PRACE INSTYTUTU GEODEZJI I KARTOGRAFII

*Tom XXI, Zeszyt 1 (48), 1974*

*JERZY GAŻDZICKI*

528.113:528.3

# O błędach średnich współrzędnych w sieciach niezależnych

## 1. Wstęp

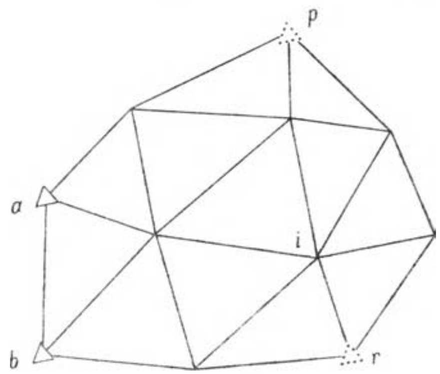
W niezależnych sieciach geodezyjnych błędy średnie współrzędnych zależą od:

— konstrukcji sieci,

— dokładności pomiarów,

— wyboru parametrów stałości, którymi mogą być np. współrzędne punktów założonych jako stałe.

Liczbę i rodzaj parametrów stałości przyjmuje się tak, aby sieć była wyznaczalna, zważając jednocześnie na to, aby nie powstały dodatkowe warunki między wielkościami obserwowanymi. W typowych sieciach kątowych, wyrównywanych na płaszczyźnie, w których wielkościami mierzonymi są wyłącznie kąty lub kierunki, jako elementy stałe, przyjmowane są zazwyczaj współrzędne $x$, $y$ dwóch punktów. Na rysunku 1 pokazano szkic przykładowej sieci, na którym oznaczono punkty stałe $a$ i $b$.




Rys. 1

W wyniku wyrównania tej sieci przy założeniu stałości punktów $a$, $b$ uzyskuje się jednokolumnowy krakowian współrzędnych wyznaczanych w sieci:

$$\mathbf{x}\,(a, b)\,, \tag{1}$$

krakowian współczynników wagowych

$$\mathbf{Q}\,(a, b) \tag{2}$$

oraz błąd jednostkowy $m_0$.

Przy wprowadzonych oznaczeniach błędy średnie współrzędnych punktu $i$ można wyrazić wzorami:

$$\begin{aligned} m_{xi}\,(a, b) &= m_0\sqrt{Q_{xi,xi}}\,; \quad i \neq a \\ m_{yi}\,(a, b) &= m_0\sqrt{Q_{yi,yi}}\,, \quad i \neq b \end{aligned} \tag{3}$$

gdzie $Q_{xi,xi}$, $Q_{yi,yi}$ są odpowiednimi elementami przekątnej krakowianu $\mathbf{Q}\,(a, b)$.

## 2. Błędy średnie współrzędnych jako funkcje parametrów stałości

W niektórych zagadnieniach geodezji inżynierskiej dotyczących badania odkształceń wykonuje się analizę przesunięć punktów sieci, przy czym zachodzi potrzeba obliczania błędów średnich współrzędnych przy różnych, dowolnie wybieranych parach punktów stałych. Błędy średnie współrzędnych punktu $i$ odpowiadające założeniu stałości punktów $p$, $r$

$$\begin{aligned} &m_{xi}(p, r)\,, \\ &m_{yi}(p, r)\,, \end{aligned} \tag{4}$$

mogą być, oczywiście, uzyskane przez powtórne wyrównanie sieci i obliczenie krakowianu

$$\mathbf{Q}\,(p, r) \tag{5}$$

Jest to jednak droga bardzo pracochłonna. Przedstawione poniżej wzory pozwalają na obliczenie błędów średnich (4) w sposób znacznie łatwiejszy, wykorzystując jedynie znajomość elementów krakowianu $\mathbf{Q}\,(a, b)$.

Dla obliczenia błędów średnich $m_{xi}(p, r)$, $m_{yi}(p, r)$ wykonuje się kolejno:

1) obliczenie przyrostów współrzędnych

$$\begin{aligned} \Delta x_{rp} &= x_p - x_r, \quad & \Delta x_{pi} &= x_i - x_p, \\ \Delta y_{rp} &= y_p - y_r, \quad & \Delta y_{pi} &= y_i - y_p. \end{aligned} \tag{6}$$

2) obliczenie współczynników

$$A_{rp} = \frac{\Delta x_{rp}}{\Delta x^2_{rp} + \Delta y^2_{rp}}, \qquad B_{rp} = \frac{\Delta y_{rp}}{\Delta x^2_{rp} + \Delta y^2_{rp}} \tag{7}$$

$$a_i = \begin{vmatrix} \Delta x_{pi} & \Delta y_{pi} \\ B_{rp} & -A_{rp} \end{vmatrix}; \qquad b_i = \begin{vmatrix} \Delta x_{pi} & \Delta y_{pi} \\ A_{rp} & B_{rp} \end{vmatrix}; \tag{8}$$

3) zestawienie jednokolumnowych krakowianów współczynników

$$\mathbf{f}_{xi}(p, r) = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ a_i - 1 \\ -b_i \\ -a_i \\ b_i \end{Bmatrix}, \qquad \mathbf{f}_{yi}(p, r) = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ b_i \\ a_i - 1 \\ -b_i \\ -a_i \end{Bmatrix}, \tag{9}$$

4) wyszukanie elementów krakowianu $\mathbf{Q}$ $(a, b)$ odpowiadających współrzędnym $x_i$, $y_i$, $x_p$, $y_p$, $x_r$, $y_r$ oraz utworzenie z tych elementów symetrycznego krakowianu $\mathbf{q}$ $(i, p, r)$:

$$\mathbf{q}\,(i, p, r) = \begin{Bmatrix} Q_{xi,xi} & Q_{yi,xi} & Q_{xp,xi} & Q_{yp,xi} & Q_{xr,xi} & Q_{yr,xi} \\ Q_{xi,yi} & Q_{yi,yi} & Q_{xp,yi} & Q_{yp,yi} & Q_{xr,yi} & Q_{yr,yi} \\ Q_{xi,xp} & Q_{yi,xp} & Q_{xp,xp} & Q_{yp,xp} & Q_{xr,xp} & Q_{yr,xp} \\ Q_{xi,yp} & Q_{yi,yp} & Q_{xp,yp} & Q_{yp,yp} & Q_{xr,yp} & Q_{yr,yp} \\ Q_{xi,xr} & Q_{yi,xr} & Q_{xp,xr} & Q_{yp,xr} & Q_{xr,xr} & Q_{yr,xr} \\ Q_{xi,yr} & Q_{yi,yr} & Q_{xp,yr} & Q_{yp,yr} & Q_{xr,yr} & Q_{yr,yr} \end{Bmatrix}. \tag{10}$$

Poszukiwane błędy średnie otrzymuje się na podstawie wzorów

$$\begin{aligned} m_{xi}(p, r) &= m_0 \sqrt{\mathbf{f}_{xi}(p, r) \cdot \mathbf{q}\,(i, p, r) \cdot \mathbf{f}_{xi}(p, r)}\,; \\ m_{yi}(p, r) &= m_0 \sqrt{\mathbf{f}_{yi}(p, r) \cdot \mathbf{q}\,(i, p, r) \cdot \mathbf{f}_{yi}(p, r)}\,. \end{aligned} \tag{11}$$

Jeśli któryś z punktów $i$, $p$, $r$ jest jednym z dawnych punktów stałych $a$, $b$, wówczas przyjmuje się, że elementy odpowiadające temu punktowi w krakowianie $\mathbf{q}$ $(i, p, r)$ są równe zero. W szczególnym przypadku dwa spośród punktów $i$, $p$, $r$ mogą być dawnymi punktami stałymi.

## 3. Przykład

Jako prosty przykład ilustrujący przedstawiony problem obliczeniowy weźmy pod uwagę sieć uwidocznioną na rysunku 2.

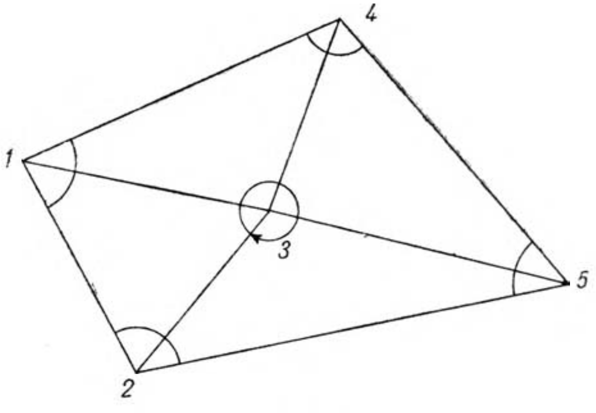
Współrzędne przybliżone punktów sieci wynoszą:

| $i$ | $x_i$ | $y_i$ |
|---|---|---|
| 1 | 1800,00 | 1000,00 |
| 2 | 1000,00 | 1100,00 |
| 3 | 1500,00 | 2300,00 |
| 4 | 2600,00 | 2700,00 |
| 5 | 800,00 | 3400,00 |

Sieć tę wyrównano uwzględniając 12 pomierzonych kątów oraz przyjmując, że punkty 1, 2 są stałe. W wyniku uzyskano:

a) krakowian **Q** (1, 2) dla współrzędnych uporządkowanych w kolejności $x_3, y_3, x_4, y_4, x_5, y_5$

$$\mathbf{Q}(1,2) = \left\{ \begin{array}{rrrrrr} 2,367 & 0,396 & 3,164 & -1,463 & 3,914 & 1,949 \\ 0,396 & 5,681 & 4,923 & 6,873 & -3,046 & 9,832 \\ 3,164 & 4,923 & 14,156 & 5,285 & -0,146 & 14,669 \\ -1,463 & 6,873 & 5,285 & 11,983 & -8,663 & 11,889 \\ 3,914 & -3,046 & -0,146 & -8,663 & 14,127 & -8,318 \\ 1,949 & 9,832 & 14,669 & 11,889 & -8,318 & 27,879 \end{array} \right\}$$




Rys. 2

b) błąd jednostkowy $m_0 = 2,456^{cc}$,

c) błędy średnie współrzędnych

| $i$ | $m_{xi}(1, 2)$ | $m_{yi}(1, 2)$ |
|---|---|---|
| 3 | 0,038 | 0,059 |
| 4 | 0,092 | 0,085 |
| 5 | 0,092 | 0,130 |

oraz nie wykazywane tutaj współrzędne wyrównane.

Stosując wzory (6)—(11) przy założeniu stałości punktów 4, 5 otrzymuje się następujące wartości błędów średnich współrzędnych:

| $i$ | $m_{xi}(4, 5)$ | $m_{yi}(4, 5)$ |
|---|---|---|
| 1 | 0,080 | 0,080 |
| 2 | 0,094 | 0,075 |
| 3 | 0,046 | 0,024 |

Analogicznie można obliczyć błędy średnie przy założeniu stałości innych punktów, np. punktów 2, 5:

| $i$ | $m_{xi}(2, 5)$ | $m_{yi}(2, 5)$ |
|---|---|---|
| 1 | 0,048 | 0,029 |
| 3 | 0,020 | 0,051 |
| 4 | 0,059 | 0,081 |

Jako współrzędne punktów przy nowych parametrach stałości mogą być przyjmowane współrzędne tych punktów uzyskane z początkowego wyrównania lub też jakiekolwiek inne współrzędne powstałe z wyrównanych przez dokonanie czteroparametrowej transformacji o różniczkowych zmianach współczynnika skali oraz kąta skrętu.

## 4. Uzasadnienie wzorów

Niezależna sieć kątowa zawiera punkty $a, b, c \dots p, r \dots t$. Sieć tę wyrównano przy założeniu stałości współrzędnych punktów $a$, $b$

$$x_a,\ y_a,\ x_b,\ y_b,$$

uzyskując współrzędne

$$x_i,\ y_i, \quad i = c \dots p, r \dots t. \tag{12}$$

Należy obliczyć błędy średnie współrzędnych punktu $i$ w tej sieci przy założeniu, że punktami stałymi są punkty $p, r$, zaś punkty $a, b$ należą do grupy punktów wyznaczanych.

Wyrównując rozpatrywaną sieć na podstawie ustalonych współrzędnych punktów $p$, $r$

$$X_p,\ Y_p,\ X_r,\ Y_r \tag{13}$$

otrzymuje się nowe wartości współrzędnych pozostałych punktów

$$X_i,\ Y_i, \quad \begin{array}{l} i = a, b, c \dots, t, \\ i \neq p,\ i \neq r. \end{array} \tag{14}$$

Współrzędne $X_i$, $Y_i$ można w danym przypadku obliczyć również na drodze transformacji:

$$\begin{aligned} X_i &= X_p - u\,(y_i - y_p) + w\,(x_i - x_p), \\ Y_i &= Y_p + u\,(x_i - x_p) + w\,(y_i - y_p), \end{aligned} \tag{15}$$

gdzie współczynniki $u$, $w$ wyrażają się wzorami:

$$u = \frac{(x_p - x_r)(Y_p - Y_r) - (y_p - y_r)(X_p - X_r)}{(x_p - x_r)^2 + (y_p - y_r)^2}, \tag{16}$$

$$w = \frac{(x_p - x_r)(X_p - X_r) + (y_p - y_r)(Y_p - Y_r)}{(x_p - x_r)^2 + (y_p - y_r)^2}.$$

Jak widać, współrzędne $X_i$, $Y_i$ są funkcjami nieliniowymi 6 zmiennych

$$x_i,\ y_i,\ x_p,\ y_p,\ x_r,\ y_r \tag{17}$$

wyrównania dokonanego przy założeniu stałości punktów $a$, $b$.

Utożsamiając błędy średnie tych funkcji z błędami średnimi różniczek zupełnych:

$$\begin{aligned} dX_i &= \frac{\partial X_i}{\partial x_i}dx_i + \frac{\partial X_i}{\partial y_i}dy_i + \frac{\partial X_i}{\partial x_p}dx_p + \frac{\partial X_i}{\partial y_p}dy_p + \frac{\partial X_i}{\partial x_r}dx_r + \frac{\partial X_i}{\partial y_r}dy_r;\\ dY_i &= \frac{\partial Y_i}{\partial x_i}dx_i + \frac{\partial Y_i}{\partial y_i}dy_i + \frac{\partial Y_i}{\partial x_p}dx_p + \frac{\partial Y_i}{\partial y_p}dy_p + \frac{\partial Y_i}{\partial x_r}dx_r + \frac{\partial Y_i}{\partial y_r}dy_r; \end{aligned} \tag{18}$$

oraz stosując oznaczenia podane w rozdziale 2, otrzymuje się bezpośrednio wzory postaci (11):

$$\begin{aligned} m_{xi}(p, r) &= m_0\sqrt{\mathbf{f}_{xi}(p, r)\cdot\mathbf{q}\,(i, p, r)\cdot\mathbf{f}_{xi}(p, r)};\\ m_{yi}(p, r) &= m_0\sqrt{\mathbf{f}_{yi}(p, r)\cdot\mathbf{q}\,(i, p, r)\cdot\mathbf{f}_{yi}(p, r)}. \end{aligned}$$

We wzorach tych $\mathbf{f}_{xi}$, $\mathbf{f}_{yi}$ są krakowianami pochodnych cząstkowych

$$\mathbf{f}_{xi}(p, r) = \begin{vmatrix} \frac{\partial X_i}{\partial x_i}\\ \frac{\partial X_i}{\partial y_i}\\ \frac{\partial X_i}{\partial x_p}\\ \frac{\partial X_i}{\partial y_p}\\ \frac{\partial X_i}{\partial x_r}\\ \frac{\partial X_i}{\partial y_r} \end{vmatrix}; \qquad \mathbf{f}_{yi}(p, r) = \begin{vmatrix} \frac{\partial Y_i}{\partial x_i}\\ \frac{\partial Y_i}{\partial y_i}\\ \frac{\partial Y_i}{\partial x_p}\\ \frac{\partial Y_i}{\partial y_p}\\ \frac{\partial Y_i}{\partial x_r}\\ \frac{\partial Y_i}{\partial y_r} \end{vmatrix}. \tag{19}$$

Pochodne te, uzyskane na drodze żmudnego i mało interesującego różniczkowania przy założeniach upraszczających

$$\begin{aligned} x_p - x_r &\simeq X_p - X_r,\\ y_p - y_r &\simeq Y_p - Y_r, \end{aligned} \tag{20}$$

podano wzorami (6)—(9).

Warto zaznaczyć, że krakowian współczynników wagowych odpowiadający założeniu stałości punktów $p$, $r$ można obliczyć z wzoru

$$\mathbf{Q}\,(p, r) = \mathbf{f}\,(p, r)\,\mathbf{Q}\,(a, b)\,\mathbf{f}\,(p, r), \tag{21}$$

gdzie $\mathbf{f}(p, r)$ jest krakowianem kwadratowym, którego kolumny utworzone są z elementów kolumn

$$\mathbf{f}_{xi}(p, r), \quad \mathbf{f}_{yi}(p, r) \qquad \begin{array}{l} i = a, b, c \ldots, t \\ i \neq p, \; i \neq r \end{array} \tag{22}$$

odpowiednio uporządkowanych w wierszach, zgodnie z kolejnością punktów przyjętych w wyrównaniu uwzględniającym stałość punktów $a, b, c \ldots$ $\ldots p, r \ldots, t$.

## 5. Zakończenie

Przedstawiony w niniejszej pracy algorytm obliczania błędów średnich współrzędnych jako funkcji parametrów stałości został zaprogramowany w języku ALGOL 1204 dla celów analizy przemieszczeń poziomych na obszarze Śląska.

Podane wzory odnoszą się do niezależnych sieci kątowych. W analogiczny sposób mogą być wyprowadzone wzory dotyczące innych rodzajów niezależnych sieci geodezyjnych.

### LITERATURA

[1] *Alberda J. E.*: Planning and Optimisation of Networks: Some General Considerations. Symposium on Computational Methods in Geometric Geodesy. Oxford, 1973.

[2] *Baarda W.*: S-transformations and Criterion Matrices. Publications on Geodesy, New Series, Vol. 5, No 1, 1973, Netherland Geodetic Commision.

[3] *Lazzarini T.*: Geodezyjne pomiary odkształceń i ich zastosowanie w budownictwie. PPWK. Warszawa, 1961.

*Rękopis złożono w Redakcji w październiku 1973 r.*

ЕЖИ ГАЗЬДЗИЦКИ

## ОБ ОШИБКАХ СРЕДНИХ КООРДИНАТ В НЕЗАВИСИМЫХ СЕТЯХ

Резюме

При измерениях перемещении и деформации строений при помощи геодезических метод появляется необходимость вычисления ошибок средних координат пунктов триангуляционной сети при различных, поочередно выбираемых, парах постоянных пунктов.

В статье приводятся простые формулы для вычисления ошибок средних координат $x_i$, $y_i$ пункта $i$ в сети, как функции координат $x_p$, $y_p$, $x_r$, $y_r$, двух пунктов $p$, $r$, был здан краковян весовых коэффициентов, вычисленный один раз при произвольно расположенной паре постоянных пунктов.

Применение этих формул значительно проще, чем независимое вычисление ошибок средних координат для каждой из выбранных пар постоянных пунктов.

*JERZY GAŽDZICKI*

## VARIANCES OF POINT COORDINATES IN INDEPENDENT NETS

Summary

In geodetic measurements of terrain movements and structures deformations arises the need of computing the variances of point coordinates in triangulation net with the different succesively chosen pairs of fixed points.

In the paper the author gives simple formulae for calculation of variances of net point coordinates $x_i$, $y_i$ as a function of coordinates $x_p$, $y_p$, $x_r$, $y_r$ of the two points $p$, $r$ taken as the fixed points. The variance-covariance matrix for the two optionally chosen fixed points $a$, $b$ is assumed to be known.

Application of these formulae is much simpler than computing the variances for every pair of fixed points separately.