PRACE INSTYTUTU GEODEZJI I KARTOGRAFII

Tom XXII, Zeszyt 2/51, 1975

ADAM DUBIK
HENRYK Z. KOWALSKI

535.317.1:535.41/42:528

Wpływ sposobu rejestracji i rekonstrukcji obiektu na niektóre parametry obrazów odtwarzanych z hologramu

1. Wstęp

W pracy pt. „Kierunki zastosowań optyki światła spójnego i holografii w geodezji i kartografii" („Prace IGiK, t. XXII, zesz. 1/50, Warszawa 1975) przedstawiono ogólne kierunki zastosowań optyki światła spójnego, a zwłaszcza holografii w geodezji i kartografii oraz podano bogatą literaturę w tym zakresie. W niniejszej pracy autorzy pragną przedstawić bardziej szczegółowo wpływ sposobu rejestracji i rekonstrukcji obiektu na niektóre parametry obrazów odtwarzanych z hologramu, a zwłaszcza zmiany skali, położenia obrazu w przestrzeni i jego właściwości.

Wydaje się to szczególnie interesujące w aspekcie wykorzystania różnych rodzajów hologramów (Fresnela, Fraunhofera i Fouriera) w fotogrametrii.

2. Rejestracja holograficzna

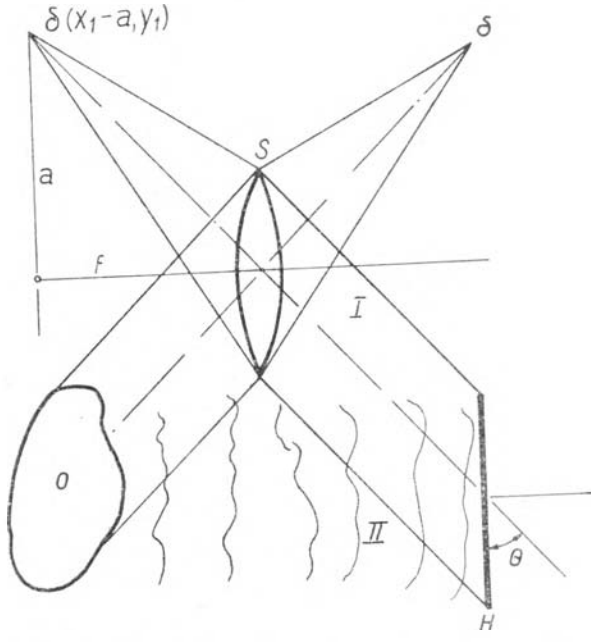
Falę świetlną (wiązkę informacyjną) w płaszczyźnie hologramu, rozproszoną przez dowolny obiekt, który chcemy zarejestrować opisuje wyrażenie

$$A(x, y) = |A(x, y)| \exp i\Phi(x, y) \tag{1}$$

gdzie

$|A(x, y)|$ — amplitudowa składowa fali,
$\Phi(x, y)$ — fazowa składowa fali.

W celu rejestracji, oprócz składowej amplitudowej opisującej obiekt także składowej fazowej, należy wiązkę informacyjną poddać interferencji z inną wiązką, tzw. „odniesienia". Dla prostoty analizy przyjmiemy wiązkę odniesienia w postaci fali płaskiej, spotykającej się z wiązką informacyjną pod pewnym kątem Θ. Weźmy pod uwagę schemat przedstawiony na rysunku 1. Soczewka S dokonuje operacji transformacji Fouriera



Rys. 1. Schemat optyczny rejestracji hologramu. S-soczewka, O-obiekt holografowany, H-hologram, δ-punktowe źródła światła

dystrybucji $\delta(x_1, y_1)$ — Diraca przemieszczonej o wielkość a według kierunku x_1. Wtedy:

$$\overline{F}\{\delta(x_1-a, y_1)\} = \exp ixa, \tag{2}$$

a kąt, pod którym wiązka odniesienia pada na płaszczyznę H, równy jest

$$\Theta = \operatorname{arctg} f/a, \tag{3}$$

gdzie f — odległość ogniskowej soczewki S.

Faza wiązki odniesienia w płaszczyźnie H ma liniową zależność od współrzędnej x i stałą, jednostkową amplitudę. W ten sposób rozkład świetlny w interesującej nas płaszczyźnie przyjmie postać sumy

$$e^{ixa} + |A(x, y)|\, e^{i\Phi(x, y)}, \tag{4}$$

a materiał światłoczuły, jako kwadrator zarejestruje natężenie równe

$$N(x, y) = |e^{ix\alpha} + |A(x, y)|e^{i\Phi(x, y)}|^2 \tag{5}$$

albo

$$N = \underbrace{1 + |A(x, y)|^2}_{G_2} + \underbrace{|A(x, y)|e^{i[\Phi(x, y) - x\alpha]}}_{G_0} + \underbrace{|A(x, y)|e^{-i[\Phi(x, y) - x\alpha]}}_{G_1} = $$
$$= G_2 + G_0 + G_1. \tag{6}$$

Z wyrażenia (6) widać, że struktura materiału światłoczułego (hologramu) zawiera tak amplitudową jak i fazową składową sygnału. Przy braku wiązki odniesienia wyrażenie (5) zapisze się jako

$$||A(x, y)|e^{i\Phi(x,y)}|^2 = |A(x, y)|^2 \tag{7}$$

co odpowiada procesowi zwykłej rejestracji fotograficznej, kiedy zapisowi na materiale światłoczułym podlega tylko amplituda sygnału.

Powyższe rozważania przeprowadziliśmy zakładając, że rejestracja i obróbka fotochemiczna materiału światłoczułego odbywała się tak, aby zachować prostoliniowość krzywej charakterystycznej emulsji fotograficznej.

Jeżeli wykonany w powyższy sposób hologram umieścimy ponownie w miejscu jakie zajmował przy rejestracji i oświetlimy tym razem tylko wiązką odniesienia I, przesłaniając wiązkę informacyjną II, to bezpośrednio za hologramem uzyskamy

$$e^{ix\alpha} \cdot N(x, y) = [1 + |A(x, y)|^2]e^{ix\alpha} + |A(x, y)|\, e^{i\Phi(x, y)} +$$
$$+ |A(x, y)|\, e^{-i\Phi(x, y)} \cdot e^{i2x\alpha}. \tag{8}$$

Trzy składowe powyższego wyrażenia odpowiadają wiązkom rozchodzącym się w trzech różnych kierunkach. Pierwsza posiada kierunek wiązki odniesienia, druga prostopadły do hologramu i trzecia rozchodzi się pod kątem około dwa razy mniejszym od kąta wiązki odniesienia.

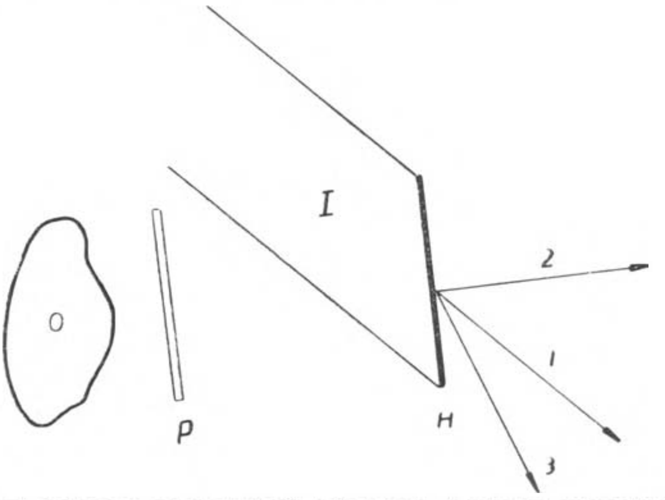
Pierwsza składowa nie zawiera pełnej informacji o holografowanym obiekcie, osłabiając jedynie natężenie wiązki odniesienia. Drugi człon wyrażenia (8) opisuje informacyjną wiązkę wyjściową, która odpowiada obrazowi pozornemu. Obraz rzeczywisty rekonstruuje się w kierunku określonym kątem $2x\alpha$ i reprezentuje sprzężenie zespolone przedstawione członem trzecim, to znaczy:

$$[|A(x, y)|\, e^{i\Phi(x, y)}]^* = |A(x, y)|\, e^{-i\Phi(x, y)}.$$

Kierunki te przedstawiono na rysunku 2.

W ten sposób na drodze rejestracji holograficznej utrwalona została dodatkowo faza wiązki świetlnej rozproszonej przez obiekt podlegający zapisowi.

Informacja amplitudowo-fazowa może być jak wynika z powyższej analizy w nieskomplikowany sposób odzyskana poprzez rekonstrukcję czoła fali świetlnej opisującej zarejestrowany obiekt.



Rys. 2. Schemat optyczny rekonstrukcji hologramu. *I*-wiązka rekonstruująca obraz obiektu *O* z hologramu *H*, *P*-przysłona

Struktura hologramów obiektów zależy ogólnie od struktury fal świetlnych dyfragowanych na obiektach w płaszczyźnie hologramów i od pola świetlnego w tej płaszczyźnie charakteryzującego wiązkę odniesienia. Różne relacje płaskich i sferycznych czół fal dyfragowanych na obiektach i czół wiązek odniesienia przy rejestracji holograficznej mogą posłużyć za podstawę klasyfikacji hologramów. Wychodząc z tego założenia hologramy możemy podzielić na:

— cieniowe — kiedy odległość holografowanego obiektu od powierzchni materiału światłoczułego jest dużo mniejsza niż wymiary obiektu, a wzór interferencyjny powstaje wskutek sumowania się fali dyfragowanej na krawędziach obiektu i płaskiej lub kulistej wiązki odniesienia,

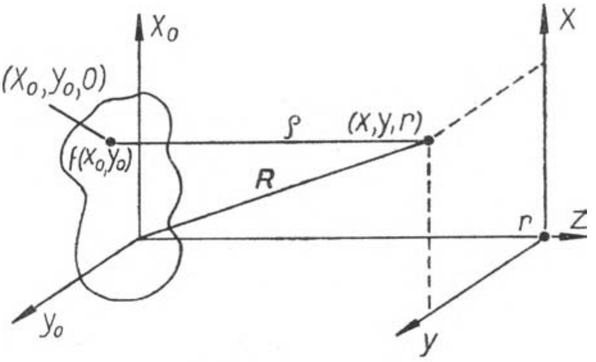
— hologramy Fresnela, na powierzchni których struktura interferencyjna wytworzona jest przez płaskie lub sferyczne fronty fali odniesienia i sferyczne wiązki informacyjne dyfragowane na obiekcie,

— hologramy Fraunhofera tworzone przez płaskie lub sferyczne wiązki odniesienia i płaskie wiązki informacyjne, dyfragowane na obiekcie,

— hologramy Fouriera, otrzymywane poprzez rejestrację interferencji sferycznych fal odniesienia, mających promień krzywizny równy średniemu promieniowi krzywizny fal świetlnych, pochodzących od obiektu i rozchodzących się w tym samym kierunku. Wiązka informacyjna w tego rodzaju hologramie powinna mieć sferyczny front fali.

Dalej zostaną przytoczone zależności matematyczne charakteryzujące każdy z wymienionych typów hologramów pod kątem zastosowań fotogrametrycznych.

Wyjdziemy ze znanej zależności dyfrakcyjnej Fresnela—Kirhoffa, opisującej pole dyfragowane na obiekcie, w płaszczyźnie oddalonej o wielkość r od obiektu (rys. 3).



Rys. 3

$\bar{\varrho}$ — odległość punktu rozpraszania obiektu i rozpatrywanego punktu płaszczyzny x, y

$$A(x,y) = \frac{E_1}{4\pi} \iint\limits_D f(x_0, y_0) \left[\left(ik + \frac{1}{\varrho} \right) \cos\Theta - ik \cos\varphi \right] \frac{1}{\varrho} e^{ik\varrho} dx_0 dy_0 \tag{9}$$

gdzie:

$f(x_0, y_0)$ — funkcja amplitudowa — obiekt, Θ — kąt między normalną do obiektu i wektorem $\bar{\varrho}$,

φ — kąt między normalną do obiektu i normalną czoła frontu fali padającej na obiekt,

k — liczba falowa.

Wobec powyższego trzy człony opisujące hologram mogą być ogólnie przedstawione w postaci:

$$G_0(x,y) = e^{-i\Phi_0(x,y)} \frac{1}{4\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int f(x_0, y_0) e^{ik\varrho} \frac{1}{\varrho} \left[\left(ik + \frac{1}{\varrho} \right) \cos\Theta - ik \cos\varphi \right] dx_0 dy_0 \tag{10}$$

$$G_1(x,y) G_0^*(x,y) = e^{i\Phi_0(x,y)} \frac{1}{4\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int f^*(x_0, y_0) e^{-ik\varrho} \frac{1}{\varrho} \left[\left(-ik + \frac{1}{\varrho} \right) \cos\Theta + \right.$$

$$\left. + ik \cos\varphi \right] dx_0 dy_0 \tag{11}$$

$$G_2(x, y) = 1 + |G_0(x, y)|^2. \tag{12}$$

W zależnościach tych amplitudy wiązki odniesienia jak i wiązki padającej na obiekt przyjęte zostały za jednostkowe, a faza wiązki odniesienia przedstawiona ogólną funkcją $\Phi_0(x, y)$.

3. Hologramy Fresnela

Hologramy tego typu można scharakteryzować zależnościami (10, 11, 12) podstawiając ϱ określone dla obszaru Fresnela i wykorzystując dwa człony rozwinięcia w szereg Taylora funkcji

$$\varrho = \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+r^2}, \tag{13}$$

a mianowicie

$$\varrho \approx r + \frac{1}{2r}\left[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2\right]. \tag{14}$$

Jest to tzw. przybliżenie Fresnela stosowane dla obszaru Fresnela. Obszar Fresnela jest to obszar, w którym dyfragowane na obiekcie fale posiadają front sferyczny. Obszar ten rozciąga się od obiektu, na którym następuje dyfrakcja, na odległość nie większą niż kwadrat największego rozmiaru obiektu podzielone przez połowę długości fali światła.

Dla przedstawienia całki (9) w obszarze Fresnela czyni się także szereg innych przybliżeń m.in.

ϱ w ilorazie $\frac{1}{\varrho}$ przyjmuje się równe r (jeśli pole określa się w niewielkim obszarze wokół osi z). $\frac{1}{\varrho^2}$ — przyjmujemy za wartość małego rzędu i zaniedbujemy w dalszych rozważaniach.

Uwzględniając powyższe, zależności (10, 11, 12) dla hologramu Fresnela zapiszemy następująco:

$$G_0(x, y) = i(2\lambda r)^{-1} \exp\{-i[\Phi_0(x, y)+kr]\}. \int\int_{-\infty}^{\infty} f(x_0, y_0) \exp\left\{i\frac{k}{2r}[(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2]\right\} (\cos\Theta - \cos\varphi) dx_0 dy_0 \tag{15}$$

$$G_1(x, y) = G_0^*(x, y), \tag{16}$$

$$G_2(x, y) = 1 + |G_0(x, y)|^2. \tag{17}$$

$G_1(x, y)$ — otrzymuje się na drodze zamiany w wyrażeniu na $G_0(x, y)$ i na $(-i)$.

Charakterystyczną cechą w hologramach Fresnela jest postać wiązki informacyjnej

$$A(x, y) = i\,\frac{e^{ikr}}{2\lambda r\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int f(x_0, y_0)(\cos\Theta - \cos\varphi)\cdot\exp\left\{i\,\frac{k}{2r}\,[(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2]\right\}dx_0dy_0 \tag{18}$$

Ostatnie wyrażenie jest splotem dwóch funkcji

$$A(x, y) = p(x, y) \odot S(x, y), \tag{19}$$

gdzie

$$p(x, y) = i\,\frac{e^{ikr}}{2\lambda r\pi}\,f(x, y)\,(\cos\Theta - \cos\varphi), \tag{20}$$

$$s(x, y) = \exp\left(ik\,\frac{x^2+y^2}{2r}\right) \text{ — funkcja Fresnela.} \tag{21}$$

Jeżeli przy rejestracji użyto sferycznej wiązki odniesienia

$$B(x, y) = e^{i\Phi_0(x,\,y)} = \exp\,ik\left\{r_0 + \frac{1}{2r_0}\,[(x-x_a)^2 + (y-y_a)^2]\right\} = \\ = s\{\delta(x_0 - x_a,\, y_0 - y_a)\}, \tag{22}$$

gdzie $s\{\}$ — operator przekształcenia Fresnela; x_a, y_a — współrzędne funkcji δ; r_0 — odległość funkcji δ — Diraca od płaszczyzny hologramu, strukturę hologramu Fresnela przedstawia równanie:

$$N(x, y) = B^*(x, y)\,A\,(x, y) + B(x, y)\,A^*\,(x, y) + [1 + |A(x, y)|^2] \tag{23}$$

Dla płaskiej wiązki odniesienia

$$b(x, y) = \exp\left\{ik\left(r_0 - x\,\frac{x_a}{r_0} - \frac{y_a}{r_0}\,y\right)\right\} = \\ = \exp\left\{ik\left[r_0 - \frac{1}{r_0}\,(xx_a + yy_a)\right]\right\} = \bar{F}\{\delta(x - x_a,\; y - y_a)\} \tag{24}$$

struktura ta przyjmie postać

$$N(x, y) = b^*(x, y)\,A(x, y) + b(x, y)\,A^*(x, y) + [1 + |A(x, y)|^2] \tag{25}$$

Rodzaj wiązki odniesienia i informacyjnej wpływa na strukturę hologramu. W przypadku wiązek płaskich są to równoległe linie interferencyjne, natomiast sferyczne wiązki dają inną strukturę plamkową.

4. Rekonstrukcja obrazów hologramu Fresnela

Rekonstruując obrazy z hologramów Fresnela (23 i 25) za pomocą płaskich i sferycznych frontów falowych mamy do czynienia z czterema wariantami formowania obrazów. Rozpatrzmy dla przejrzystości wywodów tylko człony informacyjne hologramu uwzględniając przy tym, że $\cos\Theta = 1$ i $\cos\varphi = -1$, (założenie to można wprowadzić jeśli rozmiary hologramu są niewielkie w porównaniu z odległością źródła rekonstruującego od hologramu, a obraz pola wpada w obszar Fresnela). Wtedy rekonstruowane płaską wiązką obrazy z hologramów Fresnela (23 i 25) opiszą się funkcjami

$$I_1 = (B^* \cdot A + B \cdot A^*) \cdot b_r \odot S_r, \tag{26}$$

$$I_2 = (b^*A + bA^*)\, b_r \odot S_r. \tag{27}$$

W przypadku wiązki sferycznej mamy

$$I_3 = (B^* \cdot A + B \cdot A^*)\, B_r \odot S_r \tag{28}$$

$$I_4 = (b^*A + bA^*)\, B_r \odot S_r, \tag{29}$$

gdzie:

b_r — rekonstruująca wiązka o płaskim czole fali,
B_r — rekonstruująca wiązka o sferycznym czole fali,
S_r — funkcja Fresnela (przy rekonstrukcji),

$$b_r = \exp\left\{ik\left[r_r - \frac{1}{r_r}(xx_r + yy_r)\right]\right\},$$

$$B_r = \exp\left\{ik\left[r_r + \frac{(x-x_r)^2 + (y-y_r)^2}{2r_r}\right]\right\},$$

r_r — odległość między hologramem i rekonstruującym źródłem światła,

$$S_r = \exp\left\{i\,\frac{k}{2z}\,(x^2 + y^2)\right\},$$

z — odległość między hologramem a płaszczyzną rekonstrukcji obiektu,
x_r, y_r — współrzędne funkcji δ, formującej wiązki odtwarzające.

Rozpatrzmy rekonstrukcję obrazu wiązką o płaskim froncie fali z hologramu otrzymanego przy płaskim froncie takiej samej wiązki odniesienia. Uwzględniając wyrażenie (27 i 19) dla obrazu pozornego otrzymuje się:

$$\{b^*(x,y)\,[f(x,y)\,(\cos\Theta - \cos\varphi) \odot S(x,y)]\, b_r(x,y)\} \odot S_r(x,y) =$$

$$= [f(x,y)\,(\cos\Theta - \cos\varphi) \odot S(x,y)] \odot S_r(x,y) \tag{30}$$

lub w postaci całki dla $z = r$

$$\dot{K}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int f(x_0, y_0)\,[\cos\Theta - \cos\varphi]\; e^{\frac{ik}{2r}[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2-(\zeta-x)^2-(\eta-y)^2]} dx_0 dy_0 dx dy \tag{31}$$

$\cos\Theta\,(x_0, y_0, x, y)$ zmienia się niewiele dla małych x, y w porównaniu z eksponentą i przyjmuje tylko wartości dodatnie, w związku z czym możemy ostatnie przepisać jako:

$$\dot{K}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int f(x_0, y_0)[\cos\Theta - \cos\varphi]\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int e^{\frac{-ik}{r}[(x_0-\zeta)x+(y_0-\eta)y]} dx dy dx_0 dy_0 =$$

$$= \dot{K}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int f(x_0, y_0)\cdot[\cos\Theta - \cos\varphi]\,\delta\left[\frac{k}{r}(x-\zeta),\ \frac{k}{r}(y_0-\eta)\right] dx_0 dy_0 \tag{32}$$

i ostatecznie

$$\dot{K} f(\zeta, \eta)\,[\cos\Theta - \cos\varphi], \tag{33}$$

gdzie

$$\dot{K} = -\frac{1}{2\lambda^2 r^2}\cdot\exp\,[ik2r - r_0 + r_r].$$

Analizując ostatnie widać, że obraz pozorny rekonstruowany z hologramu Fresnela zarejestrowanego za pomocą płaskiej wiązki odniesienia i odtworzony taką samą wiązką znajduje się w takiej samej odległości od hologramu, w jakiej znajdował się obiekt holografowany, w miejscu określonym położeniem tego obiektu. W tego rodzaju hologramie nie występują zniekształcenia rekonstruowanego obrazu.

Jakość rekonstruowanych obrazów zależy w dużej mierze od stopnia złożoności obiektu rejestrowanego. Dla obiektów płaskich można przyjąć, że $\cos\Theta \approx -\cos\varphi \approx 1$. Wtedy obraz rekonstruuje się z dokładnością do stałej. Dla obiektów trójwymiarowych w miejscach obiektu dla którego Θ i φ będą zbliżone do kąta prostego wystąpią cienie, które zniekształcą składową amplitudową obrazu. Wynika to ze spadku (przy $= \Theta = \varphi \approx 90°$) wartości wyrażenia $(\cos\Theta - \cos\varphi)$ do zera. Oprócz obrazu pozornego za hologramem w odległości r równej odległości obiektu rekonstruuje się obraz rzeczywisty. Przeprowadzając analogiczne operacje matematyczne, jak w przypadku obrazu pozornego, obraz rzeczywisty opisze się zależnością

$$\dot{K}_2\, f^*(\zeta, \eta)\,(\cos\Theta - \sin\varphi). \tag{34}$$

Cechą charakterystyczną obrazu rzeczywistego jest to, że funkcja, która go opisuje jest zespolona—sprzężoną w stosunku do funkcji opisującej obiekt rejestrowany. Obraz rzeczywisty w związku z tym jest obrazem pseudoskopowym. Miejsca wypukłe obiektu w obrazie pseudoskopowym występują jako wklęsłe i odwrotnie. W przypadku założonych kształtów frontów falowych—wiązek odniesienia i rekonstruującej—obraz rzeczywisty posiada takie same współrzędne, jak i obraz pozorny, lecz powstaje on po przeciwnej stronie hologramu. Można go obserwować na ekranie matowym lub fotografować, umieszczając materiał światłoczuły w miejscu jego rekonstrukcji. Można wykazać na drodze znanej nam już analizy, że w przypadkach hologramów opisanych zależnościami (26, 28, 29) obrazy pozorne, mające największe znaczenie w fotogrametrii można przedstawić następująco:

dla zależności (26)

$$\dot{K}_a f\left[\left(1-\frac{r}{r_0}\right)\zeta+\frac{r}{r_0}\,x_a-\frac{r}{r_r}\,x_r,\ \left(1-\frac{r}{r_0}\right)\eta+\frac{r}{r_0}\,y_a-\frac{r}{r_r}\,y_r\right]\cdot(\cos\Theta-$$
$$-\cos\varphi)\exp\left\{ik\,\frac{r-r_0}{2r_0^2}\,[(\zeta-x_a)^2+(\eta-y_a)^2]\right\}\cdot\exp\left\{+\frac{ik}{2}\left[\frac{r-r_0}{r_0r_r}\,x_r\zeta+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\frac{r}{r_r^2}\,x_r^2-\frac{r}{r_0r_r}\,x_rx_a+\frac{r-r_0}{r_0r}\,y_r\eta+\frac{r}{r_r^2}\,y_r^2-\frac{r}{r_0r_r}\,y_ry_a\right]\right\}. \tag{35}$$

Dla powyższego przypadku kiedy wiązką odniesienia była fala sferyczna a wiązką odtwarzającą fala o płaskim froncie (wynika to z rozważań przy otrzymaniu zależności (35)) obraz pozorny rekonstruuje się w odległości

$$z=-\frac{rr_0}{r_0-r}. \tag{36}$$

Weźmy trzy punkty na obiekcie równo od siebie oddalone r_1, r_2, r_3. Gdyby obraz tego obiektu nie ulegał deformacji wzdłuż osi z, to odpowiednie punkty z_1, z_2 i z_3, należące do obrazu byłyby również od siebie oddalone o jednakowe wartości, tzn:

$$z_3-z_2=z_2-z_1,$$

a jak wynika z równania $z=f(r)$ tak nie jest.

Oznacza to, że przy rekonstrukcji obrazu w miejscu $z\neq -r$ następuje jego deformacja wzdłuż osi z.

Środek obrazu przemieszczony jest do punktu o współrzędnych

$$\left[\left(-\frac{r}{r_0}\,x_a+\frac{r}{r_r}\,x_r\right);\quad\left(-\frac{r}{r_0}\,y_a+\frac{r}{r_r}\,y_r\right)\right], \tag{37}$$

a jego wymiary są różne w porównaniu z obiektem wyjściowym, modelem. Zmianę skali określają współczynniki przy ζ i η, które są równe i wynoszą

$$\left(1-\frac{r}{r_0}\right). \tag{38}$$

W płaszczyźnie obrazu występują również: fala sferyczna

$$\exp\left\{ik\frac{r-r_0}{2r_0^2}\left[(\zeta-x_a)^2+(\eta-y_a)^2\right]\right\}$$

i płaska

$$\exp ik\frac{r-r_0}{2r_0r_r}(x_r\zeta+y_r\eta),$$

które wpływają na jego jakość. Zauważmy, że użycie jednakowych wiązek odniesienia i rekonstruującej ($r_0 = r_r$, $x_a = x_r$, $y_a = y_r$) pozwala przy odtworzeniu otrzymać w płaszczyźnie (ζ, η) współrzędne środka obrazu równe (0,0), takie jakie posiadał obiekt holografowany, a ponadto zanika stały czynnik fazowy, występujący w eksponencie fali płaskiej.

Umieszczenie bezpośrednio za hologramem soczewki ujemnej o ogniskowej r_0

$$e^{i\left\{\frac{k}{2r_0}(x^2+y^2)\right\}} \tag{39}$$

powoduje zmianę odległości (36) rekonstruowanego obrazu od hologramu na $z = -r$, a więc na taką odległość, na jakiej znajdował się obiekt w czasie holografowania. Przy tym zanika deformacja obrazu wzdłuż osi z, występująca dla wartości $z \neq -r$.

Obraz pozorny dla zależności (28), rekonstruowany wiązką sferyczną identyczną do wiązki odniesienia, utworzy się w odległości $z = -r$ i opisze się zależnością

$$B^* \cdot A \cdot B_r \odot S_r = \dot{K}f(\zeta, \eta)\,[\cos\Theta - \cos\varphi].$$

Na podstawie powyższych rozważań daje się zauważyć, że odtwarzanie hologramu wiązką o froncie falowym identycznym z frontem wiązki odniesienia, przy rejestracji hologramu pozwala uzyskać nie zniekształcony obraz pozorny.

Przypadek wg wyrażenia (29) odpowiada następującemu opisowi matematycznemu obrazu pozornego przy $z = \dfrac{r_r r}{r_r + r}$

$$\dot{K}cf\left[\left(1+\frac{r}{r_r}\right)\zeta-\frac{r}{r_r}x_r-\frac{r}{r_r}x_a,\ \left(1+\frac{r}{r_r}\right)\eta-\frac{r}{r_r}y_r-\right.$$
$$\left.-\frac{r}{r_0}y_a\right][\cos\Theta-\cos\varphi]\cdot\exp ik\psi(\zeta, \eta, x_r, y_r, x_a, y_a). \tag{40}$$

Współczynniki fazowe wyrażone za pomocą eksponentu w przytoczonych rodzajach hologramów Fresnela nie odgrywają żadnej roli w przypadku fotografowania obrazów pozornych czy rzeczywistych, gdyż materiał światłoczuły rejestruje wyłącznie natężenie padającego nań światła. Deformacje obrazu pozornego wzdłuż osi z, spowodowane jego rekonstrukcją w odległości $z \neq -r$, dla ostatniego przypadku, może usunąć soczewka o ogniskowej r_r umieszczona bezpośrednio za hologramem

$$e^{-i\frac{k}{2r_r}(x^2+y^2)} \tag{41}$$

W niektórych wariantach pozorne obrazy rekonstruowane posiadają nie tylko różne współrzędne swoich środków, lecz także różne wymiary (skale) w porównaniu z tymi samymi parametrami obiektów holografowanych. Zmiany te zależą, jak wynika z przytoczonych zależności, od relacji między takimi parametrami, jak r, r_0, r_r. Odległości, w jakich od hologramu rekonstruują się obrazy pozorne, także nie są stałe, lecz zależą od charakteru wiązki odniesienia i wiązki rekonstruującej. Powoduje to zmiany skali obrazu wzdłuż osi z, co należy uwzględniać przy pomiarach hologrametrycznych. Ostatnią wadę można usunąć stosując korektory soczewkowe, umieszczane bezpośrednio za hologramem, posiadające w zależności od rodzaju hologramu Fresnela określone ogniskowe. Z praktycznego punktu widzenia najbardziej przydatnym w praktycznych zastosowaniach ze względu na dokładność rekonstrukcji obiektu i prostotę realizacji jest hologram Fresnela, rejestrowany z wykorzystaniem płaskiej wiązki odniesienia i powtarzającej ją wiązki rekonstruującej.

5. Hologramy Fraunhofera

Jeżeli wykonujemy hologramy obiektów położonych w odległości większej niż $2L^2/\lambda$ (L — największy wymiar obiektu) od płaszczyzny rejestracji, mamy do czynienia z dyfrakcją Fraunhofera na obiektach, a tak otrzymane hologramy nazywamy hologramami Fraunhofera. Wybór takiej odległości obiektu od płaszczyzny rejestracji podyktowany jest tym, że w płaszczyźnie rejestracji różnica faz fal dyfragowanych na obiekcie od dowolnych dwóch jego punktów nie powinna być większa od $\pi/8$.

Oznacza to, że w płaszczyźnie dyfrakcji Fraunhofera dyfragowane fale posiadają płaski front falowy. W tym przypadku promień w całce (9) przedstawia się następująco:

$$\varrho \approx r + \frac{x^2+y^2}{2r} - \frac{xx_0+yy_0}{r} \tag{42}$$

i całka przyjmuje postać

$$i(\lambda R)^{-1} \exp\left[ik\left(r+r_0+\frac{x^2+y^2}{2r}\right)\right]\int\int_{-\infty}^{\infty} f(x_0, y_0)\exp\left[-\frac{ik}{r}(xx_0+\right.$$

$$\left.+yy_0)\right](\cos\Theta-\cos\varphi)\,dx_0dy_0 \tag{43}$$

Pomijając dla przejrzystości wywodów czynniki stojące przed całką, dla płaskiej wiązki odniesienia, na hologramie zarejestrowane zostaną także trzy składowe, a mianowicie:

$$G(x, y) = \exp\left[-ik\frac{x_a}{r_0}x\right]\int\int_{-\infty}^{\infty} f(x_0, y_0)e^{-ik(xx_0+yy_0)}(\cos\Theta-\cos\varphi)dx_0dy_0 =$$

$$= b^*\cdot A = b^*\bar{F}\{f(x_0, y_0)[\cos\Theta-\cos\varphi]\}, \tag{44}$$

gdzie

A — transformacja Fouriera funkcji $f(x_0, y_0)$

i

$$N(x, y) = b^*A+bA^*+1+|A|^2 \tag{45}$$

W przypadku hologramów Fraunhofera otrzymanych z wykorzystaniem sferycznej wiązki odniesienia powyższe wyrażenie przepisze się następująco:

$$N(x, y) = B^*A+BA^*+1+|A|^2, \tag{46}$$

gdzie

$$A = \bar{F}\{f(x_0, y_0)[\cos\Theta-\cos\varphi]\},$$

$$B = \exp i\frac{k}{2r_0}[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2]$$

6. Hologramy Fouriera

Hologramy tego rodzaju można tworzyć stosując dwie metody rejestracji obiektów różniące się postaciami wiązek informacyjnych. Umieśćmy źródło sferycznej wiązki odniesienia w płaszczyźnie holografowanego obiektu ($r = r_0$). Wtedy zależność opisująca amplitudowo-fazowy rozkład fali świetlnej w płaszczyźnie rejestracji może być przedstawiona za pomocą wyrażenia:

$$\exp\left\{-ik\left[\frac{x_a^2+y_a^2}{2r}-\frac{xx_a+yy_a}{r}\right]\right\}\int_{-\infty}^{\infty}\int f(x_0,y_0)(\cos\Theta-$$

$$-\cos\varphi)\cdot\exp\left[i\frac{k}{2r}(x_0^2+y_0^2)\right]\cdot\exp\left[-i\frac{k}{r}(xx_0+yy_0)\right]dx_0dy_0 \qquad (47)$$

Przyjmując, że

$$\frac{kx_0^2}{2r}\leqslant\frac{\pi}{8};\quad \frac{ky_0^2}{2r}\leqslant\frac{\pi}{8} \qquad (48)$$

można pominąć czynnik eksponencjalny w ostatnim wyrażeniu podcałkowym, zawierający x_0^2 i y_0^2.

Wtedy całka przedstawia obraz Fouriera funkcji

$$f(x_0, y_0)(\cos\Theta-\cos\varphi),$$

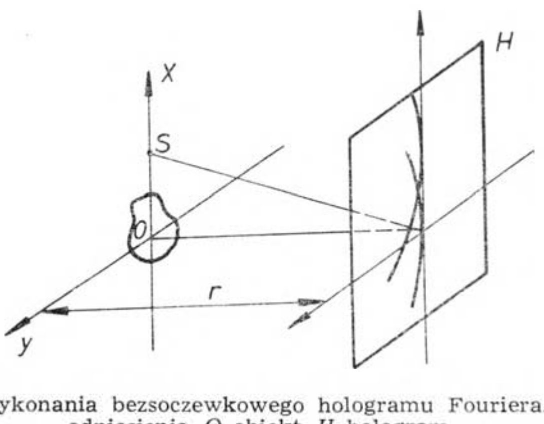
a równanie hologramu Fouriera w tym przypadku przyjmie postać

$$N(x, y) = B^*A+BA^*+1+|A|^2, \qquad (49)$$

gdzie

$$A = \overline{F}\{f(x_0, y_0)(\cos\Theta-\cos\varphi)\}.$$

Przedstawiony sposób rejestracji hologramu Fouriera nosi nazwę bezsoczewkowego, gdyż otrzymanie hologramu nie wymaga użycia soczewek. Sposób ten nie posiada szerokich praktycznych zastosowań ze względu na niewielkie wymiary (rzędu ułamków milimetra) obiektów holografowanych, co wynika z nierówności (48).



Rys. 4. Schemat wykonania bezsoczewkowego hologramu Fouriera. S-źródło wiązki odniesienia, O-obiekt, H-hologram

Różnica między hologramem Fraunhofera i Fouriera polega na tym, że na hologramie Fraunhofera zarejestrowane są płaskie fale informacyjne, podczas gdy w hologramach Fouriera rejestrowane sferyczne fronty fal rozproszonych na obiekcie, przetwarzane są sztucznie w fale płaskie, np. za pomocą soczewek.

7. Rekonstrukcja obrazów z hologramów Fraunhofera i Fouriera

Ponieważ hologramy Fouriera i Fraunhofera opisuje się jednakowymi zależnościami matematycznymi, to obrazy rekonstruowane z tych hologramów także będą opisywały się jednakowymi wyrażeniami. Przeprowadzona niżej analiza będzie dotyczyła własności obrazów pozornych odnoszących się do jednego z tych hologramów. Podobnie jak w przypadku hologramów Fresnela, hologramy rozpatrywanego typu mogą być rekonstruowane wiązkami z płaskimi i sferycznymi frontami falowymi. Dla wiązki rekonstruującej z płaskim frontem, wyrażenie (45, 46) może być przedstawione następująco:

$$(b^*A+bA^*)\, b_r \odot S_r \tag{50}$$

i

$$(B^*A+BA^*)\, b_r \odot S_r \tag{51}$$

a dla sferycznego frontu falowego wiązki odtwarzającej:

$$(b^*A+bA^*)\, B_r \odot S_r \tag{52}$$

i

$$(B^*A+BA^*)\, B_r \odot S_r \tag{53}$$

Rekonstruowany obraz pozorny dla wyrazenia (50) można przedstawić przy założeniu, że parametry wiązki odniesienia i rekonstruującej są identyczne (tzn. $b^*b = 1$) oraz $z = r$, w następującej postaci:

$$A \odot S_r = e^{\frac{ik}{2r}(\zeta^2+\eta^2)} \iint\limits_{-\infty}^{\infty} f(x_0, y_0)(\cos\Theta -$$

$$-\cos\varphi)\, e^{\frac{-ik}{r}\left[\left(x_0+\frac{r}{r_0}\zeta\right)x+\left(y_0+\frac{r}{r_0}\eta\right)y\right]} e^{\frac{ik}{2r_0}(x^2+y^2)}\, dx_0 dy_0 dx dy. \tag{54}$$

Umieszczając bezpośrednio za hologramem soczewkę skupiającą o ogniskowej r_0

$$\exp\left\{\frac{-ik}{2r_0}(x^2+y^2)\right\} \tag{55}$$

wyrażenie (54) przyjmie postać:

$$e^{\frac{ik}{2r}(\zeta^2+\eta^2)} \int\int_{-\infty}^{\infty} f(x_0, y_0)(\cos\Theta - \cos\varphi)\delta\left[\frac{k}{r}\left(x_0 + \frac{r}{r_0}\zeta\right), \frac{k}{r}\left(y_0 + \frac{r}{r_0}\eta\right)\right] dx_0 dy_0 =$$

$$= e^{\frac{ik}{2r}(\zeta^2+\eta^2)} f\left(\frac{-r}{r_0}\zeta, \frac{-r}{r_0}\eta\right)(\cos\Theta - \cos\varphi). \tag{56}$$

Dla obiektów o niewielkich wymiarach czynnik $\exp ik/2r\ (\zeta^2+\eta^2)$ w ostatnim wyrażeniu możemy zaniedbać. Obraz pozorny przedstawiony równaniem (56) można obserwować na ekranie matowym umieszczonym w odległości r lub fotografować w płaszczyźnie ustawienia ekranu.

Obraz rzeczywisty dla tego rodzaju hologramu przedstawia się równaniem

$$e^{\frac{ik}{2r}(\zeta^2+\eta^2)} f^*\left(\frac{r}{r_0}\zeta - 2\frac{x_a}{r}, \frac{r}{r_0}\eta\right)(\cos\Theta - \cos\varphi), \tag{57}$$

Równanie to otrzymano czyniąc założenia analogiczne, jak przy wyprowadzaniu równania obrazu pozornego ($z = r$) oraz użyto soczewki skupiającej o ogniskowej r przedstawionej zależnością (55).

Obraz rzeczywisty może być obserwowany i rejestrowany w jednej płaszczyźnie z obrazem pozornym, co różni hologramy Fouriera i Fraunhofera zarejestrowane i odtworzone za pomocą wiązek płaskich od hologramów Fresnela, w których obrazy, pozorny i rzeczywisty, rekonstruują się po obu stronach hologramu. Obraz rzeczywisty jak wynika z równania (57) jest obrazem pseudoskopowym i odwróconym o πrd w stosunku do obrazu pozornego. Z powyższych rozważań wynika, że proces rekonstrukcji obrazów z hologramów Fraunhofera i Fouriera odpowiada dokonaniu operacji przekształcenia Fouriera nad równaniami opisującymi te hologramy.

Rozpatrzymy rekonstrukcję obrazów z hologramów zarejestrowanych z użyciem sferycznej wiązki odniesienia, a odtworzonych wiązką płaską (51).

Dla obrazu pozornego otrzymuje się:

$$B^*Ab_r \odot S_r = \dot{K}e^{\frac{ik}{2r_0}(\zeta^2+\eta^2)} \int\int_{-\infty}^{\infty} f(x_0, y_0)(\cos\Theta - \cos\varphi)\delta\left[\frac{k}{r}\left(-\frac{r}{r_0}\zeta - \frac{r}{r_0}\eta + \right.\right.$$

$$\left.\left. + y_a\right)\right] = \dot{K}_p e^{\frac{ik}{2r_0}(\zeta^2+\eta^2)} \cdot f\left(-\frac{r}{r_0}\zeta, -\frac{r}{r_0}\eta + y_0\right)(\cos\Theta - \cos\varphi)$$

przy czym $b_r = \exp\left[-\frac{ik}{r_0}x_a x\right]$

Dla obrazu rzeczywistego otrzymuje się:

$$BA^*b_r \odot S_r = \dot{K}_r \exp \frac{-ik}{2r_0}(\zeta^2+\eta^2) f^*\left(\frac{r}{r_0}\zeta,\ \frac{r}{r_0}\eta+y_a\right)(\cos\Theta-\cos\varphi). \tag{58}$$

Charakterystyczną cechą rozpatrzonego typu hologramu jest to, że obraz pozorny (54) rekonstruuje się w odległości $z = r_0$ przed hologramem, natomiast obraz rzeczywisty (58) pojawia się za hologramem ($r = -r_0$), a więc odwrotnie niż to ma miejsce w hologramach np. Fresnela. Zależności (57, 58) otrzymano nie używając przy rekonstrukcji operatora soczewki kompensacyjnej, a więc rekonstrukcja z omawianych hologramów odbywa się bez użycia dodatkowych elementów optycznych. Rekonstruowane obrazy, tak rzeczywisty jak i pozorny, mają zmienioną skalę zależną od ilorazu r/r_0. Widać, że umieszczenie wiązki odniesienia w płaszczyźnie obiektu ($r = r_0$) pozwala rekonstruować obrazy o takich wymiarach, jakie posiadał obiekt przy rejestracji. Widać także, że obraz rzeczywisty jest obrazem pseudoskopowym, odwróconym o 180° w stosunku do obrazu pozornego.

Zależność (52) opisuje obraz rekonstruowany za pomocą wiązki sferycznej z hologramu zarejestrowanego z użyciem płaskiej wiązki odniesienia. Dla obrazu pozornego zależność (52) wyrazi się za pomocą:

$$b^*AB_r \odot S_r = \dot{K}_p e^{\frac{-ik}{2r_0}(\zeta^2+\eta^2)} \int\!\!\int_{-\infty}^{\infty} f(x_0, y_0)(\cos\Theta-\cos\varphi)\delta\left[\frac{k}{r}\left(x_0 - \frac{r}{r_0}\zeta+2\frac{r}{r_0}x_a\right),\ \frac{k}{r}\left(y_0-\frac{r}{r_0}\eta+\frac{r}{r_0}y_a\right)\right]dx_0dy_0 = \dot{K}e^{\frac{ik}{2r_0}(\zeta^2+\eta^2)} f\left(\frac{r}{r_0}\zeta - 2\frac{r}{r_0}x_a,\ \frac{r}{r_0}\eta-\frac{r}{r_0}y_a\right)(\cos\Theta-\cos\varphi)$$

Obraz pozorny w tym przypadku rekonstruuje się w odległości $z = -r_0$ za hologramem bez użycia dodatkowej soczewki. Dla obrazu rzeczywistego (51) otrzymuje się

$$bA^*B_r \odot S_r = \dot{K}_r e^{\frac{ik}{2r_0}(\zeta^2+\eta^2)} f^*\left(\frac{-r}{r_0}\zeta,\ \frac{-r}{r_0}\eta+\frac{r}{r_0}y_a\right)(\cos\Theta-\cos\varphi).$$

Obraz rzeczywisty także rekonstruuje się w odległości $z = -r_0$ za hologramem. Z powyższego wynika, że obrazy rzeczywisty i pozorny, rekonstruują się bez dodatkowej soczewki w jednej i tej samej płaszczyźnie przed hologramem ($z = -r_0$) i mają wymiary (względem obiektu rejestrowanego) zależne od stosunku $r : r_0$ odległości obiektu i źródła formującego wiązkę odniesienia. Rekonstrukcja obrazów z hologramów Fouriera i Fraunhofera, zarejestrowanych za pomocą sferycznej wiązki odniesienia i odtworzonych taką samą wiązką (53), spełniającą warunek $B^*B_r = 1$ dla obrazu pozornego, opisuje się analogicznie jak w przypadku zależności (50 i 54), tzn. (56).

Obraz pozorny w tym przypadku otrzymuje się (stosując soczewkę o ogniskowej r_0), podobnie jak i obraz rzeczywisty w jednej i tej samej płaszczyźnie przed hologramem. Obraz rzeczywisty charakteryzuje się wyrażeniem:

$$\dot{K}_r e^{\frac{ik}{2r_0}(\zeta^2+\eta^2)} f^*\left(\frac{r}{r_0}\zeta+2\frac{r}{r_0}x_a,\ \frac{r}{r_0}\eta+2\frac{r}{r_0}y_a\right)(\cos\Theta-\cos\varphi).$$

Widać, że tak skala, jak i współrzędne środków rekonstruowanych obrazów, zależą od parametrów wiązki odniesienia, takich jak r_0, x_a, y_a. Użycie dodatkowych soczewek kompensacyjnych, także o innych ogniskowych niż podane wyżej, w tym również soczewek ujemnych, może zasadniczo zmienić miejsca rekonstrukcji obrazów i ich powiększenia. Podsumowując powyższe podamy kilka właściwości hologramów, posiadających praktyczne znaczenie w działalności badawczej.

Zmiana położenia obrazu rekonstruowanego z hologramu, liniowo zależy od zmiany położenia obiektu w procesie jego rejestracji. Przemieszczenie obiektu o pewną wartość powoduje, że o taką samą wartość przemieszczają się obrazy pozorny i rzeczywisty rekonstruowane z hologramu.

Jeżeli w procesie rejestracji zmienimy współrzędne wiązki odniesienia przemieszczając ją z położenia wyjściowego, a hologram odtworzymy wiązką rekonstruującą posiadającą współrzędne wyjściowe wiązki odniesienia, rekonstruowane obrazy także ulegną przemieszczeniu proporcjonalnemu do zmian położenia wiązki odniesienia. Ostatnia właściwość odnosi się także do zmiany kąta padania wiązki rekonstruującej w stosunku do wiązki odniesienia.

Jeżeli hologram jest sumą hologramów utworzonych przez wiązki informacyjne pochodzące od różnych obiektów, to rekonstruowany obraz będzie także sumą zarejestrowanych obiektów.

Przemieszczenie hologramu w płaszczyźnie jego rejestracji wpływa na zmianę czynnika fazowego rekonstruującego się wraz z obrazem i nie wprowadza zmian współrzędnych środka obrazów rekonstruowanych.

Jeżeli hologram zostanie obrócony o 180° wokół pionowej osi x, rekonstruowany obraz jest wtedy zwierciadlanym odbiciem w stosunku do obrazu odtwarzanego z hologramu nie obróconego. Zmiana skali hologramu wpływa na odległość rekonstruowanych obrazów od powierzchni hologramów, jak również na ich rozmiary w porównaniu z rozmiarami obiektów wyjściowych.

8. Soczewkowy hologram Fouriera

Zanim zapiszemy równanie soczewkowego hologramu Fouriera zostanie wyjaśniony proces formowania się transformacji Fouriera w koherentnym układzie optycznym (KUO) złożonym z jednej soczewki.

Optyczny analizator Fouriera odgrywa w większości układów przetwarzania informacji optycznej podstawową rolę. Charakterystyki widmowe sygnałów otrzymywane w takim analizatorze znacznie ułatwiają tworzenie bardziej skomplikowanych, wieloczłonowych układów optycznych. Możliwość otrzymania transformacji Fouriera w KUO pozwala, na drodze umieszczenia w płaszczyźnie widmowej tego układu różnego rodzaju filtrów z określonymi charakterystykami amplitudowymi, fazowymi i amplitudowo-fazowymi, wpływać na charakter otrzymanych widm, to znaczy dokonywać filtracji sygnałów optycznych. Realizacja przekształcenia Fouriera dla obiektów (obrazów) dwuwymiarowych za pomocą innych metod (np. elektrycznych) jest kłopotliwa ze względu na konieczność stosowania rozbudowanej i skomplikowanej aparatury elektronicznej, podczas gdy w przypadku KUO operację tę można wykonać za pomocą nieskomplikowanego układu optycznego, a mianowicie pojedynczej soczewki.

Jeżeli na soczewkę będzie padała wiązka światła laserowego, to zostanie ono skupione w „punkcik" w pewnej płaszczyźnie zwanej płaszczyzną widmową. Jeżeli na drodze światła lasera znajduje się wyłącznie soczewka o określonej aparaturze, to wspomniany „punkcik" w płaszczyźnie widmowej odpowiada transformacji Fouriera dokonanej za pomocą soczewki na jej aperturze (źrenicy) kołowej. „Punkcik" natomiast przy bliższym się przyjrzeniu (powiększenie) ma nie punktową strukturę a bardziej skomplikowaną, złożoną z szeregu koncentrycznych pierścieni, w środku których znajduje się tzw. rząd zerowy, charakteryzujący się znacznie większą koncentracją energii świetlnej niż otaczające go pierścienie. Otrzymana w ten sposób transformacja Fouriera apertury kołowej (w przypadku jednowymiarowym funkcji, prostokątnej) może być opisana zależnością

$$\frac{\sin x}{x}$$

Zasadnicza informacja o „kształcie" obrazu (w tym przypadku apertury) zawarta jest w tych elementach obrazu Fouriera, które położone są wokół rzędu zerowego. Sam rząd zerowy charakteryzuje stałą składową sygnału optycznego podanego na wejście i w przypadku rozpatrywanej apertury wartość rzędu zerowego jednoznacznie odnosi się do natężenia światła padającego na soczewkę. Jeżeli za lub przed soczewką zostanie umieszczone zdjęcie, to w płaszczyźnie (wyjściowej) widmowej uzyskuje się transformację Fouriera funkcji opisującej to zdjęcie. W ogólnym przypadku transformacja Fouriera jest funkcją zespoloną, to znaczy ma określony rozkład amplitudy i fazy. Znane analizatory Fouriera na bazie KUO, w których sygnał (modulator) zadany w postaci pozytywu lub negatywu zdjęcia umieszczony jest przed soczewką i oświetlony płaską wiązką światła monochromatycznego, różnią się między sobą tym, że w zależności od miejsca położenia płaszczyzny sygnału, w płaszczyznach widmowych wraz z widmem Fouriera może występować dodatkowy czynnik fazowy lub nie występować. Jeżeli płaszczyzna sygnału oddalona jest od soczewki o wielkość równą jej ogniskowej wspomniany dodatkowy czynnik fazowy nie występuje. W innych położeniach płaszczyzny przedmiotowej czynnik taki występuje i zakłóca transformację Fouriera.

W zadaniach związanych z rozpoznawaniem obrazów ważnym elementem jest zapewnienie przez KUO możliwości zmiany skali obiektu, a tym samym skali jego widma. Realizacja zmiany skali (przy $\lambda = \mathrm{const}$) w przypadku opisanym wyżej jest praktycznie niemożliwa. Jeżeli jednak modulator umieszczony zostanie w zbieżnej wiązce za soczewką oświetlaną falą płaską, to zmiana skali widma jest możliwa na drodze przemieszczeń obiektu wzdłuż osi optycznej układu choć pozostaje konieczność stosowania dodatkowego układu wytwarzającego falę płaską. Problem zmiany skali widma (transformacji) Fouriera funkcji zdjęcia występuje zwłaszcza w zagadnieniach rozpoznawania obrazów, gdzie pamięć układu w postaci widm Fouriera nie może ulegać zmianom czasowym (przeskalowaniu) z powodu właściwości dostępnych materiałów światłoczułych. Z uwagi na wskazane wyżej ujemne cechy przedstawionych analizatorów zaproponowany zostanie optyczny analizator Fouriera, który pozbawiony jest tych cech, a równocześnie umożliwia ciągłą zmianę skali rozpoznawanego obrazu. W rozpatrywanym analizatorze modulator (zdjęcie) umieszcza się za soczewką oświetloną źródłem światła w postaci dystrybucji δ — Diraca. Wiązka świetlna pokonuje odległość między soczewką i płaszczyzną przedmiotową, ulegając dyfrakcji Fresnela. W płaszczyźnie widmowej wiązka ta może być opisana całką

$$\Lambda(x_3, y_3, d_3) \iint\limits_{P_1} \iint\limits_{P_2} s(x, y)\, f(x_2, y_2)\, \Lambda\left(x, y, d_1 - \frac{d_1^2}{d_1 + d_2 - f}\right) \Lambda(x_2, y_2, d_2 + \\ + d_3 - \frac{d_2^2}{d_1 + d_2 - f} \exp\left[-ik \frac{d_1 d_2}{d_1 + d_2 - f} (x x_2 + y y_2)\right] \exp[-ik d_3 (x_2 x_3 + \\ + y_2 y_3)\, dx\, dy\, dx_2\, dy_2 .$$

Równanie powyższe przytaczamy bez wyprowadzania z uwagi na dość złożony charakter tego procesu, można je jednak znaleźć w jednej z opublikowanych prac [2]. Wyjaśnimy poszczególne elementy powyższej całki.

x, y — współrzędne płaszczyzny źródła światła,

x_2, y_2 — współrzędne płaszczyzny przedmiotowej (zdjęcia),

x_3, y_3 — współrzędne płaszczyzny widmowej,

$s(x, y)$ — funkcja opisująca źródło światła w płaszczyźnie P_1 o współrzędnych x, y,

$f(x_2, y_2)$ — funkcja zdjęcia umieszczonego w płaszczyźnie przedmiotowej P_3,

$\Lambda(x_3, y_3, d_3)$ — czynnik fazowy występujący w niektórych typach KUO wraz z widmem Fouriera.

Elementy:

$$\Lambda\left(x, y, d_1 - \frac{d_1^2}{d_1+d_2-f}\right) \quad \text{oraz} \quad \Lambda\left(x_2, y_2, d_2+d_3-\frac{d_2}{d_1+d_2-f}\right),$$

podobnie jak i eksponenty charakteryzują oddziaływanie przestrzeni między płaszczyzną źródła światła i soczewką, samej soczewki, przestrzeni między soczewką a płaszczyzną przedmiotową oraz płaszczyzną przedmiotową a płaszczyzną widmową. Jeżeli ogólnie scharakteryzowane źródło światła $s(x, y)$ zastąpimy dystrybucją Diraca, tzn.

$$s(x, y) = \delta(x, y),$$

to podaną uprzednio całkę, uwzględniając że

$$\iint s(x, y)\, \delta(\zeta - x, \eta - y)\, dx dy = s(\zeta, \eta),$$

będziemy mogli zastąpić mniej skomplikowanym wyrażeniem, a mianowicie:

$$\Lambda(x_3, y_3, d_3) \iint f(x_2, y_2)\, \Lambda\left(x_2, y_2, d_2 + d_3 - \frac{d_2^2}{d_1+d_2-f}\right) \cdot \exp[-kd_3(x_2x_3 + y_2y_3)]\, dx_2 dy_2$$

gdzie

$d_1 = D_1^{-1}$; D_1 — odległość płaszczyzny źródła światła od płaszczyzny soczewki,

$d_2 = D_2^{-1}$; D_2 — odległość płaszczyzny soczewki od płaszczyzny przedmiotowej,

$a_3 - D_1^{-1}$; D_3 — odległość płaszczyzny przedmiotowej od płaszczyzny widmowej KUO,

$f = F^{-1}$; F — ogniskowa soczewki.

Z ostatniej całki wynika, że przez odpowiedni dobór parametrów KUO, takich jak odległości między poszczególnymi płaszczyznami, można uzyskać w płaszczyźnie widmowej transformację Fouriera funkcji $f(x_2, y_2)$. Warunkiem, przy którym to zachodzi, jest spełnienie równania

$$d_2+d_3-\frac{d_2^2}{d_1+d_2-f}=0.$$

Wtedy ostatnia całka przyjmie postać

$$\Lambda(x_3, y_3, d_3)\iint f(x_2, y_2)\exp\left[-ikd_3(x_2x_3+y_2y_3)\right]dx_2dy_2,$$

a więc całki Fouriera z jądrem w postaci eksponentu. Posługując się symbolem operatora Fouriera powyższe można zapisać również w innych postaciach

$$\Lambda(x_3, y_3, d_3)\,\bar{F}[f(x_2, y_2)] = \Lambda(x_3, y_3, d_3)\,F[kd_3x_3, kd_3y_3] =$$
$$= \Lambda(x_3, y_3, d_3)\,F\left[\frac{k}{D_3}x_3, \frac{k}{D_3}y_3\right],$$

gdzie

k — liczba falowa; i $k=\frac{2\pi}{\lambda}$ — długość fali świetlnej.

Analizując wyrażenie

$$F=\left(\frac{k}{D_3}x_3, \frac{k}{D_3}y_3\right)$$

widzimy, że skalę otrzymanego widma Fouriera można zmieniać dwojako, przez zmianę długości fali światła w procesie transformacji lub (co jest najczęściej stosowane) przez zmianę odległości D_3, a więc przez przemieszczanie obiektu wzdłuż osi optycznej układu między płaszczyzną soczewki a płaszczyzną widmową.

Natomiast z analizy warunku

$$d_2+d_3-\frac{d_2^2}{d_1+d_2-f}=0,$$

który można przedstawić również w postaci

$$\frac{1}{d_2}+\frac{1}{d_3}=\frac{1}{f-d_1}.$$

wynika, że umieszczenie płaszczyzny źródła światła w odległości mniejszej od ogniskowej soczewki, to znaczy

$$0<D_1<F$$

powoduje, że widmo Fouriera tworzy się w miejscu opisanym nierównością

$$-\infty < D_2 + D_3 < 0.$$

Mamy tu do czynienia z tzw. widmem urojonym, którego praktycznie nie wykorzystuje się w procesach rozpoznawania. Jeżeli $D_1 = F$, widmo Fouriera uzyskuje się w nieskończoności. Interesującym z punktu widzenia wykorzystania praktycznego jest przypadek trzeci, kiedy płaszczyzna źródła (punktowego) światła umieszczona jest w odległości większej od ogniskowej soczewki tzn.

$$F < D_1 < \infty$$

W tym przypadku widmo Fouriera tworzy się w płaszczyźnie oddalonej od soczewki o wartość wynikającą z nierówności:

$$F < D_2 + D_3 < \infty$$

Z powyższej analizy wynika, że układ optyczny (np. soczewka lub układ soczewek) realizuje operację transformacji Fouriera dla przypadku kiedy źródło światła w postaci dystrybucji δ — Diraca umieszczone jest w odległości większej od ogniskowej soczewki. Poddanie tego widma interferencji z wiązką odniesienia, z kolejną rejestracją tak otrzymanej struktury interferencyjnej na materiale światłoczułym, pozwala na otrzymanie soczewkowego hologramu Fouriera.

LITERATURA

[1] *Kowalski H. Z., Dubik A.*: Kierunki zastosowań optyki światła spójnego i holografii w geodezji i kartografii. Prace IGiK, t. XXII, zeszyt nr 1/50, Warszawa 1975.

[2] *Dubik A.*: O operatorowej metodzie analizy koherentnych układów optycznych. Biuletyn WAT 9(241), Warszawa 1972.

Recenzował: doc. dr hab. Jerzy Rogowski

Rękopis złożono w Redakcji w maju 1975 r.

АДАМ ДУБИК
ХЕНРЫК З. КОВАЛЬСКИ

ВЛИЯНИЕ СПОСОБА РЕГИСТРАЦИИ И РЕКОНСТРУКЦИИ ОБЪЕКТА НА НЕКОТОРЫЕ ПАРАМЕТРЫ ИЗОБРАЖЕНИЯ ВОСПРОИЗВОДИМОГО ИЗ ГОЛОГРАММЫ

Резюме

В представленной статье на основе соотношения Кирхофф-Френель произведен теоретический анализ получения разного типа голограмм из группы, так называемых „тонких".

Изложено черты характеризующие основные голограммы, а именно: голограммы Френеля, Фраунхофера и Фурьера в версии линзовой и безлинзовой. Кроме того дана методика их записи с иллюстрацией этих рассуждений рядом идейных схем. Определено влияние условий регистрации и реконструкции голограмм на такие параметры воспроизводимых изображений, как изменение масштаба по отношению к трем прямоугольным координатам, а также положения изображения по отношению к плоскости голограммы. Описаны также способы компенсации деформаций возникших в результате фазовых разниц пучка отношения при регистрации и пучка воспроизведения при реконструкции. Целью авторов было облегчить Читателю усвоение основных принципов в голографии, а также дало возможность предпринятия теоретических и исследовательских работ в области использования этой новой техники для проблем геодезии и картографии.

ADAM DUBIK
HENRYK Z. KOWALSKI

INFLUENCE OF THE METHOD OF RECORDING AND RECONSTRUCTION OF PROJECTS ON SOME PARAMETERS OF THE PROJECT REPRODUCED FROM A HOLOGRAM

S u m m a r y

Theoretical analyses for the production of different types of holograms in the group of so called „thin" holograms, on the basis of Kirhoff-Fresnel dependence, is discussed in this paper. There are mentioned some characteristics of the following basic holograms: Fresnel's holograms, Fraunhofer's and Fourier's holograms both with and without lens systems. There is also introduced the method of their recording illustrated with a set of diagrams.

The influence of the conditions of recording and reconstruction of holograms on such parameters of reproduced images as scale variations with reference to three Cartesian coordinates and on orientation of an image with reference to the plane of hologram is described here. There are also discussed the ways of compensation of distortion resulting from fase differences of the reference beam and reconstruction beam.

The authors of this work wish to make it easer for the readers to understand the principal formulas of holography and to enable them to develop theoretical and experimental work concerning the application of this new technique for the solution of geodetic and cartographical problems.