PRACE INSTYTUTU GEODEZJI I KARTOGRAFII
Tom XXIII, Zeszyt 2(53), 1976

WŁADYSŁAW GÓRAL

528.77:53:629.785/786

Metody wyznaczania współrzędnych stacji oraz elementów orbity SSZ na podstawie obserwacji dopplerowskich

1. Wprowadzenie

Jedną z technik obserwacyjnych, obecnie z powodzeniem stosowanych w problematyce geodezyjno-satelitarnej, mającą duże perspektywy rozwoju, jest technika oparta na wykorzystaniu efektu Dopplera. Wielkością mierzoną jest przesunięcie dopplerowskie w częstotliwości emitowanej przez stabilny radionadajnik, umieszczony na pokładzie sztucznego satelity Ziemi (SSZ). Metoda ta jako jedna z radiotechnicznych metod obserwacyjnych ma dużą przewagę nad metodami wizualnymi czy fotograficznymi, gdyż pomiary w niej stosowane są uniezależnione od warunków widzialności wizualnej (tj. obecności chmur, mgieł, pory dnia, pory roku, położenia geograficznego obserwatora). Ponadto wykonywanie i przetwarzanie obserwacji dopplerowskich może odbywać się — dzięki zastosowaniu komputerów — automatycznie.

Na podstawie techniki obserwacji dopplerowskich powstał system satelitów nawigacyjnych, służący do wyznaczania współrzędnych statków, łodzi podwodnych i samolotów (nawigacja morska i lotnicza) przy użyciu SSZ [14, 22, 23].

Drugim systemem wykorzystującym efekt Dopplera jest system satelitów geodezyjnych (np. satelity typu GEOS posiadające nadajniki o częstotliwości 324 MHz i 162 MHz).

Technika obserwacji dopplerowskich, pozwalająca na wyznaczanie współrzędnych stacji i współrzędnych SSZ z dokładnością około 1 m, została z czasem wykorzystana do badań geodynamicznych.

Od roku 1967 na podstawie systemów satelitarno-geodezyjnych prowadzone są wyznaczenia ruchu bieguna, pływów skorupy ziemskiej i lokalnych przesunięć stacji [5, 6, 18].

Efekt Dopplera w promieniowaniu emitowanym przez nadajnik umieszczony na SSZ i obserwowany przez obserwatora na powierzchni Ziemi jest funkcją prędkości orbitalnej satelity i prędkości obserwatora biorącego udział w ruchu obrotowym Ziemi. Wartość przesunięcia dopplerowskiego w danym momencie czasu jest wprost proporcjonalna do względnej prędkości radialnej OS, oznaczonej dalej $\dot{\varrho}$.

Efekt Dopplera może być wykorzystany do następujących pomiarów:

1. Wyznaczanie dyskretnych wartości prędkości radialnej wzdłuż linii OS w ściśle określonych momentach czasu, tj. $\dot{\varrho}(t)$.

2. W wypadku dołączenia aparatury całkującej funkcję $\dot{\varrho}(t)$ w danym interwale czasu, wyznaczanie różnicy odległości topocentrycznej OS daną wzorem

$$\varrho(t_{n+1})-\varrho(t_n) = \int\limits_{t_n}^{t_{n+1}} \dot{\varrho}(t)\, dt, \tag{1}$$

gdzie interwał czasu $\Delta t = t_{n+1}-t_n$ może być stały lub zmienny.

Możliwa tu jest następująca modyfikacja. Ustalając moment początkowy t_0 za stały, techniką tą można uzyskać różnice odległości $\varrho(t_n)-\varrho(t_0)$.

Dysponując pomiarami typu 2 i znając jedną odległość OS w czasie przelotu satelity nad horyzontem (np. wyznaczoną na podstawie obserwacji laserowych lub synchronicznych obserwacji dopplerowskich, wykonywanych na stacjach o znanych współrzędnych, będziemy znali również odległość topocentryczną $\varrho(t)$ w wybranych momentach czasu t_n.

W niniejszym opracowaniu zakłada się, że obserwacje typu 1 lub 2 są dane i że zostały one uwolnione od wpływu refrakcji jonosferycznej i troposferycznej.

Praktycznie wpływ refrakcji jonosferycznej (wielkości I rzędu) eliminuje się dzięki wykorzystaniu obserwacji dopplerowskich, wykonywanych równocześnie na dwu częstotliwościach (150 i 400) MHz w systemach satelitarno-nawigacyjnych oraz (162 i 324) MHz w systemach satelitarno-geodezyjnych.

2. Metody wyznaczania współrzędnych stacji na podstawie obserwacji dopplerowskich SSZ

Oznaczając przez f_b częstotliwość fali emitowanej przez nadajnik satelity, a przez f_0 częstotliwość odbieraną przez odbiornik obserwatora, która zgodnie z efektem Dopplera dana jest wzorem

$$f_0 = f_b - \frac{f_b}{c}\,\dot{\varrho} + \delta f_t, \tag{2}$$

gdzie c jest prędkością światła w próżni, a δf_t poprawką uwzględniającą refrakcję troposferyczną. Wzór (2) przekształcamy do postaci

$$\dot{\varrho}_0 = \frac{c}{f_b}(f_b - f_0) + \delta\dot{\varrho}_t,$$

$$\delta\dot{\varrho}_t = -\frac{c\,\delta f_t}{f_b}, \tag{3}$$

gdzie $\dot{\varrho}_0$ — oznacza obserwowaną względną prędkość *OS*.

Niech f_c oznacza częstotliwość (lub $\dot{\varrho}_c$ — odpowiadającą jej prędkość radialną) obliczoną na moment obserwacji na podstawie znanych współrzędnych obserwatora oraz znanego położenia i prędkości satelity, wyznaczonych na zasadzie teorii ruchu z uwzględnieniem wszystkich istotnych perturbacji.

Niech wielkość obliczona $\dot{\varrho}_c$ będzie funkcją elementów orbity $E_i(t)$ w danej epoce t_0, parametrów pola grawitacyjnego Ziemi S_j, wektora określającego położenie stacji obserwacyjnej (obserwatora) X oraz współczynnika oporu aerodynamicznego C_D i współczynnika występującego przy uwzględnianiu wpływu ciśnienia promieniowania K_r, co zapisujemy [24]:

$$\dot{\varrho}_c = \dot{\varrho}\,[E_i(t_0),\ \overline{X},\ S_j,\ C_D,\ K_r,\ t]. \tag{4}$$

Ponieważ wielkości $E_i(t_0)$, S_j, $\overline{X}$, C_D, K_r znane są z pewną dokładnością, więc różnice

$$\Delta\dot{\varrho} = \dot{\varrho}_0 - \dot{\varrho}_c; \qquad \Delta f = f_0 - f_c$$

będą w ogólności różne od zera.

Aby różnice te połączyć z parametrami determinującymi $\dot{\varrho}_c$, wyrażenie (4) rozwijamy w szereg Taylora w zadanym momencie obserwacji i przechodząc z różniczek do różnic skończonych, otrzymujemy

$$\Delta\dot{\varrho} = \sum_{i=1}^{6} \frac{\partial\dot{\varrho}}{\partial E_i}\Delta E_i + \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial\dot{\varrho}}{\partial X_i}\Delta X_i + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial\dot{\varrho}}{\partial S_k}\Delta S_k + \frac{\partial\dot{\varrho}}{\partial C_D}\Delta C_D + \frac{\partial\dot{\varrho}}{\partial K_r}\Delta K_r, \tag{5}$$

gdzie:

i — oznacza i-ty element orbity, $i = 1, 2, \ldots, 6$,

j — oznacza j-tą współrzędną stacji, $j = 1, 2, 3$,

k — oznacza k-ty parametr w rozwinięciu geopotencjału, $k = 1, 2, \ldots, n$.

Równanie (5) jest równaniem poprawek dla obserwacji dopplerowskich. W przypadkach szczególnych, np. dla satelitów ciężkich i wysokich, wpływ ciśnienia promieniowania i oporu aerodynamicznego można pominąć. Zbyteczna jest wówczas znajomość współczynników C_D i K_r.

Zakładając znajomość elementów orbity i odpowiednio dokładną teorię ruchu satelity oraz dysponując obserwacjami dopplerowskimi, możemy na podstawie równań (5) metodą najmniejszych kwadratów wyznaczyć poprawki do współrzędnych przybliżonych stacji obserwacyjnej.

Wykonując zaś obserwacje dopplerowskie na stacjach o znanych współrzędnych na podstawie równań (5) można wyznaczyć poprawki do elementów orbity (poprawić elementy orbity).

Dysponując obserwacjami dopplerowskimi, teorią ruchu oraz współrzędnymi stacji, można wyznaczyć poprawki do współczynników w rozwinięciu geopotencjału. W pracy [24] podano metodę wyznaczenia tych współczynników.

W problemie nas interesującym, tj. w problemie poprawiania współrzędnych stacji obserwacyjnych na podstawie znanej orbity i obserwacji dopplerowskich, oraz poprawiania elementów orbity na podstawie obserwacji dopplerowskich wykonanych na stacji (stacjach) o znanych współrzędnych, równanie (5) upraszcza się następująco:

$$\Delta \dot{\varrho} = \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial \dot{\varrho}}{\partial X_j} \Delta X_j + \sum_{i=1}^{6} \frac{\partial \dot{\varrho}}{\partial E_i} \Delta E_i. \tag{6}$$

Równanie powyższe w dogodnej dla nas formie zostało wyprowadzone w pracy [12]

$$\Delta \dot{\varrho} = (\Delta \dot{\bar{x}} - \Delta \dot{\bar{X}}) \bar{l} + \dot{\bar{\varrho}} \frac{\Delta \bar{x} - \Delta \bar{X} - \bar{l}(\Delta \bar{x} - \Delta \bar{X})\bar{l}}{\varrho}, \tag{7}$$

gdzie oznaczono:

$\bar{x}$ — wektor określający położenie satelity w układzie inercjalnym (equinokcjalnym, geocentrycznym, równikowym),

$\dot{\bar{x}}$ — wektor określający prędkość satelity w zadanym układzie,

$\bar{X}$ — wektor określający położenie obserwatora w układzie inercjalnym,

$\dot{\bar{X}}$ — wektor określający prędkość obserwatora w układzie inercjalnym,

$\bar{l} = \dfrac{\bar{x} - \bar{X}}{\varrho}$ — jest wersorem określającym kierunek do satelity w układzie równikowym topocentrycznym,

ϱ — oznacza topocentryczną odległość OS.

W dalszej części opracowania podany zostanie algorytm wyznaczania współrzędnych stacji obserwacyjnej $\bar{X}$, w przypadku gdy znane są współrzędne przybliżone $\bar{X}_0$ oraz elementy orbity satelity obserwowanego.

Przyjmując $\Delta\bar{x} = 0$, $\Delta\dot{\bar{x}} = 0$ oraz biorąc pod uwagę, że

$$\bar{\varrho} \cdot \bar{l} = \varrho, \quad \bar{\varrho} = \bar{x} - \bar{X}, \tag{8}$$

równanie (7) sprowadza się do postaci

$$\Delta\dot{\varrho} = -\bar{l}\,\Delta\dot{\bar{X}} - \frac{\dot{\bar{x}}-\dot{\bar{X}}}{\varrho}\,\Delta\bar{X} + \frac{\dot{\varrho}}{\varrho}\,\bar{l}\,\Delta\bar{X}. \tag{9}$$

Niech współrzędne obserwatora w układzie grynickim (nieruchomo związanym z Ziemią) dane będą przez wektor $\bar{X}_g$, wówczas między współrzędnymi obserwatora wyrażonymi w układzie equinokcjalnym $\bar{X}$ a składowymi wektora $\bar{X}_g$ zachodzą związki

$$\begin{aligned} X &= X_g\cos\Theta - Y_g\sin\Theta,\\ Y &= X_g\sin\Theta + Y_g\cos\Theta,\\ Z &= Z_g \end{aligned} \tag{10}$$

Podobne związki zachodzą między przyrostami współrzędnych, czyli

$$\begin{aligned} \Delta X &= \Delta X_g\cos\Theta - \Delta Y_g\sin\Theta,\\ \Delta Y &= \Delta X_g\sin\Theta + \Delta Y_g\cos\Theta,\\ \Delta Z &= \Delta Z_g. \end{aligned} \tag{11}$$

Zależności między wektorami $\dot{\bar{X}}$ i $\bar{X}$ oraz ich przyrostami przybierają postać

$$\dot{X} = -\dot{\Theta}Y, \quad \dot{Y} = \dot{\Theta}X, \quad \dot{Z} = 0. \tag{12}$$

Podobnie

$$\Delta\dot{X} = -\dot{\Theta}\Delta Y, \quad \Delta\dot{Y} = \dot{\Theta}\Delta X, \quad \Delta\dot{Z} = 0, \tag{13}$$

gdzie Θ oznacza czas gwiazdowy grynicki, zaś $\dot{\Theta}$ prędkość kątową ruchu obrotowego Ziemi.

Wstawiając związki (10, 11, 12, 13) do równania (9) oraz biorąc pod uwagę, że $l = \frac{x-X}{\varrho}$, otrzymujemy

$$\Delta\dot{\varrho} = \left(\frac{\partial\dot{\varrho}}{\partial X}\cos\Theta + \frac{\partial\dot{\varrho}}{\partial Y}\sin\Theta\right)\Delta X_g + \left(-\frac{\partial\dot{\varrho}}{\partial X}\sin\Theta + \frac{\partial\dot{\varrho}}{\partial Y}\cos\Theta\right)\Delta Y_g + \\ + \frac{\partial\dot{\varrho}}{\partial Z}\Delta Z_g, \tag{14}$$

gdzie oznaczono:

$$\begin{aligned} \frac{\partial\dot{\varrho}}{\partial X} &= -\dot{\Theta}\frac{y-Y}{\varrho} - \frac{\dot{x}-\dot{X}}{\varrho} + \frac{\dot{\varrho}}{\varrho}\,\frac{x-X}{\varrho},\\ \frac{\partial\dot{\varrho}}{\partial Y} &= \dot{\Theta}\frac{x-X}{\varrho} - \frac{\dot{y}-\dot{Y}}{\varrho} + \frac{\dot{\varrho}}{\varrho}\,\frac{y-Y}{\varrho},\\ \frac{\partial\dot{\varrho}}{\partial Z} &= -\frac{\dot{z}}{\varrho} + \frac{\dot{\varrho}}{\varrho}\,\frac{z-Z}{\varrho}. \end{aligned} \tag{15}$$

Aby wyznaczyć szukany wektor poprawek $\Delta \bar{X}_g$ (ΔX_g, ΔY_g, ΔZ_g), musimy dysponować minimum 3 obserwacjami, które pozwalają na ułożenie 3 równań (14). W równaniu tym $\Delta \dot{\varrho} = \varrho_0 - \varrho_c$ jest wyrazem wolnym.

W przypadku większej liczby obserwacji uzyskuje się równania nadliczbowe i $\Delta \bar{X}_g$ wyznacza się według algorytmu mnk.

Dodając $\Delta \bar{X}_g$ do $\bar{X}_{g0}$ otrzymujemy

$$\bar{X}_{g1} = \bar{X}_{g0} + \Delta \bar{X}_g, \tag{16}$$

czyli szukane współrzędne obserwatora.

W przypadku, gdy współrzędne przybliżone będą znane z małą dokładnością (kilkadziesiąt, a nawet kilkaset km), wówczas proces iteracyjny poprawienia współrzędnych stacji należy kilkakrotnie powtórzyć, wstawiając w miejsce $\bar{X}_{g0}$ wartość $\bar{X}_{g1}$. Mając współrzędne prostokątne stacji X_g, Y_g, Z_g, można przejść do współrzędnych geograficznych (geodezyjnych) na danej elipsoidzie odniesienia.

Przedstawiona metoda dotyczyła obserwacji dopplerowskich pierwszego typu (Instantaneous Doppler), gdy zaś z pomiarów dopplerowskich są znane różnice $\varrho - \varrho_0$ odległości topocentrycznych OS wyznaczone w interwale czasu $t - t_0$, to równania obserwacyjne na niewiadome poprawki współrzędnych stacji obserwacyjnej ΔX, ΔY, ΔZ wyprowadzić można z zależności

$$\varrho^2 = (x - X_0)^2 + (y - Y_0)^2 + (z - Z_0)^2. \tag{17}$$

W metodzie tej zakładamy, że współrzędne satelity dane wektorem $\bar{x}$ i współrzędne stacji reprezentowane przez wektor $\bar{X}$ są wyrażone w geocentrycznym układzie współrzędnych nieruchomo związanym z Ziemią. W naszych rozważaniach przyjmiemy, że jest to układ geograficzny (grynicki).

Różniczkując (17) i przechodząc z różniczek do różnic skończonych otrzymujemy dla danego momentu t

$$\Delta \varrho = -\frac{x - X_0}{\varrho_c} \Delta X - \frac{y - Y_0}{\varrho_c} \Delta Y - \frac{z - Z_0}{\varrho_c} \Delta Z. \tag{18}$$

Dla ustalonego początkowego (wyjściowego) momentu t_0 równanie (18) ma postać

$$\Delta \varrho_0 = -\frac{x_0 - X_0}{\varrho_{0c}} \Delta X - \frac{y_0 - Y_0}{\varrho_{0c}} \Delta Y - \frac{z_0 - Z_0}{\delta_{0c}} \Delta Z. \tag{19}$$

Odejmując równanie (19) od (18) oraz wiedząc, że $\Delta \varrho = \varrho_o - \varrho_c$, $\Delta \varrho_0 = \varrho_{0o} - \varrho_{0c}$ otrzymujemy następujące równanie poprawek:

$$\left(\frac{x_0-X_0}{\varrho_{0c}}-\frac{x-X_0}{\varrho_c}\right)\Delta X+\left(\frac{y_0-Y_0}{\varrho_{0c}}-\frac{y-Y_0}{\varrho_c}\right)\Delta Y+\left(\frac{z_0-Z_0}{\varrho_{0c}}-\frac{z-Z_0}{\varrho_c}\right)\Delta Z=$$

$$=(\varrho_o-\varrho_{0o})-(\varrho_c-\varrho_{0c})\,. \tag{20}$$

Odległości topocentryczne ϱ_c i ϱ_{0c} oblicza się na podstawie znanego położenia satelity w momencie t i t_0 oraz znanych przybliżonych współrzędnych stacji obserwacyjnej danej wektorem $\overline{X}_0$. Z obserwacji zaś otrzymamy wartość $\varrho_o-\varrho_{0o}$.

W celu wyznaczenia wektora poprawek $\Delta\overline{X}$ należy dysponować minimum trzema obserwacjami typu 2 (Integrated Doppler) i ich wyznaczenie sprowadza się do rozwiązania układu 3 równań liniowych o trzech niewiadomych (20). W przypadku większej liczby obserwacji $\Delta\overline{X}$ wyznacza się według algorytmu mnk.

Obserwacje typu Integrated Doppler można wykorzystać do wyznaczania współrzędnych stacji również w przypadku, gdy nie są znane ich wartości przybliżone. Niech szukane współrzędne stacji reprezentuje wektor X. Pisząc równanie (17) dla momentu t_0 i momentów t_k, $k=1,2,\ldots,n$, otrzymujemy

$$\begin{aligned}(x_0-X)^2+(y_0-Y)^2+(z_0-Z)^2&=\varrho_0^2,\\ (x_k-X)^2+(y_k-Y)^2+(z_k-Z)^2&=\varrho_k^2.\end{aligned} \tag{21}$$

Odejmując pierwsze równanie od drugiego, otrzymujemy

$$(x_k-x_0)\,X+(y_k-y_0)\,Y+(z_k-z_0)\,Z+A_k\varrho_0=\frac{1}{2}\left(r_k^2-r_0^2-A_k^2\right), \tag{22}$$

gdzie oznaczono

$$A_k=\varrho_k-\varrho_0=\int\limits_{t_0}^{t_k}\dot{\varrho}dt. \tag{23}$$

Jest to wielkość znana z obserwacji.

W równaniu (22) występują 4 niewiadome: X, Y, Z — współrzędne stacji i ϱ_0 — odległość topocentryczna do satelity w momencie wyjściowym t_0. W celu wyznaczenia tych niewiadomych musimy dysponować minimum 4 równaniami typu (22), czyli z obserwacji muszą być znane 4 wartości A_i. Musi być znanych również 5 wartości x_0, x_k $k=1,2,3,4$ pozycji satelity z teorii lub wyznaczonych na podstawie synchronicznych obserwacji dopplerowskich, wykonywanych równocześnie na 4 stacjach bazowych. Dysponując większą niż 4 liczbą obserwacji typu Integrated Doppler można do wyznaczenia składowych $\overline{X}$ oraz ϱ_0 wykorzystać algorytm mnk. Wyznaczone na podstawie 4 obserwacji składowe $\bar{X}$ można również potraktować jako współrzędne przybliżone stacji, które jako dane początkowe mogą być wykorzystane w procesie poprawienia współrzędnych stacji. Współrzędne satelity $\bar{x}$ i stacji X muszą być wyrażone w układzie nieruchomym, ściśle związanym z Ziemią.

Warto zauważyć, że po wyznaczeniu ϱ_0 i danymi z obserwacji wartościami A_k, zgodnie z (23) będą znane również topocentryczne odległości do satelity $\varrho_k = A_k + \varrho_0$.

Równanie (22) zasługuje również z uwagi na wykorzystanie obserwacji dopplerowskich — wykonywanych synchronicznie na czterech stacjach o znanych współrzędnych — do określania położenia satelity. Metoda ta, w pełni niezależna od teorii ruchu satelity, sprowadza się do rozwiązania układu równań liniowych o 4 niewiadomych [1, 2, 8, 9]. Wyznaczone tą metodą pozycje satelity można również wykorzystać do wyznaczania i poprawiania elementów orbity satelity. Znając bowiem 3 położenia satelity w 3 momentach czasu, można np. metodą Gaussa—Banachiewicza [13] wyznaczyć elementy orbity satelity. Znając zaś większą liczbę współrzędnych satelity niż 3, można je wykorzystać w procesie poprawiania elementów orbity.

W zakończeniu ilustrujemy proces poprawiania współrzędnych stacji na podstawie obserwacji typu „Doppler chwilowy" i „Doppler scałkowany" SSZ. Jako dane w niniejszym przykładzie liczbowym przyjmujemy elementy orbity satelity Echo 1 (str. 75 [13]) na epokę 1962.X.21, 85017710^d

$$a = 8297{,}2912 \text{ km}, \quad e = 0{,}09479290,$$

$$\Omega = 218^\circ 9456722, \quad i = 47^\circ 2450420,$$

$$\omega = 22^\circ 8349678, \quad M = 70^\circ 9030715.$$

Zakładamy, że obserwacje dopplerowskie zostały wykonane na stacji Jozefosław, dla której przyjęto następujące współrzędne ([25] str. 22).

$$\lambda = 21^\circ 1'30, \quad \varphi = 52^\circ 6'0, \quad h = 110 \text{ m}.$$

Odpowiadają one w Geodezyjnym Układzie Odniesienia 1967 (GUO-67) następującym współrzędnym prostokątnym

$$X = 3664{,}8731 \text{ km} \quad Y = 1408{,}6480 \text{ km}, \quad Z = 5009{,}7501 \text{ km}.$$

Na podstawie podanych elementów orbity i danych współrzędnych stacji obliczono — stosując teorię ruchu keplerowskiego — począwszy od momentu $t_0 = 18^h 12^m 0^s$ TU ($1962.X.21^d$) efemerydę.

Tablica 1

i	t [TU]	ρ [km]	$\dot{\rho}$ [m/s]	A	h
0	18^h12^m	2562.2747	−4340,4752	262,2°	26,5°
1	18^h14^m	2108.9139	−3097,4157	252,2°	41,5°
2	18^h16^m	1850,6198	−1083,6857	227,7°	58,1°
3	18^h18^m	1864,3388	1291,2544	175,8°	63,1°
4	18^h20^m	2137,2052	3117,2174	140,5°	51,7°
5	18^h22^m	2580,2978	4155,2551	126,8°	38,7°

W tablicy 1: A — oznacza azymut satelity liczony od północy, h — jego wysokość horyzontalną.

Wartości ϱ_i, $\dot{\varrho}_i$ $i = 1,1, \ldots, 5$ traktujemy dalej jako znane obserwacje dopplerowskie.

Jako współrzędne wyjściowe przybliżone przyjęto następujące współrzędne Krakowa ([25] str. 22): $\lambda_0 = 19°58'30''$, $\varphi_0 = 50°04'00''$ $h_0 = 221$ m, które w GUO-67 wyrażone w km wynoszą:

$$X_0 = 3855{,}5484,\ Y_0 = 1401{,}4000,\ Z_0 = 4867{,}7384.$$

Opierając się na wymienionych współrzędnych przybliżonych obliczono $\varrho_{i,c}$, $\dot{\varrho}_{i,c}$.

Dysponując wartościami obserwacyjnymi ϱ_i, $\dot{\varrho}_i$ oraz obliczonymi $\varrho_{i,c}$, $\dot{\varrho}_{i,c}$ ułożono 5 równań obserwacyjnych typu (14) oraz typu (20). W wyniku rozwiązania tych układów według algorytmu mnk. uzyskano poprawki $\Delta\overline{X}$, które po dodaniu do $\overline{X}_0$ dają $\overline{X}_1 = \overline{X}_0 + \Delta\overline{X}$. Dla tak otrzymanych po pierwszej iteracji współrzędnych obliczono nowe wartości $\varrho_{i,c}$, $\dot{\varrho}_{i,c}$, które wykorzystano w następnym cyklu obliczeniowym.

W tablicy 2 podano wyniki iteracji wykorzystujących obserwacje „Doppler chwilowy", zaś w tablicy 3 „Doppler scałkowany".

Przez d_i oznaczono odległość (wzdłuż cięciwy) między stacją obserwacyjną a stacją wyjściową po i-tej iteracji.

Tablica 2

i	λ_i	φ_i	h_i [m]	d_i [m]
0	19°58′30″	50°04′00″	221	237 859
1	20°48′53	51°24′21	−27 973	81 747
2	21°02′20	52°08′09	−71	4 120
3	21°01′30,6	52°06′01,8	126	5

Tablica 3

i	λ_i	φ_i	h_i [m]	d_i [m]
1	20°52′13″	51°34′48″	−23 026	61 874
2	21°01′58	52°07′11	−25	2 256
3	21°01′29	52°05′57	60	117
4	21°01′30,6	52°06′02	134	67

W obu przypadkach wyniki są zbieżne do współrzędnych stacji obserwacyjnej, mimo że współrzędne wyjściowe były dość odległe, co potwierdza zgodność wewnętrzną stosowanych algorytmów.

3. Równania obserwacyjne w procesie poprawiania elementów orbity SSZ na podstawie obserwacji dopplerowskich

W systemach satelitarno-dopplerowskich zasadniczą rolę odgrywa aktualizacja elementów orbit satelitów wykorzystywanych w nawigacji bądź w pracach geodezyjnych. Na stacjach bazowych wykonywane są obserwacje dopplerowskie, wykorzystywane w procesie poprawiania elementów orbity tych satelitów. Poniżej wyprowadza się wzory na współczynniki równań obserwacyjnych, stosowanych w procesie poprawiania elementów orbit na podstawie obserwacji dopplerowskich.

Uważając współrzędne stacji obserwacyjnej za znane, a więc kładąc $\Delta\overline{X} = \overline{O}$, $\Delta\dot{\overline{X}} = \overline{O}$ w równaniu (7), otrzymujemy

$$\Delta\dot{\varrho} = \dot{\varrho}_o - \dot{\varrho}_c = \overline{l}\,\Delta\dot{\overline{x}} + \dot{\overline{\varrho}}\,\frac{\Delta\overline{x}}{\varrho} - \frac{\dot{\varrho}}{\varrho}\,\overline{l}\,\Delta\overline{x}\,. \tag{24}$$

Jest to równanie obserwacyjne dla obserwacji typu Instanteneous Doppler.

Równanie obserwacyjne dla obserwacji typu Integrated Doppler można wyprowadzić w następujący sposób. Po zróżniczkowaniu wzoru (17) przy warunku $\Delta\overline{X} = \overline{O}$ i przejściu z różniczek do różnic skończonych otrzymujemy

$$\varrho_o - \varrho_c = \frac{x-X}{\varrho}\,\Delta x + \frac{y+Y}{\varrho}\,\Delta y + \frac{z-Z}{\varrho}\,\Delta z = \overline{l}\,\Delta\overline{x}\,. \tag{25}$$

Pisząc powyższe równanie dla momentu wyjściowego t_0 i danego momentu t_k, otrzymujemy

$$\varrho_{0o} - \varrho_{0c} = \overline{l}_0\Delta\overline{x}.$$

$$\varrho_{ko} - \varrho_{kc} = \overline{l}_k\Delta\overline{x}. \tag{26}$$

Odejmując pierwsze od drugiego, otrzymujemy szukane równania

$$(\varrho_{ko}-\varrho_{0o})-(\varrho_{kc}-\varrho_{0c}) = (l_k-l_0)\Delta\bar{x}, \tag{27}$$

gdzie $\varrho_{ko}-\varrho_{0o} = A_{ko}$ jest znane na podstawie obserwacji, zaś $\varrho_{kc}-\varrho_{0c} = A_{kc}$ z teorii.

Występujące w równaniach (24) i (27) wektory $\Delta\bar{x}$, $\Delta\bar{\dot{x}}$ są funkcjami sześciu elementów orbity E_i, $i = 1, 2, \ldots, 6$. Są one związane z przyrostami elementów ΔE_i przez związki

$$\Delta\bar{x} = \sum_{i=1}^{6} \frac{\partial \bar{x}}{\partial E_i}\Delta E_i, \quad \Delta\bar{\dot{x}} = \sum_{i=1}^{6} \frac{\partial \bar{\dot{x}}}{\partial E_i}\Delta E_i. \tag{28}$$

Przyjmujemy do dalszych rozwiązań elementy keplerowskie orbity satelity i wprowadzamy oznaczenia:

$E_1 = a$ — półoś duża orbity eliptycznej,

$E_2 = e$ — jej ekscentryczność,

$E_3 = M_0$ — wartość anomalii średniej w danym momencie t_0,

$E_4 = \Omega$ — długość węzła wstępującego,

$E_5 = i$ — nachylenie płaszczyzny orbity satelity do płaszczyzny równika ziemskiego,

$E_6 = \omega$ — argument perigeum.

Niech wektor $\bar{q}$ o składowych [11, 15, 19]:

$$q_1 = a(\cos E-e), \quad q_2 = a\sqrt{1-e^2}\sin E, \quad q_3 = 0 \tag{29}$$

określa położenie satelity w układzie orbitalnym, zaś wektor $\dot{q}$ o składowych:

$$\dot{q}_1 = \frac{a^2n}{r}\sin E, \quad \dot{q}_2 = \sqrt{1-e^2}\,\frac{a^2n}{r}\cos E, \quad \dot{q}_3 = 0 \tag{30}$$

jego prędkość w tymże układzie. Wówczas położenie satelity $\bar{x}$ i prędkość $\bar{\dot{x}}$, wyrażone w układzie equinokcjalnym równikowym, wyrazi się wzorem

$$\bar{x} = q_1P+q_2Q, \quad \dot{x} = \dot{q}_1P+\dot{q}_2Q, \tag{31}$$

gdzie oznaczono

$$\bar{P} = \begin{cases} P_x = \cos\omega\cos\Omega-\sin\omega\sin\Omega\cos i, \\ P_y = \cos\omega\sin\Omega+\sin\omega\cos\Omega\cos i, \\ P_z = \sin\omega\sin i, \end{cases} \tag{32}$$

$$\bar{Q} = \begin{cases} Q_x = -\sin\omega\cos\Omega-\cos\omega\sin\Omega\cos i, \\ Q_y = -\sin\omega\sin\Omega+\cos\omega\cos\Omega\cos i, \\ Q_z = \cos\omega\sin i, \end{cases} \tag{33}$$

r — geocentryczny promień wodzący satelity,
E — anomalia mimośrodowa,
n — średni ruch satelity.

Wektory q i $\dot{q}$ są funkcjami tylko elementów: a, e, $M = M_0 + n(t - t_0)$, co zapisujemy $q = q(a, e, M)$, $\dot{q} = \dot{q}(a, e, M)$.

Biorąc powyższe pod uwagę, związki (28) napiszemy w postaci

$$\Delta \bar{x} = \sum_{i=1}^{3} \left(\bar{P} \frac{\partial q_1}{\partial E_i} + \bar{Q} \frac{\partial q_2}{\partial E_i} \right) \Delta E_i + \sum_{i=4}^{6} \left(\frac{\partial \bar{P}}{\partial E_i} q_1 + \frac{\partial \bar{Q}}{\partial E_i} q_2 \right) \Delta E_i \tag{34}$$

$$\Delta \dot{\bar{x}} = \sum_{i=1}^{3} \left(\bar{P} \frac{\partial \dot{q}_1}{\partial E_i} + \bar{Q} \frac{\partial \dot{q}_2}{\partial E_i} \right) \Delta E_i + \sum_{i=4}^{6} \left(\frac{\partial \bar{P}}{\partial E_i} \dot{q}_1 + \frac{\partial \bar{Q}}{\partial E_i} \dot{q}_2 \right) \Delta E_i \tag{35}$$

Według [15] (str. 98) pochodne

$$\frac{\partial (q_1 q_2)}{\partial (a,e,M)}, \quad \frac{\partial (\dot{q}_1 \dot{q}_2)}{\partial (a,e,M)}$$

wyrażają się wzorami

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial q_1}{\partial a}, & \dfrac{\partial q_1}{\partial e}, & \dfrac{\partial q_1}{\partial M} \\ \dfrac{\partial q_2}{\partial a}, & \dfrac{\partial q_2}{\partial e}, & \dfrac{\partial q_2}{\partial M} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{q_1}{a}, & -a - \dfrac{q_2^2}{r(1-e^2)}, & -\dfrac{a q_2}{r\sqrt{1-e^2}} \\ \dfrac{q_2}{a}, & \dfrac{q_1 q_2}{r(1-e^2)}, & \dfrac{a}{r}\sqrt{1-e^2}\,(q_1 + a e) \end{vmatrix} \tag{36}$$

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial \dot{q}_1}{\partial a}, & \dfrac{\partial \dot{q}_1}{\partial e}, & \dfrac{\partial \dot{q}_1}{\partial M} \\ \dfrac{\partial \dot{q}_2}{\partial a}, & \dfrac{\partial \dot{q}_2}{\partial e}, & \dfrac{\partial \dot{q}_2}{\partial M} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\dfrac{\dot{q}_1}{2a}, & \dot{q}_1 \left(\dfrac{a}{r}\right)^2 \left[2\left(\dfrac{q_1}{a}\right) + \dfrac{e}{1-e^2}\left(\dfrac{q_2}{a}\right)^2 \right], & -n\left(\dfrac{a}{r}\right)^3 q_1 \\ -\dfrac{\dot{q}_2}{2a}, & \dfrac{n}{\sqrt{1-e^2}}\left(\dfrac{a}{r}\right)^2 \left[\dfrac{q_1^2}{r} - \dfrac{1}{a(1-e^2)} q_2^2 \right], & -n\left(\dfrac{a}{r}\right)^3 q_2 \end{vmatrix} \tag{37}$$

Pochodne $\frac{\partial \bar{P}}{\partial \Omega}$, $\frac{\partial \bar{P}}{\partial i}$, $\frac{\partial \bar{P}}{\partial \omega}$, $\frac{\partial \bar{Q}}{\partial \Omega}$, $\frac{\partial \bar{Q}}{\partial i}$, $\frac{\partial \bar{Q}}{\partial \omega}$ uzyskuje się bezpośrednio po zróżniczkowaniu (32) i (33) względem poszczególnych elementów.

Przykładowo:

$$\frac{\partial \bar{P}}{\partial \Omega} = \left| \begin{matrix} -\cos\omega \sin\Omega - \sin\omega \cos\Omega \cos i \\ \cos\omega \cos\Omega - \sin\omega \sin\Omega \cos i \end{matrix} \right\} \tag{38}$$

Warto zauważyć, że $\frac{\partial \bar{P}}{\partial \omega} = \bar{Q}$.

Wstawiając (34) do (27) i wprowadzając oznaczenia:

$$a_1 = (l_k - l_0)\,\bar{P}, \quad a_2 = (l_k - l_0)\,\bar{Q},$$

$$a_{3i} = (l_k - l_0) \frac{\partial \bar{P}}{\partial E_i}, \quad a_{4i} = (l_k - l_0) \frac{\partial \bar{Q}}{\partial E_i}, \tag{39}$$

$i = 4, 5, 6,$

otrzymujemy w postaci jawnej równanie poprawek na elementy orbity:

$$\sum_{i=1}^{3}\left(a_1 \frac{\partial q_1}{\partial E_i}+a_2 \frac{\partial q_2}{\partial E_i}\right) \Delta E_i+\sum_{i=4}^{6}\left(a_{3i} q_i+a_{4i} q_2\right) \Delta E_i=A_{ko}-A_{kc}. \qquad (40)$$

Wyznaczenie poprawek ΔE_i, $i = 1, 2, \ldots, 6$ sprowadza się do rozwiązania układu 6 równań liniowych (40) o 6 niewiadomych. W tym celu musimy dysponować minimum 6 obserwacjami typu Intergrated Doppler: w przypadku obserwacji nadliczbowych ($n > 6$) poprawki ΔE_i wyznaczamy według algorytmu mnk.

W celu ułożenia jawnego równania na poprawki dla obserwacji typu Instantaneous Doppler należy zgodnie z równaniem (24) obliczyć wyrażenia $\bar{l}\ \Delta\dot{\bar{x}}$, $\dot{\bar{\varrho}}\,\frac{\Delta \bar{x}}{\varrho}$, $-\frac{\dot{\varrho}}{\varrho}\,\bar{l}\ \Delta\bar{x}$, wstawiając w miejsce Δx, $\Delta\dot{\bar{x}}$ wyrażenia (34) i (35), i przyporządkować je odpowiednim poprawkom na elementy orbity ΔE_i $(i = 1, 2, \ldots, 6)$.

W przypadku gdy orbita SSZ jest zbliżona do kołowej ($e \approx 0$), nieoznaczone staje się położenie perigeum, a więc elementy M oraz ω. W tym przypadku w procesie poprawiania elementów orbity SSZ należy zastąpić elementy e, M, ω przez $U = \omega + M$, $a_x = e \cos \omega$, $a_y = e \sin \omega$ [17, 20].

Przedstawione w niniejszej pracy metody wyznaczania współrzędnych stacji dopplerowskich oraz metody wyznaczania i poprawiania elementów orbity SSZ przy wykorzystaniu obserwacji dopplerowskich należy do metod zasadniczych, stosowanych w tej problematyce. Stosując upraszczające założenia np. kołowość orbity satelitarnej, zaniedbanie ruchu obrotowego Ziemi, można na podstawie znanej krzywej dopplerowskiej, uzyskanej z jednego przejścia satelity określić najmniejszą odległość OS i odpowiadający temu moment czasu [21].

Istnieje wiele prac poświęconych wynikom uzyskanym na podstawie obserwacji dopplerowskich, np. prace Anderle [3, 4, 5, 6]. Mniej zaś jest prac dotyczących przetwarzania obserwacji dopplerowskich.

LITERATURA

[1] *Adam I., Tarcsai G.*: Opriedielenije koordinat sputnika i stancii pri pomoszczi gieomietriczeskich dopplerowskich mietodow. Nabludienija ISZ (1971), Nr 11, Berlin 1972.

[2] *Adam I., Tarcsai G.*: Independent Geometrical Doppler Geodetic Systems. Nabludienija ISZ (1974), Nr 14, Bucuresti 1975.

[3] *Anderle R.I.*: Geodetic Parameter Set NWL — SE — 6 Based on Doppler Satellite Observations, the use of Artificial Satellites for Geodesy, vol. II, Publication of the National Technical University Athens, Greece 1967.

[4] *Anderle R.I.*: Atmospheric Density Variations at 1000 Kilometers Altitude. NWL TR — 2568, April 1971.
[5] *Anderle R.I.*: Accuracy of Doppler Determinations of Station Positions. NWL TR 2559, IV. 1971.
[6] *Anderle R.I., Tanenbaum M.G.*: Practical Realization of a Reference, System for Earth Dynamics by Satellite Methods. IUA Colloquium No 26, Toruń 26—31. VIII. 1974.
[7] *Benglass L.K., Anderle R.I.*: Refined Doppler Satellite Determinations of the Earth's Polar Motion, The Use of Artificial Satellites for Geodesy, Geophysical Monograph 15. Washington D.C. 1972.
[8] *Carrara N., Checcacci P.F., Ronchi L.*: Space Research II. Amsterdam 1961.
[9] *Dragosh D., Horvath F., Tarcsay G.*: Ocenka dopplerowskich kriwych ISZ. Nabludienija ISZ (1966), Nr 5, Budapest 1967.
[10] *Dubjago A.D.*: Opriedielenije orbit. Moskwa, Leningrad 1949.
[11] *Escobal P.R.*: Methods of Orbital Determination, John Wiley and Sons, Inc. New York, London, Sydney 1965.
[12] *Góral Wł.*: Równania obserwacyjne w satelitarno-dopplerowskim systemie nawigacyjnym. Politechnika Łódzka. Materiały Kollokwium nt. Wykorzystanie SSZ w nawigacji morskiej i lotniczej. Łódź 1973.
[13] *Góral Wł.*: Metoda Gaussa (algorytm Gaussa—Banachiewicza) i metoda Laplace'a obliczania elementów orbity SSZ. Zeszyty Naukowe AGH, nr 416, Kraków 1973.
[14] *Guier W.H.*: Navigation Using Articicial Satellites — the Transit System „Proceedings of the First International Symposium on the Use of Artificial Satellites for Geodesy, North-Holland Publishing Company, Amsterdam 1963.
[15] *Kauła W.*: Theory of Satellite Geodesy. Tłum. rosyjskie, Izdatielstwo Mir. Moskwa 1970.
[16] *Keats E.S.*: The Relative Position Technique for Determination on Geodetic Location by Use of Satellites, Proceedings XV Inter. Astr. Congress Gauthier — Villars, Paris. PWN — Warszawa 1965.
[17] *Koelle H.H.*: Handbook of Astronautical Engineering, McGraw Hill Book Company, Inc. New York, Toronto, London 1961.
[18] *Kołaczek B.*: Perspektywy badań figury i dynamiki Ziemi w świetle zastosowań nowych technik obserwacyjnych. Geodezja i Kartografia, z. 3, 1974.
[19] *Oljaniuk P.W.*: Optimalnyj prijom signałow i potiencjalnaja tocznost' kosmiczeskich izmieritielnych kompleksow. Sowietskoje radio, Moskwa 1973.
[20] *Pachelski W.*: Poprawianie orbity sztucznego satelity Ziemi. COPAN, PWN, Warszawa 1965.
[21] *Śledziński I.*: Geodezja satelitarna. Wyd. Polit. Warszawskiej, Warszawa 1971.
[22] *Wereszczyński I.*: Nawigacyjny system satelitarny NNSS. Politechnika Łódzka. Materiały kolokwium nt. Wykorzystania SSZ w nawigacji morskiej i lotniczej. Łódź 1973.
[23] *Wereszczyński I.*: Podstawy matematyczne radiookreślania pozycji. PWN, Warszawa 1974.
[24] *Witte B.*: Berechnungsverfahren für die Bestimmung des Erdschwerepotentials aus Doppler-Beobachtungen mit Hilfe des Modells einer einfachen Schicht, Reihe C.: Dissertationen, Hefl Nr. 167, München 1971.
[25] COSPAR TRANSACTIONS nr 2, 1967.

Recenzował doc. dr hab. inż. Janusz Zieliński

Rękopis złożono w Redakcji w styczniu 1976 r.

ВЛАДЫСЛАВ ГУРАЛЬ

МЕТОДЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ КООРДИНАТ СТАНЦИИ И ЭЛЕМЕНТОВ ОРБИТЫ ИСЗ НА ОСНОВЕ ДОППЛЕРОВСКИХ НАБЛЮДЕНИЙ

Резюме

Работа вводит в проблематику допплеровских наблюдений ИСЗ и возможности использования их при решений различных вопросов в области геодезии. Обсуждаются методы определения и поправки координат станции на основе наблюдений типа „Instantaneous Doppler" и „Integrated Doppler" спутников, элементы орбиты и теория движения которых известны. Даны наблюдательные уравнения применяемые при обработке наблюдений обеих типов.

На числовом примере даются результаты вычислений, иллюстрирующие сходство итерационных процессов применяемых при поправке (уравнивании) координат станции на основе обеих типов допплеровских наблюдений.

В общих чертах даны методы определения и поправки (наблюдательные уравнивания) элементов орбиты ИСЗ на основе допплеровских наблюдений обеих типов выполняемых на станциях с известными координатами в данной системе отнесения.

WŁADYSŁAW GÓRAL

METHOD OF DETERMINATION OF STATION COORDINATES AND ELEMENTS OF THE ARTIFICIAL EARTH SATELLITES ORBITS ON THE BASIS OF DOPPLER OBSERVATIONS

Summary

The paper describes some subjects of Doppler observations of the Artificial Earth Satellites and possibilities of their aplication for solving various problems in geodesy. Methods of determination and improve of station coordinates on the basis of the „Instantaneous Doppler" and „Integrated Doppler" observations satellites which the elements of orbit and the theory of motion are known, are discussed in this paper. Observation equations used for the both types of observations are also stated here.

In the numerical example the results of calculations illustrating convergence of the iteration processes applied for the station coordinates improvement on the basis of both types of Doppler observations are given.

Methods of determination and improvement (observation equations) of the Artificial Earth Satellites orbit elements using the both types of Doppler observations performed at a station of known coordinates in particular reference system are also briefly discussed in this paper.