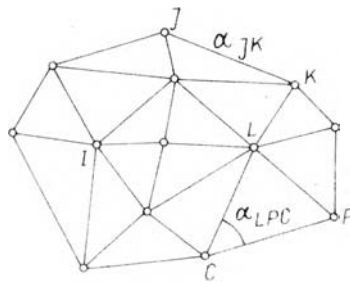


## Analiza dokładności poziomych sieci geodezyjnych

### 1. Wstęp

Weźmy pod uwagę poziomą sieć geodezyjną zawierającą  $n$  punktów  $(x_i, y_i)$  połączonych bokami, wzdłuż których istnieją fizyczne warunki dla wykonywania określonego rodzaju pomiarów.

Analiza dokładności sieci może być dokonywana przez obliczanie i porównywanie wariancji funkcji obserwacji. Wyróżnić należy funkcje określające dokładność (rys. 1):



Rys. 1

- położenia pojedynczego punktu  $I$ ,
- wzajemnego położenia pary punktów  $J, K$ ,
- wzajemnego położenia więcej niż dwóch punktów, przy czym na ogół wystarcza rozpatrywanie trzech punktów  $L, P, C$ .

Dokładność położenia pojedynczego punktu  $I$  charakteryzuje się macierzą wariancyjno-kowariancyjną jego współrzędnych

$$V(I) = V(x_I, y_I) \quad (1)$$

zależną od przyjętych założeń co do stałości położenia wybranych punktów sieci w danym układzie współrzędnych. Dla sieci lokalnych założenia te mają cechy dowolności ograniczającej znacznie użyteczność macierzy (1).

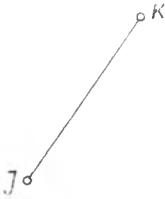
Dokładność wzajemnego położenia pary punktów  $J, K$  określano na ogół wariancjami oddzielnie traktowanych, różnowymiarowych wielkości (azymut, długość) lub rzadziej — macierzą wariancyjno-kowariancyjną różnic współrzędnych  $x_K - x_J, y_K - y_J$  zależnych od orientacji układu współrzędnych i z tego względu niedogodnych. Do oceny dokładności

wzajemnego położenia trzech punktów stosowano na ogół wariancje kątów. Proponowano również analizować dokładność stosunków boków [2].

Podobnie jak w wypadku pojedynczego punktu, przy ocenie wzajemnej dokładności pary punktów celowe jest operowanie parą odpowiednio dobranych, jednowymiarowych funkcji, umożliwiającą jednoznaczne określenie dokładności położenia jednego z punktów pary względem drugiego. Również przy ocenie wzajemnej dokładności trójki punktów stosowanie pary funkcji jest w pełni uzasadnione, pozwalając na jednoznaczne określenie dokładności położenia jednego z punktów trójki względem pozostałych dwóch.

## 2. Wybór funkcji dla oceny dokładności wzajemnego położenia pary punktów

Celowe jest, aby funkcje



Rys. 2

$$z_1 = f_1(x_J, y_J, x_K, y_K), \quad (2)$$

$$z_2 = f_2(x_J, y_J, x_K, y_K),$$

stosowane do oceny dokładności wzajemnego położenia pary punktów spełniały następujące warunki:

— niezmienności macierzy wariancyjno-kowariancyjnej

$$V(z_1, z_2), \quad (3)$$

przy translacji i obrocie układu współrzędnych  $x, y$  oraz zmianie skali,

— ortogonalności linii o równaniach powstających z (2) przez takie ustalenie  $z_1, z_2$  oraz współrzędnych jednego z punktów pary  $J, K$ , aby przecięcie linii określało drugi punkt pary.

Znaczenie tych warunków jest intuicyjnie zrozumiałe. Wprowadzenie pierwszego warunku ma na celu uniezależnienie wyników oceny dokładności od przyjęcia układu współrzędnych, a więc od czynnika nie związanego ze strukturą i obserwacjami sieci. Spełnienie drugiego warunku wpływa na ułatwienie interpretacji wyników.

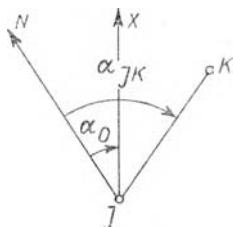
Nietrudno stwierdzić, że obydwóm warunkom odpowiadają następujące funkcje:

$$z_1 = \alpha_{JK} = \alpha_0 + \arctg \frac{y_K - y_J}{x_K - x_J}, \quad (4)$$

$$z_2 = \beta_{JK} = \beta_0 + \ln \sqrt{(x_K - x_J)^2 + (y_K - y_J)^2} \quad (5)$$

Pierwsza z tych funkcji jest azymutem  $JK$  odniesionym do wybranego kierunku początkowego  $N$  (rys. 3), przy czym  $\alpha_0$  oznacza stałą (przy danym położeniu układu współrzędnych) kąt między tym kierunkiem i osią  $x$ . Druga funkcja jest logarytmem naturalnym długości boku  $JK$  z parametrem skali  $\beta_0$ .

Szczególne cechy podanej pary funkcji ujawniają się przy porównaniu ich różniczek zupełnych. Dla uwypuklenia podobieństw i różnic między różniczkami zapisano je poniżej w symbolice Hausbrandta \*):



Rys. 3

$$d\alpha_{JK} = \begin{vmatrix} dx_J & dy_J & dx_K & dy_K \\ A_{JK} & B_{JK} & -A_{JK} & -B_{JK} \end{vmatrix}_1, \quad (6)$$

$$d\beta_{JK} = - \begin{vmatrix} dx_J & dy_J & dx_K & dy_K \\ A_{JK} & B_{JK} & -A_{JK} & -B_{JK} \end{vmatrix}_2, \quad (7)$$

gdzie  $dx_J, dy_J, dx_K, dy_K$  są różniczkami współrzędnych punktu początkowego  $J$  oraz końcowego  $K$  boku  $JK$ , zaś  $A, B$  — współczynnikami:

$$A_{JK} = \frac{x_K - x_J}{(x_K - x_J)^2 + (y_K - y_J)^2}, \quad (8)$$

$$B_{JK} = \frac{y_K - y_J}{(x_K - x_J)^2 + (y_K - y_J)^2}. \quad (9)$$

Należy tu zauważyć, że różniczka  $d\beta_{JK}$  równa się różniczce długości boku  $JK$  podzielonej przez długość tego boku.

\*) Zastosowane symbole oznaczają:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & a_2 & b_2 & \dots & a_n & b_n \\ c_1 & d_1 & c_2 & d_2 & \dots & c_n & d_n \end{vmatrix}_1 = \sum_{i=1}^n (a_i d_i - b_i c_i)$$

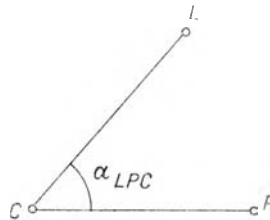
$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & a_2 & b_2 & \dots & a_n & b_n \\ c_1 & d_1 & c_2 & d_2 & \dots & c_n & d_n \end{vmatrix}_2 = \sum_{i=1}^n (a_i c_i + b_i d_i)$$

Wynika stąd, że odchylenie standardowe logarytmu długości równa się względnemu odchyleniu standardowemu długości. Tak więc nie tylko azy-  
mut, ale również logarytm długości jest funkcją mającą istotne znaczenie  
w analizie dokładności sieci.

### 3. Wybór funkcji dla oceny dokładności wzajemnego położenia trzech punktów

Analogicznie jak uprzednio, dla poszukiwanych funkcji współrzędnych  
trzech punktów

$$\begin{aligned} Z_1 &= F_1(x_L, y_L, x_P, y_P, x_C, y_C), \\ Z_2 &= F_2(x_L, y_L, x_P, y_P, x_C, y_C), \end{aligned} \quad (10)$$



Rys. 4

można sformułować dwa warunki:

— niezmienności macierzy wariancyjno-kowariancyjnej

$$V(Z_1, Z_2) \quad (11)$$

przy translacji i obrocie układu współrzędnych oraz zmianie skali,

— ortogonalności linii o równaniach powstających z (10) przez takie  
ustalenie  $Z_1, Z_2$  oraz współrzędnych dwóch spośród trzech punktów  $L, P, C$ ,  
aby przecięcie linii określało punkt trzeci.

Warunkom tym odpowiadają funkcje:

$$Z_1 = \alpha_{LPC} = \alpha_{CP} - \alpha_{CL} = \arctg \frac{y_P - y_C}{x_P - x_C} - \arctg \frac{y_L - y_C}{x_L - x_C} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} Z_2 = \beta_{LPC} = \beta_{CP} - \beta_{CL} = \ln \sqrt{(x_P - x_C)^2 + (y_P - y_C)^2} + \\ - \ln \sqrt{(x_L - x_C)^2 + (y_L - y_C)^2} \end{aligned} \quad (13)$$

Pierwsza z tych funkcji jest kątem wyznaczonym przez punkty  $L, P, C$ ,  
zaś druga — nie mająca dotychczas nazwy — logarytmem naturalnym sto-  
sunku długości boków  $CP$  i  $CL$ . Funkcja ta, zastosowana i szczegółowo roz-  
patrywana przez W. Baardę [4], w niniejszej pracy będzie nazywana krót-

ko longianem. Pomiędzy obydwoma funkcjami istnieje interesująca analogia:

Suma kątów w trójkącie równa się  $180^\circ$ :  $\alpha_{ABC} + \alpha_{CAB} + \alpha_{BCA} = 180^\circ$ , a suma longianów w trójkącie równa się 0:  $\beta_{ABC} + \beta_{CAB} + \beta_{BCA} = 0$ .

Wzory na różniczki zupełne obydwóch funkcji, tj. kąta i longiana, wynikają bezpośrednio z wzorów (6), (7):

$$d\alpha_{LPC} = \begin{vmatrix} dx_L & dy_L & dx_P & dy_P & dx_C & dy_C \\ A_{CL} & B_{CL} & -A_{CP} & -B_{CP} & A_{CP} - A_{CL} & B_{CP} - B_{CL} \end{vmatrix}_1 \quad (14)$$

$$d\beta_{LPC} = - \begin{vmatrix} dx_L & dy_L & dx_P & dy_P & dx_C & dy_C \\ A_{CL} & B_{CL} & -A_{CP} & -B_{CP} & A_{CP} - A_{CL} & B_{CP} - B_{CL} \end{vmatrix}_2 \quad (15)$$

gdzie  $dx_L, dy_L, dx_P, dy_P, dx_C, dy_C$  są różniczkami współrzędnych, zaś  $A, B$  współczynnikami (8), (9).

Wzór (15) został wyprowadzony i zastosowany przez autora w jego pracy doktorskiej [6].

#### 4. Macierze wariancyjno-kowariancyjne par funkcji

Znając macierz wariancyjno-kowariancyjną współrzędnych punktów  $J, K$

$$V(J, K) = V(x_J, y_J, x_K, y_K) \quad (16)$$

oraz macierz pochodnych cząstkowych funkcji  $\alpha_{JK}, \beta_{JK}$

$$G' = \begin{vmatrix} B_{JK} & -A_{JK} & -B_{JK} & A_{JK} \\ -A_{JK} & -B_{JK} & A_{JK} & B_{JK} \end{vmatrix} \quad (17)$$

można łatwo obliczyć macierz wariancyjno-kowariancyjną azymutu i logarytmu długości boku:

$$V(\alpha_{JK}, \beta_{JK}) = G' V(J, K) G. \quad (18)$$

Na podstawie macierzy wariancyjno-kowariancyjnej współrzędnych punktów  $L, P, C$

$$V(L, P, C) = V(x_L, y_L, x_P, y_P, x_C, y_C) \quad (19)$$

oraz macierzy pochodnych cząstkowych funkcji  $\alpha_{LPC}, \beta_{LPC}$

$$H' = \begin{vmatrix} B_{CL} & -A_{CL} & -B_{CP} & A_{CP} & B_{CP} - B_{CL} & A_{CL} - A_{CP} \\ -A_{CL} & -B_{CL} & A_{CP} & B_{CP} & A_{CL} - A_{CP} & B_{CL} - B_{CP} \end{vmatrix} \quad (20)$$

można analogicznie obliczyć macierz wariancyjno-kowariancyjną kąta i longiana:

$$V(\alpha_{LPC}, \beta_{LPC}) = H' V(L, P, C) H. \quad (21)$$

### 5. Ocena dokładności wzajemnego położenia pary punktów

Wykorzystując elementy macierzy wariancyjno-kowariancyjnej (18) oblicza się:

a) odchylenie standardowe azymutu boku  $JK$

$$m_a(J, K) = \sqrt{V(\alpha_{JK})}, \quad (22)$$

b) względne odchylenie standardowe długości boku  $JK$  (odchylenie standardowe długości boku podzielone przez długość boku) równe odchyleniu standardowemu logarytmu długości boku

$$m_\beta(J, K) = \sqrt{V(\beta_{JK})}, \quad (23)$$

c) pierwiastek kwadratowy z sumy wariancji  $V(\alpha_{JK})$ ,  $V(\beta_{JK})$

$$m(J, K) = \sqrt{V(\alpha_{JK}) + V(\beta_{JK})}, \quad (24)$$

nazwany średnim błędem względnym boku  $JK$ ,

d) elementy elipsy błędów dwuwymiarowej zmiennej losowej, której pierwsza składowa jest błędem azymutu, a druga błędem logarytmu długości (błędem względnym długości) boku.

*Przykład.* Dana jest macierz wariancyjno-kowariancyjna:

$$V(\alpha_{JK}, \beta_{JK}) = \begin{bmatrix} 12,457 & -2,891 \\ -2,891 & 9,938 \end{bmatrix} \cdot 10^{-12}$$

stosując wzory (22)—(24) otrzymuje się:

$$m_a(J, K) = 3,53 \cdot 10^{-6}$$

$$m_\beta(J, K) = 3,15 \cdot 10^{-6}$$

$$m(J, K) = 4,73 \cdot 10^{-6}$$

Elementy elipsy błędów oblicza się według wzorów analogicznych do stosowanych dla elips błędów współrzędnych  $x$ ,  $y$  punktów, otrzymując:

a) kąt  $\varphi$ , jaki tworzy półoś  $A$  z osią błędu azymutu

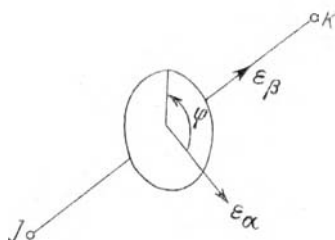
$$\varphi = 163^\circ$$

b) półosi elipsy standardowej (błędu średniego)

$$A = 3,79 \cdot 10^{-6}$$

$$B = 2,84 \cdot 10^{-6}$$

Rysunek 5 przedstawia elipsę wykreśloną przy założeniu, że oś błędu względnego długości przebiega wzdłuż boku  $JK$  oraz, że oś błędu azymutu jest prostopadła do tego boku. Powstały układ  $\epsilon_a$ ,  $\epsilon_\beta$  jest prawokrętny.



Rys. 5

### 6. Ocena dokładności wzajemnego położenia trzech punktów

Na podstawie macierzy wariancyjno-kowariancyjnej (21) oblicza się:

a) odchylenie standardowe kąta  $\alpha_{LPC}$

$$m_\alpha(L, P, C) = \sqrt{V(\alpha_{LPC})}, \quad (25)$$

b) odchylenie standardowe longiana  $\beta_{LPC}$

$$m_\beta(L, P, C) = \sqrt{V(\beta_{LPC})}, \quad (26)$$

c) pierwiastek kwadratowy z sumy wariancji  $V(\alpha_{LPC})$ ,  $V(\beta_{LPC})$

$$m(L, P, C) = \sqrt{V(\alpha_{LPC}) + V(\beta_{LPC})}, \quad (27)$$

nazwany średnim błędem względnym trójki punktów  $L, P, C$ ,

d) elementy elipsy błędów dwuwymiarowej zmiennej losowej, której jedna składowa jest błędem kąta, a druga błędem longiana.

Podane powyżej wielkości określają dokładność wzajemnego położenia trzech punktów bez uwzględnienia skali i orientacji. Przy założeniu, dla celów interpretacji, stałości (bezbłądności) azymutu i długości boku  $CL$  wielkości te określają dokładność boku  $CP$ . Można wówczas przyjmować, że:

a) odchylenie standardowe kąta  $\alpha_{LPC}$  równa się odchyleniu standardowemu azymutu  $\alpha_{CP}$

$$m_\alpha(L, P, C) = m_\alpha(C, P), \quad (28)$$

b) odchylenie standardowe longiana  $\beta_{LPC}$  równa się względnemu odchyleniu standardowemu długości boku  $CP$

$$m_\beta(L, P, C) = m_\beta(C, P), \quad (29)$$

c) średni błąd względny trójki punktów  $L, P, C$  równa się średniemu błędowi względnemu boku  $CP$

$$m(L, P, C) = m(C, P), \quad (30)$$

d) elementy elipsy błędów kąta i longiana  $L, P, C$  równają się elementom elipsy błędów azymutu i logarytmu długości boku  $CP$ .

*Przykład.* Dana jest macierz wariancyjno-kowariancyjna

$$V(\alpha_{LPC}, \beta_{LPC}) = \begin{bmatrix} 77,053 & -14,961 \\ -14,961 & 108,454 \end{bmatrix} \cdot 10^{-12}$$

stosując wzory (25)—(27) otrzymuje się:

$$m_{\alpha}(L, P, C) = 8,78 \cdot 10^{-6}$$

$$m_{\beta}(L, P, C) = 10,41 \cdot 10^{-6}$$

$$m(L, P, C) = 13,62 \cdot 10^{-6}$$

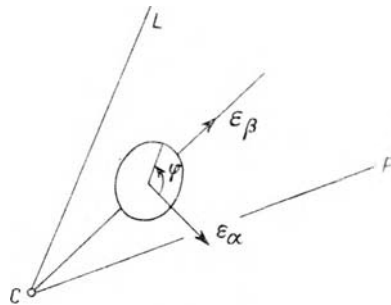
Elementy elipsy błędów wynoszą:

$$\varphi = 124^{\circ}$$

$$A = 10,70 \cdot 10^{-6}$$

$$B = 8,43 \cdot 10^{-6}$$

Elipsa została przedstawiona graficznie (rys. 6) w ten sposób, że jej środek znajduje się na dwusiecznej kąta  $L, P, C$ , oś błędów longiana przebiega wzdłuż dwusiecznej, a oś błędów kąta jest prostopadła do dwusiecznej.



Rys. 6

Elipsy błędów kątów i longianów pokazują w sposób poglądowy dokładność wzajemnego położenia punktów sieci, bez uwzględnienia błędów orientacji i skali. W prawidłowo zaprojektowanej sieci triangulacyjnej lub trilateracyjnej elipsy powinny być zbliżone do kół oraz powinny być w przybliżeniu tej samej wielkości. Ogólnie mówiąc można stwierdzić, że poszczególne rodzaje elips służą:

a) elipsy błędów współrzędnych — analizie dokładności położenia punktów sieci,

b) elipsy błędów azymutów i logarytmów długości — analizie dokładności orientacji i skali sieci,



c) elipsy błędów kątów i longianów — analizie dokładności kształtu sieci.

## 7. Elipsy błędów punktów przy założeniach stałości punktów sąsiednich

Mnożąc półosie elipsy błędów azymutu i logarytmu długości boku  $JK$  przez długość tego boku otrzymuje się półosie elipsy błędów, znanej w literaturze pod nazwą *relative standard ellipsis*, a obliczanej na podstawie macierzy wariancyjno-kowariancyjnej przyrostów współrzędnych  $x_K - x_J$ ,  $y_K - y_J$ . Elipsa ta może być interpretowana jako elipsa błędów punktu  $K$  przy założeniu stałości punktu  $J$ .

Analogicznie wymnażając półosie elipsy błędów kąta  $\alpha_{LPC}$  i longiana  $\beta_{LPC}$  przez długość boku  $CP$  otrzymuje się półosie elipsy błędów, która może być traktowana jako elipsa błędów przyrostów współrzędnych  $x_P - x_C$ ,  $y_P - y_C$ , przy założeniu stałości przyrostów  $x_L - x_C$ ,  $y_L - y_C$ , lub też jako elipsa błędów punktu  $P$ , przy założeniu stałości punktów  $L$ ,  $C$ .

## 8. Ogólna ocena dokładności sieci

Po wykonaniu obliczeń odchyłeń standardowych azymutów i logarytmów długości dla reprezentatywnego zbioru  $p$  przypadkowo dobranych boków celowe jest scharakteryzowanie dokładności całej sieci:

a) średnim błędem orientacji sieci

$$M_\alpha = \sqrt{\frac{[V_\alpha(J, K)]}{p}}, \quad (31)$$

b) średnim błędem skali sieci

$$M_\beta = \sqrt{\frac{[V_\beta(J, K)]}{p}}, \quad (32)$$

c) średnim błędem względnym boku sieci

$$M = \sqrt{M_\alpha^2 + M_\beta^2}. \quad (33)$$

Niejednokrotnie interesująca jest ocena dokładności wzajemnego położenia sąsiednich punktów sieci bez uwzględniania błędów orientacji i skali, które, na przykład, nie mają wpływu na wyniki nawiązania kątowej sieci niższego rzędu do sieci danej. Ogólna ocena dokładności sieci pod tym względem może być dokonana przez obliczenie na podstawie reprezentatywnego zbioru odchyłeń standardowych  $q$  kątów i  $q$  longianów:

a) średniego błędu kąta sieci

$$M'_\alpha = \sqrt{\frac{[V_\alpha(L, P, C)]}{q}}, \quad (34)$$

b) średniego błędu longiana sieci

$$M'_\beta = \sqrt{\frac{[V_\beta(L, P, C)]}{q}}, \quad (35)$$

c) średniego błędu względnego trójki sąsiednich punktów sieci

$$M' = \sqrt{(M'_\alpha)^2 + (M'_\beta)^2}. \quad (36)$$

Mnożąc dalej średnie błędy  $M$  i  $M'$  przez przeciętną długość  $D$  boku sieci otrzymuje się:

a) średni błąd punktu sieci przy założeniu stałości jednego punktu sąsiedniego

$$M_1 = M \cdot D, \quad (37)$$

b) średni błąd punktu sieci przy założeniu stałości dwóch punktów sąsiednich

$$M_2 = M' \cdot D. \quad (38)$$

Wzory (33), (36) oraz podane wcześniej (24), (27) przedstawiają błędy średnie, odpowiadające znanemu z literatury tzw. błędowi średniemu punktu, równemu pierwiastkowi z sumy wariancji współrzędnych.

## 9. Sieci ortogonalne

Dla zilustrowania analogii między wybranymi funkcjami, wprowadzone zostanie pojęcie sieci ortogonalnych.

Koncepcja ta, nie mająca bezpośredniego zastosowania w praktyce geodezyjnej, umożliwi pokazanie istotnych związków istniejących między azymutem i logarytmem długości oraz między kątem i longianem, stanowiąc dodatkowe uzasadnienie przyjęcia tych funkcji do celów analizy dokładności sieci.

Sieciami ortogonalnymi  $S$  i  $S'$  nazywa się sieci, spełniające następujące warunki:

a) każdemu punktowi  $I$  sieci  $S$  odpowiada jeden punkt  $I'$  sieci  $S'$  i odwrotnie, tj. każdemu punktowi  $I'$  sieci  $S'$  odpowiada jeden punkt  $I$  sieci  $S$ ,

b) między współrzędnymi  $x, y$  pary punktów  $J, K$  sieci  $S$  i współ-

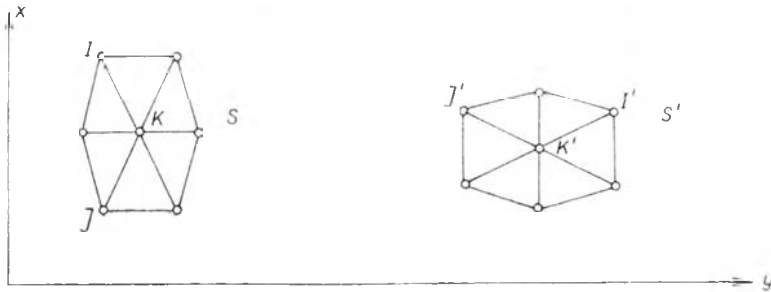
rzędnymi  $x', y'$  pary odpowiednich punktów  $J', K'$  sieci  $S'$  zachodzą zależność

$$\begin{aligned} x'_K - x'_J &= -(y_K - y_J), \\ y'_K - y'_J &= x_K - x_J, \end{aligned} \quad (39)$$

z których wynika ortogonalność wektorów  $\overline{JK}$  i  $\overline{J'K'}$ ,

c) macierz wariancyjno-kowariancyjna współrzędnych sieci  $S$  równa się macierzy wariancyjno-kowariancyjnej współrzędnych sieci  $S'$

$$V(x_1, y_1, x_2, y_2, \dots, x_p, y_p) = V(x'_1, y'_1, x'_2, y'_2, \dots, x'_p, y'_p). \quad (40)$$



Rys. 7

Pisząc wzory (6), (7) na różniczki zupełne azymutu i logarytmu długości dla boku  $J'K'$  sieci  $S'$  oraz przekształcając je przy uwzględnieniu zależności (39) otrzymuje się:

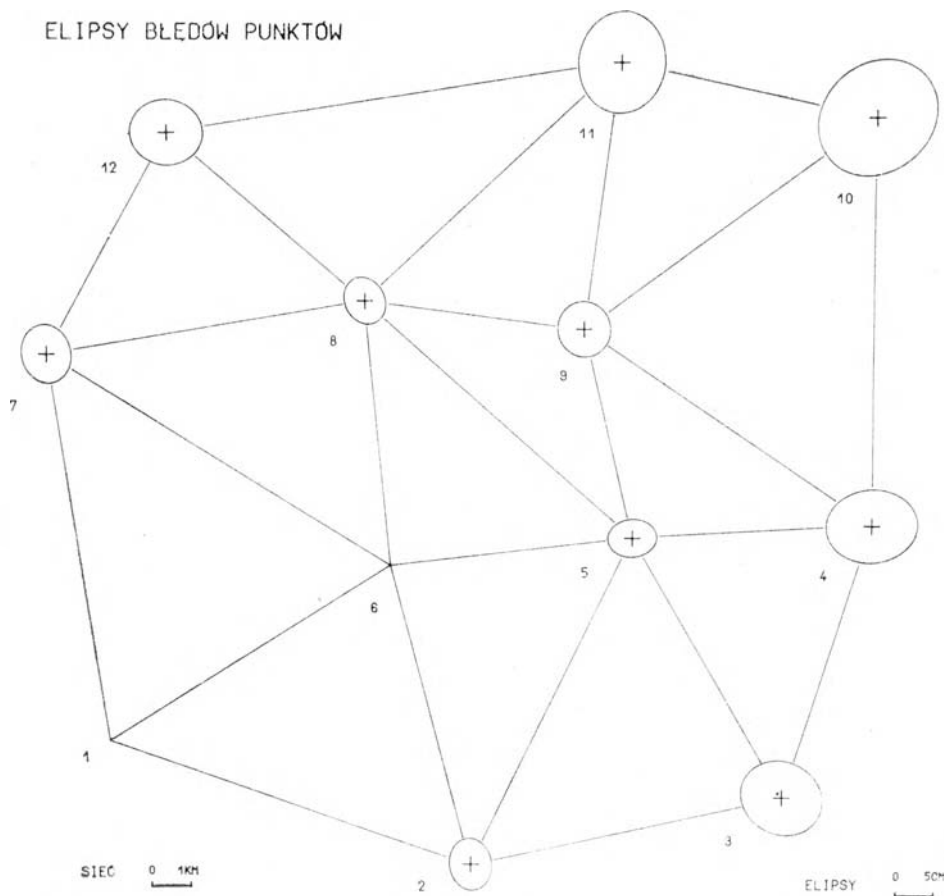
a) dla azymutu

$$\begin{aligned} d\alpha'_{JK} &= \begin{vmatrix} dx'_J & dy'_J \\ A'_{JK} & B'_{JK} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} dx'_K & dy'_K \\ -A'_{JK} & -B'_{JK} \end{vmatrix}_1 = \begin{vmatrix} dx'_J & dy'_J \\ -B_{JK} & A_{JK} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} dx'_K & dy'_K \\ B_{JK} & -A_{JK} \end{vmatrix}_1 = \\ &= \begin{vmatrix} dx'_J & dy'_J \\ A_{JK} & B_{JK} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} dx'_K & dy'_K \\ -A_{JK} & -B_{JK} \end{vmatrix}_2 \end{aligned} \quad (41)$$

b) dla logarytmu długości boku

$$\begin{aligned} d\beta'_{JK} &= - \begin{vmatrix} dx'_J & dy'_J \\ A'_{JK} & B'_{JK} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} dx'_K & dy'_K \\ -A'_{JK} & -B'_{JK} \end{vmatrix}_2 = - \begin{vmatrix} dx'_J & dy'_J \\ -B_{JK} & A_{JK} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} dx'_K & dy'_K \\ B_{JK} & -A_{JK} \end{vmatrix}_2 = \\ &= \begin{vmatrix} dx'_J & dy'_J \\ A_{JK} & B_{JK} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} dx'_K & dy'_K \\ -A_{JK} & -B_{JK} \end{vmatrix}_1 \end{aligned} \quad (42)$$

Jak widać, pochodne cząstkowe funkcji  $\alpha'_{JK}$  równają się pochodnym cząstkowym funkcji  $\beta_{JK}$  z przeciwnym znakiem, pochodne zaś cząstkowe funkcji  $\beta'_{JK}$  równają się pochodnym cząstkowym funkcji  $\alpha_{JK}$ . Wynika stąd, że:



Rys. 8

a) odchylenie standardowe azymutu boku  $J'K'$  w sieci  $S'$  równa się względnemu odchyleniu standardowemu długości odpowiedniego boku  $JK$  w sieci  $S$

$$m_{\alpha}(J', K') = m_{\beta}(J, K), \quad (43)$$

b) względne odchylenie standardowe długości boku  $J'K'$  w sieci  $S'$  równa się odchyleniu standardowemu azymutu odpowiedniego boku  $JK$  w sieci  $S$

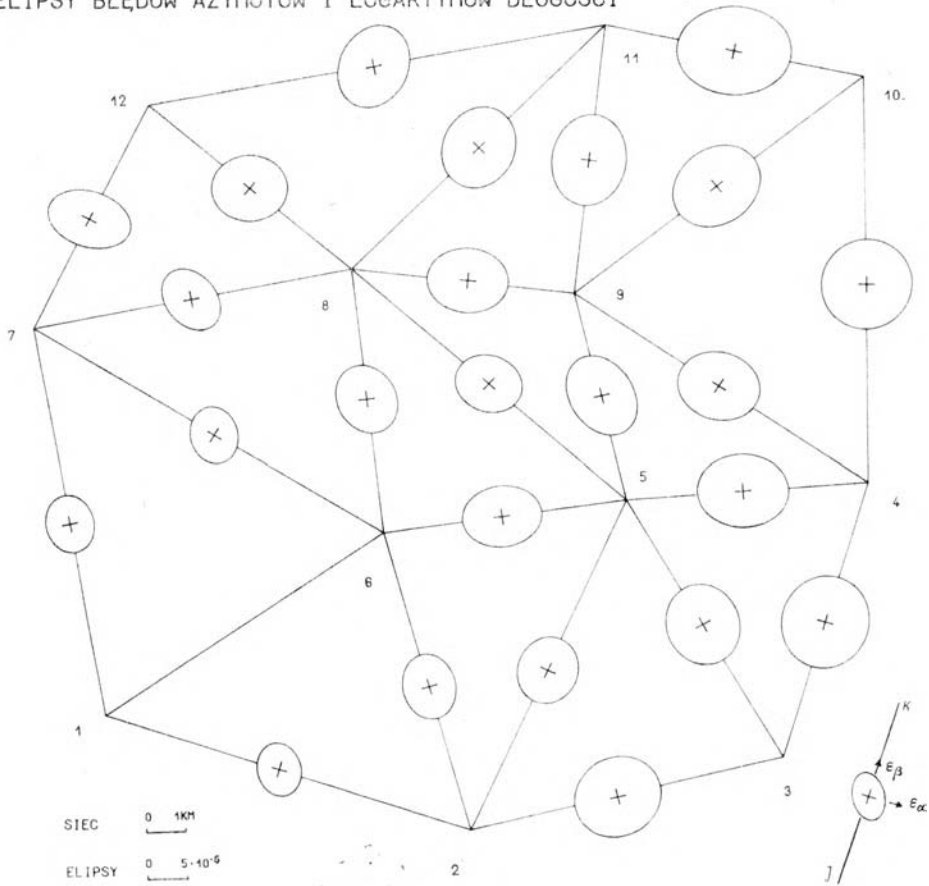
$$m_{\beta}(J', K') = m_{\alpha}(J, K). \quad (44)$$

Analogicznie można wykazać, że:

c) odchylenie standardowe kąta  $L', P', C'$  w sieci  $S'$  równa się odchyleniu standardowemu longiana  $LPC$  w sieci  $S$

$$m_{\gamma}(L', P', C') = m_{\beta}'(L, P, C), \quad (45)$$

ELIPSY BŁĘDÓW AZYMUTÓW I LOGARYTMÓW DŁUGOŚCI



Rys. 9

d) odchylenie standardowe longiana  $L', P', C'$  w sieci  $S'$  równa się odchyleniu standardowemu kąta  $L, P, C$  w sieci  $S$

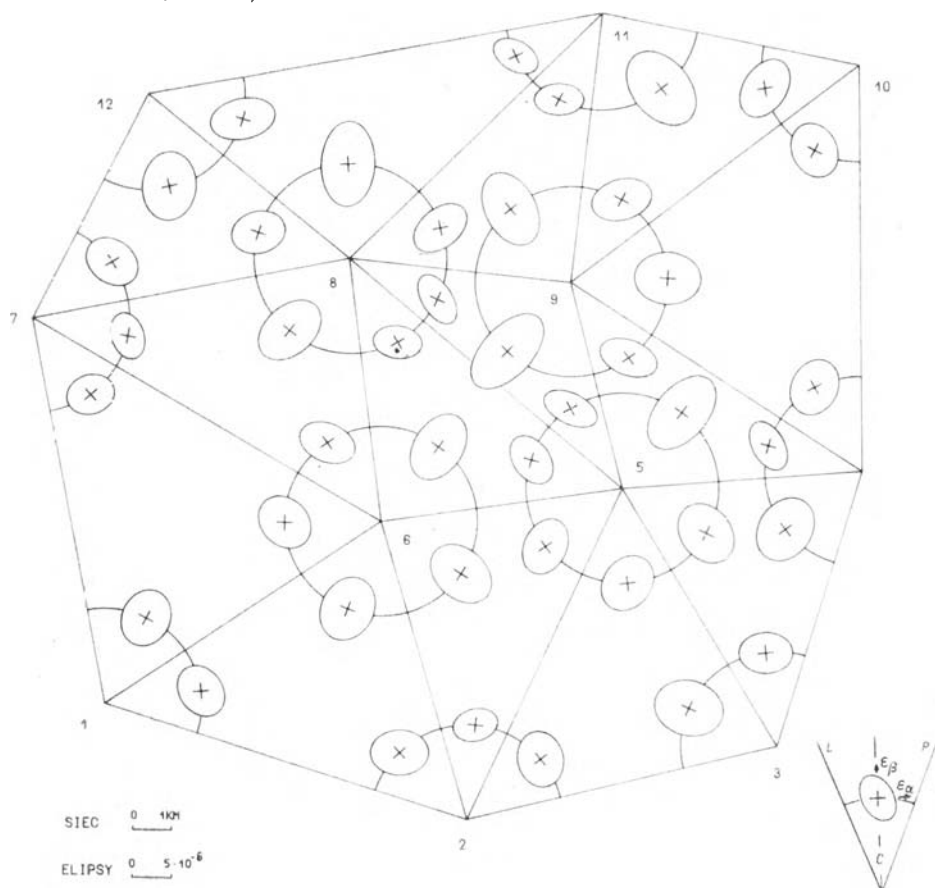
$$m_{\beta}(L', P', C') = m_{\alpha}(L, P, C), \quad (46)$$

10. Przykłady obliczeń

Przykłady obliczeń wykonano dla sieci triangulacyjnej, w której zaprojektowano pomiar 42 kątów w 14 trójkątach z odchyleniem standardowym  $3''$  oraz pomiar długości boku 7—12 z odchyleniem standardowym 3 cm.

Dwa spośród dwunastu punktów sieci, a mianowicie punkty 1, 6 przyjęto jako stałe. Przeciętna długość boku w sieci  $D$  wynosi ok. 8100 m.

## ELIPSY BŁĘDÓW KĄTÓW I LONGIANÓW



Rys. 10

Na rysunku 8 przedstawiono elipsy błędów punktów sieci przy podanych wyżej założeniach.

Rysunek 9 zawiera elipsy błędów  $\alpha_{JK}$ ,  $\beta_{JK}$ , a rysunek 10 — elipsy  $\alpha_{LPC}$ ,  $\beta_{LPC}$ .

Sposób graficznego przedstawienia elips pokazany został u dołu każdego z rysunków. Narysowane elipsy umożliwiają szybkie porównywanie dokładności wyznaczenia poszczególnych elementów sieci oraz występujących między nimi korelacji. Rysunek 10 wykazuje na przykład znaczne zróżnicowanie błędów longianów, wynikające z różnic w długościach boków i wielkościach kątów poszczególnych trójkątów. Błędy kątów, mierzonych z tą samą dokładnością, są w przybliżeniu jednakowe.

Stosując wzory (31)—(38) obliczono kolejno błędy średnie, charakteryzujące w sposób ogólny dokładność całej sieci:

a) średni błąd orientacji sieci

$$M_{\alpha} = \sqrt{\frac{[V_{\alpha}(J, K)]}{24}} = 4,49 \cdot 10^{-6}$$

b) średni błąd skali sieci

$$M_{\beta} = \sqrt{\frac{[V_{\beta}(J, K)]}{24}} = 4,99 \cdot 10^{-6}$$

c) średni błąd względny boku sieci

$$M = \sqrt{M_{\alpha}^2 + M_{\beta}^2} = 6,71 \cdot 10^{-6}$$

d) średni błąd kąta sieci

$$M'_{\alpha} = \sqrt{\frac{[V_{\alpha}(L, P, C)]}{42}} = 3,20 \cdot 10^{-6}$$

e) średni błąd longiana sieci

$$M'_{\beta} = \sqrt{\frac{[V_{\beta}(L, P, C)]}{42}} = 3,75 \cdot 10^{-6}$$

f) średni błąd względny trójki sąsiednich punktów sieci

$$M' = \sqrt{(M'_{\alpha})^2 + (M'_{\beta})^2} = 4,93 \cdot 10^{-6}$$

g) średni błąd punktu sieci przy założeniu stałości jednego punktu sąsiedniego

$$M_1 = M \cdot D = 0,054 \text{ m}$$

h) średni błąd punktu sieci przy założeniu stałości dwóch punktów sąsiednich

$$M_2 = M' \cdot D = 0,040 \text{ m}$$

Błędy te obliczono uwzględniając wszystkie boki (z wyjątkiem boku między punktami stałymi 1,6) oraz wszystkie kąty sieci.

#### L I T E R A T U R A

- [1] Alberda J. E.: Planning and optimisation of networks: some general considerations. Symposium on Computational Methods in Geometric Geodesy, Oxford, September, 1973.

- [2] *Angus-Leppan P. V.*: Adjustment of trilateration using length ratios. Survey Review, No 166, October 1972.
- [3] *Asikkenazi V., Cross P. A.*: Strength of long lines in terrestrial geodetic control networks. XVI General Assembly of the IAG, Grenoble, 1975.
- [4] *Baarda W.*: Statistical concepts in geodesy. Delft, 1966.
- [5] *Baarda W.*: Report on activities in S.S.G. No 4. 14: Statistical methods as applied to specifications of networks. XVI General Assembly of the IAG, Grenoble, 1975.
- [6] *Gaździcki J.*: Niektóre zastosowania pojęcia eliminacji w obliczeniach geodezyjnych. Zeszyty Naukowe Politechniki Warszawskiej. Geodezja nr 7, 1962.
- [7] *Gaździcki J.*: Obliczanie elementów elips błędów. Prace Instytutu Geodezji i Kartografii. Warszawa, Tom XVIII, zeszyt 1, 1971.
- [8] *Grafarend E.*: Optimisation of geodetic networks. Bolletino di Geodesia e Scienze Affini N. 4, 1974.
- [9] *Hausbrandt S.*: Rachunek wyrównawczy i obliczenia geodezyjne. PPWK. Warszawa, 1970.

*Recenzował: doc. dr inż. Bogdan Ney*

*Rękopis złożono w Redakcji w maju 1976 r.*

ЕЖИ ГАЗЪДЗИЦКИ

## АНАЛИЗ ТОЧНОСТИ ГОРИЗОНТАЛЬНЫХ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ СЕТЕЙ

Резюме

При анализах точности горизонтальных геодезических сетей целесообразно применять пары функций, определяющих взаимное положение двух пунктов и взаимное положение трех пунктов. Используя соответственно подобранные пары функций, в статье поданы формулы, дающие возможность оценки точности ориентировки сети, масштаба сети и её формы. Для предоставления возможности графического изображения результатов введено новые виды эллипсов ошибок. Аналогии и зависимости, существующие между выбранными функциями, представляются с помощью применения понятия ортогональных сетей, дефиниция которых находится в статье.

JERZY GAŹDZICKI

## STRENGTH ANALYSIS OF GEODETIC CONTROL NETWORKS

Summary

In strength analysis of horizontal geodetic networks it is appropriate to use pairs of functions which involve the relative position of two points and relative position of three points. Using properly chosen pairs of functions formulae are given which allow the computation of precision criteria for the orientation and scale of the network as well as its shape. To illustrate the presentation of results, new types of error ellipses are introduced. Analogies and correlations existing among the adopted functions are introduced by using the concept of orthogonal networks which are defined in the paper.