

MARIA JĘDRZEJEWSKA

528.27:550.312

Analiza dokładności opracowania średnich wartości anomalii siły ciężkości

1. Wprowadzenie

Problem oceny dokładności przedstawienia pola siły ciężkości i jej anomalii na danym obszarze jest trudny i skomplikowany. Zachodzi bowiem konieczność uwzględniania bardzo wielu czynników, które mają wpływ na tę dokładność, zarówno w procesie pomiarowym wartości przyspieszenia siły ciężkości i ich interpretacji w jednostkach cgs, jak i w procesie obliczeniowo-graficznym, związanym z przedstawieniem anomalii siły ciężkości w postaci kartograficznej.

Jednym z trudniejszych zagadnień jest wyodrębnienie i wyeliminowanie błędów systematycznych zdjęć grawimetrycznych, wykonanych w różnym czasie i różnymi instrumentami.

Dodatkowe problemy powstają przy określaniu dokładności średnich wartości anomalii grawimetrycznych dla małych, jednakowych pod względem wymiarów, powierzchni, tj. dla powierzchni uśrednienia. W tym przypadku należy ustalić, jak interpretujemy taką średnią wartość w zależności od celu, do jakiego ma być wykorzystana. A więc:

1) jako reprezentacja fizycznego pola siły ciężkości na danej powierzchni w każdym jej punkcie z osobna,

2) jako wartość odpowiadająca punktowi środkowemu powierzchni uśrednienia,

3) jako wartość liczbowa pewnego średniego „poziomu anomalii”.

W pierwszej interpretacji dokładność wartości średniej dla pewnej powierzchni określa się (według terminologii wprowadzonej przez Graffa Huntera [8]) tzw. „błędem reprezentacji” (error of representation), przedstawianym wzorem (12).

Ostatnia interpretacja pociąga za sobą ocenę wartości średniej anomalii średnim błędem średniej arytmetycznej, który w przeciwieństwie do błędu reprezentacji maleje szybko wraz z ilością wyznaczeń, wchodzących do średniej — przy przypadkowym rozkładzie błędów.

Uwzględniając powyższe możliwości interpretacji, opracowano metodę i przeprowadzono analizę dokładności opracowania średnich wartości

anomalii Faye'a i Bouguera. Opracowanie takie wykonano po raz pierwszy w Polsce, stosując specjalną metodę [4] ujednolicenia danych źródłowych, przy której średnie wartości anomalii wyznacza się bezpośrednio z materiałów źródłowych, a następnie odpowiednio redukuje i przelicza zgodnie z wzorami (1) i (2).

Dane źródłowe w postaci anomalii Bouguera są z kolei wartościami funkcji, określonej wzorem (6).

Cały ten proces obliczeniowy przeanalizowano w szeregu wariantach, odpowiadających różnorodnym charakterystykom grawimetrycznych zdjęć źródłowych pod względem dokładności pomiarów, poziomu i jednostki grawimetrycznej, przyjętych gęstości podłoża σ , wysokości n.p.m. punktów grawimetrycznych i szczegółowości przedstawienia pola siły ciężkości.

Wyznaczone wielkości średnich błędów odniesiono do średnich wartości anomalii dla takiej małej powierzchni, nazwijmy ją „powierzchnią zerową”, dla której (jak będzie ustalone w dalszej części pracy) błąd reprezentacji jest równy — w pewnych granicach dokładności — błędowi interpolacji, określonego wzorem (5) — dla tego samego zdjęcia grawimetrycznego.

Metodyka ta pozwala na uzyskanie podstawowego materiału porównawczego oceny dokładności dla wszystkich, wyżej wymienionych interpretacji wartości średnich, również w przypadku wykorzystywania w pełni możliwości dokładnościowych materiałów źródłowych.

W opracowaniu średnich wartości anomalii (omówionych w [4]), które są przedmiotem niniejszej analizy, przyjęto jako wyjściową, powierzchnię o wymiarach $1'15'' \times 1'52,5''$ (tj. około $2,3 \times 2,2$ km), nazwaną tam „powierzchnią elementarną”. Dla tej wielkości powierzchni uśrednienia wyznaczano wartości średnie anomalii Bouguera, bezpośrednio z map źródłowych, będących dokumentacją poszczególnych grawimetrycznych zdjęć polowych.

Sposób przeprowadzenia tych wyznaczeń (dwukrotny niezależny odczyt średniej wartości anomalii z podziałem powierzchni uśrednienia na odpowiednio dużą liczbę części) pozwalał na sprowadzenie średniego błędu oszacowanych wartości średnich do średniego błędu wartości anomalii dowolnego punktu, interpolowanego na mapie źródłowej (m_{A_B}) (czyli do tzw. „pełnego błędu interpolacji” według terminologii wprowadzonej przez Mołodeńskiego w [13]).

Wyzyskując fakt takiego sposobu wyznaczeń wartości średnich dla powierzchni elementarnych, można było przyjąć, że średnie te są tak wyznaczone, jak byłyby wyznaczone drogą obliczania kolejnych średnich arytmetycznych dla coraz większych powierzchni, poczynwszy od powierzchni zerowej.

W związku z tym można było, opierając się na wielkościach średnich błędów średniej wartości anomalii dla powierzchni zerowej, poszukiwać zależności według których błędy średnie przenoszą się z wartości wyjściowych na średnie, dla kolejnych wielokrotności powierzchni zerowej.

Zależności takie w odniesieniu do materiałów analizowanego opracowania zostały ustalone dla średnich wartości anomalii zarówno w pierwszej (1), jak i trzeciej (3) interpretacji; omówienie ich znajduje się w dalszej części pracy.

W wypadku błędu reprezentacji, korzyść zastosowanej metodyki polega również na tym, że wyznaczanie tego błędu w odniesieniu do średniej wartości anomalii dla powierzchni elementarnej lub jej wielokrotności bezpośrednio, spowodowałoby konieczność przeliczeń i redukcji dla wielkiej liczby oddzielnych punktów grawimetrycznych, niezbędnych dla oceny wielkości błędu reprezentacji.

Analizując, odniesione do powierzchni zerowej średnie błędy anomalii Faye'a i Bouguera omawianego opracowania, wykorzystano dane dotyczące średnich błędów pomiaru przyspieszenia siły ciężkości poszczególnych grawimetrycznych zdjęć źródłowych, dane z dwukrotnych, niezależnych zdjęć grawimetrycznych na pewnych obszarach (nazwanych w pracy [4] kontrolnymi) oraz dane oceny dokładności średnich wysokości zawarte w pracy [5].

Przy rozpatrywaniu poszczególnych błędów składowych średniego błędu wartości anomalii dla powierzchni zerowej, wzięto pod uwagę, omówioną w pracy [4] różnorodność grawimetrycznych materiałów źródłowych, pod względem jakości, szczegółowości przedstawienia anomalii, przyjętych wartości gęstości podłoża σ , wysokości H n.p.m. i sposobu jej określenia na poszczególnych punktach zdjęcia źródłowego.

Wyodrębniono więc:

1) Trzy grupy jakości materiałów źródłowych:

- I — materiały z pomiarów wykonanych precyzyjnymi, nowoczesnymi grawimetrami, jak Sharpe i Askania Gs-11,
- II — materiały z pomiarów wykonanych grawimetrami o niższej dokładności, jak Nörsgaard,
- III — materiały mapowe w małych skalach (starsze opracowania).

2) Dwie wartości przeciętnej gęstości punktów zdjęć źródłowych: $1,5 \div 2,0$ punkta na km^2 — dla materiałów I jakości i $0,25$ punkta na km^2 — dla materiałów II jakości.

3) Dwa zakresy stosowanych gęstości podłoża σ : $1,8 \div 2,1$ g cm^{-3} i $2,4 \div 2,7$ g cm^{-3} .

4) Pięć stref wysokości H n.p.m.: $0 \div 200$ m, $200 \div 400$ m, $400 \div 800$ m, $800 \div 1200$ m, $1200 \div 1700$ m.

Dla powyższych wariantów policzono odpowiednie średnie błędy, odnoszące się do wartości anomalii źródłowej (tj. anomalii siły ciężkości przedstawionej w grawimetrycznym materiale źródłowym) oraz średnie błędy występujące w procesie redukcji i ujednolicenia tych wartości.

2. Średni błąd określenia wartości anomalii Faye'a i Bouguera w jednolitym poziomie grawimetrycznym dla powierzchni zerowej

Proces wyznaczeń i obliczeń średnich wartości anomalii Faye'a i Bouguera, omówiony szczegółowo w pracy [4], polegał na wyznaczeniu średnich wartości anomalii źródłowej (Bouguera w ogromnej większości), a następnie przeprowadzeniu odpowiednich przeliczeń dla doprowadzenia wyznaczonych anomalii do jednolitego poziomu grawimetrycznego i jednolitej wartości przyjętej gęstości podłoża σ .

Wszystkie przeliczenia przeprowadzano według następujących zależności:

$$A_F = A_{B\ I-II} + \delta_g + 0,0419 \cdot \sigma \cdot H_{sr} \quad (1)$$

dla anomalii Faye'a oraz

$$A_{B\ 1,2} = A_{B\ I-II} + \delta_g + 0,0419 \cdot \Delta\sigma \cdot H_{sr} \quad (2)$$

dla anomalii Bouguera, gdzie:

$A_{B\ I-II}$ — średnia wartość anomalii Bouguera wyznaczona z materiałów źródłowych dwukrotnie, niezależnie,

δ_g — poprawka redukcyjna do jednolitego poziomu grawimetrycznego kraju,

σ — gęstość podłoża n.p.m. przyjęta dla danego materiału źródłowego,

$\Delta\sigma$ — różnica gęstości podłoża między gęstością przyjętą w materiale źródłowym a gęstościami stałymi opracowania:

$$\sigma_1 = 2,39 \text{ g cm}^{-3} \text{ i } \sigma_2 = 2,67 \text{ g cm}^{-3},$$

H_{sr} — średnia wysokość n.p.m. wyznaczona z mapy topograficznej w skali 1 : 100 000 [5].

Sumaryczne średnie błędy określenia pojedynczych średnich wartości anomalii Faye'a ($M_{A_{Fsr}}$) i Bouguera ($M_{A_{B1,2}}$) w jednolitym poziomie grawimetrycznym kraju, jako odpowiednie błędy funkcji (1) i (2) są następujące:

$$M_{A_{Fsr}}^2 = m_{A_{B\ I-II}}^2 + [m_{\delta_g}^2 + (0,0419 \cdot \sigma)^2 \cdot m_{H_{sr}}^2] \quad (3)$$

$$M_{A_{B1,2}}^2 = m_{A_{B\ I-II}}^2 + [m_{\delta_g}^2 + (0,0419 \cdot \Delta\sigma)^2 \cdot m_{H_{sr}}^2]. \quad (4)$$

We wzorach tych $m_{A_{B\ I-II}}$ oznacza średni błąd określenia średniej wartości anomalii Bouguera z mapy źródłowej dla powierzchni zerowej. Błąd

ten, zgodnie z uwagami zawartymi w rozdziale 1 możemy uznać za równy pełnemu błędowi interpolacji (m_{AB}), określonymu wzorem (5), charakteryzującym dany mapowy materiał źródłowy.

Grupę błędów, odnoszących się do anomalii źródłowej i składających się na błąd m_{AB} (grupa błędów A), rozpatrzmy oddzielnie od błędów pozostałych, ujętych we wzorach (3) i (4) nawiasem kwadratowym, a odnoszących się do procesu redukcji i poprawek do jednolitego poziomu grawimetrycznego tj. procesu ujednolicenia danych źródłowych (grupa błędów B).

W grupie błędów B poszczególne wielkości we wzorach (3) i (4) oznaczają:

m_{δ_g} — średni błąd szacunkowy wyznaczenia poprawki redukcyjnej δ_g ,
 m_{Hsr} — średni błąd określenia średnich wysokości wykorzystanych do redukcji.

Wartości σ , a tym samym i $\Delta\sigma$ we wzorach (3) i (4) są traktowane jako określone bezbłędnie.

A) Średni błąd określenia średniej wartości anomalii źródłowej (m_{AB})

Średni błąd m_{AB} tzn. pełny błąd interpolacji, charakteryzuje tu dokładność materiałów źródłowych, rozpatrywanych jako niezależne od siebie zdjęcia (tzn. bez uwzględnienia różnic poziomów i jednostek grawimetrycznych, których wpływ uwzględniono w grupie błędów B).

Zgodnie z ustaleniem przyjętym w literaturze tematu, błąd ten w odniesieniu do anomalii Bouguera można wyrazić zależnością:

$$m_{AB}^2 = m_{AB(p)}^2 + m_{AB(m)}^2. \quad (5)$$

We wzorze (5) — $m_{AB(p)}$ oznacza średni błąd wartości anomalii Bouguera $A_{B(p)}$ w poszczególnym punkcie grawimetrycznym danego zdjęcia źródłowego, a $m_{AB(m)}$ — średni błąd samej interpolacji (tzw. „czysty błąd interpolacji” według terminologii Mołodeńskiego).

Wartość anomalii Bouguera dla poszczególnego punktu grawimetrycznego określona jest (dla szerokości geograficznych Polski) wzorem

$$A_{B(p)} = g - \gamma_0 + (0,3086 - 0,0419 \cdot \sigma) \cdot H' \quad (6)$$

gdzie:

g — pomierzona wartość przyspieszenia siły ciężkości,
 γ_0 — przyspieszenie normalne siły ciężkości według wzoru Helmerta z 1901—9 r.,
 H' — wysokość n.p.m.

Biorąc pod uwagę wpływ średnich błędów pomiaru wartości g , średniego błędu określenia wartości γ_0 z map topograficznych i średniego

Średni błąd określenia źródłowej anomalii Bouguera (m_{AB}) i błędy składowe

Tablica 1

Kategoria jakości materiału źródłowego	m_s mgal $\pm$	m_z mgal $\pm$	m_g mgal $\pm$	m_{γ_0} mgal $\pm$	m_H m $\pm$	σ g cm ⁻³	H m $\pm$	$m_{AB(p)}$ mgal $\pm$	$m_{AB(m)}$ mgal $\pm$	m_{AB} mgal $\pm$
I	0,036	0,053	0,064	0,03	0,10	$1,8 \div 2,7$	$0 \div 800$	0,07	0,15	0,17
II	0,20	0,30	0,36	0,05	1,8	$1,8 \div 2,1$	$0 \div 200$	0,55	0,50	0,75
					0,10	$1,8 \div 2,7$	$200 \div 800$	0,36		0,62

błędu wyznaczenia wysokości H' , oraz przyjmując wartość σ jako bezbłędną, średni błąd anomalii $A_{B(p)}$ będzie następujący:

$$m_{A_{B(p)}}^2 = m_g^2 + m_{\gamma_0}^2 + (0,3086 - 0,0419 \cdot \sigma)^2 \cdot M_H'^2. \quad (7)$$

Na średni błąd (m_g) wartości przyspieszenia siły ciężkości g w danym punkcie grawimetrycznym, w poziomie wyjściowym danego zdjęcia źródłowego, składa się: średni błąd (m_z) pomiaru dla punktów zdjęcia grawimetrycznego (wyznaczony przy przyjęciu bezbłądności pomiaru sieci lokalnej, będącej jego podstawą) i średni błąd (m_s) samej sieci lokalnej, odniesiony do poziomu wyjściowego danego zdjęcia, uznanego za bezbłądny. Błąd ten charakteryzuje się zależnością:

$$m_g^2 = m_s^2 + m_z^2. \quad (8)$$

Na podstawie danych w opracowaniach źródłowych błędów: m_s , m_z , M_H' oraz informacji o sposobie określenia wartości γ_0 dla poszczególnych zdjęć źródłowych, obliczono średnie wartości m_g , m_{γ_0} i M_H' dla materiałów źródłowych I i II jakości, przy dwóch zakresach stosowanych gęstości podłoża σ : $1,8 \div 2,1 \text{ g cm}^{-3}$ lub $1,8 \div 2,7 \text{ g cm}^{-3}$. Wielkości tych błędów podane są w tablicy 1.

Dla materiałów źródłowych I jakości błąd $m_{A_{B(p)}}$ nie przekracza 0,1 mgal, natomiast dla materiałów II jakości (dla których przy wysokościach n.p.m. poniżej 200 m, wysokości te dla punktów grawimetrycznych są wyznaczone z map topograficznych 1 : 50 000 i 1 : 100 000) błąd $m_{A_{B(p)}}$ jest rzędu $\pm 0,6$ mgal oraz $\pm 0,4$ mgal — dla terenów powyżej 200 m i wysokości punktów uzyskanych z niwelacji.

Średni błąd ($m_{A_{B(m)}}$) samej interpolacji wartości anomalii Bouguera z mapy źródłowej został wyznaczony, przy założeniu że jest to błąd prawdziwej wartości $A_{B(m)}$ (interpolowanej z mapy źródłowej) w stosunku do wartości $A_{B(p)}$, przyjętej za bezbłądną

$$m_{A_{B(m)}}^2 = \frac{[(A_{B(m)} - A_{B(p)})^2]}{n}, \quad (9)$$

gdzie n — ilość różnic ($A_{B(m)} - A_{B(p)}$).

Wartości $m_{A_{B(m)}}$ obliczono odrębnie dla zdjęć źródłowych I jakości — dla przeciętnej gęstości punktów $1,5 \div 2,0/\text{km}^2$, i dla II jakości — dla przeciętnej gęstości punktów $0,25/\text{km}^2$.

Obliczone wartości $m_{A_{B(m)}}$ na podstawie kilkudziesięciu porównań dla każdego z tych przypadków, zamieszczone są w tablicy 1. W tablicy 1 podane są również wielkości całkowitego średniego błędu średniej wartości źródłowej anomalii Bouguera (m_{A_B}), określonego wzorem (5).

B) Średni błąd redukcji i poprawek do jednolitego poziomu grawimetrycznego

$$m_{A_{F\acute{s}r}}^2 = m_{\acute{g}}^2 + (0,0419 \cdot \sigma)^2 \cdot m_{H\acute{s}r}^2 \quad (10)$$

$$m_{A_{B1,2}}^2 = m_{\acute{g}}^2 + (0,0419 \cdot \Delta\sigma)^2 \cdot m_{H\acute{s}r}^2 \quad (11)$$

Wielkości średnich błędów $m_{A_{F\acute{s}r}}$ i $m_{A_{B1,2}}$ zostały wyznaczone dla wszystkich wariantów, wymienionych w rozdziale 1, a obliczone wartości tych błędów zamieszczono w tablicy 2.

Wartości błędu $m_{\acute{g}}$ oceniono szacunkowo jako średni dla poszczególnych grup jakości materiałów źródłowych z kilkudziesięciu oszacowań w każdej grupie.

Wartości błędu $m_{H\acute{s}r}$ (interpretowanego analogicznie jak błąd $m_{A_{B\text{ I-II}}}$ przyjęto, uwzględniając dane oceny dokładności zawarte w pracy [5] oraz przeprowadzając dodatkowo po kilkadziesiąt wyznaczeń tego błędu dla wymienionych w rozdziale 1 różnych stref wysokości obszaru opracowania. Wyznaczenia te oparto na porównaniu wysokości dowolnych punktów mapy topograficznej w skali 1 : 100 000 z wysokościami uzyskanymi dla tych punktów z niwelacji.

Wielkości wpływu średniego błędu $m_{H\acute{s}r}$ na średnie błędy $m_{A_{F\acute{s}r}}$ i $m_{A_{B1,2}}$ w poszczególnych strefach wysokości H n.p.m. przedstawiono w kolumnie piątej tablicy 2.

Jak widać z danych zestawionych w tablicy 2, wpływ średniego błędu określenia wysokości na średni błąd $m_{A_{F\acute{s}r}}$ jest decydujący, a dla większych wysokości bardzo znaczny w porównaniu ze średnim błędem określenia anomalii źródłowej (m_{A_B}). Jednak dla terenów nizinnych, przeważających na obszarze kraju, średni błąd $m_{A_{F\acute{s}r}}$ nie przekracza wielkości średniego błędu określenia anomalii źródłowej.

Oczywiście wyznaczenie wysokości $H_{\acute{s}r}$ z materiałów dokładniejszych niż mapy topograficzne w skali 1 : 100 000 — odpowiadających dokładności materiałów źródłowych I i nawet II jakości, wyeliminowałoby w znacznym stopniu wpływ średniego błędu $m_{H\acute{s}r}$ na proces wykonywanych przeliczeń.

W odniesieniu do anomalii Bouguera średni błąd $m_{A_{B1,2}}$ jest znacznie niższy niż średni błąd $m_{A_{F\acute{s}r}}$ dla całego obszaru analizowanego, i nie przekracza $\pm 0,3$ mgal i $\pm 0,4$ mgal odpowiednio dla materiałów źródłowych I i II jakości dla wszystkich stref wysokości.

Wielkości błędów, omówionych w punktach A i B, dają możliwość sumarycznej oceny średnich wartości anomalii Faye'a i Bouguera dla powierzchni zerowych — otrzymanych już w jednolitym systemie grawimetrycz-

Średni błąd redukcji i poprawek do jednolitego poziomu grawimetrycznego średnich wartości anomalii Faye'a (m_{AFsr}) i Bouguera ($m_{AB,2}$)

Tablica 2

Średnia wysokość strefy H n.p.m.	Zakres stosowanych wartości σ $g \text{ cm}^{-3}$	m_H sr $\pm m$	$0,0419 \cdot \sigma \cdot m_{Hsr}$ $0,0419 \cdot \Delta \sigma \cdot m_{Hsr}$ $\pm mgal$	m_{AFsr} $m_{AB,2}$ $\pm mgal$		
				Kategoria jakości materiału źródłowego		
				I	II	III
100 0 ÷ 200	1,8 ÷ 2,1	1,8	0,14 ÷ 0,16 0,07 ÷ 0,04	0,14 ÷ 0,16 0,07 ÷ 0,04	0,27 ÷ 0,28 0,24 ÷ 0,23	1,01 ÷ 1,02 1,00 ÷ 1,00
300 200 ÷ 400	1,8 ÷ 2,1	5,0	0,38 ÷ 0,44 0,18 ÷ 0,12	0,38 ÷ 0,44 0,18 ÷ 0,12	0,44 ÷ 0,50 0,29 ÷ 0,26	1,07 ÷ 1,09 1,02 ÷ 1,01
600 400 ÷ 800	2,4 ÷ 2,7	9	0,91 ÷ 1,02 0,10 ÷ 0,01	0,91 ÷ 1,02 0,10 ÷ 0,02	0,94 ÷ 1,05 0,23 ÷ 0,23	1,35 ÷ 1,43 1,00 ÷ 1,00
1000 800 ÷ 1200	2,4 ÷ 2,7	18	1,81 ÷ 2,04 0,20 ÷ 0,02	1,81 ÷ 2,04 0,20 ÷ 0,03	1,82 ÷ 2,05 0,30 ÷ 0,03	2,07 ÷ 2,27 1,02 ÷ 1,00
1500 1200 ÷ 1700	2,4 ÷ 2,7	28	2,82 ÷ 3,17 0,32 ÷ 0,04	2,82 ÷ 3,17 0,32 ÷ 0,04	2,83 ÷ 3,18 0,39 ÷ 0,23	2,99 ÷ 3,32 1,05 ÷ 1,00
			$m_{\Delta g} \pm mgal$	0,02	0,23	~ 1

nym. Ocenę tę dają wielkości średniego błędu, określonego odpowiednio dla anomalii Faye'a i Bouguera wzorami: (3) i (4).

Wielkości tych błędów dla poszczególnych stref wysokości H n.p.m. i dwóch zasadniczych kategorii jakości materiałów źródłowych, podane są w tablicy 3 oraz przedstawione graficznie na załączonym rysunku.

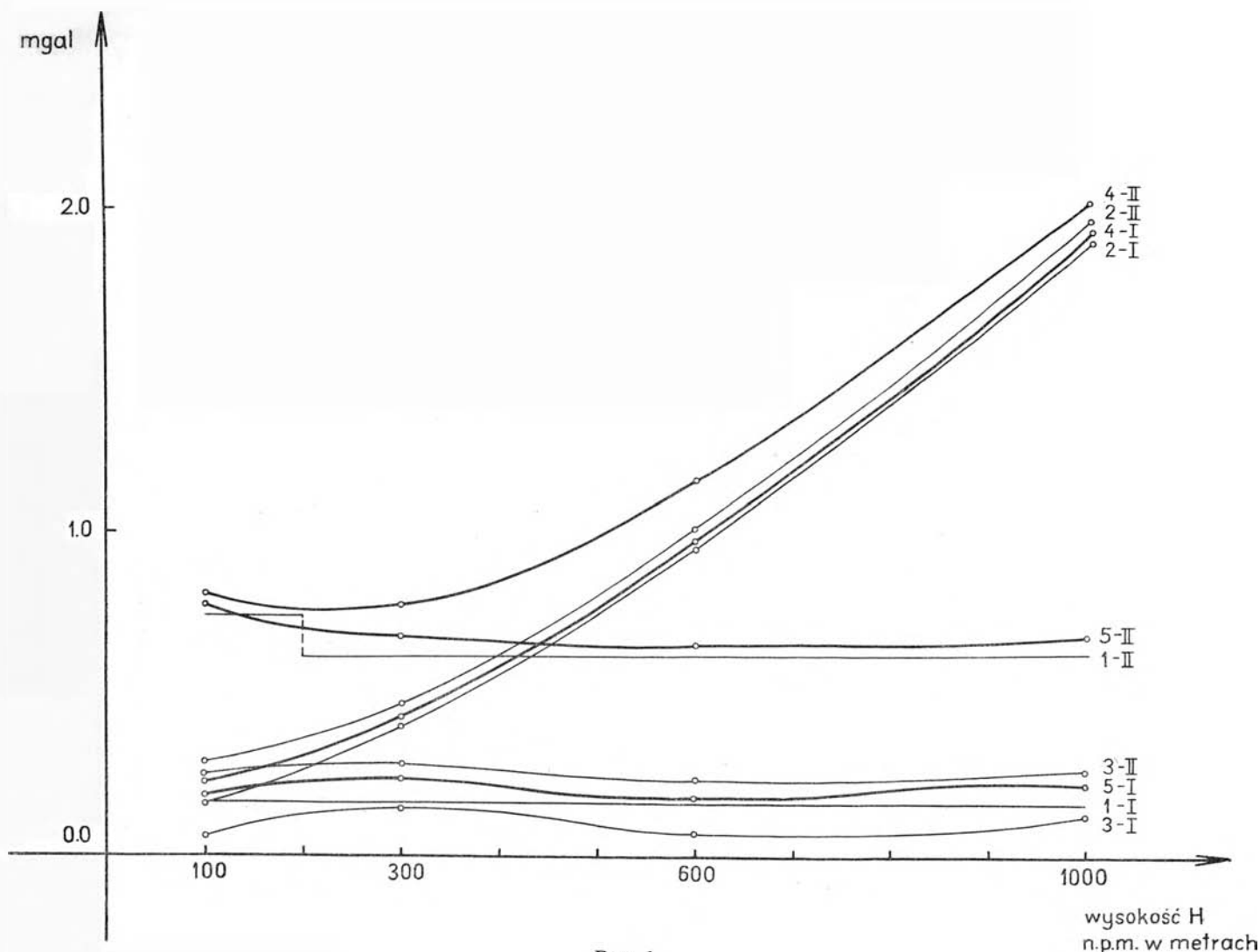
Średni błąd średniej wartości anomalii Faye'a ($M_{AF\bar{s}r}$) i Bouguera ($M_{AB1,2}$) w jednolitym systemie grawimetrycznym kraju

Tablica 3

Kategoria jakości materiału źródłowego	I	II
Wysokość H n.p.m. $\pm$	$M_{AF\bar{s}r}$ $M_{AB1,2}$ mgal $\pm$	$M_{AF\bar{s}r}$ $M_{AB1,2}$ mgal $\pm$
100 0 ÷ 200	0,22 ÷ 0,23 0,18 ÷ 0,17	0,80 ÷ 0,80 0,79 ÷ 0,78
300 200 ÷ 400	0,42 ÷ 0,47 0,25 ÷ 0,21	0,76 ÷ 0,80 0,68 ÷ 0,67
600 400 ÷ 800	0,93 ÷ 1,03 0,19 ÷ 0,17	1,12 ÷ 1,22 0,66 ÷ 0,66

Przedstawione powyżej wyniki analizy danych źródłowych oraz procesu ich ujednolicenia dają wielkości średnich błędów, odniesione do powierzchni zerowych, dla których błąd reprezentacji może być utożsamiony ze średnim błędem określenia anomalii źródłowej, włącznie z błędami redukcji i poprawek ujednolicających dane źródłowe.

Należy teraz zorientować się, jakie wymiary odpowiadają powierzchniom zerowym w poszczególnych rodzajach materiałów źródłowych i jakiej wielkości błędy będą występować w wartościach średnich anomalii dla powierzchni wielokrotnie większych od powierzchni zerowych. A konkretnie dla powierzchni $1'15'' \times 1'52,5''$, tj. około $2,3 \text{ km} \times 2,2 \text{ km}$ (zwanych dalej elementarnymi) oraz cztero- i szesnastokrotnie większych — dla których to powierzchni wyznaczano średnie wartości anomalii Faye'a i Bouguera w opracowaniu przedstawionym w pracy [4].



Rys. 1

Średni błąd średniej wartości anomalii Faye'a ($M_{AF\bar{s}_r}$) i Bouguera ($M_{AB1,2}$) w jednolitym systemie grawimetrycznym kraju i wpływ błędów składowych

1 — średni błąd źródłowej anomalii Bouguera M_{AB} ; 2 i 3 — średni błąd redukcji i poprawek do jednolitego poziomu grawimetrycznego odpowiednio dla anomalii Faye'a ($m_{AF\bar{s}_r}$) i Bouguera ($m_{AB1,2}$); 4 i 5 — średni błąd średniej wartości anomalii Faye'a ($M_{AF\bar{s}_r}$) i Bouguera ($M_{AB1,2}$); I — dla materiałów źródłowych I jakości; II — dla materiałów źródłowych II jakości.

3. Błąd reprezentacji średniej wartości anomalii siły ciężkości i jego zależność od błędu interpolacji

Błąd reprezentacji, tzw. „pełny” ($\bar{E}$) dla danej powierzchni uśredniania (według terminologii Graff Huntera [8]) jest to średni błąd pojedynczego spostrzeżenia, gdzie tym pojedynczym spostrzeżeniem staje się średnia wartość anomalii dla tej powierzchni, jeżeli zastępuje ona uzyskaną z pomiaru wartość anomalii w poszczególnych punktach grawimetrycznych powierzchni uśredniania.

$$\bar{E}^2 = \pm \frac{[vv]}{n-1}, \quad (12)$$

gdzie v jest różnicą między wartością średnią anomalii, a wartością przyporządkowaną danemu punktowi grawimetrycznemu na tej powierzchni, a n — ilością różnic v .

Błąd reprezentacji w tym sformułowaniu (jest jeszcze inne, uzależniające wielkość tego błędu od rozmiarów powierzchni uśredniania, ale wówczas należy uprzednio wyznaczyć drogą empiryczną wartości liczbowe odpowiedniego współczynnika), wymaga do jego wyznaczenia odpowiedniej ilości punktów grawimetrycznych przypadkowo rozrzuconych po powierzchni uśredniania. Z drugiej strony średnia wartość reprezentująca każdy z osobna punkt fizycznego pola siły ciężkości w obrębie tej powierzchni charakteryzuje się dużym błędem średnim wyrażonym wzorem (12), ze względu na znaczne i wzrastające ku krańcom powierzchni wartości różnic v przy zwiększaniu powierzchni uśredniania.

Dlatego też jest po prostu nieekonomiczne wyznaczanie średnich wartości anomalii „reprezentujących” (w rozumieniu wyżej zdefiniowanym), wyłącznie dla dużych powierzchni uśredniania, z materiałów grawimetrycznych o zbyt dużej gęstości punktów i dokładności. Prawdopodobnie z tego względu w pracach dotyczących wykorzystania średnich wartości anomalii grawimetrycznych do wyznaczania różnych funkcji powierzchniowych siły ciężkości, które służą do określenia figury Ziemi (np. do wyznaczania odchyłeń pionu czy odstępów geoidy od elipsoidy odniesienia [10], [13], [14]) rozpatruje się najczęściej przypadek, gdy rozmiary powierzchni uśredniania, nazwiemy ją „powierzchnią jednostkową”, odpowiadają gęstości punktów grawimetrycznych tzn., gdy przypada średnio jeden punkt grawimetryczny na każdą powierzchnię uśredniania. Wówczas jednak, podobnie jak w przypadku wyznaczania błędu interpolacji, podstawą do oceny musi być zdjęcie grawimetryczne o odpowiednio większej gęstości punktów niż zdjęcie analizowane. Dla tego przypadku M. C. Mołodenski w analizie błędów reprezentacji i interpolacji zdjęć wariometrycznych (przedstawionej w pracy [13], potwierdzonej następnie

w [14]), dochodzi do wniosku o równości błędów reprezentacji i interpolacji w granicach dokładności określenia tych błędów. Odnosi się to jednak do zdjęć rzadkich, o średnich odległościach między punktami grawimetrycznymi rzędu kilkudziesięciu kilometrów. (Zamieszczone w tych pracach rezultaty porównań błędów reprezentacji i interpolacji odnoszą się do odległości nie mniejszych jak 60 km).

W tym samym przypadku dla zdjęć szczegółowych o odległościach punktów grawimetrycznych od 2 do 40 km i różnorodnym charakterze gradientu anomalii N. P. Grusziński stwierdza, że błąd reprezentacji jest (prawdopodobnie średnio) 1,5 raza większy od błędu interpolacji. Natomiast autorzy pracy [14] podają, że „dla małych kwadratów” błąd reprezentacji jest w przybliżeniu 2 razy większy od błędu interpolacji.

Oczywiście, że dla takich odległości, jak kilka kilometrów, ma już praktyczne znaczenie różnica między założeniem liniowej (przy interpolacji) i skokowej (przy reprezentacji) zmienności anomalii między punktami grawimetrycznymi.

Dla potrzeb analizy opracowania średnich wartości anomalii [4] interesujące jest ustalenie:

1) stosunku liczbowego jaki zachodzi między wielkościami błędu reprezentacji i interpolacji dla powierzchni jednostkowych przy zdjęciach źródłowych I i II jakości o gęstości punktów grawimetrycznych od 0,25 do 1,5—2,0 na km², czyli dla wielkości tych powierzchni od około 2 km × 2 km do około 0,7 km × 0,7 km,

2) wielkości powierzchni zerowej, dla powyższych zdjęć i jej stosunku do powierzchni jednostkowej,

3) stosunku błędu reprezentacji średniej wartości anomalii dla powierzchni zerowej do tegoż błędu dla wielokrotności tej powierzchni.

W celu uzyskania odpowiedzi na te pytania, wykonano szereg wyznań anomalii bezpośrednio ze źródłowych map izolinii anomalii Bouguera. Przy czym ze względu na trudność i problematyczność wyznaczenia błędu reprezentacji określonego wzorem (12) dla średnich z obszarów o jednostkowym zagęszczeniu punktami grawimetrycznymi (o ile chce się dokonać wyżej wymienionych porównań obszarów o bardziej jednolitym charakterze, tzn. niezbyt rozległych) przyjmowano jako wartości porównywalne z wartościami średnich, dla których określany był błąd reprezentacji, inne średnie, wyznaczone dla powierzchni wielokrotnie mniejszych, wchodzących w obręb powierzchni uśredniania.

Wyznaczeń wartości błędów reprezentacji i interpolacji dokonano dla dwóch różnych rejonów (1) i (2), pokrytych zdjęciem grawimetrycznym I jakości i rejonu (3), pokrytego zdjęciem grawimetrycznym II jakości:

1) rejon nizinny o przeciętnej wysokości H n.p.m. około 100 m, przeciętnym gradiencie 1 mgal/1 km i średniej odległości między punktami

grawimetrycznymi około 0,7 km, tj. dla powierzchni jednostkowych o wymiarach $0,7 \text{ km} \times 0,7 \text{ km}$,

2) rejon podgórski o przeciętnej wysokości H n.p.m. 800 m i przeciętnym gradiencie 1 mgal/0,5 km i dla powierzchni jednostkowych o wymiarach $1 \text{ km} \times 1 \text{ km}$,

3) rejon nizinny, o wysokości n.p.m. i gradiencie anomalii, jak dla rejonu 1) oraz dla powierzchni jednostkowych o wymiarach $2,1 \times 2,1 \text{ km}$.

Wyznaczony został również dla każdego rejonu oddzielnie, błąd interpolacji według wzoru (5).

Wyniki porównań błędów reprezentacji uzyskano dla powierzchni zerowych oraz ich kolejnych wielokrotności aż do powierzchni szesnastokrotnie większych od powierzchni elementarnej (tj. $5,0' \times 7,5'$) — czyli w zakresie wielkości powierzchni, przyjętych dla opracowanych średnich wartości anomalii [4].

Wyniki te wskazują na wyraźną prawidłowość we wzrastaniu wielkości błędu reprezentacji wraz ze zwiększaniem się powierzchni uśrednienia; a mianowicie dwukrotny (w przybliżeniu) wzrost błędu reprezentacji przy czterokrotnym wzroście powierzchni uśrednienia. Jest to zgodne ze stwierdzeniem autorów pracy [14], że dla powierzchni o bokach mniejszych od 30 km błąd reprezentacji („czysty”, tj. błąd reprezentacji wyznaczony przy przyjęciu bezbłędności określenia anomalii w punkcie grawimetrycznym) wzrasta w przybliżeniu proporcjonalnie do boku powierzchni uśrednienia, gdy ta powierzchnia jest kwadratem.

Na podstawie tych wyników można też ocenić z dostatecznym przybliżeniem, że dla powierzchni jednostkowych o wymiarach od $0,7 \times 0,7 \text{ km}$ do $2 \times 2 \text{ km}$, tj. w zakresie gęstości większości zdjęć źródłowych I i II jakości, średni błąd reprezentacji dla powierzchni czterokrotnie mniejszej od powierzchni jednostkowej jest równy średniemu błędowi interpolacji.

Oznacza to, że dla materiałów źródłowych wykorzystanych do wyznaczeń wartości anomalii Faye’a i Bouguera, można przyjąć, iż wielkość powierzchni zerowej, dla której wyznaczone zostały w rozdziale 2 średnie błędy interpolacji, jest czterokrotnie mniejsza od powierzchni jednostkowej. I wobec tego, biorąc pod uwagę prawidłowość wzrostu średnich błędów reprezentacji, można łatwo określić te błędy w odniesieniu do średnich wartości anomalii Faye’a i Bouguera w omawianym zakresie zbędnych parametrów wyjściowych.

Dla przykładu można podać porównanie wielkości błędu reprezentacji średniej wartości źródłowej anomalii Bouguera dla powierzchni zerowej, jednostkowej i elementarnej (o wymiarach trzykrotnie większych od wymiarów powierzchni jednostkowej) z odpowiednimi wartościami tego błędu, otrzymanymi „teoretycznie” na podstawie błędu interpolacji i przy wykorzystaniu powyżej sformułowanych zależności.

Przykład dotyczy rejonu 2), omówionego w rozdziale poprzednim, dla którego błąd interpolacji wynosi $\pm 0,12$ mgal.

Wielkości błędu reprezentacji są odpowiednio:

dla powierzchni zerowej $\pm 0,11$ mgal (teoretycznie $\pm 0,12$ mgal),

dla powierzchni jednostkowej $\pm 0,23$ mgal (teoretycznie $\pm 0,24$ mgal),

dla powierzchni elementarnej $\pm 0,65$ mgal (teoretycznie $\pm 0,72$ mgal).

Zgodność wartości błędu reprezentacji wyznaczonych i teoretycznych zależy od tego w jakim stopniu zakres powierzchniowy wyznaczeń tego błędu dla danej powierzchni uśrednienia odpowiada zakresowi wyznaczeń błędu reprezentacji dla jej powierzchni składowych.

4. Ocena dokładności średniej wartości anomalii przy interpretacji tej wartości jako wartości odpowiadającej punktowi środkowemu powierzchni uśrednienia oraz jako wartości średniego „poziomu anomalii”

Błąd reprezentacji — co należy podkreślić — ma charakter średniego błędu pojedynczego spostrzeżenia, przy czym te spostrzeżenia nie są jednakowo dokładne. Na ogół dla powierzchni uśrednienia (wyłączając przypadki dużych lokalnych zmian gradientu anomalii we wszystkich kierunkach) błędy reprezentacji wzrastają od środka tej powierzchni ku krańcom w sposób w pewnym sensie systematyczny. Jeżeli więc wydzielić w takim przypadku strefę centralną o wielkości $1/4$ całej powierzchni uśrednienia, to błąd reprezentacji wartości średniej obliczonej dla całej powierzchni, maleje w obrębie strefy centralnej w przybliżeniu dwukrotnie w stosunku do błędu reprezentacji dla całości powierzchni. W tablicach 4 i 5 podano parę przykładów tej zależności.

Tablica 4

Nr powierzchni	Błąd reprezentacji ($\bar{E}$) średniej wartości (x) anomalii Bouguera w mgal dla:		Średni błąd wartości x dla powierzchni A jako wartości punktu środkowego w mgal
	powierzchni A = = 2,3 km $\times$ 2 km	$1/4$ powierzchni A	
1	$\pm 1,90$	$\pm 0,66$	$\pm 0,30$
2	1,40	0,84	
3	0,66	0,34	
4	0,55	0,33	
5	0,96	0,41	
6	1,20	0,58	
7	0,98	0,33	
	średnia $\pm 1,09$	$\pm 0,50$	

Tablica 5

Nr powierzchni	Średnia wartość anomalii Bouguera w mgal dla powierzchni:			Średnia wartość anomalii Bouguera w punkcie środkowym powierzchni A, B, C w mgal
	A = $4,6 \times 4$ km	B = $\frac{1}{4}$ A w centrum A	C = $\frac{1}{4}$ B w centrum B	
1	-46,8	-47,4	-47,5	-47,5
2	46,7	46,6	46,5	46,6
3	48,1	48,1	47,9	47,8
4	47,1	47,5	47,7	47,8
5	48,7	49,3	49,6	49,6

Podane w tablicach 4 i 5 wartości liczbowe odnoszą się do anomalii źródłowej zdjęcia grawimetrycznego rejonu 2), scharakteryzowanego w poprzednim rozdziale.

W związku z takim rozkładem błędów na powierzchni uśredniania, średnia wartość anomalii dla tej powierzchni jednocześnie może być uważana za średnią, i to wyznaczoną znacznie dokładniej, dla części powierzchni uśredniania położonej w jej centrum, lub dla jej punktu środkowego.

Wyda się, że w wielu przypadkach, na przykład dla wyznaczeń grawimetrycznych odchyłeń pionu, mogłoby być interesujące ze względów dokładnościowych i technicznych takie przedstawienie kartograficzne średnich wartości anomalii siły ciężkości, w którym powierzchnie uśredniania zachodziłyby częściowo na siebie.

Ponadto, dysponując gotowymi mapami średnich wartości anomalii, można by uzyskać podwyższenie dokładności w strefach skrajnych powierzchni uśredniania, stosując interpolację liniową między najbliższymi czterema wartościami średnimi, czyli wyznaczając średnie wartości „zaśszczające”. Dla stref tych uzyska się, zależnie od wielkości powierzchni uśredniania, podwyższenie dokładności o pewną część różnicy, jaka dzieli błąd reprezentacji od średniego błędu anomalii dla dowolnego punktu mapy źródłowej przy gęstości punktów grawimetrycznych odpowiadającej gęstości wyznaczeń wartości średnich.

Można również takie mapy wartości średnich interpretować jako mapy wartości punktowych anomalii, odpowiadających punktom środkowym powierzchni uśredniania. Wielkości błędów wartości średnich, traktowanych jako wartości odpowiadające punktom środkowym, są zależne oczywiście od wielkości powierzchni uśredniania. Na przykład dla rejonu 1), scharakteryzowanego w poprzednim rozdziale, średni błąd średniej wartości anomalii Bouguera traktowanej jako wartość anomalii punktu środkowego (względem średniego pełnego błędu interpolacji), dla powierzchni

jednostkowej i powierzchni czterokrotnie od niej większej, tj. $2,3 \times 2$ km, wynosi odpowiednio:

$\pm 0,07$ i $\pm 0,12$ mgal — przy błędzie interpolacji równym $\pm 0,15$ mgal.

Dla rejonu 2) ten średni błąd dla powierzchni wymienionych powyżej wynosi odpowiednio:

$\pm 0,11$ i $\pm 0,26$ mgal — przy błędzie interpolacji $\pm 0,41$ mgal.

Oprócz powyżej przedstawionych, należy jeszcze omówić możliwość interpretacji średniej wartości anomalii grawimetrycznej jako wartości odpowiadającej „średniemu poziomowi” anomalii na danym obszarze.

W tym przypadku w przeciwieństwie do błędu reprezentacji, decydująca jest przede wszystkim ilość pojedynczych wyznaczeń, wchodzących do wartości średniej, tj. do średniej arytmetycznej z tych wyznaczeń. Błąd charakteryzujący średnią wartość anomalii w tym wypadku będzie średnim błędem średniej arytmetycznej.

Analizując opracowanie średnich wartości anomalii Faye'a i Bouguera, omówione w publikacji [4], przeprowadzono szereg wyznaczeń dotyczących określenia średnich błędów średniej wartości anomalii w tej interpretacji dla powierzchni $1'15'' \times 1'52,5''$ (tj. elementarnej) i jej wielokrotności cztero- i szesnastokrotnej.

Przy wyznaczaniu tych błędów, w których gra dużą rolę błąd anomalii dla punktu grawimetrycznego możliwe było, korzystając z dwukrotnych niezależnych pomiarów przyspieszenia siły ciężkości na pewnych obszarach, uwidocznili przynajmniej częściowo wpływ czynników systematycznych.

Na przykład dla źródłowych zdjęć grawimetrycznych III i częściowo II jakości wpływ systematyczny anomalii źródłowej wynikającej z błędności sieci lokalnej, może rozciągać się na obszary znacznej wielkości w zasięgu 1 lub kilku punktów sieci lokalnej.

W celu określenia omawianych błędów w odniesieniu do materiałów źródłowych opracowania średnich wartości anomalii wykorzystano scharakteryzowane w pracy [4] materiały z dodatkowych niezależnych wyznaczeń kontrolnych średnich wartości anomalii. Wyznaczenia takie przeprowadzono dla ok. 8% powierzchni opracowania [4].

Na podstawie dwukrotnych niezależnych zdjęć źródłowych wyznaczono różnice d średnich wartości anomalii z par tych wartości wyznaczonych odpowiednio z materiałów źródłowych jakości: I i I, I i II oraz I i III.

Dla pary materiałów jakości I i I różnice d potraktowano jako różnice par spostrzeżeń jednakowo dokładnych, obliczając na ich podstawie średnie błędy średnich wartości anomalii Faye'a i Bouguera $M'_{AB} = M'_{AF}$ według wzoru $M'_{AB} = \pm \sqrt{\frac{|dd|}{2n}}$, gdzie n — ilość par spostrzeżeń. Błędy te

charakteryzują dokładność anomalii źródłowej wraz z dokładnością wyznaczenia poprawki do jednolitego poziomu grawimetrycznego, a więc odpowiadają one łącznemu wpływowi średnich błędów m_{AB} i $m_{\Delta g}$. Natomiast błędy średnie określenia średnich wysokości eliminują się całkowicie z powodu występowania tych samych wartości H_{sr} zarówno w zasadniczych, jak i kontrolnych wyznaczeniach.

Dla par materiałów jakości I i II oraz I i III różnice d potraktowano jako błędy prawdziwe średnich wartości dla materiałów jakości II i III względem materiału I jakości. Odpowiednie błędy średnie policzono więc według wzoru

$$M'_{AB} = M'_{AF} = \pm \sqrt{\frac{dd}{n}},$$

gdzie n — ilość różnic d .

Wielkości powyższych błędów dla powierzchni elementarnych w kilku strefach wysokości npm. podano w tablicy 6.

Średnie błędy średnich wartości anomalii Bouguera (M'_{AB}) dla powierzchni elementarnych (w mgalach)

Tablica 6

Wysokość n.p.m. H m	Kategorie jakości materiału źródłowego		
	I—I	I—II	I—III
0 ÷ 200	± 0,06	± 0,063	—
200 ÷ 400	± 0,09	—	± 1,48
400 ÷ 800	—	± 1,00	± 1,80
800 ÷ 1200	—	—	± 4,47

Dla kolejnych wielokrotności powierzchni elementarnych, tj. dla powierzchni $2'30'' \times 3'45''$ i $5'00'' \times 7'30''$, określenie średnich błędów dla grup analogicznych jak podane w tablicy 6 nie było celowe; bowiem wielkości tych błędów i ich znak są uzależnione od omówionego już sposobu przenoszenia się wpływów systematycznych na średnie z tej wielkości obszarów.

Szereg wyznaczeń różnic d średnich wartości anomalii dla wyżej wymienionych powierzchni ($d_{(10)}$ i $d_{(25)}$ — odpowiednio) wskazuje, że:

1. Dla dużej części obszaru opracowania pokrytej materiałami I jakości i częściowo II jakości różnice te mają charakter przypadkowy i wobec tego stosuje się tu prawo przenoszenia się błędów Gaussa.

Tablica 7

Przykład przypadkowego rozkładu różnic $d_{(10)}$ i $d_{(25)}$ na arkuszu 1 : 100 000 z materiałów I i II jakości

+0,01	-0,16	-0,17	+0,35	-0,29	-0,24	+0,41	+0,32
+0,01		+0,07		-0,11		+0,22	
+0,37	-0,19	-0,08	+0,07	+0,18	-0,11	-0,16	+0,33
A				B			
+0,29	-0,57	+0,22	+0,32	0,00	-0,04	-0,22	-0,15
+0,11		-0,06		-0,06		-0,17	
+0,17	+0,55	-0,84	+0,04	-0,16	-0,02	-0,11	-0,11
-0,36	+0,21	-0,10	+0,16	+0,64	+0,64	-0,08	-0,17
-0,08		-0,13		+0,29		-0,10	
-0,11	-0,08	+0,12	-0,70	-0,12	-0,01	-0,04	-0,10
C				D			
0,00	+0,10	-0,02	+0,12	0,00	-0,07	-0,11	+0,37
+0,04		-0,05		+0,25		+0,23	
+0,07	-0,02	-0,28	-0,04	+0,79	+0,30	+0,47	+0,22

Przykład systematycznego rozkładu różnic $d_{(10)}$ i $d_{(25)}$ na arkuszu 1 : 100 000 z materiałów I i II jakości

Tablica 8

-0,80	-0,92	-0,61	-0,71	-0,43	-0,90	-0,70	-0,58
-0,64		-0,45		-0,36		-0,55	
-0,43	-0,41	-0,46	0,00	+0,17	-0,31	-0,44	-0,50
A				B			
+0,04	-0,52	-0,46	-0,14	-0,01	-0,38	-0,11	-0,01
-0,22		-0,25		-0,07		-0,08	
-0,04	-0,35	-0,54	+0,73	+0,17	-0,06	-0,22	+0,01
-0,03	-0,42	+0,54	+0,61	+0,48	-0,12	+0,08	+0,81
-0,09		+0,42		+0,26		+0,17	
-0,01	+0,07	-0,53	+0,06	+0,27	+0,43	0,00	-0,19
C				D			
+0,54	+0,19	+0,48	+0,34	+0,37	+0,65	+0,40	+0,19
+0,26		+0,42		+0,55		+0,28	
+0,09	+0,21	+0,42	+0,81	+0,63	+0,54	+0,39	+0,21

W tym wypadku średni błąd średniej arytmetycznej z n wielkości obarczonych jednakowym średnim błędem maleje w stosunku $\frac{1}{\sqrt{n}}$ do średniego błędu tych wielkości. A więc dla średnich odpowiadających powierzchniom $2'30'' \times 3'45''$ średni błąd określenia średniej anomalii może być w tym wypadku dwukrotnie lub blisko dwukrotnie mniejszy od średniego błędu dla powierzchni elementarnej. Analogicznie jest dla średnich, odpowiadających powierzchniom $5'00'' \times 7'30''$ w stosunku do średnich dla powierzchni $2'30'' \times 3'45''$.

2. Dla pozostałych materiałów wyznaczone różnice d są częściowo systematyczne dla pewnych części konkretnych materiałów źródłowych, a wyznaczone na ich podstawie błędy średnie wahają się w granicach od wielkości określonej w p. 1 do wielkości średniego błędu dla powierzchni elementarnej.

Dla ilustracji powyższych zależności między błędami średnimi średnich anomalii Bouguera (a tym samym i Faye'a) dla powierzchni elementarnych i ich wielokrotności wyznaczono różnice d dla dwóch przypadków: przypadkowego i systematycznego ich rozkładu na powierzchni arkusza 1 : 100 000. Różnice te między średnimi z materiału źródłowego I i II jakości, wyznaczone dla powierzchni $2'30'' \times 3'45''$ i $5'00'' \times 7'30''$ ($d_{(10)}$ i $d_{(25)}$ odpowiednio) dla strefy wysokości n.p.m. $0 \div 200$ m podano na schemacie

w tablicach 7 i 8. Policzone według wzoru $M'_{A_B} = \pm \sqrt{\frac{[dd]}{n}}$ średnie błędy średnich wartości anomalii dla powyższych powierzchni są odpowiednio:

$\pm 0,29$ i $\pm 0,14$ mgal — dla przykładu z tablicy 7,

$\pm 0,43$ i $\pm 0,37$ mgal — dla przykładu z tablicy 8.

Jest to zgodne z przewidywaną rachunkiem wyrównawczym wielkością kompensacji średnich błędów średniej arytmetycznej w stosunku do średnich błędów pojedynczych spostrzeżeń — w przypadku ich rozkładu przypadkowego na powierzchni uśrednienia, jak dla przykładu z tablicy 7 oraz w znacznym stopniu systematycznego, jak dla przykładu z tablicy 8.

Należy zaznaczyć, że występowanie pozostałości błędów systematycznych w opracowanych średnich wartościach dla niektórych najstarszych zdjęć źródłowych, wiąże się (w zakresie przeanalizowanych materiałów źródłowych) z błędami jednostki grawimetrycznej lub ze zbyt małą ilością danych, na podstawie których można określić wielkość poprawki δ_g dla tych materiałów.

Recenzował: dr inż. Jerzy Bokun

Rękopis dostarczono Redakcji w listopadzie 1969 r.

LITERATURA

- [1] *Baeschlin C.F.*: Lehrbuch der Geodäsie. Zürich 1948.
- [2] *Bajborodin A.I.*: K woprosu o wywodzie oszibok predstavitelstva i intierpolacii. Trudy CNIGAiK, wyp. 86, Moskwa 1951.
- [3] *Bokun J.*: Przygotowanie i opracowanie materiałów grawimetrycznych dla potrzeb polskiej sieci astronomiczno-geodezyjnej i sieci niwelacji precyzyjnej I klasy. Prace IGiK, nr 1/13/, 1958.
- [4] *Bokun J., Chowańska-Otyś D., Jędrzejewska M., Majewska M.*: Nowa metoda opracowania średnich wartości anomalii siły ciężkości na dużym obszarze i jej praktyczne zastosowanie. Prace IGiK, nr 1/40/, 1970.
- [5] *Bokun J., Chowańska D., Majewska M.*: Metoda przeprowadzenia wyznaczeń i obliczeń dotyczących opracowania średnich wysokości w Polsce. Prace IGiK, nr 2/29/, 1966.
- [6] *Burša M.*: Odvození chyby z interpolace Bouguerových anomalii na uzemi Čech. Geofysikalni Sbornik, nr 148, 1961.
- [7] *Ewsiejew S.W.*: O niekötorych zakonomiarnostiach grawitacjonnowo pola Ziemi i ich znaczenii dla gieodezii i gieofiziki. Kijew 1957.
- [8] *Graff Hunter J.*: The Figure of the Earth from Gravity Observations and Precision Obtainable. Phil. Trans. of the Roy. soc. London, ser A, 234/1935/, 743.
- [9] *Goworowa L.A.*: K woprosu ob oszibkach predstavitelstva i intierpolacii anomalii siły tiazesti. Sbor. refer. CNIGAiK, wyp. 4, 1955.
- [10] *Gruszinskij N.P.*: Ob oszibkach intierpolacii i predstavitelstva dietal'nych grawimietricheskich sjomok, tocznosti kart i celesoobraznom razmieszczenii punktow. Astr. Żur., XXXIV, nr 2, 1957.
- [11] *Heiskanen W.A.*: Present Problems of Physical geodesy. Ann. Scient. Acad. Fennicae, ser. A, III, geol.-geogr., 82, Helsinki 1965.
- [12] *Izotow A.A.*: Forma i razmiery Ziemi po sowriemiennym dannym, Moskwa 1950.
- [13] *Molodenskij M.C.*: Osnownyje woprosy gieodieziceskoj grawimietrii. Trudy CNIGAiK, wyp. 42, Moskwa 1945.
- [14] *Molodenskij M.C., Eremiejew W.F., Jurkina M.I.*: Metody izuczenja wniesz-niewo grawitacjonnowo pola Ziemi. Trudy CNIGAiK, wyp. 131, Moskwa 1960.
- [15] *Moritz H.*: Interpolation and Predication of Point Gravity Anomalies. Ann. Acad. Scient. Fennicae, ser. A, geol.-geogr., 69, 1963.
- [16] *Moritz H.*: Accuracy of Mean Gravity Anomalies from Point and profile Measurements. Ann. Acad. Scient. Fennicae, ser. A, III, Geol.-geogr., 76, Helsinki 1964.
- [17] *Szabo B.*: Comparison of the Deflection of the Vertical Components computed by Astro-Geodetic, Gravimetric and Topographic Techniques. Bull. Geod., nr 65, 1962.
- [18] *Tengstrom E.*: Report of Geoidal Investigations at the Institute of Geodesy, University of Uppsala, Sweden, Stockholm 1957.
- [19] *Tengstrom E.*: The present State of the Test Work in the Westalps. Uppsala 1965.
- [20] *Tengstrom E.*: Test Area in the West Alps. Studia geoph. et geod., 9, 1965.
- [21] *Vyskoczil V.*: K woprosu ob opriedielenii tocznosti intierpolirowanii w grawimietricheskich karta. Studia geoph. et geod., 7, (1963), 228.
- [22] *Vyskoczil V., Chudoba I.*: Tocznost grawimietricheskoj karty 1 : 200 000. Gieofizikalni sbornik, nr 180, 1963.
- [23] *Vyskoczil V.*: K woprosu ob ocenkie tocznosti grawimietricheskich kart. Studia geoph. et geod., 7, 1963, 134.

АНАЛИЗ ТОЧНОСТИ ОБРАБОТКИ СРЕДНИХ ЗНАЧЕНИЙ АНОМАЛИИ СИЛЫ ТЯЖЕСТИ

Резюме

Проблема оценки точности представления поля силы тяжести и его аномалии на данной территории является трудной и сложной. При этом появляется необходимость учёта большого количества факторов, влияющих на эту точность, как во время процесса измерения значений ускорения силы тяжести и их выражения в единицах ЦГС, так и во время вычислительно-графического процесса, связанного с изображением аномалии силы тяжести в картографическом виде.

Одним из наиболее трудных вопросов является выделение и исключение систематических ошибок гравиметрических съёмок выполненных в разное время и разными инструментами.

Дополнительные проблемы появляются при определении точности средних величин гравитационных аномалии для данных площадей, то есть для площадок осреднения. В этом случае следует определить, как интерпретировать такую среднюю величину в зависимости от цели, для которой она должна быть использована:

- 1) как представление физического поля силы тяжести на некоторой площади отдельно в каждой её точке;
- 2) как значение, соответствующее серединной точке площадки осреднения или же
- 3) как численное значение некоторого среднего „уровня аномалии“.

В первой интерпретации точность среднего значения аномалии для некоторой площади определяется (по терминологии, введенной Графф-Хунтером [8]) так называемой „ошибкой представительства“ выраженной в формуле (12).

Последняя интерпретация влечёт за собой оценивание значения средней аномалии при помощи средней ошибки среднего арифметического, которая, в отличие от ошибки представительства, быстро уменьшается одновременно с количеством определений, входящих в среднюю — при случайном разбросе ошибок.

Учитывая вышеуказанные возможности интерпретации, стала разработана методика и проведенный анализ точности обработки средних значений аномалии Фая и Буге [4]. Такая работа была выполнена в Польше в первый раз при использовании специального метода [4] унифицирования исходных данных, в котором средние значения аномалии определяются непосредственно по исходным данным, а затем вводятся соответствующие поправки и пересчитываются по формулам (1) и (2).

Исходные данные в виде аномалии Буге являются в свою очередь, значениями функции, определяемой формулой (6).

Весь этот вычислительный процесс был проанализирован в ряде вариантов, соответствующих разнородным характеристикам гравиметрических исходных съёмок с точки зрения точности измерений, уровня и гравиметрической единицы, принятой плотности породы, высоты над уровнем моря и подробностей представления поля силы тяжести.

Определенные величины средних ошибок были отнесены к среднему значению аномалии для такой соответствующе малой площади (назовем её „нулевой площадью“), для которой в некоторых границах точности, ошибка представительства

равняется ошибке интерполяции, определённой формулой (5), для того же самого гравиметрического снимка.

Эта методика позволяет получить основной сравнительный материал для оценки точности во всех перечисленных выше интерпретациях средних значений, а также в случае полного использования точностных возможностей исходных материалов.

Величины ошибок поправок по отношению к единому гравиметрическому уровню и ошибок приведения к постоянной плотности σ (ошибки группы Б), определённых формулами (10) и (11), содержатся в таблице 2, а также на графике 1.

Величины ошибок, относящихся к исходным аномалиям, то есть аномалиям, представленным на исходных картах (группа ошибок А), определённых формулами: (5), (7), (8), (9), содержатся в таблице 1. Суммарное влияние ошибок групп А и Б (формулы (3) и (4)) находится в таблице 3, а также на графике 1.

Результаты сравнения ошибок группы А и Б указывают на то, что:

1. В случае аномалии Буге ошибки поправок унифицирования, выполненных по методу, описанному в [4], значительно меньше влияют на вычисляемые значения аномалии, чем ошибки исходных аномалий.

2. Для аномалии Фая влияние ошибок группы Б зависит, в первую очередь, от точности определения высоты, используемой для вычислений. Для низменных территорий с высотой до 200 м над уровнем моря это влияние того же порядка, что точность определения исходных аномалий; для гористых территорий — значительно увеличивается.

На основании вышеуказанного материала анализа точности можно затем получить точности обработанных средних значений аномалии для различных величин средних поверхностей и для различных интерпретации средних аномалии.

При интерпретации (1), под которой понимается среднее значение аномалии, использованные для определения уклонов отвеса или расстояний между геоидом и эллипсоидом относимости ((1), (8), (13), (14)), чаще всего рассматривается случай, когда на среднюю площадь (назовём её здесь „единичной площадью“) приходится в среднем 1 гравиметрический пункт. В этом случае, как показали исследования (в трудах [10], [13], [14]) зависимости ошибки представительства и интерполяции, для редких съёмок со средними расстояниями между гравиметрическими пунктами порядка нескольких десятков километров, ошибка представительства равняется (в границах точности её определения) ошибке интерполяции, представленной формулой (5). Для подробных съёмок со средним расстоянием между пунктами порядка нескольких километров, величина ошибки представительства в 1,5 или 2 раза больше ошибки интерполяции.

Для анализа средних значений аномалий, разрабатываемых в Польше, было определено, что в границах средних плотностей исходных съёмок I и II ряда качества от 1,5÷2,0 до 0,25 точек на квадратный километр:

- 1) ошибка представительства для единичной площади в достаточном приближении в два раза больше ошибки интерполяции;

- 2) для площадей в 4 раза меньшей, чем единичная площадь, ошибка представительства в достаточном приближении равняется ошибке интерполяции;

- 3) для очередных многократностей нулевой площади ошибка представительства увеличивается в два раза при четырехкратном увеличении площади осреднения (для площадей осреднения размером до 5'00"×7'30");

- 4) в большинстве случаев характер изменчивости аномалии таков, что ошибка среднего значения аномалии вычисленного для некоторой площади, примерно

в два раза меньше для центральной зоны, равной $1/4$ этой площади, и уменьшается по направлению к серединной точке этой площади.

Эти закономерности позволяют на основании величин средних ошибок группы А и Б определить в описываемом диапазоне величины ошибок представительства для средних значений аномалии, соответствующих последовательным многократностям нулевой площади. Кроме того такой разброс ошибок на средней поверхности позволяет ограничивать диапазон представительства данного среднего значения, что, как нам кажется, могло бы быть иногда выгодным технически и с точки зрения точности, например, при определениях отклонения отвеса.

Проведем также ряд определений средних ошибок средних значений аномалии в интерпретации 3). Используя при этом двукратные независимые измерения ускорения силы тяжести, можно было указать, по крайней мере частично, влияние систематических ошибок.

Величины средних ошибок для площадей $1'15'' \times 1'52,5''$, а также их многократности, определяются значениями, содержащимися в таблице 6, а их случайный или систематический разброс и способ переноса ошибок в этих случаях — разностью двух независимых определений средних аномалий, сведенной в таблицы 7 и 8.

AN ANALYSIS OF THE ACCURACY OF DETERMINATION OF MEAN VALUES OF GRAVITY ANOMALIES

Summary

The problem how to appraise for a given area the accuracy of the determination of the values of gravity anomalies is a difficult and complicated matter. The reason is that a great variety of factors must be taken into consideration which affect this accuracy, both in surveying the values of gravity acceleration including their interpretation in cgs units, and when it comes to calculating data and presenting graphically the field of gravity anomalies in cartographic form.

One of the more difficult tasks is here to identify and eliminate any systematic errors in the gravimetric surveys which had been made at different periods of time and by the use of different instruments.

Further problems arise, when the accuracy of the mean values of the gravity anomalies is to be defined for a given area, i.e. the „averaging area”. In this case it must be decided how a mean value is to be interpreted depending on the purpose it is to serve, such as:

1) to be the physical representative of the gravity field of a given area, separately for each of its points,

2) to be the value which corresponds to the centre point of a given averaging area, or

3) to be the numerical value of some mean „level of anomalies”.

When the interpretation given in 1) is applied, the accuracy of the mean value for a given area is defined, in accordance with the terminology introduced by Graff Hunter (8), by what is called the „error of representation”; this error is expressed by Equation (14). Interpretation 3) leads to the appraisal of the mean value of the anomalies by means of the mean error of the arithmetic mean; this error, in contrast to the error of representation, rapidly decreases parallel with the number of determinations making up the arithmetic mean, when the errors are distributed accidentally.

In consideration of the admissible interpretation mentioned above, the author has established her own procedure and has made an analysis of the accuracy with which mean values of Faye's and Bouguer's anomalies have been determined in the Institute of Geodesy and Cartography (4). In Poland this sort of determinations was made for the first time; in it an original method (4) has been applied for standardizing source data, and in this method the mean values of anomalies are defined directly from the available source material and, afterwards, they are suitably reduced and recalculated in accordance with Equations (1) and (2).

In turn, the source data in the form of Bouguer's anomalies are values of the function defined by Equation (6).

The author has studied this process of calculations in a number of varieties which are adjusted to the diversified characteristic gravimetric features of the source surveys as to the accuracy of measurements, their gravimetric level and the gravimetric unit involved, the assumed density σ of the substratum, the altitude a.s.l. and the detailed way how the gravity field has been presented.

The author referred the determined values of the mean errors of the mean value of the anomalies to a suitably small area which she calls „zero area” and for

which the error of representation — allowing for certain limits of accuracy — equals the error of interpolation defined by Equation (5) for the same gravimetric source map.

The application of this method makes it possible to obtain some basic correlative material for appraising the accuracy of all above mentioned interpretations of the mean values, including cases when accuracy possibilities of the source materials are fully taken advantage of.

The author indicates the errors made in the corrections for the uniform gravimetric level and the errors in reducing to constant densities σ (Errors of Group B) as defined by Equations (10) and (11), in Table 2 and in diagram 1. The errors referring to „source anomalies” presented in source maps (Error Group A) as defined by Equations (5), (7), (8), (9), she presents in Table 1. Finally she indicates the combined influence of the errors of Groups A and B (Equations (3) and (4)) in Table 3 and by diagram 1.

The results of comparing the errors of Groups A and B reveal that:

1. As regards the Bouguer anomalies the errors in corrections and reductions made by the method described in (4) affect the calculated values of anomalies much less than do the errors of source anomalies.

2. For Faye's anomalies the influence of errors of Group B depends primarily on the accuracy how the altitudes used in the calculations have been determined: for lowland areas, up to some 200 m a.s.l., this influence is of the same order as the accuracy of defining source anomalies, while for mountain areas it increases considerably.

Using as basis the above material for accuracy analyses one can now obtain accuracies of the determined mean values of anomalies for a variety of averaging areas and for the different interpretations of the mean values.

In interpretation 1) in which are taken into account the mean values of anomalies used for defining deflections of the vertical or dissimilarities between the geoid and the reference ellipsoid ((1), (8), (13), (14)), most often is considered the case when any averaging area which here shall be called „unit area” averages one gravimetric point. In cases like this, investigations (like in (10), (13), (14)) of the interdependence between the error of representation and that of interpolation indicate, that for thinly scattered gravimetric surveys with medium — wide distances between gravimetric points of the order of a few scores of kilometers the error of representation equals — allowing for certain limits of accuracy — the error of interpolation as presented by Equation (5). For detailed surveys where the average distance between points is of the order of up to several kilometers, the value of the error of representation is reported to be 1,5 to 2 times greater than the error of interpretation.

For the requirements of an analysis of the mean values of anomalies as they are being compiled in Poland, it has been established that in the range of medium-size densities of source surveys of first and second quality, that is, in the range from 1,5 to 2,0 points down to only 0,25 points per sq. km:

- 1) the error of representation for a unit area is, in fair approximation, twice as large as the error of interpretation,

- 2) for an area only one fourth the size of a unit area, the error of representation is practically identical with the error of interpretation,

- 3) for successive multiples of the zero area the error of representation rises to twice its value for every fourfold increase in averaged area, for averaging areas up to $5,0' \times 7,5'$ size,

4) in the majority of cases the character of the changes in anomalies in such, that the error in mean values calculated for a certain area is approximately one half as great for the central part of that area comprising one fourth of this area, and that the error decreases the nearer the centre of the area is approached.

These regularities make it possible to determine within the range mentioned, on the basis of the values of the mean errors of Groups A and B, the values of the error of representation for those mean values of anomalies which correspond to successive multiples of the zero area. Moreover, due to this distribution of errors on an averaged area one can limit the range of representation of the given mean value, one can interpolate between mean values or intersect the ranges of representation of adjoining mean values all of this ostensibly might at times prove useful with regard to accuracy and technical reasons, such as when determining gravimetric deflections of the vertical.

The author made a series of determinations of the mean values of the mean anomalies for interpretation 3). By making use of twice repeated independent measurements of gravity acceleration it became possible to indicate, partly at least, the influence exerted by systematic errors.

The values of the mean errors for an area of $1'15'' \times 1'52,5''$ and their multiplies are illustrated by the values given in Table 6, while their accidental or systematic distribution and the way how in such cases errors are transmitted, i.e. the differences of two independent determinations of mean anomalies, are listed in Tables 7 and 8.