań empirycznych wraz z ich interpretacją i szczegółowymi wnioskami będą przedstawione w czwartym rozdziale pracy.

W badaniach empirycznych metody posłużono się sieciami testowymi, zmodelowanymi na drodze symulacji komputerowej. Ścisłej biorąc, budowa samych sieci testowych nie wymagała symulacji, natomiast na drodze tej zostały wyznaczone pozorne deformacje sieci, imitujące wyniki okresowych pomiarów. Metodę symulacji komputerowej zastosowano z dwóch następujących powodów:

- 1) symulacja komputerowa pozwala na uzyskanie obszernego i różnorodnego, dostosowanego łatwo do celów badania, materiału empirycznego stosunkowo małym nakładem pracy i kosztów;

- 2) materiał empiryczny, utworzony na drodze symulacji komputerowej, nie jest obciążony wpływami pochodzącymi z takich źródeł, które nie są uwzględniane z założenia w danym badaniu; w szczególności w naszym przypadku chodzi o błędy pomiarowe.

Spotyka się niekiedy zastrzeżenia, że opieranie badań na zbiorach lub sieciach tworzonych (modelowanych) sztucznie nie jest właściwe, że nie daje podstaw do wyciągania wniosków dotyczących wszystkich cech badanej metody, interesujących z punktu widzenia praktyki. Warto w związku z przytoczonym poglądem podkreślić, że metoda będąca przedmiotem niniejszej pracy dotyczy wyznaczania ruchów punktów sieci, natomiast nie obejmuje zagadnień obserwacyjnych (pomiarowych). Z tego względu pominięcie w jej testowaniu błędów pomiarowych i ogólniej biorąc, sposobów pozyskiwania materiału obserwacyjnego poddawanego obróbce, jest w pełni uzasadnione; co więcej — daje możliwość uniknięcia takich źródeł zakłóceń, które nie są istotne z punktu widzenia programu i celu badań.

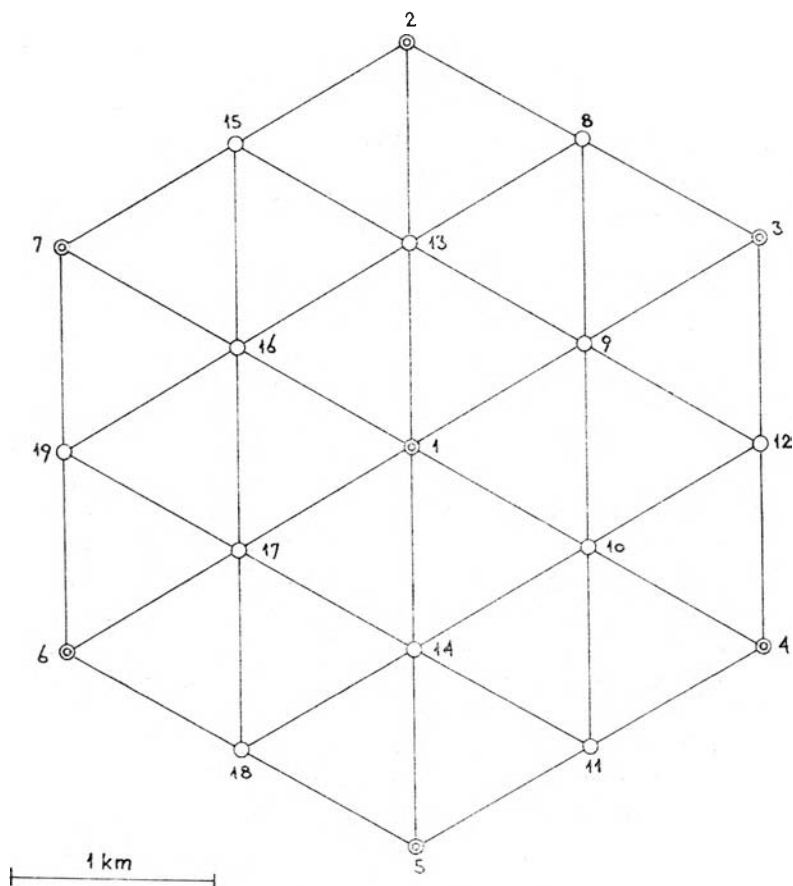
Rys. 1. Sieć testowa $N=61$

Główne badania dokonane zostały na sieci testowej, regularnej, zbudowanej z trójkątów równobocznych o długości boku 0,5 km, zawierającej 61 punktów, tworzącej układ centralny. Sieć ta pokazana jest na rysunku 1. Opuszczenie w tej sieci odpowiednich punktów dało dwa dalsze warianty testowe, pokazane na rysunkach 2 i 3. Liczby punktów tych modeli wynoszą odpowiednio 19 i 7, a długości boków 1 km i 2 km. Powyższe trzy warianty sieci testowej zachowują identyczny w zasadzie kształt, należą do tego samego rodzaju (sieć centralna), natomiast różnią się, ogólnie biorąc, skalą, co można wyrazić różną długością boków, różną liczbą punktów lub różną ich gęstością. Tak utworzone trzy sieci testowe dały możliwość operowania w badaniach porównawczych materiałem reprezentatywnym z punktu widzenia cech, opisujących zróżnicowane parametry wymiarowe sieci poziomej przy zachowaniu tych samych parametrów geometrycznych.

Układy symulowane pozornych przemieszczeń punktów sieci tworzone

na podstawie różnych kombinacji następujących elementów: matematycznego modelu rozkładu, przeciętnych wartości zadanych przemieszczeń Δx i Δy punktów sieci oraz stopnia losowego zaburzenia rozkładu tych przemieszczeń, wyrażonego średnim odchyleniem standardowym.

Dla sieci testowych $N = 61$, $N = 19$ i $N = 7$ uwzględniono w zakresie modeli rozkładu przemieszczeń rozkłady wielomianowe z przeciętnymi wartościami przemieszczeń od 0,07 m do 0,20 m oraz rozkład normalny, natomiast w zakresie losowego zaburzenia rozkładów średnie odchylenia standardowe od 0,01 m do 0,05 m. Ogółem utworzono sześć zbiorów (modeli) badawczych. Ich zestawienie zawiera tabela 1. Modele 5 i 6, aczkolwiek mają ten sam typ rozkładu i identyczne odchylenie standardowe zaburzające rozkład, są różne, ponieważ przemieszczenia Δx i Δy zostały zgenerowane niezależnie przy dwukrotnym użyciu generatora liczb losowych.



Rys. 2. Sieć testowa $N=19$

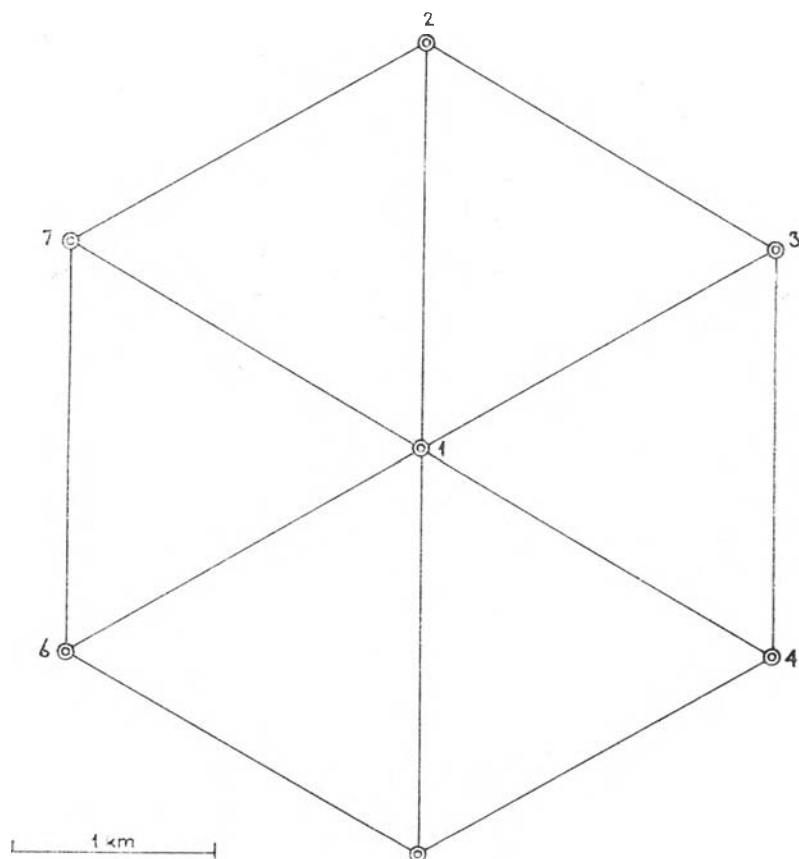
Rys. 3. Sieć testowa $N=7$

Tabela 1

Zestawienie zbiorów (modeli) badawczych utworzonych na podstawie sieci testowych pokazanych na rysunku 1, 2 i 3

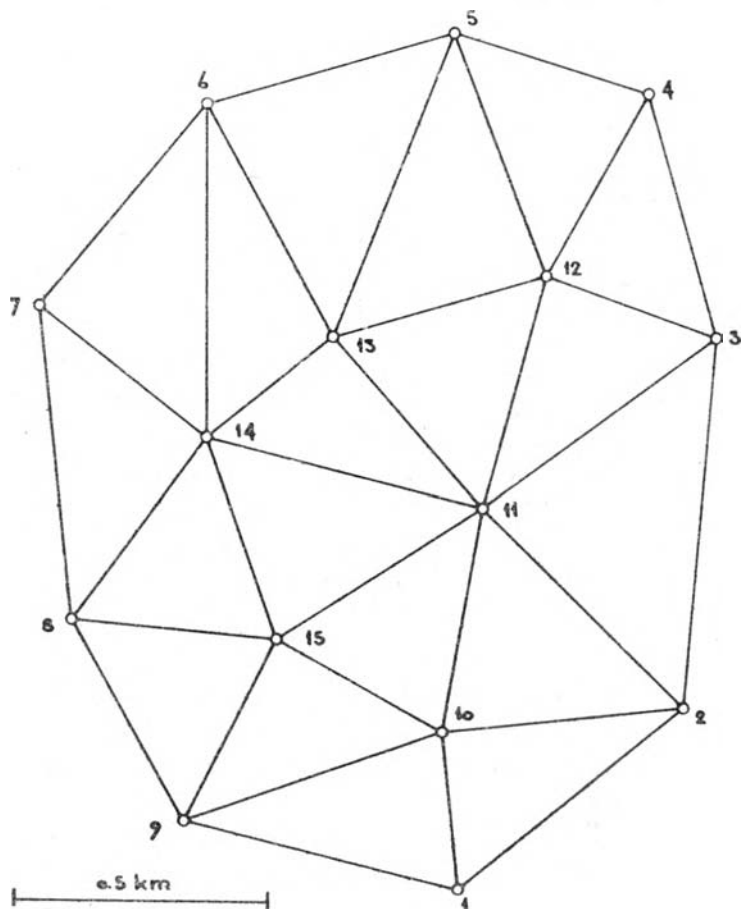
Nr modelu	Rozkład przemieszczeń	Wartości przeciętne (w metrach)		Odchylenie standardowe (w metrach)
		Δx	Δy	
1	wielomian 1 stopnia	0,20	0,15	0,02
2	wielomian 2 stopnia	0,20	0,15	0,02
3	wielomian 1 stopnia	0,08	0,07	0,01
4	wielomian 2 stopnia	0,08	0,07	0,01
5	normalny			0,05
6	normalny			0,05

Dla modelu 5 utworzono jeszcze dodatkowy wariant o tych samych cechach (parametrach), obejmujący wyłącznie sieć testową $N = 19$ (rys. 2).

Powyższe modele (tab. 1) posłużyły głównie do badań nad kryteriami i praktyczną procedurą dobierania stopnia wielomianu aproksymującego w najlepszy sposób wektorowe pole przemieszczeń oraz do empirycznego porównania proponowanej metody z metodą transformacji poszukiwawczych.

Drugim źródłem zbiorów empirycznych poddanych badaniom w ramach niniejszej pracy była sieć pokazana na rysunku 4.

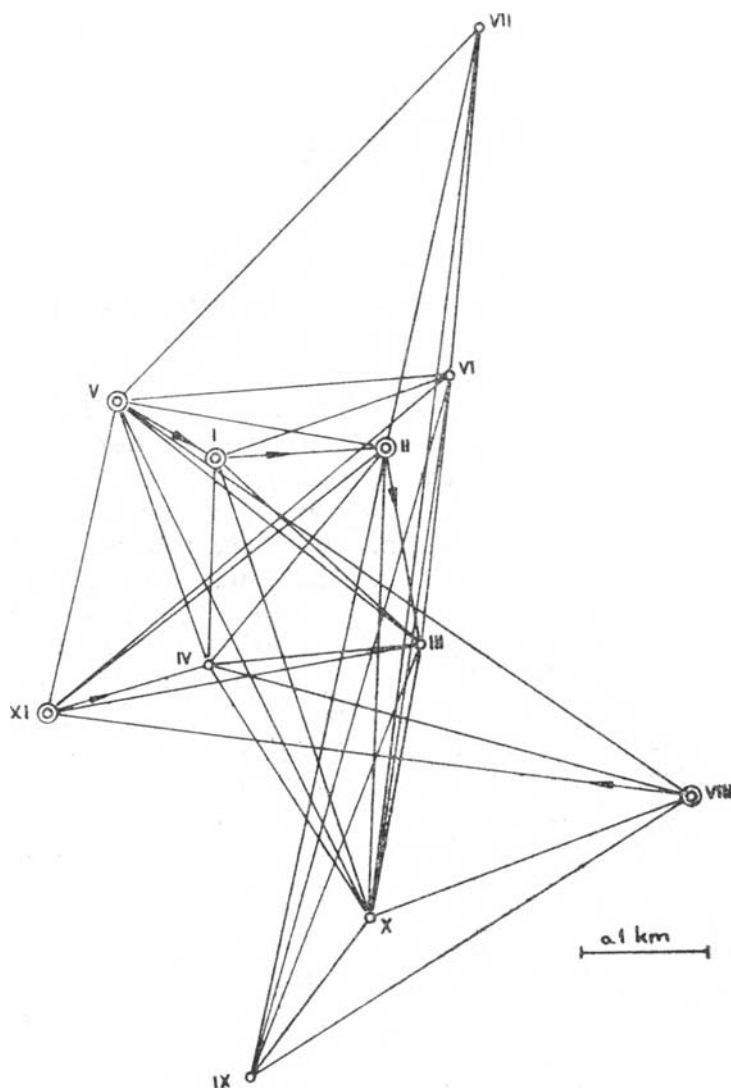
Jest to konstrukcja nieregularna, zbudowana z trójkątów, zawierająca 15 punktów, zbliżona swoim kształtem i wielkością do sieci typu powierzchniowego, stosowanych w geodezyjnych pomiarach przemieszczeń terenu i obiektów. Tej sieci użyto głównie do badania rzeczywistej dokładności proponowanej metody. Było to możliwe dzięki takiemu modelowaniu zbioru



Rys. 4. Sieć testowa nieregularna $N=15$

ru, w którym znane parametry wywołujące pozorne przemieszczenia punktów sieci (translacja, obrót, zmiana skali) przy zadanych całkowitych przesunięciach Δx i Δy pozwoliły na dysponowanie prawdziwymi wartościami faktycznych przesunięć punktów Δx_d i Δy_d .

W badaniach proponowanej metody posłużono się również siecią kontrolną istniejącą w rejonie jednej z polskich zapór wodnych i wykorzystywaną od dawna do okresowych badań stabilności tej budowli. Sieć ta po-



Rys. 5. Sieć kontrolna zapory wodnej

siada na niektórych punktach podwójne znaki (stanowiska instrumentu), co pozwala operować w eksperymentach rzeczywistymi przemieszczeniami punktów. Omawiana sieć pokazana jest na rysunku 5. Do badań, dokonanych w związku z niniejszą pracą, użyto danych obserwacyjnych z tej sieci, pochodzących z kolejnych obserwacji okresowych, wykonanych w latach 1956 i 1958 przez K. Tarnowskiego, ówczesnego pracownika IGiK (por. [13]).

Symulacje komputerowe i inne obliczenia wymagające użycia elektronicznej maszyny cyfrowej, niezbędne do utworzenia i obróbki zbiorów testowych, zostały wykonane na zlecenie Instytutu Geodezji Górniczej i Przemysłowej AGH przez Ośrodek Obliczeniowy Politechniki Rzeszowskiej, zgodnie z założeniami i wytycznymi podanymi przez autora niniejszej pracy. Użyto maszyny Odra 1204 i języka ALGOL.

4. Analiza wyników badań testowych

4.1. Zagadnienie doboru stopnia wielomianu aproksymującego

W opisie analitycznym zjawisk o charakterze niedeterministycznym za pomocą wielomianów algebraicznych istotną sprawą jest dobór stopnia wielomianu aproksymującego. Zagadnienie to jest szczegółowo rozpracowane dla zadań interpolacyjnych; stosuje się w nich testy kontrolne, pozwalające w prosty i szybki sposób dokonywać wyboru właściwego stopnia wielomianu. Testy te oparte są na właściwości zbieżności interpolacji; poczynając od pewnego stopnia wielomianu interpolacyjnego ewentualne dalsze podnoszenie rangi wielomianu jest niecelowe, różnice wartości wyinterpolowanych są teoretycznie zerowe, a praktycznie mieszczą się w granicach niedokładności obliczeń. Przedziały te są bardzo łatwo wyznaczane i stosowane w praktyce. Testy, o których mowa, są rozpowszechnione w literaturze fachowej; nowsze pozycje tej literatury podają te testy w formie dostosowanej do nowoczesnych środków przetwarzania danych (komputery). Literatura geodezyjna zawiera też liczne przykłady zastosowań metod interpolacyjnych do różnych zagadnień badawczych i technicznych [1], [7], [9], [10], [11].

Bardziej złożone są zagadnienia związane z aproksymowaniem wielomianami algebraicznymi zjawisk o charakterze losowym, chociaż odznaczających się pewną regularnością w sensie statystycznym. Losowość, o której mowa, powodowana jest przypadkowymi zakłóceniami procesu, z zasady swej zdeterminowanego. Literatura fachowa zawiera wiele przykładów zastosowania wielomianów algebraicznych do przybliżonego opisu pewnych zagadnień, również z dziedziny geodezji inżynierskiej ([12], [22])

i inne). W aproksymacji dla omawianych celów stosuje się z reguły metodę najmniejszych kwadratów. Stopień wielomianu dobierany jest w tych przypadkach sposobami już nie tak prostymi, jak w zagadnieniach interpolacyjnych. Postępowanie zresztą oparte jest i tu na zasadzie zbieżności aproksymacji w miarę wzrostu stopnia wielomianu, natomiast praktyczne testowanie poprawności wyniku polega na ocenie średniego błędu aproksymacji. Zejście wartości tego błędu poniżej przyjętej granicy, wynikającej z dokładności pozyskania danych empirycznych, oznacza wystarczające dopasowanie modelu (wielomianu) i zarazem oznacza zakończenie aproksymacji. Z zasady zbieżności aproksymacji wynika, że podnoszenie stopnia wielomianu aproksymującego, okupione zresztą dodatkowym nakładem obliczeń, powinno prowadzić do obniżania wartości średniego błędu aproksymacji (dostosowania). Teoretycznie biorąc, można dojść w ten sposób do zerowej wartości tego błędu, która oznacza idealne dopasowanie modelu do aproksymowanego zbioru empirycznego.

Zachodzi pytanie, czy w zagadnieniu będącym przedmiotem niniejszej pracy, funkcjonuje właściwość zbieżności aproksymacji. Pozytywna odpowiedź na to pytanie byłaby bardzo pomyślna, oznaczałaby bowiem możliwość aproksymowania pola przemieszczeń punktów poziomej sieci geodezyjnej w zasadzie z dowolnie wysoką dokładnością, dodatkowo pod warunkiem, o którym była mowa wyżej.

Popatrzmy na to zagadnienie najpierw formalnie, biorąc pod uwagę wzory (22), określające sposób liczenia średnich błędów aproksymacji. Widać z nich, że w miarę wzrostu stopnia wielomianu aproksymującego, kiedy wzrasta liczba wyznaczanych współczynników w tym wielomianie, mianownik maleje. Co do licznika, sytuacja nie jest tak jednoznaczna. Na ogół przy wzroście stopnia wielomianu licznik również maleje, bowiem poprawia się dopasowanie modelu do rzeczywistości i maleją poprawki aproksymacyjne. W zależności od tego, czy szybciej maleje licznik, czy też mianownik pod pierwiastkami wyrażeń (22) — średni błąd aproksymacji zmniejsza się lub utrzymuje się na pewnym poziomie, w przybliżeniu stałym. Tempo zmian wartości licznika i mianownika może być ponadto różne w różnych przedziałach wartości tych wyrażeń, lub — ogólniej biorąc — dla różnych zakresów stopnia wielomianu aproksymującego. Analiza formalna prowadzi więc do wniosku, że aproksymacja wektorowego pola przemieszczeń może być zbieżna w pewnych przedziałach, co objawia się malejącą wartością średniego błędu dopasowania. Właściwość ta może jednak nie wystąpić w pewnym przedziale, wtedy średni błąd dopasowania nie maleje.

Rozważmy teraz wyniki badań testowych na ten temat.

Odpowiedni materiał badawczy został zgenerowany na sieci testowej pokazanej na rysunku 1 (por. też tab. 1). W wariantach 1, 2, 3 i 4 model

Tabela 2

Zestawienie średnich błędów aproksymacji i ich różnic dla sieci testowej pokazanej na rysunku 1

Nr modelu	M_x			M_y		
	stop.	wiel.	przyrost w %	stop.	wiel.	przyrost w %
	1	2		1	2	
1	18	18	0	21	21	0
2	29	20	-30	81	19	-77
3	9	9	0	10	10	0
4	28	10	-64	64	9	-85
5	45	45	0	52	53	+2
6	51	51	0	48	47	-2

Tabela 3

Zestawienie średnich błędów aproksymacji i ich różnic dla wariantów 5 i 6 sieci testowej $N = 61$ (rys. 1)

Nr modelu	Stopień wielomianu	M_x w mm	Przyrost w %	M_y w mm	Przyrost w %
5	1	45		52	
	2	46	+2	53	+2
	3	45	-2	53	0
	4	45	0	50	-6
	5	45	0	53	+6
	6	47	+4	46	-13
	7	46	-2	49	+7
	8	39	-15	50	+2
6	1	51		48	
	2	51	0	47	-2
	3	50	-2	48	+2
	4	48	-4	48	0
	5	48	0	50	+4
	6	49	+2	53	+6
	7	44	-10	52	-2
	8	46	+5	54	+4

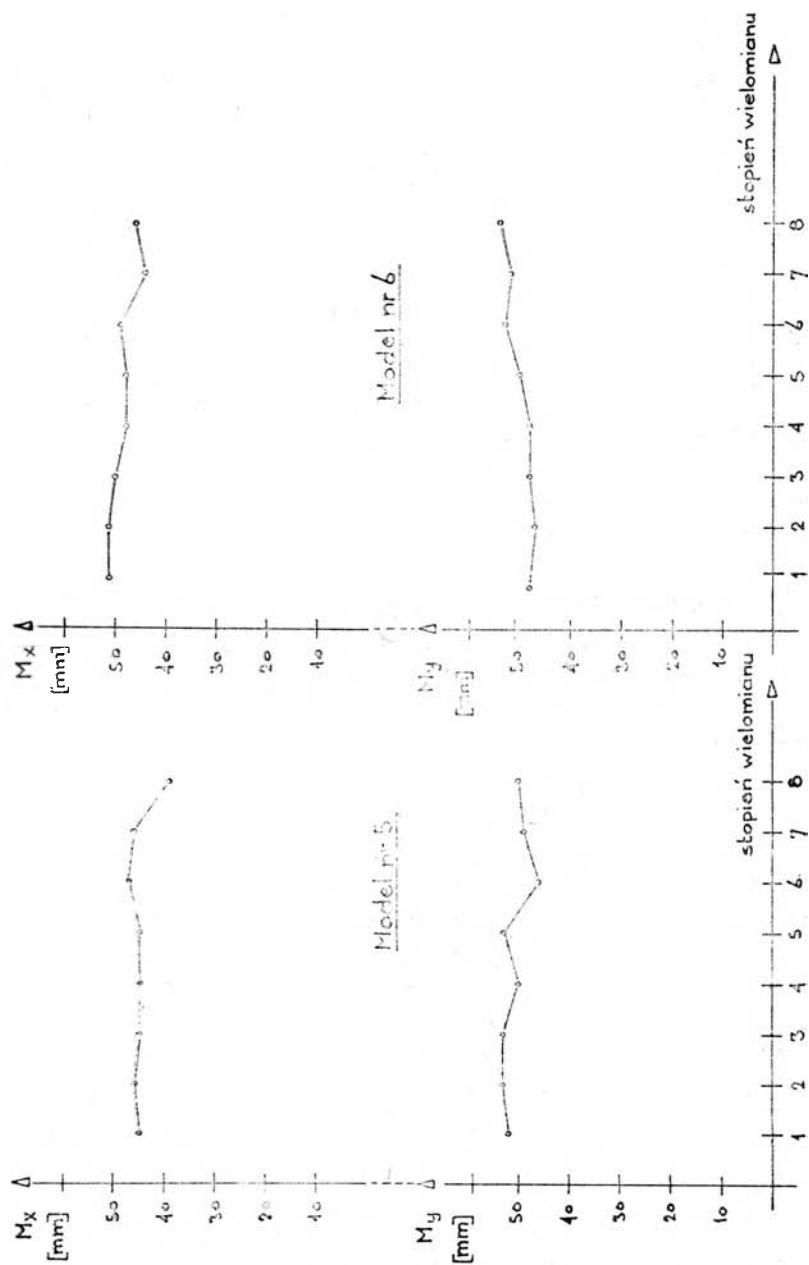
rozkładu wielkości Δx i Δy jest znany, założony z góry i zrealizowany przez symulację komputerową. Przyjęto tu niskie stopnie wielomianu — pierwszy lub drugi — co daje sytuację bliską powszechnemu w geodezji zagadnieniu transformacji afinicznej. W wariantach 5 i 6 rozkład wielkości Δx i Δy jest przypadkowy, generowany przy użyciu rozkładu normalnego. Biorąc pod uwagę tę odmiennność, dla wariantów 5 i 6 wykonano obliczenia z uwzględnieniem stopni wielomianów od pierwszego do ósmego.

W tabeli 2 zestawione są średnie błędy aproksymacji oraz różnice pomiędzy tymi błędami dla wszystkich sześciu wariantów testowych, natomiast tabela 3 zawiera takie zestawienie dla wariantów 5 i 6, uwzględniających osiem stopni wielomianu.

Analizując tabelę 2 łatwo zauważamy, że istotne zmiany wartości średnich błędów dostosowania występują tylko w dwóch przypadkach: w modelu 2 i 4 przy przejściu od pierwszego do drugiego stopnia wielomianu. W pozostałych przypadkach podwyższenie stopnia wielomianu nie powoduje obniżenia wartości średnich błędów aproksymacji. Dane zawarte w tabeli 3 potwierdzają zauważoną właściwość, chociaż pochodzą one tym razem nie ze zbioru o ustalonym rozkładzie wielomianowym, lecz zostały zgenerowane przy założeniu przypadkowości (rozkład normalny). W obu przypadkach, zilustrowanych w tabeli 3 oraz na rysunku 6, wystarczającym do aproksymacji wektorowego pola przemieszczeń okazał się wielomian stopnia pierwszego. Potwierdza to pogląd o uniwersalności transformacji afinicznej w zagadnieniach badania ruchów poziomych sieci geodezyjnych, pod warunkiem przypadkowości rozkładu przemieszczeń (ich zgodności z rozkładem normalnym).

Jeżeli podkreśloną powyżej okoliczność możemy uznać za optymistyczną i bardzo praktyczną, to z drugiej strony analiza wyników ukazanych w tabeli 3 i na rysunku 6 rzuca pewne pesymistyczne światło na ideę aproksymacji wielomianowej wektorowego pola przemieszczeń poziomej sieci geodezyjnej. Z tabeli 3 widać, że średnie błędy aproksymacji stabilizują się w rozpatrzonych przykładach na pewnym poziomie i dalsze zabiegi aproksymacyjne są nieskuteczne; po osiągnięciu pewnej granicy średni błąd dopasowania modelu do rzeczywistości (przynajmniej pozornej) nie maleje w istotny sposób. Oznacza to istnienie pewnej bariery dokładnościowej. Ustabilizowana wartość błędu dopasowania wykazuje przy dalszym prowadzeniu aproksymacji już tylko wahania (fluktuacje) wokół osiągniętego poziomu (granicy). Przedział tych fluktuacji, jak wynika z doświadczeń, osiąga szerokość od kilku do kilkunastu procent ustabilizowanej wartości granicznej średniego błędu dopasowania modelu.

Z praktycznego punktu widzenia w zagadnieniach aproksymacji wektorowego pola przemieszczeń sieci poziomej występują dwa charakterystyczne przypadki aproksymacji: aproksymacja zbieżna oraz aproksymacja nie-



Rys. 6. Wykres średnich błędów aproksymacji dla danych z tabeli 3

zbieżna, przy czym oba te stany uzupełniają się wzajemnie w tym samym zadaniu. Do czasu znalezienia dla danego zbioru wielkości Δx i Δy wielomianu najlepiej — relatywnie — dopasowanego, aproksymacja jest zbieżna, natomiast poczynając od tego miejsca podnoszenie stopnia wielomianu nie prowadzi do zbieżności i staje się w związku z tym zbędne. Empiryczne wyznaczenie właściwego stopnia wielomianu aproksymującego, dokonywane odrębnie dla każdej z dwu składowych Δx i Δy , wymaga wypróbowania (a więc i obliczenia) wielomianu o jeden stopień wyższego od stopnia tego wielomianu, który okazuje się wystarczającym dla danego przypadku. Jest to procedura bardziej kłopotliwa od tej, którą stosuje się w zagadnieniach interpolacyjnych (por. poprzednie uwagi w niniejszym rozdziale). Trzy okoliczności łagodzą w praktyce tę niedogodność. Oto one:

1) posługiwanie się komputerami; ten warunek zresztą w ogóle czyni zastosowanie proponowanej metody realnym;

2) wystarczalność na ogół wielomianu niskiego stopnia, najczęściej pierwszego;

3) możliwość posługiwania się dla danej sieci w jej kolejnych okresowych badaniach wielomianami tego samego stopnia, który był wyznaczany na początku badań (po pierwszych kolejnych okresowych badaniach). U podstaw tej tezy leży założenie, że kolejne zmiany elementów geometrycznych tej samej sieci, różne co do wartości, nie wykazują istotnych różnic jakościowych implikujących zmianę ich modelu (rozkładu).

4.2. Wpływ wielkości, różnic i rozkładu faktycznych przemieszczeń punktów sieci na dokładność metody

Badaniom wpływu wymienionych czynników na proponowaną metodę, w szczególności na jej niezawodność (skuteczność) i dokładność, posłużyły sieci testowe, przedstawione w rozdziale 3.

Trzy warianty sieci (rys. 1, 2 i 3), stopniowo „rozrzedzanej”, dały podstawę do porównawczej analizy metody w warunkach różnej gęstości lub inaczej mówiąc, różnych elementarnych wymiarów sieci, przy zachowanym jej kształcie i typie. Układy wielkości symulowanych przemieszczeń, podane w tabeli 1, zastosowane do trzech modeli sieci dały w sumie obfity materiał statystyczny.

W tabeli 4 zestawione są dla czterech pierwszych modeli (por. tab. 1) sieci centralnej wartości faktycznych przemieszczeń (składowych) obliczonych w każdym przypadku trzykrotnie, raz — na podstawie sieci $N = 7$, drugi raz — z sieci $N = 19$ i trzeci raz z sieci $N = 61$. Jak wiadomo, wszystkie trzy sieci mają wspólnych siedem pierwszych punktów (por. rys. 1, 2 i 3). W tabeli 5 podano najważniejsze parametry wektorowych pól przemieszczeń, trzykrotnie aproksymowanych na podstawie tych samych danych wyjściowych, dla każdej sieci niezależnie.

Przemieszczenia punktów wspólnych trzech sieci, zestawione w tabeli 4, nie wykazują jakiegś systematycznej zmiany pomiędzy trzema różnymi modelami, tym samym nie dają żadnych podstaw do dopatrywania się zależności dokładności wyników od określonego zagęszczenia, czyli wymiarów sieci geodezyjnej. Fluktuacje wzajemne wyznaczonych ruchów własnych, widoczne w cytowanej tabeli, mają charakter przypadkowy, o czym świadczy układ zarówno znaków, jak i bezwzględnych wartości składowych Δx_d i Δy_d .

Analizując tabelę 4 warto przypomnieć, że układ siedmiu punktów pochodzi z sieci regularnej co do kształtu, co może mieć wpływ na wnioski oparte na tej tabeli. Rozpiętość maksymalna wszystkich trzech sieci ($N = 7, 19, 61$) jest identyczna; wynosi ona 4 kilometry wzdłuż osi X i blisko 3,5 km wzdłuż osi Y . Odległości wszystkich sześciu punktów obwodowych od centralnego punktu sieci wynoszą po 2 km. Maksymalne przemieszczenia pozorne punktów sieci wzdłuż osi współrzędnych wyniosły, w zależności od różnych wariantów (por. tab. 1), od około 110 mm (wariant 3) do około 540 mm (wariant 2 w Δx) i około 500 mm (wariant 4 w Δy). Względne ruchy (składowe) maksymalne liczone względem środka sieci wyniosły więc od $5 \cdot 10^{-5}$ do $2,5 \cdot 10^{-4}$, przy przeciętnych zadanych przesunięciach składowych rzędu od $3,5 \cdot 10^{-5}$ do $1 \cdot 10^{-4}$. Z tabeli 4 widać, że maksymalne rozbieżności pomiędzy faktycznymi ruchami punktów, wyliczonymi z aproksymacji dla różnych trzech modeli sieci, wynoszą około 30 mm, co względem odległości punktów od centrum sieci jest wielkością rzędu $1,5 \cdot 10^{-5}$. Jednocześnie te maksymalne rozbieżności stanowią mniej niż 10% maksymalnych przesunięć faktycznych (por. tab. 4), co może być traktowane jako pewna miara dokładności metody w omawianym przykładzie.

Analiza tabeli 4 nasuwa spostrzeżenie, że największą wewnętrzną dokładność metody uzyskano w wariantcie trzecim, a następnie pierwszym. Oznacza to, że najwyższy stopień zgodności rezultatów wykazał taki wariant, w którym przemieszczenia są rozłożone wielomianowo według najniższego (pierwszego) stopnia wielomianu, a przeciętna wartość tych przemieszczeń i ich rozrzut są najmniejsze. Największy wewnętrzny rozrzut wystąpił w takim wariantcie, w którym przemieszczenia o większych wartościach przeciętnych i większym rozproszeniu statystycznym rozłożone są według wyższego (drugiego) stopnia wielomianu. Spostrzeżenie to nadaje się do pewnego uogólnienia, ponieważ znajduje również logiczne umotywowanie. Najniższy stopień wielomianu daje bowiem najmniejszą elastyczność rezultatów, czyli ich relatywnie najlepszą zgodność; podobnie mniejsze wartości różnic przyrostów współrzędnych punktów sieci, rozłożone bardziej regularnie (mniejsze zaburzenia rozkładu), sprzyjają wystąpieniu mniejszych rozbieżności, przynajmniej w liczbach bezwzględnych.

Tabela 4

Zestawienie wartości składowych własnych ruchów punktów dla wspólnych punktów czterech wariantów sieci testowej centralnej (w milimetrach)

Punkt	Wariant sieci	1						2						3						4					
	Składowa	Δx_d			Δy_d			Δx_d			Δy_d			Δx_d			Δy_d			Δx_d			Δy_d		
	Sieć N =	7	19	61	7	19	61	7	19	61	7	19	61	7	19	61	7	19	61	7	19	61	7	19	61
1		+3	+1	+1	-10	-6	-12	0	+14	+20	0	+18	+19	+1	0	-1	-4	-2	-5	0	+7	+10	0	+8	+9
2		-70	-69	-70	-107	-105	-107	-20	-7	-8	-265	-248	-246	+41	+42	+41	-32	-31	-32	+85	+101	+101	-54	-47	-46
3		+73	+74	+69	-90	-90	-87	+128	+142	+144	-311	-295	-300	+51	+51	+48	-47	-44	-45	+80	+87	+88	-73	-65	-68
4		+156	+154	+148	+25	+25	+25	+55	+71	+80	-154	-137	-142	+16	+15	-12	-10	-7	-10	+23	+31	+36	-121	-113	-116
5		+78	+73	+69	+136	+136	+131	+38	+53	+67	-11	+8	+8	-37	-40	-42	+46	+49	+44	+59	+66	+73	+47	+56	+57
6		-160	-167	-164	+133	+133	+120	-244	-231	-216	-294	-273	-260	-108	+112	-110	+69	+69	+63	-55	-48	-40	-8	+3	+9
7		-317	-318	-313	-35	-35	-43	-353	-343	-342	-420	-401	-386	-35	-35	-33	+28	+27	+24	+7	+12	+13	-505	-496	-489
Maksymalna rozbieżność		9			13			29			34			5			6			15			16		

Tabela 5

Zestawienie wyznaczonych głównych parametrów wektorowego pola przemieszczeń dla czterech wariantów sieci testowej centralnej (wielkości liniowe — w milimetrach)

Parametr	Wariant sieci	1			2			3			4		
	Sieć N =	7	19	61	7	19	61	7	19	61	7	19	61
M_x		5	11	18	49	21	20	3	5	9	24	10	10
M_y		23	21	21	1	15	19	11	10	11	0	7	9
φ		$-5,3 \cdot 10^{-5}$	$-5,3 \cdot 10^{-5}$	$-5,4 \cdot 10^{-5}$	$6,3 \cdot 10^{-5}$	$6,3 \cdot 10^{-5}$	$6,3 \cdot 10^{-5}$	$-1,6 \cdot 10^{-5}$	$-1,6 \cdot 10^{-5}$	$-1,6 \cdot 10^{-5}$	$-2,5 \cdot 10^{-5}$	$-2,5 \cdot 10^{-5}$	$-2,5 \cdot 10^{-5}$
ε		$-9,6 \cdot 10^{-6}$	$-1,1 \cdot 10^{-5}$	$-1,2 \cdot 10^{-5}$	$5,5 \cdot 10^{-5}$	$5,4 \cdot 10^{-5}$	$5,1 \cdot 10^{-5}$	$-1,2 \cdot 10^{-5}$	$-1,3 \cdot 10^{-5}$	$-1,3 \cdot 10^{-5}$	$-1,3 \cdot 10^{-5}$	$-1,2 \cdot 10^{-5}$	$-1,0 \cdot 10^{-5}$
Δx_0		+130	+132	+134	+144	+130	+124	+48	+49	+50	+22	+5	+2
Δy_0		-42	-46	-40	+143	+125	+124	-30	-32	-29	+6	-2	-3

Warto dodać, że porównanie składowych przemieszczeń własnych, obliczonych z dwóch modeli sieci centralnej $N = 19$ i $N = 61$ dla pozostałych wspólnych punktów obu tych modeli, to znaczy dla punktów od nr 8 do nr 19, nie narusza spostrzeżeń i wniosków opartych na analizie tabeli 4. Rozbieżności wyników dla tych punktów we wszystkich rozpatrzonych wariantach są mniejsze od rozbieżności zanotowanych na punktach obwodowych sieci (to znaczy na punktach 2—7). Również i to spostrzeżenie znajduje logiczne umotywowanie.

Dane zestawione w tabeli 5, dotyczące tych samych warunków (przypadków), które uwzględniane są w tabeli 4, pozwalają na spostrzeżenia o charakterze bardziej generalnym i uzupełniającym albo potwierdzającym niektóre wnioski sformułowane powyżej. Między innymi widać, że stosunkowo najlepsza zgodność rezultatów w wariancie 3 (por. tab. 4) znajduje odbicie w dwóch pierwszych wierszach tabeli 5; średnie błędy aproksymacji wektorowego pola przemieszczeń są najmniejsze w tym właśnie wariancie. Podobnie układają się stosunki w zakresie parametrów odkształceń jednorodnych sieci, to znaczy jej skręcenia, zmiany skali i translacji. Analiza wartości średnich błędów aproksymacji, zestawionych w tabeli 5, nie prowadzi do sformułowania jakiegoś spostrzeżenia o ich skorelowaniu z liczbą punktów sieci. Dla kolejnych modeli sieci o $N = 7$, $N = 19$ i $N = 61$ przeciętne wartości średnich błędów dopasowania są następujące: dla składowej X — 20; 12 i 14; dla składowej Y — 9; 13 i 15. Można by wprawdzie, pomijając wyraźnie najwyższą pierwszą wartość ($M_x = 20$ dla $N = 7$), zauważyć, że średnie błędy aproksymacji rosną w miarę wzrostu liczby punktów sieci, jednakże rozpatrywany zbiór badawczy jest za mały, aby dać podstawę do takiego wniosku, znajdującego zresztą logiczną motywację. Zauważmy tu jeszcze, że ten nieco „odskakujący” pierwszy wynik ukształtowany jest pod wyłącznym wpływem wyraźnie „odskakującej” w górę wartości $M_x = 49$ dla $N = 7$ w wariancie 2 (por. tab. 5). Gdyby ten składnik pominąć, omawiany układ, jako średnia z trzech wielkości, wyniósłby 11 i wtedy rzeczywiście oba omawiane ciągi M_x i M_y byłyby rosnące.

Analizując dalej tabelę 5 zauważamy, że spośród dwóch porównywanych wielkości: kąta skrętu sieci i zmiany jej skali, większą zmienność wewnętrzną wykazuje ta druga wielkość. Maksymalna rozbieżność ε wynosi w badanym zbiorze $0,4 \cdot 10^{-5}$ (warianty 1 i 2), a w zakresie kąta φ rozbieżność taka osiąga $0,1 \cdot 10^{-5}$ (wariant 1; w pozostałych wariantach wyniki są identyczne w zakresie piątego miejsca po przecinku). Największa rozbieżność wewnętrzna w zakresie składowych translacji sieci występuje, zgodnie z oczekiwaniem, w wariancie 2, gdzie wynosi 20 mm, najlepsza zgodność — w wariancie 3, potwierdzając uprzednio poczynione

spostrzeżenia odnośnie do relatywnej dokładności wewnętrznej rozważanych wariantów przemieszczeń.

W ramach badania wpływu typu i kształtu sieci oraz wielkości i rozkładu przemieszczeń faktycznych na skuteczność i dokładność prezentowanej metody, podjęto próbę aproksymacji wektorowego pola przemieszczeń na podstawie danych z sieci kontrolnej zapory, pokazanej na rysunku 5. W sieci tej, złożonej z 11 punktów, na pięciu punktach dysponowano rzeczywistymi przesunięciami, uzyskanymi dzięki założeniu i zaobserwowaniu podwójnych stanowisk teodolitu. Przesunięcia rzeczywiste wynosiły od 20,5 mm do 28,0 mm.

Zgodnie z przewidywaniem omawiana próba nie zakończyła się pomyślnie. Nieistotność wyliczonych współczynników wystąpiła przy zmienionych drugiego stopnia, przy czym już niektóre wyrazy pierwszego rzędu były obciążone dużymi błędami średnimi, świadczącymi o słabości wyznaczenia tych wyrazów. Oznacza to, że układ punktów omawianej sieci oraz rozkład założonych eksperymentalnych przemieszczeń faktycznych nie mogą służyć do skutecznego opisu ruchów terenu za pomocą metody aproksymacyjnej. Metoda ta, oparta na minimalizacji odstępstw istniejących przemieszczeń punktów od ich modelu wyidealizowanego za pomocą funkcji wielomianowej, wolna od informacji i założeń wejściowych na temat obiektywnej istniejącej prawdy, nie może — przynajmniej generalnie biorąc — przynosić wyników trafnie opisujących rzeczywistość w takich przypadkach, w których zbiór danych jest zbyt ubogi dla dokonania tą drogą opisu sytuacji faktycznej.

4.3. Porównanie badanej metody z metodą transformacji poszukiwawczej

Dokonane w ramach niniejszej pracy porównanie proponowanej metody z metodą transformacji poszukiwawczej w jej najbardziej powszechnym wariantcie ([13], [14]) ma dwojaki charakter. Po pierwsze — jest ono oparte na zbiorze empirycznym uzyskanym z sieci testowej, której model w różnych sześciu wariantach przedstawiony jest na rysunku 1 i w tabeli 1; po drugie — ma charakter ogólny, opisowy; prezentowane tu spostrzeżenia i opinie oparte są na własnościach metody transformacyjnej i na doświadczeniach z jej stosowaniem w praktyce geodezyjnych pomiarów odkształceń.

Sześć wariantów sieci (tab. 1) opracowano metodą transformacji poszukiwawczej, przyjmując dla każdego z nich cztery różne kryteria stałości punktów, a mianowicie: 5 mm, 10 mm, 20 mm i 30 mm. Otrzymano w ten sposób 24 zbiory testowe, złożone z poziomych przemieszczeń punktów. Porównanie wyników uzyskanych dla tego samego wariantu sieci, lecz dla różnych kryteriów stałości, daje możliwość oceny wewnętrznej

dokładności metody transformacji. Wyniki te z założenia powinny być identyczne, ich rozrzut zatem może być miarą pozornej (wewnętrznej) dokładności metody. W tabeli 6 zestawione są informacje nieparametryczne, dotyczące wyników opracowania omawianych sieci testowych metodą transformacji. Dane te pozwalają na ocenę interesujących nas cech metody na podstawie dokonanego eksperymentu. I tak widać, zgodnie z przewidywaniem, że złagodzenie kryterium stałości punktów na ogół prowadzi do większej liczby punktów sieci, kwalifikowanych jako punkty stałe. Własność ta potwierdzona jest bardzo dobitnie przez warianty 1, 3 i 4, natomiast w wariantach 6, 2 i 5 jest ona wyraźnie zaburzona. Niezależnie od liczby punktów zaliczonych do stałych, tabela 6 pokazuje, jak wygląda jednoznaczność badanej metody. Ocenie tej cechy służy zestawienie numerów punktów, które w poszczególnych przypadkach zostały zakwali-

Tabela 6

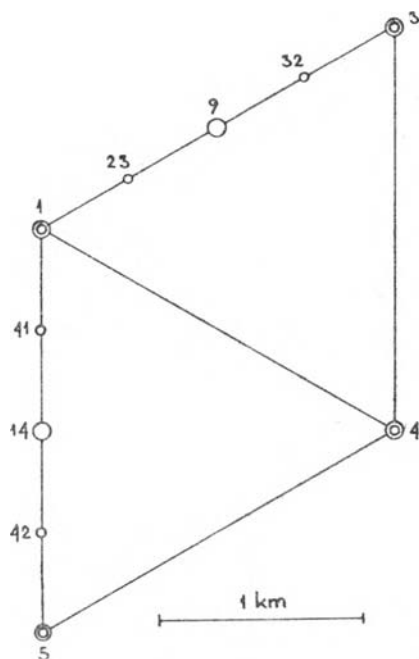
**Zestawienie punktów dostosowania (punktów stałych)
wyznaczonych metodą transformacji poszukiwawczej dla różnych wariantów
sieci testowej $N = 61$**

Wariant sieci	Kryterium stałości w milimetrach							
	5		10		20		30	
	il. p.	nry	il. p.	nry	il. p.	nry	il. p.	nry
1	4	1, 7, 27, 57	4	1, 2, 14, 56	16	1, 2, 13, 14, 15, 18, 23, 29, 41, 45, 47, 49, 56, 58, 59, 60	25	1, 2, 13, 14, 15, 18, 21, 23, 29, 39, 40, 41, 42, 45, 46, 47, 49, 50, 52, 53, 56, 58, 59, 60, 61
2	3	1, 14, 41	5	1, 5, 24, 48, 50	3	1, 2, 46	8	1, 2, 20, 21, 39, 46, 47, 52
3	4	1, 2, 14, 27	7	1, 2, 13, 14, 24, 27, 41	17	1, 2, 13, 14, 22, 23, 24, 26, 27, 31, 39, 40, 41, 42, 45, 47, 49	30	1, 2, 5, 8, 9, 11, 13, 14, 18, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 30, 31, 32, 39, 40, 41, 42, 43, 45, 46, 47, 49, 50
4	3	1, 3, 40	5	1, 2, 15, 16, 39	12	1, 2, 15, 16, 20, 39, 43, 44, 46, 47, 54, 55	19	1, 2, 15, 16, 19, 20, 21, 39, 41, 43, 44, 46, 47, 51, 52, 54, 55, 56, 61
5	3	1, 39, 45	4	1, 3, 13, 34	4	1, 2, 14, 28	7	1, 2, 8, 13, 14, 28, 29
6	3	1, 16, 47	3	1, 8, 22	3	1, 2, 22	3	1, 2, 22

fikowane jako punkty dostosowania (punkty stałe). Z założenia powinno obserwować się takie zjawisko, że zbiór punktów stałych, w rozpatrywanym wariancie, wyznaczony przy łagodniejszym kryterium stałości i w związku z tym liczniejszy od zbioru wyznaczonego dla kryterium ostrzejszego, powinien zawierać, oprócz nowych, dodatkowych punktów, wszystkie punkty sieci zakwalifikowane poprzednio do punktów stałych. Odpowiednie kolumny tabeli 6 świadczą, że ta prawidłowość nie jest zachowana w pełni. Porównania prowadzą do wniosku, że w rozpatrywanym przykładzie omawiana własność metody jest w dość dużym stopniu zaburzona. Zachodzi to nawet w wariancie 6, gdzie liczby punktów dostosowania są identyczne, lecz punkty stałe zgodne są w zupełności wyłącznie pomiędzy ostatnimi dwoma poziomami kryterium stałości.

W tabeli 7 zestawione są wartości rozstępów pomiędzy wartościami składowych Δx i Δy przemieszczeń punktów figury testowej, pokazanej na rysunku 7, utworzonej z sieci testowej $N = 61$ przez wybór z niej 10 punktów. Figura jest reprezentatywna i stanowi jeden z segmentów sieci.

Tabela zawiera rozstępy, czyli maksymalne różnice pomiędzy czterema wartościami tej samej wielkości (składowej przemieszczenia poziomego), wyznaczonej metodą transformacji przy różnych czterech kryteriach stałości punktów, oraz rozstępy pomiędzy dwoma wartościami składowej przesunięcia, wyliczonymi metodą aproksymacyjną, wielomianową. O tym, że w odniesieniu do metody transformacji rozstępy pochodzą ze zbiorów



Rys. 7. Figura testowa z sieci testowej $N = 61$

czteroelementowych, w przypadku zaś drugiej metody są różnicami tylko dwóch wielkości, warto pamiętać przy porównaniach czynionych na podstawie danych z tabeli 7, bowiem różna liczebność serii nie pozwala na równorzędne traktowanie omawianych wartości rozstępów, należących do statystycznych miar rozrzutu wyników. Przy założeniu jednakowej dokładności dwóch porównywanych metod (chodzi tu o dwie dowolne porównywane metody, nie zaś konkretnie o dwie metody obecnie rozpatrywane) z góry należy liczyć się z tym, że — średnio biorąc — większe rozstępy wystąpią w tej metodzie, dla której operuje się dłuższą, liczniejszą serią danych. W naszym przykładzie jest to metoda transformacji. W metodzie aproksymacyjnej operujemy tu dwoma wartościami składowych faktycznych przemieszczeń punktów, obliczonymi — przypomnijmy — z dwóch modeli wektorowego pola przemieszczeń, opartych na wielomianach o różnych stopniach — pierwszym i drugim. Pomimo podkreślonej niepełnej porównywalności danych z tabeli 7, stanowią one interesujący materiał empiryczny, umożliwiający przybliżoną ocenę porównawczą wyników uzyskanych dwoma odmiennymi drogami. Do ogólnej oceny rozpatrywanego zagadnienia najbardziej przydatne są wartości przeciętne maksymalnych rozstępów, figurujące w ostatnim wierszu tabeli. Widać z niego, że z wyjątkiem składowej Δy w wariancie 4 maksymalne rozstępy w metodzie transformacji są wyraźnie, a w większości przypadków nawet wielokrotnie większe od różnic z metody aproksymacyjnej.

Tabela 7 umożliwia ponadto empiryczne śledzenie związku pomiędzy pozycją geometryczną punktu w sieci a dokładnością (pozorną) wyznaczenia jego ruchów poziomych. W rozpatrzonej figurze testowej (rys. 7) punktami najbardziej odległymi od centrum sieci są punkty 3, 4 i 5. Istotnie, rozstępy ich dotyczące, w metodzie transformacji są największe w rozpatrywanym zbiorze. Spośród ogółem 12 podzbiorów, aż w ośmiu przypadkach największa wartość rozstępu dotyczy punktu 5, z pozostałych czterech przypadków trzy dotyczą punktu 3 i jeden — punktu 4. Trudno byłoby formułować na podstawie powyższej statystyki jakąś ogólną prawidłowość, niemniej zauważony układ wielkości nasuwa powyżej zaakcentowane spostrzeżenie. Można przy tym zauważyć, że rozkład różnic w zakresie metody aproksymacyjnej w tej samej figurze testowej nie nasuwa analogicznego skojarzenia.

Zatrzymajmy się teraz krótko na ogólnej, opisowej ocenie porównawczej obu metod — metody transformacji poszukiwawczych i przedstawionej w niniejszej pracy metody aproksymacyjnej, wielomianowej. W obu metodach wychodzi się z pozornych przemieszczeń punktów sieci poziomej, uzyskanych z wyrównania pomiaru pierwotnego i aktualnego na bazie dwóch punktów przyjętych za stałe¹. O ile przyjęcie takie nie jest trafne, powstają w rezultacie opracowania sieci pozorne zmiany układu

współrzędnych (translacja i skręcenie) oraz zmiana skali sieci. Dwie ostatnie spośród wymienionych wielkości wywołują z kolei pozorne przemieszczenia punktów sieci, zależne nie tylko od syntetycznych wskaźników deformacji sieci, ale również od pozycji poszczególnych punktów w danej sieci. Pozorne zmiany układu współrzędnych i skali sieci wyznacza się w każdej z porównywanych metod w inny sposób. W metodzie transformacji wyznaczenie to polega na wielokrotnym, dla każdej pary punktów przyjmowanych za stałe, sprawdzaniu, czy założenie stałości jest zgodne z rzeczywistością. W metodzie aproksymacyjnej nie wymaga się sprawdzenia tego postulatu (założenia); wyszukanie punktów stałych nie stanowi tu odrębnego etapu postępowania, warunkującego realizację dalszych procesów wchodzących w skład metody. Faktyczne przemieszczenia (ruchy własne) punktów badanej sieci otrzymuje się w wyniku jednolitego procesu numerycznego, niezależnie od tego, czy w badanej sieci istnieją, czy też nie istnieją punkty o zachowanej stałości położenia.

Na tle metody transformacji metoda aproksymacyjna odznacza się, pod względem formalnym, zwartością i ciągłością. Jest to zaleta, zwłaszcza z punktu widzenia komputeryzacji procesu obliczeniowego.

Ujemnymi cechami metody transformacji poszukiwawczej są następujące jej właściwości:

- niejednoznaczność wyników, przejawiająca się w niezgodności wyboru punktów stałych (punktów dostosowania) na podstawie tego samego zbioru danych;

- możliwość wykrycia już w pierwszej operacji (etapie) grupy punktów wzajemnie nie przemieszczonych i potraktowania wszystkich pozostałych punktów sieci jako ruchomych, podczas gdy w rzeczywistości wśród tych ostatnich mogą być, nawet w większej liczbie, zbiory punktów wzajemnie nie przesuniętych;

- nie określona ściśle ilość operacji poszukiwawczych, zależna od zbiegu okoliczności. Prawdopodobieństwo obioru pary punktów stałych już w pierwszej operacji poszukiwawczej wyraża się stosunkiem liczby kombinacji par punktów stałych do liczby kombinacji par z wszystkich punktów badanej sieci. Na przykład dla sieci złożonej z 50 punktów i zawierającej 5 punktów faktycznie stałych to prawdopodobieństwo wynosi około $8,2 \cdot 10^{-3}$.

W odróżnieniu od metody aproksymacyjnej (por. zakończenie rozdz. 4.2), metoda transformacji poszukiwawczych, jest z założenia metodą jednoznaczną. W przypadkach, w których ta właściwość znajduje sprzyjające warunki do potwierdzenia się, metoda transformacji prowadzi skutecznie

¹ Jest tu mowa o jednym z dwóch wariantów, ze względu na rodzaj danych wyjściowych, metody aproksymacyjnej.

i szybko do osiągnięcia celu, to znaczy do identyfikacji punktów wzajemnie stałych i do wyznaczenia przemieszczeń pozostałych punktów sieci. Typem sieci korzystnym z punktu widzenia metody transformacji jest sieć nieduża, w której pewna liczba punktów zachowuje stałość położenia, natomiast pozostałe punkty ulegają zdecydowanym przesunięciom. Wysokie prawdopodobieństwo a priori stałości położenia określonych punktów sieci sprzyja efektywnemu i szybkiemu wykonaniu badania danej sieci.

O wyższości metody aproksymacyjnej nad metodą transformacji można twierdzić w przypadku badania sieci o charakterze powierzchniowym, złożonej ze znacznej liczby punktów, z których każdy ma jednakowe prawdopodobieństwo przemieszczenia, czyli, inaczej mówiąc, nie ma podstaw do przyjęcia określonych warunków początkowych.

Komentarza może wymagać termin „znaczna liczba punktów” (w sieci). Trzeba przyznać, że nie jest to określenie precyzyjne, jednoznaczne. Trudność polega na tym, że skuteczność i dokładność aproksymacji wielomianowej wektorowego pola przemieszczeń zależy nie tylko od liczby punktów biorących udział w budowie modelu, ale również od układu rzeczywistych przemieszczeń punktów (ich wielkości, wzajemnych stosunków, kierunków) oraz od warunków geometrycznych badanej sieci (por. rozdz. 4.2). Przy dość regularnym kształcie sieci i przemieszczeniach tworzących układ korzystny, bez elementów osobliwych (odskakujących w sensie statystycznym), już sieć nieduża, zawierająca mniej niż 10 punktów, daje możliwość utworzenia modelu skutecznego z punktu widzenia praktyki, tzn. pozwalającego na wyznaczenie własnych ruchów punktów z dokładnością odpowiadającą typowym potrzebom. Uogólniając kryterium, z pewną dozą asekuracji można stwierdzić, że praktycznie przez komentowane określenie rozumiemy sieć złożoną co najmniej z kilkunastu punktów.

4.4. Ocena rzeczywistej dokładności metody

Jak już wspomniano w rozdziale 3, badania nad zagadnieniem rzeczywistej dokładności metody aproksymacyjnej wykonane zostały w sieci testowej, pokazanej na rysunku 4. Jest to sieć typu powierzchniowego, zawierająca 15 punktów. Przeciętne różnice współrzędnych wzdłuż osi układu pomiędzy sąsiednimi punktami wynoszą około 400 m. Pozorne przemieszczenia punktów sieci zgenerowano na podstawie założonych faktycznych przesunięć oraz parametrów deformacji sieci (transformacji afinicznej). Przyjęto następujące wartości parametrów deformacji sieci: $\Delta x_0 = +40$ mm, $\Delta y_0 = +30$ mm, $\varphi = +40^\circ$, $\varepsilon = 10^{-5}$. Punktom sieci nadano przemieszczenia własne o składowych od zera do 20 mm (wzdłuż osi X) i od zera do 15 mm (wzdłuż osi Y). Wielkości te zestawione są w pierwszej

części tabeli 8. W drugiej części tej tabeli zestawiono wartości pozornych przemieszczeń punktów sieci testowej, będące sumami przemieszczeń własnych (faktycznych) oraz przemieszczeń spowodowanych afinicznym przekształceniem sieci przy parametrach o wyżej podanych wartościach. Jak widać z tabeli, maksymalne przemieszczenia pozorne punktów badanej sieci wynoszą około 85 mm wzdłuż osi X i około 82 mm wzdłuż osi Y . Wektorowe pole przemieszczeń, określone składowymi podanymi w dwóch ostatnich kolumnach tabeli 8, poddano aproksymacji wielomianowej w celu utworzenia modelu tego pola. Eksperyment obliczeniowy (por. rozdz. 4.1) wykazał, że najlepszym modelem jest w omawianym przykładzie wielomian stopnia pierwszego. Pomimo tego wykonano również aproksymację wielomianami stopnia drugiego i trzeciego w celu wzbogacenia materiału testowego do analizy porównawczej.

Tabela 8

**Założone przemieszczenia własne
i przemieszczenia pozorne
punktów sieci testowej $N = 15$ (w mm)**

Punkt	Δx_d	Δy_d	Δx	Δy
1	+5	-3	+26,9	-26,2
2	+6	-10	+3,4	-5,4
3	0	0	+0,9	+51,0
4	-8	+2	+6,5	+81,8
5	+10	-13	+40,6	+70,5
6	+7	+7	+76,0	+76,8
7	-1	+2	+84,7	+43,4
8	-3	0	+72,4	+3,1
9	+9	+11	+66,3	-8,8
10	+4	+15	+31,0	+11,6
11	0	0	+26,4	+25,1
12	+20	+3	+43,5	+58,2
13	-8	+7	+41,6	+56,7
14	+5	-5	+67,4	+23,4
15	0	0	+49,6	+4,6

W tabeli 9 zestawiono wyniki aproksymacji. Podano jej średnie błędy, parametry jednorodnej deformacji sieci, wyznaczone na podstawie pozornych przemieszczeń punktów sieci (por. tab. 8), oraz składowe faktycznych ruchów punktów. Porównanie odpowiednich wyników z tabeli 9 z danymi zestawionymi w drugiej i trzeciej kolumnie tabeli 8 prowadzi do prawdziwych błędów wyznaczenia własnych ruchów punktów sieci testowej metodą aproksymacji wielomianowej.

Tabela 9

Wyniki aproksymacji dla sieci testowej $N = 15$ (w mm)

Stopień wielomianu		1		2		3	
Wielkość		x	y	x	y	x	y
Średnie błędy	M_x/M_y	7,4	7,5	8,3	8,3	9,2	8,3
	m_{k00}	$0,90 \cdot 10^{-3}$	$1,94 \cdot 10^{-3}$	$4,55 \cdot 10^{-3}$	$4,60 \cdot 10^{-3}$	$5,12 \cdot 10^{-3}$	$4,59 \cdot 10^{-3}$
	m_{k10}	$4,62 \cdot 10^{-6}$	$4,72 \cdot 10^{-6}$	$5,24 \cdot 10^{-6}$	$5,30 \cdot 10^{-6}$	$2,13 \cdot 10^{-5}$	$1,91 \cdot 10^{-5}$
	m_{k01}	$3,63 \cdot 10^{-6}$	$3,71 \cdot 10^{-6}$	$4,12 \cdot 10^{-6}$	$4,17 \cdot 10^{-6}$	$1,65 \cdot 10^{-5}$	$1,48 \cdot 10^{-5}$
Parametry odkształc. jednorod.	Δx_0	+42		+43		+43	
	Δy_0	+31		+33		+33	
	φ	$6,11 \cdot 10^{-5}$		$6,10 \cdot 10^{-5}$		$4,75 \cdot 10^{-5}$	
	ϵ	$6,50 \cdot 10^{-6}$		$6,70 \cdot 10^{-6}$		$1,86 \cdot 10^{-5}$	
Przemieszcz. własne punktów	1	-1	-5	-1	-8	+7	-21
	2	+1	-10	0	-12	-2	-26
	3	-3	+2	-4	-1	-15	-5
	4	-9	+4	-10	+2	-25	+5
	5	+1	-12	0	-15	-11	-5
	6	+8	+6	+7	+4	+3	+17
	7	-1	-1	-2	-3	+4	+9
	8	-6	-4	-6	-6	+6	-3
	9	+5	+7	+4	+5	+18	0
	10	-1	+13	-1	+11	+4	+2
	11	-3	-1	-4	-3	-5	-6
	12	+18	+4	+17	+1	+9	+3
	13	-9	+6	-10	+4	-12	+10
	14	+3	-7	+2	-10	+7	-5
	15	-3	-2	-4	-5	+3	-7

Błędy prawdziwe zestawione są w tabeli 10. Układ błędów prawdziwych potwierdza, zgodnie z przewidywaniem, że najwłaściwszym modelem wektorowego pola przemieszczeń badanej sieci testowej jest model opisany wielomianem stopnia pierwszego. Przeciętne wartości błędów prawdziwych wynoszą dla tego modelu po 2,5 mm. Maksymalna wartość błędu prawdziwego składowej faktycznego ruchu punktu wynosi 6 mm w modelu najlepiej dopasowanym (pierwszy stopień wielomianu). Przeciętna wartość prawdziwego błędu wyznaczenia liniowego przesunięcia punktu sieci testowej za pomocą najlepszego modelu wyniosła 3,5 mm. Wartość maksymalna tego błędu osiągnęła w badanym przypadku 7 mm (dla punktu 2).

Omawiany eksperyment testowy posłużył do zbadania następującej interesującej kwestii: przemieszczenia pozorne punktów sieci składają się, jak wiadomo, z dwóch części, a to z przemieszczeń faktycznych (indywi-

Tabela 10

**Błędy prawdziwe wyznaczenia własnych przemieszczeń
punktów sieci testowej $N = 15$ (w mm)**

Stopień wielomianu	1		2		3	
Składowa	X	Y	X	Y	X	Y
Punkt						
1	-6	-2	-6	-5	+2	-18
2	-5	-5	-6	-2	-8	-16
3	-3	+2	-4	-1	-15	-5
4	-1	+2	-2	0	-7	+3
5	0	+1	-1	-2	-10	+8
6	-1	-1	0	-3	-4	+10
7	0	-3	-1	-1	-3	+7
8	+3	-4	-3	-6	-3	-3
9	-4	-4	-5	-6	+9	-11
10	-5	-2	-5	-4	0	-13
11	-3	-1	-4	-3	-5	-6
12	+2	+1	-3	-2	-11	0
13	-1	-1	-2	-3	-4	+3
14	+2	-2	-3	-5	+2	0
15	-3	-2	-4	-5	+3	-7
Przeciętna bezwzgl.	2,5	2,5	3,3	3,0	5,7	7,3

dualnych, lokalnych) oraz z przemieszczeń wywołanych deformacją jednorodną całej sieci — translacją, obrotem i zmianą skali. Zachodzi pytanie, czy w procesie aproksymacji, ściślej — w jej stadium końcowym — następuje prawidłowe uwzględnienie obu głównych źródeł przemieszczeń punktów? Potwierdzeniem pozytywnej odpowiedzi na powyższe pytanie byłoby uzyskanie pełnej zgodności założonych przemieszczeń własnych z przemieszczeniami wyznaczonymi z aproksymacji. Zajmijmy się bliżej wyjaśnieniem tej okoliczności. Sprawdzimy w tym celu, czy założone w zadaniu faktyczne przemieszczenia punktów mają wpływ na wartość parametrów jednorodnych deformacji sieci. Założone faktyczne przemieszczenia punktów sieci testowej (por. tab. 8) poddano aproksymacji wielomianem stopnia pierwszego. Wyniki obliczeń zestawiono w tabeli 11. Okazało się, że z układu zadanych przemieszczeń własnych można wydzielić jeszcze część mającą charakter odkształceń jednorodnych lub, inaczej mówiąc, że założone składowe ruchów lokalnych zawierają w sobie czynnik

systematyczny. Wielkości zestawione w drugiej i trzeciej kolumnie tabeli 11 mają więc charakter poprawek do założonych ruchów lokalnych; dodane do wielkości zestawionych w drugiej i trzeciej kolumnie tabeli 8 uwalniają je od wpływu czynnika systematycznego (odkształcenia jedno-

Tabela 11

**Poprawki, skorygowane składowe przemieszczeń
własnych punktów i skorygowane błędy prawdziwe
dla sieci testowej $N = 15$ (w mm)**

Składowa	Poprawki		Skorygowane składowe		Skorygowane błędy praw- dziwe	
Punkt	X	Y	$\Delta x_{kor.}$	$\Delta y_{kor.}$	Δx_d	Δy_d
1	+5,6	+2,2	-0,6	-5,2	-0,4	+0,2
2	+5,6	-0,7	+0,4	-9,3	+0,6	-0,7
3	+0,3	-2,0	-0,3	+2,0	-0,7	0
4	-1,3	-2,3	-6,7	+4,3	-2,3	-0,3
5	-1,0	-1,0	+2,0	-12,0	-1,0	0
6	+0,5	+1,1	+6,5	+5,9	+1,5	+0,1
7	+2,6	+3,2	-3,6	-1,2	+2,6	+0,2
8	+4,0	+4,2	-7,0	-4,2	+1,0	+0,2
9	+6,1	+4,0	+2,9	+7,0	+2,1	0
10	+4,9	+1,6	-0,9	+13,4	-0,1	-0,4
11	+2,5	+0,5	-2,5	-0,5	-0,5	-0,5
12	+0,5	-0,8	+19,5	+3,8	-1,5	+0,2
13	+1,4	+0,7	-9,4	+6,3	+0,4	-0,3
14	+3,1	+2,4	+1,9	-7,4	+1,1	+0,4
15	+4,4	+2,6	-4,4	-2,6	+1,4	+0,6

Przeciętne: 1,1 0,3

rodne). Tak skorygowane wejściowe wartości przemieszczeń zestawiono w kolumnie czwartej i piątej tabeli 11. W celu oceny dokładności badanej metody należy porównać składowe wyznaczone przez aproksymację i zestawione w tabeli 9 ze skorygowanymi w wyżej opisany sposób wyjściowymi, założonymi składowymi przemieszczeń faktycznych, podanymi w tabeli 8. Otrzymujemy stąd błędy prawdziwe, zestawione — dla wielomianu stopnia pierwszego — w ostatnich dwóch kolumnach tabeli 11, bardziej miarodajne od podobnych wartości, podanych uprzednio w tabeli 10 (kolumna druga i trzecia). Błędy prawdziwe uwolnione od czynnika systematycznego przyjęły wartości wyraźnie mniejsze od tych, które zestawione były w tabeli 10. Błędy składowe Δx_d nie przekraczają 2,6 mm, tylko dla trzech spośród 15 punktów wynoszą ponad 2,0 mm, a ich wartość

przeciętna (bezwzględna) wynosi 1,1 mm, to jest ponad dwukrotnie mniej od takiej wielkości nie skorygowanej. Jeszcze wyraźniej zmalały na skutek omawianej redukcji błędy prawdziwe składowej Δy_d . Żaden z nich nie przekracza 1,0 mm, maksymalny osiąga 0,7 mm, a wartość przeciętna wynosi 0,3 mm, to jest ponad siedmiokrotnie mniej niż przed redukcją. Przeciętna wartość prawdziwego błędu przemieszczenia liniowego punktu wynosi 1,2 mm, a wartość maksymalna takiego błędu — 2,6 mm (punkt 7).

Na podstawie wyników opisanego eksperymentu można udzielić pozytywnej odpowiedzi na pytanie sformułowane uprzednio. W toku wielomianowej aproksymacji wektorowego pola przemieszczeń, zakończonej wyliczeniem składowych faktycznych ruchów punktów (tab. 9), nastąpiło wydzielenie składników deformacji, pochodzących z dwóch różnych źródeł. Dokładność wyznaczenia składowych własnych ruchów punktów sieci testowej, określoną układem błędów prawdziwych skorygowanych o wpływ czynnika systematycznego (tab. 11), można ocenić jako wysoką. Upoważnia do takiej oceny to, że błędy prawdziwe wyznaczenia faktycznych przemieszczeń punktów zmieściły się w granicach od zera do 3 mm. Przypomnijmy tu, że wymiary sieci testowej wynoszą 1,7 km wzdłuż osi X oraz 1,34 km wzdłuż osi Y , przy średnim przyroście współrzędnych punktów sąsiednich 400 m. Oczywiście nie można zapominać o tym, że przytoczone dokładności uzyskane zostały w jednej, konkretnej sieci testowej, odpowiadającej w dużym stopniu wymaganiom z punktu widzenia rozpatrywanej metody oraz, że dokładności te charakteryzują wyłącznie proces wyznaczania przemieszczeń, pojęty jako czynność kameralna, obliczeniowa i nie uwzględniający niedokładności samych pomiarów w sieci.

Zatrzymajmy się jeszcze pokrótce przy zagadnieniu identyfikacji punktów stałych w rozpatrzonym przykładzie. Jak to już podkreślono w rozdziale 4.3, w metodzie aproksymacji wielomianowej wyszukanie punktów stałych jest integralnym składnikiem procesu obliczeniowego. Punkty stałe badanej sieci określa się na podstawie wyników obliczenia faktycznych przemieszczeń. Zerowe wartości przesunięć faktycznych świadczą o stałości punktu. Ze zrozumiałych powodów także wartości przesunięć bliskie zera kwalifikują punkt do kategorii punktów stałych. Sprawa granic takiej „bliskości zera” jest zagadnieniem istotnym i wspólnym we wszystkich metodach badania stałości punktów. W rozpatrzonym przykładzie dysponujemy błędami prawdziwymi, co stanowi zaletę przypadku i podnosi jego wartość z punktu widzenia badawczego. Punktami z założenia stałymi są tu punkty 3, 11 i 15, którym nadano zerowe przemieszczenia własne. Bliskie zera przemieszczenia nadano punktom 7 i 8 (por. tab. 8). Tak więc wśród wymienionych pięciu punktów sieci testowej należało upatrywać tych punktów, które w procesie obróbki prezentowaną metodą będą zidentyfikowane jako punkty stałe. Ze względu na zjawisko pewnej

generalizacji (dosadniej można by je określić jako „rozmazywanie”), występujące w procesie aproksymacyjnym, nie spodziewano się otrzymania zerowych składowych ruchów faktycznych w tych wszystkich przypadkach, w których takie zerowe wielkości założono. Dodatkową okolicznością, którą trzeba wziąć pod uwagę, było omówione już szczegółowo zagadnienie skorygowania założonych danych wejściowych ze względu na wpływ czynnika systematycznego (odkształcenia jednorodnej sieci). Istotnie, uwzględniając tę sprawę stwierdzamy, że żaden z punktów sieci (por. tab. 11) nie wchodził do procesu aproksymacji z zerowym przemieszczeniem faktycznym, zredukowanym o wpływ stały. Jak widać z tabeli 11, skorygowane składowe zadanych przemieszczeń faktycznych punktów stałych 3, 11 i 15 mieszczą się w granicach od 0,3 mm do 4,4 mm. W tych granicach mieszczą się także składowe dla punktu 7, natomiast punkt 8 odskakuje już wyraźniej poza te granice.

Biorąc pod uwagę rzeczywistą dokładność osiągniętą w rozpatrzonym przykładzie i scharakteryzowaną błędami prawdziwymi, możemy przyjąć tu kryterium, że do kategorii punktów stałych w badanej sieci kwalifikują się te punkty, których składowe przemieszczeń faktycznych (por. tab. 9), wyznaczone z aproksymacji wektorowego pola przemieszczeń pozornych, nie przekraczają 3 mm. Według tego kryterium do zbioru punktów stałych kwalifikujemy punkty: 3, 7, 11 i 15. Jak widać, zbiór punktów stałych, wyznaczonych za pomocą metody aproksymacyjnej, jest wzbogacony o jeden punkt (p. 7) w porównaniu z danymi założonymi (wejściowymi). Na taką kwalifikację punktu 7 złożyły się dwa czynniki: małe założone przemieszczenie faktyczne punktu, mieszczące się swobodnie poniżej granicy czułości metody oraz widoczna z wyników obliczeń podatność tego punktu do takiej jego kwalifikacji. Można ocenić, że w omawianym przykładzie osiągnięto za pomocą metody aproksymacyjnej zadowalający wynik identyfikacji punktów stałych.

5. Właściwości metody. Wytyczne i uwagi dotyczące jej praktycznych zastosowań

Spośród znanych metod badania deformacji poziomych sieci geodezyjnych metoda aproksymacji wielomianowej, przedstawiona i zbadana testowo w ramach niniejszej pracy, odznacza się największą ogólnością. Ogólność ta wynika z rezygnacji z założeń wstępnych dotyczących stałości niektórych punktów sieci oraz z jednolitości procedury numerycznej. Obecnie w rachunku wyrównawczym dążenie do uwolnienia metod numerycznych od wstępnych warunków ograniczających swobodę opracowania danych jest na ogół silnie akcentowane. Tłumaczy się go troską o unikanie deformowania wyników pomiarów i obliczeń na skutek nieuzasadnionego

ich „wtłaczania” w pewne ramy wcześniej ukształtowane. Klasycznym już niemal przykładem tej tendencji jest rezygnacja z katerycznego ustalania punktów nawiązania przy wyrównaniu sieci geodezyjnych. W geodezyjnych badaniach przemieszczeń punktów sieci i obiektów inżynierskich omawiana tendencja przejawia się podobnie — w rezygnowaniu z apriorycznego traktowania niektórych punktów i ich zespołów jako stałych, nie podlegających ruchom. Aby rozwiązać ewentualne wątpliwości, trzeba zaznaczyć, że dysponowanie punktami lub zespołami punktów stałych w geodezyjnych badaniach przemieszczeń i odkształceń jest warunkiem sensownego rozwiązania zadań badawczych. Ekspozowana tu tendencja nie dotyczy przeto tej sprawy, lecz tylko sposobu dochodzenia do informacji o stałości określonych punktów i ich zespołów. Uzasadniona, budząca zaufanie informacja o stałości określonych punktów badanej sieci jest wartościową pomocą w rozwiązywaniu zadania. Natomiast założenie stałości niektórych punktów sieci, przyjęte na podstawie niewystarczających przesłanek, bez zachowania należytej ostrożności, może utrudnić uzyskanie trafnych wyników. W prezentowanej metodzie nie wprowadza się założeń stałości określonych punktów; natomiast, jak już podkreślono w rozdziale 4.3, identyfikacja punktów stałych następuje w wyniku jednolitego procesu numerycznego opracowania badanej sieci.

Zatrzymajmy się teraz krótko nad praktyczną, proceduralną stroną tej operacji. W szczególnym przypadku rozpatrzonym w rozdziale 4.4 istniała możliwość posłużenia się prawdziwymi błędami wyznaczenia faktycznych (lokalnych) przesunięć punktów sieci testowej. W praktyce takiej możliwości rzecz jasna nie ma. Do oceny stałości punktu wprowadzamy, na ogólnie stosowanej zasadzie, dwie kategorie wielkości: składowe faktycznego przemieszczenia punktu oraz średnie błędy tych składowych. Przyjmując regułę dwukrotnego błędu średniego, kryterium stałości współrzędnych punktu będzie następujące:

$$\Delta x_d \leq 2 \cdot m_{\Delta x_d}; \quad \Delta y_d \leq 2 \cdot m_{\Delta y_d}, \quad (34)$$

przy czym wyrażenia na $m_{\Delta x_d}$ i $m_{\Delta y_d}$ podane były w rozdziale 2.3 w postaci wzorów (32).

Traktując łącznie obydwie składowe, co jest podejściem praktycznym ze względu na potrzebę jednoznacznej kwalifikacji punktu, kryterium stałości będzie nierówność

$$\sqrt{\Delta x_d^2 + \Delta y_d^2} \leq 2 \sqrt{m_{\Delta x_d}^2 + m_{\Delta y_d}^2}. \quad (35)$$

Powyższe kryteria mają, w sensie pojęciowym, charakter praktyczny oraz są dość liberalne. Termin „punkt stały” oznacza tu niekoniecznie taki punkt, który faktycznie nie zmienił swego położenia względem układu odniesienia, lecz raczej znamionuje taki punkt, być może nawet trochę

przesunięty, którego zmiany położenia nie można efektywnie wyznaczyć, ze względu na mieszczzenie się jej w przedziale niepewności. W zagadnieniach o charakterze badawczym może być uzasadnione zaostrożenie kryterium stałości punktu, podanego wzorami (34) i (35). Szersze naświetlenie idei takiego postępowania zawarte jest w publikacji [19]. Zwróćmy jeszcze uwagę na to, że do zastosowania omówionego kryterium niezbędna jest macierz korelacyjna, wyznaczona na podstawie układu równań poprawek (8) (por. rozdz. 2). Aczkolwiek warunek ten nie jest specjalnie uciążliwy wobec komputeryzacji obliczeń oraz dodatkowo, wobec możliwości wielokrotnego posługiwania się w niektórych przypadkach raz wyliczoną macierzą korelacji, można liczyć się z tendencją do upraszczania sposobu wyznaczenia średnich błędów ruchów własnych, figurujących po prawej stronie nierówności (34) i (35). Jednym ze sposobów takiego uproszczenia jest posługiwanie się w kryterium stałości wyłącznie średnimi błędami dopasowania modelu, obliczanymi, jak wiadomo, na podstawie poprawek aproksymacyjnych.

W tekście niniejszej pracy parokrotnie podkreślana była rezygnacja w proponowanej metodzie z informacji o stałości lub wysokim prawdopodobieństwie stałości określonych punktów sieci poziomej. Właściwość ta została zdecydowanie zaliczona do zalet metody. Może jednakże powstać wątpliwość co do adekwatności metody w takich przypadkach, w których rzeczywiście dysponujemy wiarygodnymi danymi (przesłankami) o stałości niektórych punktów. Wątpliwość taka byłaby nieuzasadniona, ponieważ istnieje w metodzie aproksymacyjnej pełna możliwość uwzględnienia tego rodzaju warunku. Właściwe, zróżnicowane wagowanie odpowiednich równań aproksymacyjnych, wchodzących do układu będącego podstawą utworzenia modelu wektorowego pola przemieszczeń, jest wtedy skutecznym sposobem racjonalnego spożytkowania informacji wstępnych o stałości określonych punktów sieci.

Do pozytywnych właściwości metody aproksymacyjnej należy poprawny i przejrzysty algorytm wyznaczania charakterystyk dokładności wszystkich wielkości obliczanych w wyniku aproksymacji. Odpowiednie wzory, o stopniu ścisłości identycznym jak w metodzie najmniejszych kwadratów, były zestawione i objaśnione w rozdziale 2.3. W praktyce najczęściej używanymi charakterystykami dokładnościowymi będą średnie błędy dopasowania modelu (wzory (22)), średnie błędy współczynników funkcji wielomianowych (wzory (23)) oraz średnie błędy faktycznych (własnych) przemieszczeń punktów sieci (wzory (32)). Zasady zastosowania pierwszych spośród wymienionych błędów średnich zostały przedstawione w rozdziale 4.1. Błędy średnie współczynników wielomianu aproksymacyjnego, wyliczane i wypisywane w tabulogramie wynikowym bezpośrednio po wartościach odnośnych współczynników, pozwalają na bardzo

szybka ocenę istotności tych współczynników. Wiadomo, że jest to operacja bardzo ważna i podkreślona wyżej jej sukcesywność jest korzystna. Bezpośrednie porównanie współczynnika z jego błędem średnim daje szybko odpowiedź na pytanie, czy dany współczynnik ma jeszcze sens praktyczny, czy też zawiera się już w przedziale niepewności. Jak wiadomo, przy rozkładzie przemieszczeń poddającym się aproksymacji wielomianem niskiego stopnia, dość szybko następuje zjawisko niewyznaczalności współczynników przy zmiennych o wyższych, rosnących potęgach. Przeważnie już porównanie rzędów wielkości współczynnika i jego średniego błędu daje wystarczającą podstawę do szybkiej oceny istotności; przy wielkościach tego samego rzędu (wyrażonego wykładnikiem potęgowym) trzeba jeszcze porównać pierwsze znaczące cyfry obu wielkości, co wykonuje się również bardzo szybko.

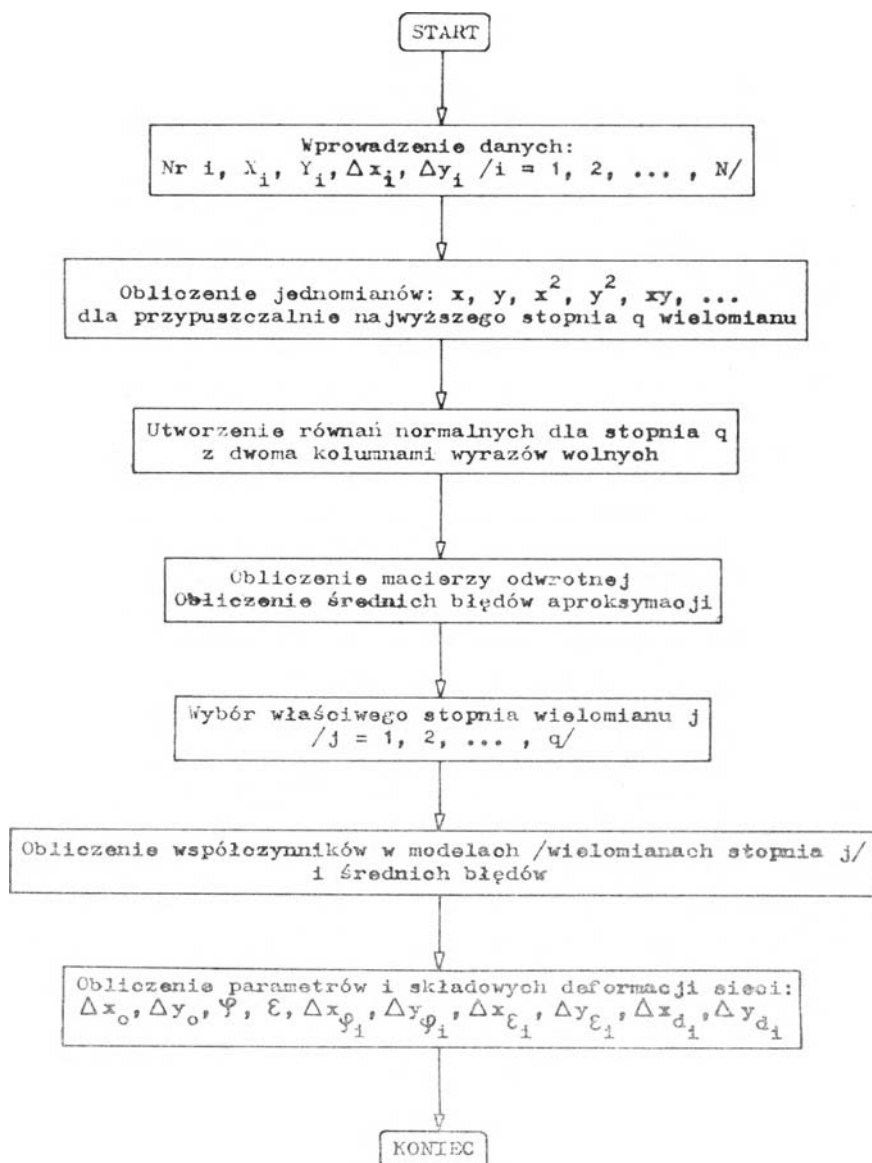
Średnie błędy wyznaczenia parametrów jednorodnego odkształcenia badanej sieci poziomej (wzory (24)–(30)) mają największe znaczenie praktyczne dla procesu interpretacji rezultatów badania. Trzeba tu wyraźnie podkreślić, że przedstawiona metoda, ze względu na jej właściwości, może mieć bardzo duże znaczenie i zastosowanie jako narzędzie wykrywania i opisu charakterystycznych sposobów deformowania się powierzchni terenu, na którym rozpostarta jest badana sieć geodezyjna. Takie zastosowanie metody jest uzasadnione charakterem odkształceń powierzchni terenu, wywoływanych na przykład przez podziemną lub odkrywkową eksploatację górnictw. Przemieszczenia powierzchni, a więc i punktów sieci rozmieszczonych na tej powierzchni cechują się wówczas pewnymi prawidłowościami, których ilościowy i jakościowy opis, zwłaszcza w powiązaniu z czasem, może być dokonany na podstawie okresowych obserwacji i analiz sieci kontrolnych (badawczych). Metoda aproksymacji wielomianowej wektorowego pola przemieszczeń może oddać cenne usługi w tego rodzaju badaniach, tym bardziej, że są podstawy do realnego przypuszczenia, że w określonym zadaniu generalny model wielomianowy, zbudowany na podstawie dwóch lub trzech pierwszych cykli badawczych (okresowych) będzie niezmienny. Wówczas podstawą do wnioskowania o zachodzących zmianach będą różnice wartości tych samych parametrów odkształceń jednorodnych oraz konkretnie wyznaczone faktyczne (lokalne) ruchy punktów sieci. Może się nadto okazać uzasadnione i celowe tworzenie oddzielnych, różnych modeli dla różnych partii badanego terenu, wyodrębnionych ze względu na odmienność sposobów i generalnych kierunków deformowania się powierzchni.

Na rysunku 8 pokazany jest schemat obliczeń wykonywanych na komputerze w celu aproksymacji wektorowego pola przemieszczeń i wyznaczenia składowych deformacji badanej sieci poziomej. Obecnie opatrzymy

Schemat blokowy obliczeń w metodzie aproksymacji wielomianowej

wektorowego pola przemieszczeń

/dla pierwszego wariantu danych wejściowych i oznaczeń jak w rozdz. 2/



Rys. 8.

ten schemat pewnymi komentarzami o znaczeniu praktycznym i interpretacyjnym.

Jak już wcześniej podkreślono, danymi wejściowymi, obok współrzędnych punktów sieci, są składowe pozornych przemieszczeń punktów tej sieci lub przyrosty (różnice) bezpośrednio mierzonych elementów sieci. Te dwa warianty mogą wywołać dyskusję, zmierzającą do ustalenia opinii o wyższości jednego z nich. Gruntowna dyskusja nad tą kwestią nie należy do programu niniejszej pracy. Nadto można mieć wątpliwość, czy rozsądzenie tej kwestii jest w ogóle możliwe. Poprzestańmy przeto na przypomnieniu, że każdy z omawianych wariantów ma swoich zwolenników i przeciwników. Dyskusje na ten temat są dość powszechne, jako że zagadnienie to występuje w ogóle w problematyce numerycznego opracowania pomiarów okresowych w geodezyjnych sieciach kontrolnych. W krytyce wariantu pierwszego (por. [8]) wyrażany jest zarzut, iż pozorne przemieszczenia Δx i Δy , otrzymane z wyrównania dwóch cykli obserwacyjnych sieci, obciążone są, właśnie w procesie tego wyrównania, zniekształceniami wprowadzonymi sztucznie, nie wyrażającymi faktycznych zmian w usytuowaniu punktów sieci. Zniekształcenia te przenoszą się w procesie aproksymacji wielomianowej wektorowego pola przemieszczeń na wyniki tej aproksymacji i obciążają w jakimś stopniu wyznaczane parametry deformacji sieci.

Rzecznicy omawianego wariantu przytaczają w jego obronie argument, że prawidłowe wyrównanie sieci z racjonalnym doбором wag, ułatwione obecnie dzięki wykonywaniu operacji numerycznych na komputerach, eliminuje niebezpieczeństwo przytoczonych obciążeń.

Dodajmy jeszcze, jako argument nieprzychylny wariantowi pierwszemu, że wielkości Δx i Δy , wzięte z wyrównania dwóch okresowych obserwacji sieci i z tego powodu jednak w pewnym stopniu wzajemnie uzależnione (skorelowane), ulegają niejako wtórnemu skorelowaniu w procesie aproksymacyjnym, co w konsekwencji obniża zaufanie do parametrów charakteryzujących dokładność wyników aproksymacji. Jeżeli nawet faktyczny skutek tego skorelowania może być, z praktycznego punktu widzenia pomijalny, to trzeba przyznać, że ze względów formalnych przytoczona okoliczność deprecjonuje wartość pierwszego wariantu danych wejściowych.

Wariant drugi, w którym operuje się jako danymi wejściowymi do budowy modelu, różnicami pomierzonymi elementów sieci (kątown, długości), nie jest obarczony zarzutami wysuniętymi powyżej wobec wariantu pierwszego. Z tego względu można uznać go za rozwiązanie właściwsze, chociaż w zapisie i w realizacji wariant ten jest w porównaniu z wariantem pierwszym mniej zwięzły. Ta mniejsza zwięzłość, będąca pod względem formalnym ujemną cechą omawianego wariantu, wydaje się być

w istocie jego zaletą. Można bowiem sądzić, że drugi wariant danych wejściowych jest bardziej elastyczny, pozwala na swobodniejsze niż wariant pierwszy modelowanie wektorowego pola przemieszczeń.

Rekapitułując powyższe komentarze stwierdzamy, że operowanie różnicami elementów sieci pomierzonych jako danymi wejściowymi do budowy modelu wielomianowego jest bardziej godne polecenia niż wariant pierwszy, aczkolwiek poprawne zastosowanie każdego z obu porównywalnych sposobów prowadzi w konkretnych zadaniach do wyników zadowalająco zgodnych z punktu widzenia praktyki.

W przykładzie metodycznym, dołączonym do niniejszej pracy, zilustrowane jest postępowanie z zastosowaniem drugiego wariantu danych wejściowych.

Skoro zatrzymaliśmy się nieco dłużej przy początkowym etapie procesu aproksymacyjnego, przypomnijmy jeszcze zalecenie, aby obliczenia wykonywać w lokalnym układzie współrzędnych, którego początek powinien leżeć w środku ciężkości badanej sieci. Wytyczna ta wynika z natury stosowanych wzorów i ma znaczenie dla dokładności obliczeń. Jednorazowe przeliczenie współrzędnych sieci do takiego układu nie jest uciążliwe.

Dane liczbowe wprowadzane do obliczeń według przedstawionego algorytmu metody aproksymacyjnej mogą wymagać w niektórych przypadkach normalizacji. W układzie równań aproksymacyjnych, służących do utworzenia modelu wektorowego pola przemieszczeń badanej sieci, występują we wzajemnych stosunkach liczby duże i małe. Odpowiednia normalizacja danych wejściowych eliminuje lub łagodzi dysproporcje pomiędzy liczbami poddawanymi dalszej obróbce numerycznej i dzięki temu spełnia dwa cele: uwalnia wyniki od ewentualnego wpływu błędów obliczeniowych z tytułu zaokrągleń oraz ułatwia pod względem technicznym wykonanie rachunków. Wbrew pozorom ten drugi czynnik ma znaczenie nawet w warunkach komputeryzacji obliczeń, zwłaszcza wtedy, kiedy ma się do czynienia z wielomianami wyższych stopni i komputerami średniej klasy. Zagadnienia normalizacyjne są dość powszechne w obliczeniach, nie należą do specyfiki metody aproksymacyjnej i poświęcenie im większej uwagi w niniejszej pracy nie byłoby celowe.

Zatrzymajmy się jeszcze pokrótce na komentarzu uzupełniającym zagadnienie aplikacji przedstawionej metody. W dotychczasowej treści pracy wyeksponowane było zastosowanie metody aproksymacyjnej w celach typowych dla geodezyjnych badań przemieszczeń i odkształceń powierzchni terenu. Drugą dziedziną zastosowania zaprezentowanej metody są zadania typowo geodezyjne, dotyczące zagadnień takich, jak okresowe badania kontrolne płaskich osnów geodezyjnych, nawiązanie nowych sieci do sieci istniejącej, uzupełnianie i powiększanie istniejących osnów. W każdym z wymienionych zagadnień występuje jako zadanie cząstkowe

(etap) sprawdzenie stałości całej sieci istniejącej lub jej odpowiedniej części. W przypadku stwierdzenia, że sieć lub jej badana część zmieniła swój pierwotny kształt w związku z ruchami punktów sieci, zachodzi konieczność efektywnego wyznaczenia zmian. Podczas gdy w zagadnieniach zaliczonych tu do pierwszej dziedziny zastosowań omawianej metody, to jest do badań ruchów terenu, istotną sprawą jest wyznaczenie składowych deformacji, wymienionych wyczerpująco w rozdziale 2.2, w drugiej dziedzinie — w badaniu osnów poziomych — z reguły zachodzi potrzeba wyznaczenia dodatkowo aktualnych wartości różnych elementów sieci. W szczególności chodzi o kąty, azymuty i odległości pomiędzy punktami, przy czym nie wszystkie spośród interesujących nas elementów podlegają pomiarom, w rezultacie których można by bezpośrednio uzyskać aktualne wielkości. Znajomość składowych Δx_d i Δy_d faktycznych przemieszczeń punktów sieci, wyznaczonych omawianą metodą, pozwala na wyliczenie poprawek do pierwotnych wartości i tym samym uzyskanie aktualnych wartości dowolnych elementów w sieci. Obliczenia te można wykonać znanymi wzorami, opisującymi zmianę kąta, azymutu i długości boku sieci w zależności od drobnych zmian współrzędnych punktów, o które wymienione elementy sieci są oparte (por. np. [7], a także wzory (9) i (10)). Ta dziedzina możliwych zastosowań przedstawionej metody obejmuje lokalne i regionalne poziome osnowy geodezyjne, a także, i to w jeszcze większym stopniu, osnowy szczegółowe o specjalnym przeznaczeniu. Do ostatniego rodzaju należą między innymi osnowy realizacyjne, zakładane na obszarach podlegającym ruchom, na przykład pod wpływem eksploatacji górniczej. W osnowach realizacyjnych dość często zachodzi potrzeba operowania aktualną wartością elementu geometrycznego, określanego w sposób pośredni, na podstawie współrzędnych odpowiednich punktów sieci (por. [23]). W szczególności elementy takie służą do dokonania analizy dokładnościowej tyczenia projektu w oparciu o daną osnowę. W tych zadaniach omawiana metoda może oddać cenną przysługę.

6. Wnioski i uwagi końcowe

1. Badania i analizy dokonane i przedstawione w ramach niniejszej pracy pozytywnie zweryfikowały postawioną przez autora tezę, że metoda aproksymacji wielomianowej wektorowego pola przemieszczeń punktów sieci jest efektywna i może być stosowana w celu wyznaczenia deformacji poziomych sieci geodezyjnych na podstawie okresowych obserwacji tych sieci.

2. Badania wykonane na zbiorach danych doświadczalnych, uzyskanych metodą symulacji komputerowej sieci testowych, potwierdziły tezę,

że do wyznaczania składowych deformacji poziomych sieci geodezyjnych mogą być z zadowalającym skutkiem stosowane wzory, przedstawione w rozdziale 2.2 pracy, zaczerpnięte z mechaniki ciała stałego.

3. W praktycznych zastosowaniach przedstawionej metody należy posługiwać się algorytmem, którego istotne elementy zostały podane w niniejszej pracy, w szczególności w rozdziałach 2 i 5, i który zilustrowany został w niezbędnym zakresie na przykładzie numerycznym, umieszczonym w załączniku poza tekstem pracy.

4. Przestrzeganie wytycznych i uwag o charakterze metodycznym, podanych w rozdziale 5 niniejszej pracy, ma istotne znaczenie dla korzystnego pod względem technologicznym stosowania metody.

5. Metoda aproksymacji wielomianowej wektorowego pola przemieszczeń punktów sieci stanowi pożyteczny, istotny krok naprzód w rozwoju środków do badania stałości i wyznaczania ruchów poziomych sieci geodezyjnych. Spełnia ona postulat współczesnej teorii i praktyki, aby metody badawcze były ogólne, w miarę możliwości wolne od czynników subiektywnych.

6. Istotną, charakterystyczną zaletą przedstawionej metody jest rezygnacja z niepewnych z natury informacji wstępnych o stałości określonych punktów lub elementów geometrycznych badanej sieci i z założeń opartych na takich informacjach. Istnieje jednak również, przez zastosowanie odpowiedniego wagowania równań aproksymacyjnych, możliwość uwzględnienia w omawianej metodzie ewentualnych wstępnych informacji o stałości niektórych punktów sieci. Z tych względów prezentowaną metodę można uważać za ogólniejszą od innych metod, rozpowszechnionych dotychczas w geodezyjnych pomiarach odkształceń.

7. Metoda aproksymacji wielomianowej wektorowego pola przemieszczeń może być stosowana z powodzeniem do identyfikacji punktów stałych w sieciach, w których daje się utworzyć model ich deformacji (por. rozdziały 4.2 i 4.4). Zastosowanie metody w tym celu jest uzasadnione i godne zalecenia szczególnie w takich przypadkach, w których nie dysponuje się informacją a priori o stałości albo o znacznym prawdopodobieństwie stałości określonych punktów sieci. Wykrycie punktów stałych jest w omawianej metodzie integralnym składnikiem procesu wyznaczenia przemieszczeń.

8. Przedstawiona metoda może służyć do okresowych, kontrolnych badań geodezyjnych osnów poziomych oraz może być wykorzystywana przy nawiązywaniu, uzupełnianiu i powiększaniu sieci, a także do analiz o charakterze specjalnym, dokonywanych na geodezyjnych podstawach realizacyjnych.

9. Ze względu na właściwości przedstawionej metody jest ona godna szczególnego zalecenia do stosowania w sieciach o charakterze powierz-

chniowym, w celu badania ruchów powierzchni terenu o charakterze ciągłym, cechujących się pewnymi charakterystycznymi objawami. Chodzi głównie o ruchy o charakterze technogennym, na przykład wywoływane działalnością górniczą. Parametry wektorowego pola przemieszczeń mogą służyć w tych zagadnieniach również do pozageodezyjnej, fizycznej interpretacji wyników badań geodezyjnych.

BIBLIOGRAFIA

- [1] Arnold J.: *On estimation of the degree of best fitting polynomials*. Materiały XVI Zgromadzenia Ogólnego Międzynarodowej Asocjacji Geodezji. Grenoble, 1975.
- [2] Czaja J.: *Badanie zmian położenia i kształtu budowli na podstawie bezwzględnych przemieszczeń punktów wyznaczonych metodami geodezyjnymi*. Geodezja i Kartografia, z. 2, 1971.
- [3] Czaja J.: *Aproksymacja wektorowego pola przemieszczeń oraz jego interpolacja geometryczna i fizyczna*. Geodezja i Kartografia, z. 4, 1971.
- [4] Czaja J.: *Metody wyznaczania przemieszczeń i deformacji obiektów za pomocą okresowych — bezwzględnych i względnych — pomiarów geodezyjnych*. Prace Komisji Górniczo-Geodezyjnej Oddziału PAN w Krakowie. Geodezja 14, 1972.
- [5] Fung Y. C.: *Podstawy mechaniki ciała stałego*. PWN. Warszawa, 1969 (tłum. z ang.).
- [6] Gaździcki J., Janusz W.: *Próby wykorzystania elektronicznej maszyny cyfrowej UMC-1 do rachunkowego opracowania wyników pomiaru odkształceń budowli hydrotechnicznych*. Prace Instytutu Gospodarki Wodnej, z. 3, 1964.
- [7] Hausbrandt S.: *Rachunek wyrównawczy i obliczenia geodezyjne*. PPWK. Warszawa, t. I, 1970; t. II, 1971.
- [8] Hermanowski A.: *Wyznaczanie przemieszczeń poziomych punktów powierzchniowych sieci poziomych, na podstawie okresowych pomiarów geodezyjnych*. Prace IGiK, z. 2(51), 1975.
- [9] Janusz W.: *Wyznaczenie stałych dalmierza nitkowego dla pomiarów odległości o podwyższonej dokładności*. Prace IGiK, z. 2(22), 1963.
- [10] Kochmański T.: *Metody obliczeń geodezyjnych*. PWN. Kraków, 1953.
- [11] Kocyan I.: *Przedstawienie przy pomocy parabol wyników uzyskanych na drodze eksperymentalnej*. Prace Komisji Górniczo-Geodezyjnej Oddziału PAN w Krakowie. Geodezja 12, 1971.
- [12] Koronowski R.: *Metoda określenia najprawdopodobniejszej krzywej aproksymującej wyniki szeregu obserwacji*. Geodezja i Kartografia, z. 4, 1964.
- [13] Lazzarini T.: *Geodezyjne pomiary odkształceń i ich zastosowanie w budownictwie*. PPWK. Warszawa, 1961.
- [14] Lazzarini T.: *Odszukiwanie punktów stałych i korygowanie zdeformowanych wielkości przemieszczeń poziomych punktów sieci trygonometrycznych pełnych na podstawie zgodności pozornych ruchów punktów stałych*. Przegląd Geodezyjny, nr 8, 1970.
- [15] Ney B.: *Some calculus problems connected with investigations of geodetic*

- networks. Materiały Międzynarodowego Sympozjum Metod Obliczeń w Geodezji Geometrycznej. Oxford, 1973.
- [16] Ney B.: *Determination of the components of horizontal network deformation by the method of polynomial approximation*. Materiały Międzynarodowego Sympozjum na temat Pomiarów Deformacji Metodami Geodezyjnymi. Kraków, 1975.
- [17] Ney B.: *An application of polynomial approximation method for computation of horizontal geodetic network deformations*. Zeszyty Naukowe AGH, Geodezja, z. 45, 1976.
- [18] Ney B.: *Klasyfikacja i przegląd metod oceny stałości punktów przy okresowym trygonometrycznym wyznaczaniu przemieszczeń poziomych*. Przegląd Geodezyjny, nr 4, 1964.
- [19] Ney B.: *O interpretacji wyników pomiarów*. Prace Komisji Górniczo-Geodezyjnej Oddziału PAN w Krakowie. Geodezja 11, 1971.
- [20] Pelzer H.: *Zur Analyse geodätischer Deformationsmessungen*. Deutsche Geodätische Kommission, München, 1971.
- [21] Polak M.: *Wyznaczanie aktualnych współrzędnych i bezwzględnych przemieszczeń poziomych punktów w sieciach geodezyjnych zakładanych na obszarach górniczych*. Politechnika Warszawska, rozprawa doktorska, 1976.
- [22] Rogowski J.: *Uogólniona metoda aproksymacji wielomianowej szeregów obserwacyjnych w zastosowaniu do wyznaczania przemieszczeń budowli i konstrukcji i do określania ich kształtu*. Zeszyty Naukowe SGGW, z. 4, 1970.
- [23] *Wytyczne wykonania geodezyjnych pomiarów zakładów przemysłowych*. Praca zbiorowa „Wema”, Warszawa, 1976.

Recenzował doc. dr hab. inż. Wojciech Janusz

Rękopis złożono w Redakcji w kwietniu 1977 r.

БОГДАН НЕЙ

МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ ДЕФОРМАЦИИ ГОРИЗОНТАЛЬНЫХ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ СЕТЕЙ

Резюме

Горизонтальная геодезическая сеть рассматривается в представляемом методе как скелетная конструкция, которая связана с поверхностью местности. Поверхность эта имеет свойства твёрдого сплошного тела. Исходя из такой предпосылки автор поставил тезис, что деформацию горизонтальной сети можно определить с помощью формул заимствованных из механики твёрдого тела с применением полиноминой аппроксимации векторного поля смещения. Основной операции являются результаты периодических измерений исследуемой сети. Результаты измерений могут быть взяты для вычислений в одном из двух вариантов: как минимое смещение пунктов сети Δx и Δy , определённое из уравнивания двух периодических измерений, или как не уравненные разницы соответствующих углов ($\Delta\alpha$) и сторон (ΔL).

Полиноминая модель векторного поля смещений пунктов сети с координатами x и y выражается формулами (5), в которых kx и ky обозначают коэффициенты полиноминой функции. Наиболее правдоподобные величины этих коэффициентов выходят при решении методом наименьших квадратов системы уравнений поправок (8). Зная модель векторного поля можно вычислить параметры деформации сети и составные смещений пунктов вызванных разными причинами. Служат этому формулы: (12), (16), (17), (19), (20) и (21). В этих формулах отдельные символы обозначают: Δx_0 и Δy_0 — составные трансляции сети, φ — оборот сети, Δx_δ и Δy_δ — перемещения вызванные оборотом сети, ϵ — изменение масштаба сети, Δx_ϵ и Δy_ϵ — смещения, вызванные изменением масштаба сети, Δx_d и Δy_d — составные фактических (собственных, местных) смещений пунктов. Точность определения вышеуказанных величин может быть оценена с помощью средних квадратических ошибок. Соответствующие формулы даны в разделе 2.3.

Большая часть работы посвящена эмпирической верификации тезиса пригодности предлагаемого метода. Применено для этой цели тестовые множества, генерированные ЭВМ. Главные исследования проводились на симулированных тестовых сетях, которые показано на рисунках 1, 2, 3 и 4. Исследовано таким способом следующие проблемы, как:

- подбор степени аппроксимирующего полинома (раздел 4.1);
- влияние величин, разниц и распределения фактических смещений пунктов сети на точность результатов (раздел 4.2);
- свойства предлагаемого метода по сравнению со свойствами метода поисковой трансформации (раздел 4.3);
- реальная точность метода в определённых условиях (раздел 4.4).

При последнем случае применено при исследованиях метод настоящих ошибок (сеть на рис. 4). Результаты исследований и сформулированные на их основе указания по практическому применению метода подробно рассмотрены в разделе 5. Раздел 6 содержит сжатое подведение итогов работы.

Исследования подтвердили тезис, что метод полиноминой аппроксимации векторного поля смещений пригоден для определения деформаций горизонтальной геодезической сети.

Достоинством метода является освобождение от необходимости принятия предварительных положений относительно постоянства определённых точек исследуемой сети. Идентификация опорных пунктов производится в результате одно-родного цифрового процесса обработки периодических измерений сети. Оказы-

ваются, что поле смещений сети поверхностного типа с случайным распределением деформаций может быть моделировано с помощью полиномов низких степеней, второй и первой. Признаком относительно хорошего подбора степени полинома является стабилизирование средней квадратической ошибки аппроксимации на некотором уровне, несмотря на дальнейшее повышение степени.

Метод, изложенный в работе, особенно пригоден для исследования движений поверхности постоянного характера, отличающейся некоторыми характерными признаками. При установленной для данной местности генеральной модели поля смещений, изменчивость величин её отдельных параметров даёт возможность производить синтетическую интерпретацию хода исследуемого явления.

Другой областью применения этого метода могут быть периодические, контрольные исследования горизонтальных геодезических основ и работы, связанные с увязкой, дополнением и увеличением сети.

В приложении к работе дан цифровой пример применения изложенного метода. Пример этот иллюстрирует способ создания модели векторного поля смещений горизонтальной геодезической сети на основе измеренных изменений углов и длин (второй вариант исходных данных).

BOGDAN NEY

METHOD OF DETERMINATION OF HORIZONTAL GEODETIC NETWORK DEFORMATIONS

Summary

Horizontal network is discussed at presented method as a framework construction connected with the surface of terrain. This surface has the properties of the constant, solid body. Assuming these properties, author submitted the proposition, that the horizontal network deformations can be determined by means of formulas drawn from solid body mechanics, using polynomial approximation of the vector field of dislocation. The results of periodic survey are the base of this operation. They can be introduced to the computations alternatively: as the apparent dislocations of the network points Δx and Δy determined from the adjustment of two periodic surveys, or as unadjusted differences of appropriate angles ($\Delta\alpha$) and sides (ΔL).

Polynomial model of the vector field of dislocation of network points with x and y coordinates is expressed by formulas (5), where k^x and k^y denote coefficients of polynomial functions. The most probable values of these coefficients are obtained solving the system of correction equations (8) by the method of the least squares.

Having model of dislocation field, one can calculate the parameters of network deformations and the components of point dislocations caused by various reasons. Formulas (12), (16), (17), (19), (20) and (21) are used for these calculations. There are the following designations in these formulas: Δx_0 and Δy_0 — components of the network translation, φ — network rotation, Δx_φ and Δy_φ — dislocations caused by the network rotation, ϵ — scale change of the network, Δx_ϵ and Δy_ϵ — dislocations caused by the change of scale of the network, Δx_d and Δy_d — components of real

(own, local) point dislocations. The accuracy of determination of these values can be estimated by means of mean square errors. The proper formulas are given in chaptre 2.3.

The majority of work is given to empirical verification of the thesis, on usefulness of proposed method. Test sets, generated by means of computer, were used for this purpose. The main studies were carried out on simulated test network, shown in figures 1, 2, 3, 4. The following problems were studied:

- choice of the degree of approximating polynomial (chapter 4.1),
- influence of values, differences and real point dislocation on accuracy of the results (chapter 4.2),
- properties of proposed method as compared with properties of the method of preliminary transformation (chapter 4.3),
- real accuracy of the method in defined conditions (chapter 4.4).

The method of true errors was used for studies in the last instance. The results of studies and derived instructions to practical application of method were described in details in chapter 5. Chapter 6 contains the concise recapitulation of this work.

Studies confirmed the thesis, that method of polynomial approximation of the vector field of dislocation is suitable for determination of horizontal network deformations. The advantage of this method relies on releasing from necessity of preliminary assumptions, that specified points of examined network are constant. Identification of stability points is done as a result of uniform process of numerical elaboration of periodic survey. It appears, that dislocation field for networks of surface type with random dislocation pattern can be modelled by means of polynomials of low degrees (first and second degree).

Stabilization of mean error of approximation at a certain level, although the degree of polynomial is increased, indicates, that relatively good choice of polynomial degree was done.

The method presented in this work is particularly useful for examination of permanent movements of terrain surface, characterized by certain, specific symptoms. Having for a certain area the established, general model of dislocation field, variability of values of its parameters gives us the possibility of synthetic interpretation of examined process.

This method can be also used for periodic checking of horizontal networks and for the works related to connecting, complementing and extending of networks.

The numerical example of application of presented method is shown in enclosure to this work. The example particularly shows the way of building model of the vector field of dislocation of horizontal network on the base of measured changes of angles and lengths (second variant of input data).

SPIS TREŚCI

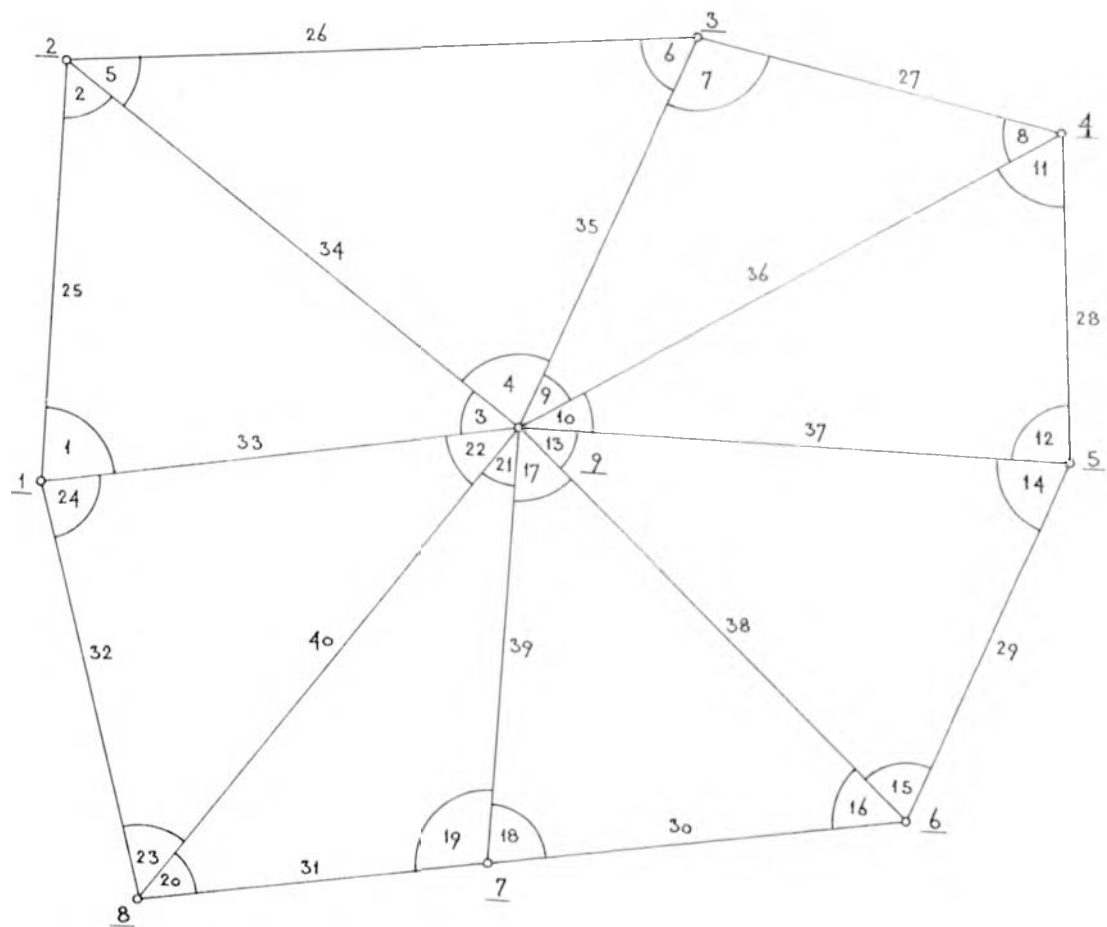
	str.
ANDRZEJ UHRYNOWSKI	
Badanie zmian wiekowych magnetycznego pola Ziemi na terenie Polski	3
BOGDAN NEY	
Metoda wyznaczania deformacji poziomych sieci geodezyjnych	35

СОДЕРЖАНИЕ

АНДЖЕЙ УХРЫНОВСКИ	
Исследования вековых изменений магнитного поля Земли на территории Польши	3
БОГДАН НЕЙ	
Метод определения деформации горизонтальных геодезических сетей	35

CONTENTS

ANDRZEJ UHRYNOWSKI	
Investigations of the secular variations of the Earth magnetic field on Polish territory	3
BOGDAN NEY	
Method of determination of horizontal geodetic network deformations	35



Szkic sieci

Tabela I

WYRÓŚCI ZMIAN ELEMENTÓW POMIĘRZONYCH

/oznaczenia wielkości - jak na szkicu sieci/

Oznaczenie kąta	Wartość zmiany kąta $\Delta \alpha''$	Oznaczenie długości	Wartość zmiany długości $\Delta l \text{ mm}$
1	+ 13,9	25	+ 10,0
2	+ 0,8	26	- 0,1
3	- 15,7	27	+ 5,0
4	- 20,5	28	+ 0,6
5	- 8,6	29	- 1,3
6	+ 30,1	30	+ 12,0
7	+ 47,9	31	- 20,0
8	- 26,3	32	- 1,4
9	- 21,5	33	+ 15,0
10	- 3,0	34	+ 15,5
11	- 46,3	35	+ 3,3
12	+ 49,3	36	+ 13,2
13	+ 10,3	37	- 1,4
14	- 44,4	38	- 21,7
15	+ 32,1	39	- 1,7
16	+ 21,3	40	- 12,1
17	+ 57,9		
18	- 77,3		
19	+19,7		
20	+ 12,7		
21	- 36,4		
22	+ 23,9		
23	+ 41,2		
24	- 61,1		

Tabela II

WSPÓŁRZĘDNE PUNKTÓW SIĘCI

Nr punktu	Współrzędne w układzie pierwotnym		Przyrosty		Długości L [m]	Współrzędne zredukow. na środek ciężkości sieci	
	Y [m]	X [m]	Δy [m]	Δx [m]		$x_i - x_{sr}$ [m]	$y_i - y_{sr}$ [m]
1	2	3	4	5	6	$x_{sr}=113,4m$	$y_{sr}=109,4m$
1	0,000	100,000				- 1,134	- 0,094
2	0,000	194,400	0,000	94,400	94,400	- 1,134	+ 0,850
3	139,756	206,202	139,756	11,802	140,253	+ 0,263	+ 0,968
4	221,971	188,377	82,215	- 17,825	84,125	+ 1,085	+ 0,790
5	228,413	114,892	6,442	- 73,485	73,767	+ 1,150	+ 0,055
6	195,542	34,049	-32,871	- 80,863	87,289	+ 0,821	- 0,753
7	103,368	20,026	-92,174	- 14,003	93,232	- 0,100	- 0,894
8	26,630	9,213	-76,738	- 10,813	77,496	- 0,868	- 1,002
1	0,000	100,000	-26,630	90,787	94,612		
9	105,083	117,376	105,083	17,376	106,510	- 0,683	+ 0,080
2			-105,083	77,024	130,289		
3			-34,675	-88,826	95,353		
9			116,889	71,001	136,762		
4							
5							
9			-123,330	2,484	123,355		
6			90,459	-83,347	123,002		
7							
9			1,715	97,350	97,365		
8			-78,453	-108,163	133,619		

WYKŁADNIK WSPÓRZĘDNIKÓW WIELKOŚCIANÓW ANIZOTROPICZNYCH

Tabela IV

nr kół- na- m	k_{00}^x	k_{10}^x	k_{01}^x	k_{11}^x	k_{20}^x	k_{02}^x	k_{00}^y	k_{10}^y	k_{01}^y	k_{11}^y	k_{20}^y	k_{02}^y	1
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1	0	-2,037 410	-0,332 340	+0,216 200	+2,443 010	+0,094 653	0	+0,336 320	-2,002 240	+2,297 446	-0,409 362	-1,556 567	+13,9
2	0	+1,345 250	-0,965 600	+1,225 293	-1,637 206	-0,916 603	0	+0,367 940	+1,334 120	+1,534 120	-1,202 323	+0,632 654	+ 0,8
3	0	+0,662 130	+1,317 940	-1,441 573	-0,895 812	+0,911 955	0	-1,324 260	+0,668 120	-0,863 569	+1,611 695	+0,673 914	-15,7
4	0	+1,071 940	-1,637 120	+1,165 463	-1,832 565	-1,651 801	0	-0,445 060	+2,667 960	-0,759 174	+1,715 619	+2,565 026	-20,5
5	0	+0,694 340	+1,157 890	+0,282 988	+0,131 405	+1,346 813	0	-1,155 520	+0,709 640	-1,023 792	+1,326 087	+0,547 391	- 8,6
6	0	-1,766 290	+0,520 240	-1,448 391	+1,701 483	+0,421 988	0	-0,531 200	-1,779 600	-0,029 166	-0,624 109	+1,854 118	+30,2
7	0	+1,699 460	-1,128 720	+1,831 263	+2,018 659	-1,486 211	0	+1,126 350	+1,701 200	+0,562 885	+0,980 117	+1,717 140	+47,9
8	0	-0,466 060	+1,343 100	-0,776 864	-0,704 695	+1,547 851	0	-1,338 490	-0,461 240	-1,083 506	-1,392 635	-0,319 086	-26,3
9	0	-1,233 380	-0,214 880	-1,054 400	-1,314 055	-0,061 640	0	+0,212 120	-1,239 960	+0,520 622	+0,412 518	-1,398 054	-21,5
10	0	-0,552 390	+0,957 630	+0,597 573	-0,687 337	+0,802 469	0	-0,946 030	-0,553 050	-0,675 853	-0,952 331	-0,481 705	- 3,0
11	0	-1,491 120	-1,092 300	-1,304 826	-1,474 867	-0,945 891	0	+1,091 740	-1,469 500	-1,533 283	+1,316 727	-1,244 782	-45,3
12	0	+2,043 510	+0,134 650	+0,307 293	+2,162 204	+0,143 422	0	-0,143 710	+2,042 550	+2,209 138	-0,364 396	+1,726 487	+49,3
13	0	+0,547 180	+0,932 840	-0,868 952	+1,376 474	-0,635 185	0	-0,993 570	+0,948 950	+0,699 291	-0,721 085	-0,639 195	+10,3
14	0	-1,766 300	+0,760 870	+0,409 786	-1,619 491	-0,946 310	0	-0,757 770	-1,768 770	-1,454 500	-1,659 593	+1,235 226	-44,4
15	0	+0,819 110	-1,743 710	-1,743 710	+0,243 469	+1,191 435	0	+1,751 070	+0,819 900	+0,794 579	+2,167 453	-0,060 246	+32,1
16	0	+0,819 110	+1,333 380	-0,737 437	+0,633 652	-1,198 126	0	-1,534 490	+0,903 090	+0,930 705	-0,979 697	-0,562 459	+21,4
17	0	+1,111 240	-1,053 950	-0,740 393	+0,820 721	+0,721 262	0	+1,066 660	+1,115 260	-0,930 798	+0,753 958	-1,041 718	+58,0
18	0	-2,016 310	-0,289 830	+1,545 830	-1,454 374	+0,476 863	0	+0,267 890	-2,018 350	+0,225 907	+0,268 472	-1,604 177	-77,3
19	0	+2,026 640	+0,246 160	-1,962 513	-1,962 513	-0,508 875	0	-0,248 120	+2,024 920	+0,085 119	+0,268 472	-1,605 049	+19,7
20	0	-1,313 170	+0,639 500	+2,262 585	+1,283 293	-0,367 232	0	-0,637 090	-1,312 540	+0,806 746	+0,658 102	+1,171 241	+12,7
21	0	-0,715 670	-0,945 660	+0,793 661	+0,679 223	+0,076 107	0	+0,945 210	-0,712 380	-0,891 865	-0,926 573	+0,433 807	-36,4
22	0	-1,293 060	+0,652 280	-0,581 222	+1,763 671	-0,903 167	0	-0,644 930	-1,236 820	+1,059 234	+0,523 867	+1,246 225	+23,9
23	0	-0,552 030	-1,538 500	+1,263 017	+0,354 502	+1,514 872	0	+1,537 190	-0,545 220	+0,499 492	-2,046 161	+0,832 896	+41,2
24	0	+1,845 150	+0,836 220	-0,601 796	-2,110 174	-0,611 705	0	-0,892 260	+1,842 040	-1,558 727	+1,522 294	-2,079 121	-61,1
25	0	0	+2,057 920	-2,333 681	0	+1,555 788	0	0	0	0	0	0	+21,8
26	0	+0,167 640	+0,614 160	+0,123 968	-0,123 765	+0,025 743	0	-2,039 620	+0,172 280	+1,508 281	-1,505 893	+0,313 205	- 0,2
27	0	-0,427 524	+0,092 560	-0,409 759	-0,479 773	+0,162 720	0	+1,972 800	-0,427 200	+1,691 154	+2,214 338	-0,751 018	+12,2
28	0	-0,180 700	+2,043 300	+2,207 042	-0,403 864	+1,726 588	0	+0,015 600	-0,176 400	-0,190 536	-0,250 794	-0,149 058	+ 1,8
29	0	+0,720 510	+1,769 520	+1,492 404	+1,420 125	-1,235 125	0	+0,292 810	+0,719 120	+0,606 502	+0,577 129	-0,501 946	- 3,0
30	0	+0,403 930	-0,046 510	-0,233 510	+0,219 134	-0,076 635	0	+2,016 990	+0,308 790	-1,549 672	+1,454 250	-0,508 577	+26,6
31	0	+0,204 160	+0,039 960	-0,288 724	-0,275 067	-0,075 764	0	+2,027 520	+0,285 120	-2,060 087	-1,962 639	-0,540 588	-53,3
32	0	-0,555 940	+1,637 720	-1,594 962	+1,112 997	-2,079 901	0	+0,162 260	-0,553 880	+0,465 515	-0,324 844	+0,607 052	+ 3,0
33	0	-0,336 70	+0,055 680	-0,036 256	-0,409 302	-0,000 780	0	+2,007 410	+0,332 340	-0,216 280	-2,443 018	-0,004 653	+29,1
34	0	-0,937 940	+0,723 800	-0,899 024	+1,202 323	+0,673 134	0	+1,345 290	-0,985 600	+1,225 293	-1,637 206	-0,916 608	+24,6
35	0	+0,630 720	+0,793 760	+0,153 134	+0,500 544	+1,879 850	0	+0,273 340	+0,701 520	+0,059 890	+0,195 679	+0,735 193	+ 7,2
36	0	+0,911 340	+0,553 800	+0,673 756	+0,912 863	+0,481 805	0	+1,506 720	+0,915 900	+1,114 290	+1,509 733	+0,796 833	+19,9
37	0	-0,036 930	+0,000 750	-0,032 037	-0,039 468	+0,000 101	0	+2,059 110	-0,041 750	+0,116 717	+2,197 070	-0,005 636	- 2,4
38	0	-1,030 560	+0,949 620	+0,697 193	-0,760 554	-0,639 094	0	+1,111 920	-1,024 590	-0,732 235	+0,820 597	+0,689 549	-36,4
39	0	+0,036 040	+2,064 880	-0,203 605	-0,006 555	-1,690 812	0	+0,000 680	+0,038 960	-0,003 842	-0,000 124	-0,031 713	- 3,6
40	0	+0,991 250	+1,352 500	-1,055 470	-0,933 169	-1,247 005	0	+0,714 350	+0,984 620	-0,797 502	-0,679 347	-0,907 820	-18,6

Tabela V

ZESTAWIENIE NAJBARDZIEJ PRAWDOPODOBNYCH WARTOŚCI WSPÓŁCZYNNIKÓW WIELOMIANÓW STANOWIACYCH MODEL
WEKTOROWEGO POLA PRZEMIESZCZEŃ SIECI

Współczynnik		k_{00}	k_{10}	k_{01}	k_{11}	k_{20}	k_{02}
Składowa	x	0,0	- 3,802 186	+ 4,093 202	+ 5,648 615	- 13,893 339	- 4,751 735
	y	0,0	- 2,051 647	- 6,433 119	- 7,065 140	+ 1,978 500	- 0,342 683

Tabela VI

ZESTAWIENIE SKŁADOWYCH PRZEMIESZCZEŃ PUNKTÓW SIECI /w mm/

Nr punktu	Δx	Δy	Δx_0	Δy_0	Δx_φ	Δy_φ	Δx_ε	Δy_ε	Δx_d	Δy_d	Param. jednor. doform.
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	- 13,38	+ 4,72			+ 3,48	- 0,29	+ 5,80	+ 0,48	- 22,66	+ 4,53	$\Delta x_0 = 0; \Delta y_0 = 0$ $\varphi = - 3,072 \ 424_5$ $\varepsilon = - 5,117 \ 652_5$
2	- 18,95	+ 5,96			+ 3,48	+ 2,61	+ 5,80	- 4,35	- 28,23	+ 7,70	
3	- 4,64	- 7,07			- 0,81	+ 2,97	- 1,35	- 4,95	- 2,48	- 5,09	
4	- 15,37	- 11,25	0	0	- 3,33	+ 2,43	- 5,55	- 4,04	- 6,49	- 9,64	
5	- 22,18	- 0,54			- 3,53	+ 0,17	- 5,88	- 0,28	- 12,77	- 0,43	
6	- 21,75	+ 8,67			- 2,52	- 2,31	- 4,20	+ 3,85	- 15,03	+ 7,13	
7	- 6,71	+ 5,07			+ 0,31	- 2,75	+ 0,51	+ 4,58	- 7,53	+ 3,24	
8	- 11,13	+ 3,23			+ 2,67	- 3,08	+ 4,44	+ 5,13	- 18,24	+ 1,18	
9	+ 0,48	- 0,29			+ 0,26	+ 0,25	+ 0,42	- 0,41	- 0,20	- 0,13	