

Parę uwag o wzorach wyznacznikowych do obliczania kwadratu objętości czworościanu, przy znanych długościach jego krawędzi

1.

Przyrodnicy opowiadają niekiedy o zabawnym nieporozumieniu, sprowadzającym się do tego, że autor pewnej poczytnej książki przyrodoznawczej podał w niej rysunek, który błędnie przedstawiał gniazdo lęgowe budowane przez kreta, liczni zaś autorzy prac późniejszych, opierając się na autorytecie autora wspomnianej książki, rysunek ten w dobrej wierze powtarzali. Ponieważ jednak rozkopanie gniazda kreta nie jest czynnością trudną, po pewnym czasie nastąpiła „weryfikacja”, wykazująca fantastyczność owego popularnego rysunku.

Pozornie wydaje się, że tego rodzaju nieporozumienia w dziedzinie matematyki, nazywanej tak chętnie „królową nauk”, są raczej wykluczone. A jednak...

2.

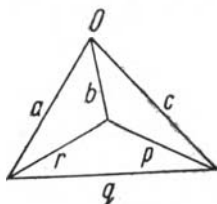
W fotogrametrii, przy rozwiązywaniu przestrzennego wcięcia wstecz zachodzi często potrzeba obliczenia kwadratu objętości czworościanu. Odpowiednie wzory, wyrażające tę wielkość w różny sposób, można znaleźć w wielu dziełach matematycznych.

W książce „Sprawocznik po matematyce” I. N. Bronsztejna i K. A. Siemiendajewa, nota bene — w książce bardzo wartościowej, jak również w adaptacjach polskich tej książki — „Poradnik encyklopedyczny matematyka”, PWN 1959 oraz „Matematyka — Poradnik encyklopedyczny”, PWN 1968, znajduje się również taki wzór na kwadrat objętości czworościanu wyrażony przez kwadraty jego krawędzi, lecz wszędzie podany jest z błędem. Ma on tam mianowicie postać następującą

$$V^2 = \frac{1}{288} \begin{vmatrix} 0 & r^2 & q^2 & a^2 & 1 \\ r^2 & 0 & p^2 & b^2 & 1 \\ q^2 & p^2 & 0 & c^2 & 1 \\ a^2 & b^2 & c^2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \quad (\text{wzór błędny}) \quad (1)$$

gdzie a, b, c jest trójką długości krawędzi czworościanu, zbiegających się we wspólnym wierzchołku O , zaś p, q, r — odpowiadającą im trójką długości kolejnych krawędzi nie sąsiadujących z poprzednimi (to znaczy, że krawędź a nie styka się z krawędzią p , krawędź b nie styka się z krawędzią q , zaś krawędź c nie styka się z krawędzią r). V jest objętością czworościanu (rys. 1).

Łatwo jednak zauważyć, że wzór taki słuszny być nie może. Rozwijając bowiem napisany wyznacznik według elementów ostatniej kolumny, otrzy-



Rys. 1

mamy pięć podwyznaczników $D_{51}, D_{52}, D_{53}, D_{54}$ i D_{55} , z których cztery pierwsze będą wyrażeniami 6 stopnia względem długości krawędzi, zaś ostatni, tj. podwyznacznik D_{55} będzie wyrażeniem stopnia 8 względem długości krawędzi. Ponieważ zaś kwadrat objętości powinien być wyrażeniem 6 stopnia względem długości krawędzi, wzór mógłby być ewentualnie słuszny tylko wtedy, gdyby podwyznacznik D_{55} był tożsamościowo zerem, co tu jednak nie zachodzi.

Błąd we wzorze (1) polega na tym, że jako ostatni element głównej przekątnej tabeli wyznacznikowej podano w tym wzorze jedność zamiast zera. Poprawna postać wzoru jest następująca:

$$V^2 = \frac{1}{288} \begin{vmatrix} 0 & r^2 & q^2 & a^2 & 1 \\ r^2 & 0 & p^2 & b^2 & 1 \\ q^2 & p^2 & 0 & c^2 & 1 \\ a^2 & b^2 & c^2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \quad (\text{wzór poprawny}) \quad (2)$$

Podwyznacznik D_{55} będzie tu nadal wyrażeniem 8 stopnia względem długości krawędzi, jednak w wyniku rozwinięcia tabeli wyznacznika według ostatniej kolumny podwyznacznik ten zostanie pomnożony przez zero, wskutek czego wszystkie składniki rozwinięcia będą już, jak być powinno, wyrażeniami 6 stopnia względem długości krawędzi. Takie „sprawdzenie wymiarów” nie stanowi oczywiście dowodu słuszności wzoru (2), mówimy jednak o nim wyłącznie w tym celu, aby zwrócić uwagę czytelnika na to, że błąd we wzorze (1) pojawił się prawdopodobnie przez omyłkę zecera, od razu w pierwszym wydaniu, lecz mógł być łatwo zauważony przez matematyka, korygującego tekst, od jednego rzutu oka na postać tabeli

wyznaczył. Oczywiście „rozkopanie kretowiska” dałoby się tu przeprowadzić na bardziej prymitywnej drodze przez obliczenie wg wzoru (1) kwadratu objętości jakiegokolwiek prostego czworościanu, którego objętość łatwo jednocześnie wyznaczyć bezpośrednio. Nie wszyscy jednak matematycy lubią „parać się liczbami” i przeprowadzać liczbową weryfikację słuszności wzorów. Wydaje się jednak dziwne, że pozwalając się tak łatwo skonstatować w omówiony sposób błędność wzoru (1) nie została zauważona w wielu kolejnych wydaniach.

3.

Związek między kwadratem objętości czworościanu i kwadratami jego krawędzi można uważać w naszej literaturze matematycznej za związek specjalnie „pechowy”. Oto bowiem w książce — również bardzo wartościowej — M. Starka „Geometria analityczna” (Warszawa 1951) na str. 47 znajdujemy następujący wzór:

$$V^2 = \frac{1}{288} \begin{vmatrix} 2l_1^2 & m_3^2 - l_1^2 - l_2^2 & m_2^2 - l_1^2 - l_3^2 \\ m_3^2 - l_1^2 - l_2^2 & 2l_2^2 & m_1^2 - l_2^2 - l_3^2 \\ m_2^2 - l_1^2 - l_3^2 & m_1^2 - l_2^2 - l_3^2 & 2l_3^2 \end{vmatrix} \quad (\text{wzór błędny}) \quad (3)$$

gdzie przez l_1, l_2, l_3 oznaczono trójkę długości krawędzi zbiegających się we wspólnym wierzchołku O , zaś przez m_1, m_2, m_3 — odpowiadającą im trójkę krawędzi nie sąsiadujących, to znaczy że krawędź l_1 nie sąsiaduje z krawędzią m_1 . Oznaczenie przyjęte u Starka jest więc przejrzystsze od oznaczenia przyjętego u Semendiajewa, ale wzór (3), jest również błędny, choć błąd nie daje się tak bezpośrednio zauważyć, jak we wzorze (1).

Błędność wzoru (3) polega mianowicie na tym, że w tabeli wyznacznika wszystkie elementy położone poza przekątną główną podane są z przeciwnym znakiem. Poprawna postać wzoru jest więc następująca:

$$V^2 = \frac{1}{288} \begin{vmatrix} 2l_1^2 & l_1^2 + l_2^2 - m_3^2 & l_1^2 + l_3^2 - m_2^2 \\ l_1^2 + l_2^2 - m_3^2 & 2l_2^2 & l_2^2 + l_3^2 - m_1^2 \\ l_1^2 + l_3^2 - m_2^2 & l_2^2 + l_3^2 - m_1^2 & 2l_3^2 \end{vmatrix} \quad (\text{wzór poprawny}) \quad (4)$$

Aby stwierdzić błędność wzoru (3), wystarczyło np. zauważyć, że z wzoru tego wynika jawnie niesłuszny wniosek, mówiący iż objętość każdego czworościanu, którego wszystkie krawędzie są sobie równe, jest zerem. Jeżeli bowiem dla przypadku równości wszystkich krawędzi, czyli dla przypadku:

$$l_i = m_i = k \quad (i = 1, 2, 3)$$

zastosujemy wzór (3), otrzymamy:

$$V^2 = \frac{1}{288} \begin{vmatrix} 2k^2 & -k^2 & -k^2 \\ -k^2 & 2k^2 & -k^2 \\ -k^2 & -k^2 & 2k^2 \end{vmatrix}$$

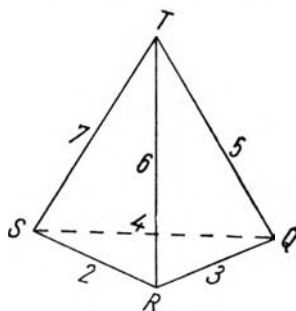
Tabela wyznacznika ma tu jednak kolumny liniowo zależne (każda z nich jest sumą kolumn pozostałych pomnożoną przez -1), z czego wynika zerowość samego wyznacznika, prowadząca do jawnie niesłusznego związku $V = 0$.

Takie stwierdzenie błędności wzoru (3) przez skonstatowanie jego niesłuszności dla czworościanów foremnych nie stanowi oczywiście dowodu słuszności wzoru (4). Mówimy o tym — analogicznie jak poprzednio — wyłącznie w tym celu, aby zwrócić uwagę czytelnika na to, że błędność wzoru mogła być tu zauważona przez matematyka korygującego tekst po przeprowadzeniu krótkiego i prostego rozumowania matematycznego, a więc bez potrzeby „parania się liczbami”.

Na usprawiedliwienie autorów, przeprowadzających korektę swego dzieła, warto przypomnieć, że nie zawsze proces wydawniczy przebiega rytmicznie. Zdarza się to często pod koniec roku, kiedy ze względu na brak czasu korekta musi być wykonana i przez autora, i przez wydawnictwo ze zbytnim pośpiechem, ze szkodą dla wartości dzieła.

4.

Z kolei należałoby podać dowody słuszności wzorów poprawnych (2) i (4), mających zastąpić wzory błędne (1) i (3). Dowody te można przepro-



Rys. 2

wadzić, opierając się np. na ogólnie znanym w geometrii analitycznej wzorze na objętość czworościanu wyrażoną przez współrzędne prostokątne jego wierzchołków. Zrobimy to na końcu artykułu w punkcie 5. Tu proponujemy natomiast jeszcze nieco inny, bardziej przejrzysty, zapis wzorów

poprawnych (2, 4), ułatwiający ich opanowanie pamięciowe i pozwalający lepiej zauważyć istotne cechy związków.

Kwadrat objętości czworościanu wyrażony przez wyznacznik 5 stopnia

Oznaczmy przez 1, 2, 3, 4 wierzchołki czworościanu (porządek numeracji dowolny), a przez d_{ik} długość krawędzi między wierzchołkiem i -tym i k -tym. Z oznaczeń tych wynika:

$$d_{ik} = d_{ki} \quad \text{oraz} \quad d_{ii} = 0, \quad (5)$$

a więc wzór (2) może być napisany pod następującą postacią, łatwą do zapamiętania i nie wymagającą wyjaśnienia rysunkowego:

$$288 V^2 = \begin{vmatrix} d_{11}^2 & d_{12}^2 & d_{13}^2 & d_{14}^2 & 1 \\ d_{21}^2 & d_{22}^2 & d_{23}^2 & d_{24}^2 & 1 \\ d_{31}^2 & d_{32}^2 & d_{33}^2 & d_{34}^2 & 1 \\ d_{41}^2 & d_{42}^2 & d_{43}^2 & d_{44}^2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \quad (6)$$

Wszystkie elementy przekątnej głównej tabeli wyznacznikowej są tu równe zeru. Można by więc postawić zarzut, że przy obranym sposobie zapisu (d_{ii}^2 na przekątnej) niepotrzebnie wzór skomplikowano. Analogiczne uwagi można by wypowiedzieć odnośnie elementów pozaprzekątnych (d_{ij}^2 i d_{ji}^2). Jednak właśnie taki zapis uwidacznia zupełną równorzędność wszystkich krawędzi, co z zapisu (4) widoczne nie było. Poniżej podajemy przykład liczbowy, przeprowadzając rachunek dla czworościanu przedstawionego na rysunku 2, gdzie punkty wierzchołkowe Q, R, S, T przyjęto kolejno za punkty 1, 2, 3, 4. Po przeprowadzeniu szczegółowego rachunku eliminacyjnego otrzymamy wynik:

$$288 V^2 = \begin{vmatrix} 0 & 9 & 16 & 25 & 1 \\ 9 & 0 & 4 & 36 & 1 \\ 16 & 4 & 0 & 49 & 1 \\ 25 & 36 & 49 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 9 & 16 & 25 & 51 \\ 1 & 9 & 0 & 4 & 36 & 50 \\ 1 & 16 & 4 & 0 & 49 & 70 \\ 1 & 25 & 36 & 49 & 0 & 111 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ \hline & 9 & -9 & -12 & 11 & -1 \\ & 16 & -5 & -16 & 24 & 19 \\ & 25 & 27 & 33 & -25 & 60 \\ & 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ \hline & 99 & 48 & 40 & & 187 \\ & 468 & 597 & -500 & & 565 \\ & 18 & 21 & -2 & & 37 \\ \hline & 4071 & -7580 & & & -3509 \\ & 135 & -102 & & & 33 \\ \hline \det = & & 6142 & & & 6142 \end{vmatrix}$$

$$V^2 = \frac{6142}{288} = \frac{3071}{144}$$

Kwadrat objętości czworościanu wyrażony przez wyznacznik 3 stopnia.
Oznaczmy przez 1, 2, 3 trzy krawędzie czworościanu zbiegające się w jednym wierzchołku (porządek numeracji dowolny), przez C_{ij} zaś carnotian kąta zawartego między i -tą i j -tą krawędzią, czyli sumę kwadratów długości tych krawędzi pomniejszoną o kwadrat długości krawędzi zamykającej trójkąt wyznaczony przez krawędzie i -tą i j -tą. Niech l_i , l_j i l_{ij} będą odpowiednio długościami krawędzi i -tej, j -tej oraz zamykającej trójkąt wyznaczony przez krawędzie i -tą i j -tą. Przy tych oznaczeniach wspomniany carnotian będzie miał postać

$$C_{ij} = l_i^2 + l_j^2 - l_{ij}^2. \quad (7)$$

Z powyższych oznaczeń wynika w szczególności

$$C_{ij} = C_{ji} \quad \text{oraz} \quad C_{ii} = l_i^2 + l_i^2 - 0 = 2l_i^2,$$

a wzór (4) może być wówczas napisany pod postacią następującą:

$$288 V^2 = \begin{vmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{vmatrix} \quad (8)$$

Nowa postać wzoru charakteryzuje się większą jednolitością oznaczeń niż wzór (4). Poniżej podajemy przykład liczbowy, przeprowadzając rachunek dla czworościanu przedstawionego na rysunku 2, gdzie odcinki TQ , TR , TS przyjęto za krawędzie 1, 2, 3.

Podstawiając wartości liczbowe, otrzymamy:

$$C_{11} = 5^2 + 5^2 - 0 = 50,$$

$$C_{12} = 5^2 + 6^2 - 3^2 = 52, \quad C_{22} = 6^2 + 6^2 - 0 = 72,$$

$$C_{13} = 5^2 + 7^2 - 4^2 = 58, \quad C_{23} = 6^2 + 7^2 - 2^2 = 81, \quad C_{33} = 7^2 + 7^2 - 0 = 98,$$

skąd

$$288 V^2 = \begin{vmatrix} 50 & 52 & 58 \\ 52 & 72 & 81 \\ 58 & 81 & 98 \end{vmatrix} = \frac{\begin{vmatrix} 896 & 36 \\ 36 & 495 \end{vmatrix}}{72} = 6142, \quad V^2 = \frac{6142}{288} = \frac{3071}{144}$$

U w a g i. Wzór (8) jest oczywiście wygodniejszy w rachunku liczbowym od wzoru (6). Warto tu zauważyć, że dla wzoru (8) można napisać zupełnie analogiczny wzór na kwadrat poczwórnego pola trójkąta.

Oznaczając mianowicie przez 1, 2 dwa boki trójkąta (porządek numeracji dowolny), przez C_{ij} zaś carnotian kąta zawartego między bokiem i -tym i j -tym, otrzymamy:

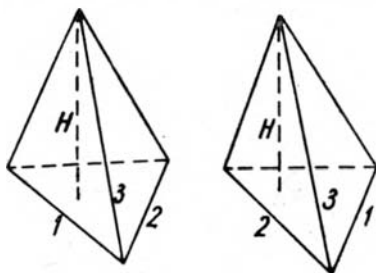
$$(4P)^2 = 16P^2 = \begin{vmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{vmatrix} \quad (9)$$

gdzie P jest polem trójkąta, a wielkości C_{11} i C_{22} — jak to wynika z określenia carnotianu — będą podwojonymi kwadratami długości boków obranych za bok pierwszy i za bok drugi.

Jak wynika z wzorów (8) i (9) można też napisać następujący przejrzysty wzór na podwojony kwadrat wysokości czworościanu, opuszczonej na jego podstawę wyznaczoną przez krawędzie przyjęte za bok pierwszy i bok drugi trójkąta podstawowego (por. rys. 3)

$$2H^2 = \frac{\begin{vmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{vmatrix}} \quad (10)$$

Pojęcie carnotianu jest także wygodne przy rozwiązywaniu trójkąta o znanych bokach. Cotangens kąta w trójkącie jest bowiem równy jego carnotianowi podzielonemu przez poczwórne pole trójkąta.



Rys. 3

Oznaczając przez A, B, C kąty trójkąta, a przez P jego pole, można to napisać pod postacią następującą:

$$\operatorname{ctg} A = \frac{\operatorname{car} A}{4P}; \quad \operatorname{ctg} B = \frac{\operatorname{car} B}{4P}; \quad \operatorname{ctg} C = \frac{\operatorname{car} C}{4P}. \quad (11)$$

Posługując się wzorem (11), unikamy tzw. wzorów połówkowych niewygodnych w rachunku bezpośrednim. Do obliczenia poczwórnego pola trójkąta można posłużyć się bądź wzorem (9), bądź też jednym z wzorów poniższych:

$$(4P)^2 = a^2 \operatorname{car} A + b^2 \operatorname{car} B + c^2 \operatorname{car} C; \quad (12)$$

$$(4P)^2 = \operatorname{car} A \operatorname{car} B + \operatorname{car} A \operatorname{car} C + \operatorname{car} B \operatorname{car} C. \quad (13)$$

Przyjęliśmy tu oznaczenia klasyczne, tzn. kąty A, B, C są położone odpowiednio naprzeciw boków a, b, c . Będzie więc wówczas np.:

$$\operatorname{car} A = b^2 + c^2 - a^2 \text{ itd.}$$

Jest też oczywiście, co wynika z twierdzenia Carnota i określenia carnotianu:

$$\cos A = \frac{\operatorname{car} A}{2bc}; \quad \cos B = \frac{\operatorname{car} B}{2ac}; \quad \cos C = \frac{\operatorname{car} C}{2ab}. \quad (14)$$

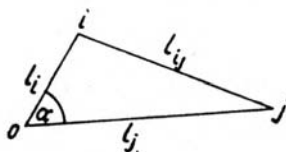
5.

Uzasadnienie wzorów. Przy uzasadnianiu wzorów (2) i (4) będziemy nadal posługiwali się pojęciem carnotianu kąta w trójkącie (por. wzór 7). Na rysunku 4 oznaczono przez O wspólny początek odcinków l_i i l_j , przez i oraz j — końce tych odcinków.

Przyrosty współrzędnych prostokątnych wzdłuż odcinków l_i , l_j i l_{ij} , czyli rzuty odcinków Oi , Oj oraz ij na osie układu współrzędnych, będziemy oznaczali odpowiednio przez:

$$\Delta x_i, \Delta y_i, \Delta z_i; \quad \Delta x_j, \Delta y_j, \Delta z_j; \quad \Delta x_{ij}, \Delta y_{ij}, \Delta z_{ij}.$$

Łatwo wykazać, że zachodzi tu następujący związek: *carnotian kąta równy jest podwójnemu iloczynowi kolumny przyrostów współrzędnych prostokątnych wzdłuż jednego ramienia kąta przez kolumnę odpowiadających przyrostów wzdłuż drugiego ramienia kąta, przy czym przez iloczyn*



Rys. 4

kolumny przez kolumnę rozumiemy sumę iloczynów elementów obu kolumn odpowiadających sobie położeniem.

Istotnie, rzuty odcinków Oi , Oj , ij , na osie układu spełniać muszą związki:

$$\Delta x_{ij} = \Delta x_j - \Delta x_i; \quad \Delta y_{ij} = \Delta y_j - \Delta y_i; \quad \Delta z_{ij} = \Delta z_j - \Delta z_i.$$

Podnosząc te związki do kwadratu otrzymujemy kolejno:

$$\begin{aligned} \Delta x_{ij}^2 &= \Delta x_j^2 + \Delta x_i^2 - 2\Delta x_j\Delta x_i; \\ \Delta y_{ij}^2 &= \Delta y_j^2 + \Delta y_i^2 - 2\Delta y_j\Delta y_i; \\ \Delta z_{ij}^2 &= \Delta z_j^2 + \Delta z_i^2 - 2\Delta z_j\Delta z_i. \end{aligned} \tag{15}$$

Podsumowanie równań (15), przy uwzględnieniu, że suma kwadratów przyrostów współrzędnych prostokątnych wzdłuż odcinka równa jest kwadratowi długości tego odcinka, daje od razu

$$l_{ij}^2 = l_j^2 + l_i^2 - 2(\Delta x_i\Delta x_j + \Delta y_i\Delta y_j + \Delta z_i\Delta z_j). \tag{16}$$

Jeżeli, zgodnie z umową, sumę kwadratów boków wyznaczających kąt, pomniejszoną o kwadrat boku przeciwległego nazwiemy carnotianem kąta

i oznaczmy przez α lub C_{ij} , to równanie (16) można napisać pod postacią:

$$\text{car } \alpha = C_{ij} = 2 \begin{vmatrix} \Delta x_i \\ \Delta y_i \\ \Delta z_i \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \Delta x_j \\ \Delta y_j \\ \Delta z_j \end{vmatrix}, \text{ gdzie } \begin{vmatrix} \Delta x_i \\ \Delta y_i \\ \Delta z_i \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \Delta x_j \\ \Delta y_j \\ \Delta z_j \end{vmatrix} = \Delta x_i \Delta x_j + \Delta y_i \Delta y_j + \Delta z_i \Delta z_j \quad (17)$$

Ostatni związek można oczywiście też napisać pod następującą wygodniejszą niekiedy postacią:

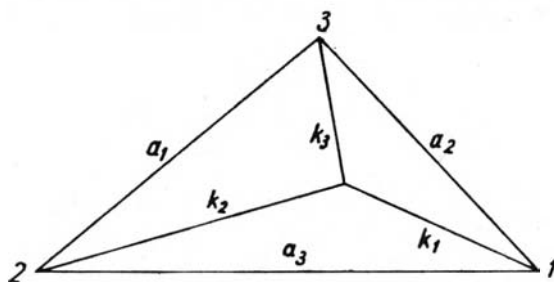
$$\begin{vmatrix} \Delta x_i \\ \Delta y_i \\ \Delta z_i \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \Delta x_j \\ \Delta y_j \\ \Delta z_j \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \text{car } \alpha. \quad (18)$$

co można wysłowić w sposób następujący: *Iloczyn kolumny przyrostów współrzędnych prostokątnych wzdłuż jednego z ramion kąta przez kolumnę odpowiadających przyrostów wzdłuż drugiego ramienia kąta równy jest połowie carotianu tego kąta.*

Weźmy teraz znany z geometrii analitycznej wzór na objętość czworoszczanu, wyrażoną przez współrzędne prostokątne jego wierzchołków:

$$6V = \begin{vmatrix} x_0 & y_0 & z_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} \quad (19)$$

Wzajemną orientację punktów wyjaśnia rysunek 5, na którym oznaczyliśmy przez k_1, k_2, k_3 długości odcinków 1, 2, 3, wychodzących ze wspólnego wierzchołka O i kończących się na punktach 1, 2, 3, oraz przez a_1, a_2, a_3 — boki trójkąta podstawy, położone naprzeciwko punktów 1, 2, 3.



Rys. 5

Odejmując pierwszy wiersz tabeli wyznacznika (19) od wierszy pozostałych i rozwijając wyznacznik według ostatniej kolumny tabeli, otrzymamy następujący związek:

$$6V = - \begin{vmatrix} \Delta x_1 & \Delta y_1 & \Delta z_1 \\ \Delta x_2 & \Delta y_2 & \Delta z_2 \\ \Delta x_3 & \Delta y_3 & \Delta z_3 \end{vmatrix} \quad (20)$$

We wzorze powyższym zastosowano używane już uprzednio skrócone oznaczenia przyrostów współrzędnych prostokątnych $\Delta x_u, \Delta y_u, \Delta z_u$ wzdłuż u -tego odcinka ($u = 1, 2, 3$), na przykład $x_1 - x_0 = \Delta x_1$ itd.

Znak wielkości V obliczonej z wzoru (19) lub (20) będzie dodatni lub ujemny, zależnie od przyjęcia takiej czy innej umowy, dotyczącej uporządkowania numeracji punktów w trójkącie przyjętym jako podstawa czworościanu (przy określonym obiorze osi).

Jeżeli natomiast przejdziemy do wzoru na kwadrat wielkości V , umowy dotyczące uporządkowania numeracji staną się zbyteczne. Możemy więc — nie stawiając już żadnych ograniczeń dotyczących uporządkowania numeracji punktów w trójkącie podstawowym czworościanu — napisać:

$$36 V^2 = \begin{vmatrix} \Delta x_1 & \Delta y_1 & \Delta z_1 \\ \Delta x_2 & \Delta y_2 & \Delta z_2 \\ \Delta x_3 & \Delta y_3 & \Delta z_3 \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} \Delta x_1 & \Delta x_2 & \Delta x_3 \\ \Delta y_1 & \Delta y_2 & \Delta y_3 \\ \Delta z_1 & \Delta z_2 & \Delta z_3 \end{vmatrix}^2 \quad (21)$$

gdzie poddaliśmy tabelę wyznacznika transformacji, aby przyrosty współrzędnych $\Delta x_u, \Delta y_u, \Delta z_u$, ($u = 1, 2, 3$), znalazły się w tych samych kolumnach. Ponieważ w myśl twierdzenia Cauchy-Bineta o mnożeniu wyznaczników, tabela kwadratu wyznacznika będzie zawierała w u -tej kolumnie elementy równe iloczynom u -tej kolumny tabeli wyznacznika podnoszonego do kwadratu przez kolejne kolumny tej tabeli, w myśl zaś uzasadnionego już związku (18) iloczyn kolumny przyrostów wzdłuż jednego ramienia kąta przez kolumnę przyrostów wzdłuż drugiego ramienia kąta zastąpić możemy przez połowę carnotianu odnośnego kąta, przeto wzór (21) można napisać pod postacią:

$$36 V^2 = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} C_{11} & \frac{1}{2} C_{12} & \frac{1}{2} C_{13} \\ \frac{1}{2} C_{21} & \frac{1}{2} C_{22} & \frac{1}{2} C_{23} \\ \frac{1}{2} C_{31} & \frac{1}{2} C_{32} & \frac{1}{2} C_{33} \end{vmatrix}. \quad (22)$$

Po pomnożeniu obustronnym przez $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$, otrzymamy:

$$288 V^2 = \begin{vmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{vmatrix} \quad (23)$$

czyli związek (8), w którym każdy element tabeli wyznacznika występuje jako carnotian. Stosując oznaczenia przyjęte w książce M. Starka, gdzie podano wzór (3), a więc oznaczając przez l_1, l_2, l_3 trójkę krawędzi zbiegających się we wspólnym wierzchołku O a przez m_1, m_2, m_3 — odpowia-

dającą trójkę krawędzi nie sąsiadujących, będziemy otrzymywać odpowiednio:

$$C_{11} = l_1^2 + l_1^2 - O = 2l_1^2;$$

$$C_{12} = l_1^2 + l_2^2 - m_3^2 \text{ itd.};$$

co wykazuje słuszność wzoru (4), a nie wzoru (3), w którym, jak widać, elementy pozaprzekątne podane są z przeciwnym znakiem.

Przejdźmy obecnie do uzasadnienia wzoru (6) wyrażającego kwadrat objętości czworościanu pod postacią wyznacznika 5 stopnia.

Jeżeli przyjąć oznaczenia podane na rysunku 5, a więc oznaczyć przez k_1, k_2, k_3 krawędzie czworościanu wychodzące ze wspólnego wierzchołka O oraz przez a_1, a_2, a_3 odpowiadające „krawędzie nie sąsiadujące”, to wzór (23), po przyjęciu krawędzi k_1, k_2, k_3 za pierwszą, drugą i trzecią, przybierze postać następującą:

$$288 V^2 = \begin{vmatrix} 2k_1^2 & k_1^2 + k_2^2 - a_3^2 & k_1^2 + k_3^2 - a_2^2 \\ k_1^2 + k_2^2 - a_3^2 & 2k_2^2 & k_2^2 + k_3^2 - a_1^2 \\ k_1^2 + k_3^2 - a_2^2 & k_2^2 + k_3^2 - a_1^2 & 2k_3^2 \end{vmatrix} \quad (24)$$

Poddamy tabelę wyznacznikową dwukrotnemu obrzeżeniu nie zmieniającemu wartości wyznacznika. Najpierw dopiszemy czwartą kolumnę zawierającą k_1^2, k_2^2, k_3^2 i jedność oraz czwarty wiersz zawierający trzy zera i jedność, a następnie piątą kolumnę zawierającą cztery zera i jedność oraz piąty wiersz zawierający k_1^2, k_2^2, k_3^2 , zero i jedność. Równanie (24) przybierze wówczas postać:

$$288 V^2 = \begin{vmatrix} 2k_1^2 & k_1^2 + k_2^2 - a_3^2 & k_1^2 + k_3^2 - a_2^2 & k_1^2 & 0 \\ k_1^2 + k_2^2 - a_3^2 & 2k_2^2 & k_2^2 + k_3^2 - a_1^2 & k_2^2 & 0 \\ k_1^2 + k_3^2 - a_2^2 & k_2^2 + k_3^2 - a_1^2 & 2k_3^2 & k_3^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ k_1^2 & k_2^2 & k_3^2 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad (25)$$

Wykonajmy z kolei dwa następujące przekształcenia tabeli wyznacznika (25), nie zmieniające wartości wyznacznika, a mające na celu usunięcie elementów k_u^2 z lewego górnego naroża tabeli:

1. Odejmiemy czwartą kolumnę tabeli (25) od kolumn pierwszej, drugiej i trzeciej, co spowoduje, że na miejscach pierwszych trzech zer wiersza czwartego ukażą się minus jedności, w pierwszych zaś trzech kolumnach elementy pierwszego wiersza zmaleją o k_1^2 , elementy drugiego wiersza zmaleją o k_2^2 , a elementy trzeciego wiersza zmaleją o k_3^2 .

2. Odejmiemy piąty wiersz tabeli od wierszy pierwszego, drugiego i trzeciego, co spowoduje, że na miejscach pierwszych trzech zer kolumny piątej ukażą się minus jedności, w pierwszych zaś trzech wierszach ele-

menty pierwszej kolumny zmaleją o k_1^2 , elementy drugiej kolumny zmaleją o k_2^2 , a elementy trzeciej kolumny zmaleją o k_3^2 . W wyniku opisanego przekształcenia równanie (25) przybierze postać następującą:

$$288 V^2 = \begin{vmatrix} 0 & -a_3^2 & -a_2^2 & k_1^2 & -1 \\ -a_3^2 & 0 & -a_1^2 & k_2^2 & -1 \\ -a_2^2 & -a_1^2 & 0 & k_3^2 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ k_1^2 & k_2^2 & k_3^2 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad (26)$$

Aby uporządkować ten wzór przestawimy wiersz czwarty na miejsce piątego i odwrotnie, aby zaś znak wyznacznika zmianie nie uległ, pomnożymy przez minus jedność elementy czwartego (w nowym uporządkowaniu) wiersza. Będzie wówczas:

$$288 V^2 = \begin{vmatrix} 0 & -a_3^2 & -a_2^2 & k_1^2 & -1 \\ -a_3^2 & 0 & -a_1^2 & k_2^2 & -1 \\ -a_2^2 & -a_1^2 & 0 & k_3^2 & -1 \\ -k_1^2 & -k_2^2 & -k_3^2 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \quad (27)$$

Po pomnożeniu następnie przez minus jedność pierwszej, drugiej, trzeciej i piątej kolumny, co nie zmieni wartości wyznacznika, a da wzór o elementach dodatnich, otrzymamy:

$$288 V^2 = \begin{vmatrix} 0 & a_3^2 & a_2^2 & k_1^2 & 1 \\ a_3^2 & 0 & a_1^2 & k_2^2 & 1 \\ a_2^2 & a_1^2 & 0 & k_3^2 & 1 \\ k_1^2 & k_2^2 & k_3^2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \quad (28)$$

Ponieważ zero może być uważane za kwadrat odległości równej zero, więc od razu widzimy (porównaj wzór 28 z rysunkiem 5, na którym punkt oznaczony literą O będzie punktem czwartym), że kwadrat objętości czworościanu, pomnożony przez liczbę 288, jest równy wyznacznikowi piątego stopnia, którego tabela w j -tym rzędzie dla $j = 1, 2, 3, 4$ zawiera kwadraty odległości kolejnych wierzchołków od wierzchołka j -tego oraz jedność, a w ostatnim wierszu i ostatniej kolumnie — zero. Pozwala to, przy oznaczeniu przez d_{ik} długości krawędzi między wierzchołkiem i -tym i k -tym, napisać wzór (28) pod postacią (6), która wydaje się najprostsza.

Jeżeli na rysunku 1, podanym w książce, w której przytoczono wzór (1), przyjmiemy odpowiednio:

punkt zbiegu krawędzi a, r, q za punkt 1,

punkt zbiegu krawędzi b, p, r za punkt 2,

punkt zbiegu krawędzi c, p, q za punkt 3,

punkt zbiegu krawędzi a, b, c za punkt 4,

to wówczas

$$\begin{aligned} d_{12} = d_{21} = r, & & d_{13} = d_{31} = q, & & d_{14} = d_{41} = a, \\ d_{23} = d_{32} = p, & & d_{24} = d_{42} = b, & & \\ & & d_{34} = d_{43} = c. & & \end{aligned}$$

Podstawiając te wartości do wzoru (28) przy uwzględnieniu $d_{ii} = 0$, otrzymamy:

$$V^2 = \frac{1}{288} \begin{vmatrix} 0 & r^2 & q^2 & a^2 & 1 \\ r^2 & 0 & p^2 & b^2 & 1 \\ q^2 & p^2 & 0 & c^2 & 1 \\ a^2 & b^2 & c^2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \quad (29)$$

a więc wzór (2), a nie (1). Błądność wzoru (1) polegała więc istotnie jedynie na umieszczeniu jedynki jako ostatniego elementu głównej przekątnej w tabeli wyznacznikowej zamiast zera.

W przeprowadzonych tu dowodach nie posługiwaliśmy się rachunkiem wektorowym, uważając, że wprowadzanie pojęć wektorowych do rozwiązania zadania wyznaczenia objętości czworościanu z długości jego krawędzi byłoby tak samo sztuczne, jak np. wprowadzanie tych pojęć do rozwiązania zadania wyznaczenia pola trójkąta z długości jego boków. Łatwo zauważyć, że z punktu widzenia pojęć wektorowych wielkość, którą nazywaliśmy carnotianem kąta zawartego między dwoma odcinkami o wspólnym wierzchołku, będzie równa iloczynowi skalarnemu tych odcinków pomnożonemu przez dwa.

Omawiając wyżej przydatność pojęcia carnotianu, podaliśmy wzór (9) pozwalający obliczyć kwadrat pola trójkąta i mający postać analogiczną do wzoru (8) pozwalającego obliczyć kwadrat objętości czworościanu za pomocą wyznacznika 3 stopnia. Zestawimy poniżej oba te wzory:

$$288 V^2 = \begin{vmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{vmatrix} \quad (30)$$

gdzie C_{ij} oznacza carnotian kąta między i -tą i j -tą krawędzią czworościanu przy dowolnym z numerowaniu dowolnie obranego pęku trzech krawędzi.

$$16 P^2 = \begin{vmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{vmatrix}, \quad (31)$$

gdzie C_{ij} oznacza carnotian kąta między i -tym i j -tym bokiem trójkąta przy dowolnym z numerowaniu dowolnie obranych dwóch boków.

Analogicznie do wzoru wyrażającego objętość czworościanu przez wyznacznik 5 stopnia można również napisać wzór dla pola trójkąta, jednakże analogia nie będzie tak pełna, jak w wypadku wzorów carnotianowych, gdyż w analogonie otrzymamy tu ujemną wartość pola trójkąta. Odnośne wzory mają postać następującą:

$$288 V^2 = \begin{vmatrix} d_{11}^2 & d_{12}^2 & d_{13}^2 & d_{14}^2 & 1 \\ d_{21}^2 & d_{22}^2 & d_{23}^2 & d_{24}^2 & 1 \\ d_{31}^2 & d_{32}^2 & d_{33}^2 & d_{34}^2 & 1 \\ d_{41}^2 & d_{42}^2 & d_{43}^2 & d_{44}^2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \quad (32)$$

gdzie d_{ij} oznacza długość krawędzi czworościanu między i -tym i j -tym wierzchołkiem — przy dowolnym zanumerowaniu wierzchołków.

$$-16 P^2 = \begin{vmatrix} d_{11}^2 & d_{12}^2 & d_{13}^2 & 1 \\ d_{21}^2 & d_{22}^2 & d_{23}^2 & 1 \\ d_{31}^2 & d_{32}^2 & d_{33}^2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \quad (33)$$

gdzie d_{ij} oznacza długość boku trójkąta między i -tym i j -tym wierzchołkiem — przy dowolnym zanumerowaniu wierzchołków.

Wyprowadzenie wzorów (30) i (32) podaliśmy szczegółowo, ponieważ wyprowadzenie wzorów (31) i (33) można przeprowadzić w sposób zupełnie analogiczny, więc je tu pomijamy.

Rękopis dostarczono Redakcji w październiku 1969 r.

СТЕФАН ХАУСБРАНДТ

НЕСКОЛЬКО ЗАМЕЧАНИЙ О ДЕТЕРМИНАНТНЫХ ФОРМУЛАХ
ДЛЯ РАСЧЕТА КВАДРАТА ОБЪЕМА ТЕТРАЭДРА НА ОСНОВАНИИ
ИЗВЕСТНОЙ ДЛИНЫ ЕГО ГРАНИ

Резюме

Автор отмечает, что детерминантные формулы для расчёта квадрата объёма тетраэдра на основании известной длины его грани, даны неправильно во многих хороших и очень распространенных учебниках, причём ошибки не всегда имеют характер опечаток. Далее предлагается применять несколько другую символику, которая должна сделать формулы более понятными и облегчить их запоминание. И наконец, приводятся доказательства правильности формул, основанных на формуле, выражающей объём тетраэдра при помощи прямоугольных координат его вершин.

STEFAN HAUSBRANDT

SOME COMMENT ON DETERMINANT FORMULAE FOR COMPUTING
THE SQUARE OF THE VOLUME OF A TETRAHEDRON FROM
THE LENGTHS OF ITS EDGES

Summary

The author asserts, that the determinant formulae for computing the square of the volume of a tetrahedron from the known lengths of its edges are given erroneously in several valuable and widely distributed textbooks, and that not always these errors bear the character of misprints. Moreover, he suggests using a somewhat different symbology in order to improve the lucidity of the formulae and to make them easier to remember. Finally he evolves the validity of his own formulae on the basis of a formula expressing the volume of a tetrahedron by the orthogonal coordinates of its vertices.

