

Analiza dokładności polskiej sieci niwelacji precyzyjnej I klasy wzorami Vignala

1. Wstęp

Pomiar niwelacyjny, ze względu na swą specyfikę, nie jest łatwy do oceny dokładnościowej. Specyfika ta, to m. in. fakt, że przynajmniej częściowo niezależne kontrole dotyczą tu nie kilku wielkości obserwowanych wielokrotnie — jak to ma miejsce np. w triangulacji — lecz paru wyznaczeń ich sumy, składającej się z wielu pojedynczych elementów obserwowanych, tj. sumy wyznaczonych przewyższeń na wielu stanowiskach między sąsiednimi reperami, czy też na całej linii. Fakt ten pociąga za sobą dużą niepewność oceny błędu pomiaru i wyników niwelacji, a w zależności od przyjętego sposobu tej oceny, daje możliwość uzyskania wyraźnie różnych charakteryzujących ją liczbowo wielkości.

Początkowo pomiary dużych sieci niwelacji precyzyjnej charakteryzowane były jedynie średnim błędem całkowitym, którego wyznaczenie oparte było na różnicach między wynikami dwu pomiarów („tam” i „z powrotem”) odcinków lub linii, oraz na niezamknięciach poligonów niwelacyjnych.

Następną, lepszą już aproksymację występujących związków między różnicami wielkości mierzonych, a ich błędami, dały wzory opracowane przez geodetę francuskiego Ch. Lallemanda. Wzory te, zalecone do stosowania przez Międzynarodową Asocjację Geodezji (MAG) w 1912 r., wydzielają dwie części całkowitego błędu niwelacji — błąd przypadkowy (η) i błąd systematyczny (σ).

Jednak i te wzory wzbudzały pewne zastrzeżenia w związku ze swymi upraszczającymi założeniami.

Celem uniknięcia tych założeń i oparcia analizy dokładności sieci niwelacyjnej o większą ilość charakteryzujących ją elementów, prof. J. Vignal — również Francuz — zaproponował cały zespół wzorów i dodatkowe kryteria.¹⁾ Wzory te zostały zaakceptowane przez MAG w czasie Ogólnego

¹⁾ Jean Vignal, profesor fizyki Szkoły Politechnicznej w Paryżu, główny inżynier górniczy, wybitny specjalista z zakresu teorii niwelacji precyzyjnej, piastujący

Zgromadzenia Międzynarodowej Unii Geodezyjno-Geofizycznej (MUGG) w 1948 r. w Oslo.

Dokładność pomiaru linii polskiej sieci niwelacji precyzyjnej I klasy, pomierzonej w latach 1952—1955, w momencie jej opracowywania oceniana była wzorami Lallemanda, co jest prawie powszechnie stosowane. Celowe więc jest bardzo powtórne wykonanie analizy dokładności tej sieci, tym razem wzorami Vignala. Tym bardziej, że pierwsza analiza sieci nie była pełna.

Analiza sieci wzorami Vignala pozwoli na ocenę przydatności tych wzorów do innych tego typu analiz oraz na określenie stopnia zbieżności ich oceny dokładności sieci niwelacyjnej z oceną wzorami Lallemanda i innymi.

Analiza państwowej sieci niwelacji precyzyjnej I klasy wzorami Vignala — pierwsza tego rodzaju analiza sieci w Polsce — pozwoli też m. in. na porównanie dokładności, a właściwie — wyznaczonych dla niej błędów, z analogicznymi błędami podstawowej sieci niwelacji precyzyjnej CSRS, której charakterystyka dokładności dokonana została tymi samymi wzorami [1].

Całość opracowania tego tematu wykonana została w Pracowni Niwelacji Precyzyjnej i Ruchów Skorupy Ziemskiej IGiK w latach 1967—1969, przy czym jeden z etapów wstępnych (wyznaczenie wielkości Z) opracowano już w roku 1966. Temat prowadzony był przez dr inż. T. Wyrzykowskiego, a część obliczeniowa w przeważającej części wykonana została przez mgr inż. T. Baranowską i techn. Z. Stelmaszuk. Fragment dotyczący wyrównania sieci wykonany został przy udziale Zakładu Rachunków i Obliczeń Geodezyjnych IGiK (wyrównanie sieci na maszynie elektronicznej).

2. Ogólna charakterystyka sieci

Polska sieć niwelacji precyzyjnej I klasy pomierzona została w całości w latach 1952—1955. Składają się na nią linie tworzące 8 dużych poligonów i 4 małe — przy punktach wiekowych — oraz 17 krótkich linii do granicznych. Ogólna długość linii sieci wynosi około 5500 km [2], [6], [7].

Do pomiaru używane były następujące typy niwelatorów precyzyj-

przez wiele lat wysokie godności w Międzynarodowej Asocjacji Geodezji, zmarł 29 lutego 1969 r. W sprawach teoretycznych problemów, związanych z zastosowaniem wzorów Vignala do polskiej sieci niwelacji precyzyjnej I klasy, autor niniejszego opracowania korespondował z twórcą tych wzorów prof. J. Vignalem. Przyjęta koncepcja opracowania analizy, odpowiednia do specyfiki tej sieci, znalazła jego poparcie.

nych: a) Wild NIII, z kompletami łań inwarowych o podziale 10-milimetrowym, b) radzieckie NA-1, z łań inwarowymi o podziale 5-milimetrowym. Normalnie stosowano celowe o długości 40 m; dopuszczalna najkrótsza długość celowej — 8 m. Najniższy przebieg celowej ponad ziemią — 0,8 m (w wyjątkowych przypadkach — 0,5 m). Do 1954 r., czyli przy pomiarze zachodniej części sieci, stosowana była metoda pomiaru przy użyciu 2 klinów, od 1954 r. (wschodnia część sieci) stosowano metodę pomiaru na 4 kliny. Komparację łań wykonywano w Głównym Urzędzie Miar, ze średnim błędem $\pm 0,03$ mm/m, przed i po sezonie pomiarowym.

Zamierzoną dokładność pomiaru sieci charakteryzują następujące przyjęte kryteria [8]:

a) różnice przewyższeń (q), wyznaczonych dla odcinka między sąsiednimi reperami z pomiaru „tam” i „z powrotem”, musiały być mniejsze niż ± 2 mm $\sqrt{R}$, gdzie R — długość odcinka w km,

b) suma różnic q dla danej linii, lub sekcji, nie mogła przekraczać wielkości ± 3 mm $\sqrt{L}$, gdzie L — długość linii lub sekcji w km,

c) średni błąd pomiaru 1 km sekcji, obliczany według wzoru:

$$m_0 = \pm \frac{1}{2} \sqrt{\left[\frac{q^2}{R} \right] \cdot \frac{1}{n_R}}, \quad (1)$$

gdzie n_R — ilość odcinków,

musiał być mniejszy od $\pm 0,50$ mm,

d) średnie błędy obliczane według wzorów Lallemenda dla poszczególnych linii powinny być:

$$\text{błąd przypadkowy } \eta \leq 0,75 \text{ mm/km}, \quad (2)$$

$$\text{błąd systematyczny } \sigma \leq 0,20 \text{ mm/km}. \quad (3)$$

Uzyskaną dokładność pomiaru niwelacji charakteryzują następujące błędy średnie 1 km linii, wyznaczone dla całej sieci z różnic między wynikami pomiaru „tam” i „z powrotem”.

Z różnic na poszczególnych odcinkach:

$$m_1 = \pm \frac{1}{2} \sqrt{\left[\frac{q^2}{R} \right] \cdot \frac{1}{n_R}} = \pm 0,397 \text{ mm}, \quad (4)$$

gdzie $n_R = 4202$,

z różnic na liniach:

$$m_2 = \pm \frac{1}{2} \sqrt{\left[\frac{\mu^2}{L} \right] \cdot \frac{1}{n_L}} = \pm 0,701 \text{ mm}, \quad (5)$$

gdzie $n_L = 200$,

z niezamknięć poligonów: ²⁾

$$m_3 = \pm \sqrt{\left[\frac{\varphi^2}{F}\right] \cdot \frac{1}{n_F}} = \pm 0,723 \text{ mm}, \quad (6)$$

gdzie $n_F = 13$

(łącznie z poligonem obwodowym).

Dokładność pomiaru 1 km linii, względnie sekcji, oceniana była wzorami Lallemanda, określającymi średni błąd przypadkowy (η) i systematyczny (σ). Wartości tych błędów w odniesieniu do całej sieci wyniosły:

średni błąd przypadkowy:

$$\eta = \pm \frac{1}{2} \sqrt{\left[\frac{q^2}{L}\right] - \frac{[R^2]}{[L]^2} \cdot \left[\frac{p^2}{L'}\right]} = \pm 0,373 \text{ mm}, \quad (7)$$

gdzie przeciętna długość odcinka linii, dla którego wyznaczano linię wyrównującą wynosiła $L_m' = 29 \text{ km}$, a ich suma: $[L] = 5650 \text{ km}$,

średni błąd systematyczny:

$$\sigma_p = \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{[L]} \cdot \left[\frac{p^2}{L'}\right]} = \pm 0,131 \text{ mm}, \quad (8)$$

oraz

$$\sigma_\varphi = \pm \sqrt{\frac{1}{[L^2]} \left\{ \left[\frac{\varphi^2}{2}\right] - \eta^2 \cdot [L] \right\}} = \pm 0,114 \text{ mm}, \quad (9)$$

(łącznie z poligonem obwodowym).

Omawiana sieć niwelacji precyzyjnej I klasy została początkowo obliczona w systemie wysokości ortometrycznych normalnych, jako sieć niezależna odniesiona do punktu wyjściowego Toruń — Ratusz (punkt główny sieci niwelacji I rzędu z lat 1926—37), którego wysokość wyrażona była w poziomie N. N. (Normal-Null) [2]. Ostatecznie materiał sieci został obliczony w systemie wysokości normalnych w odniesieniu do poziomu zera łaty wodowskazowej w Kronsztadzie.

3. Charakterystyka sieci pod kątem zastosowania analizy dokładności wzorami Vignala

Wzory Vignala służą do określenia zespołu wielkości błędów prawdopodobnych, w oparciu o wartości średnie wyznaczone z materiału całej badanej sieci niwelacji precyzyjnej. Ponieważ wartości średnie są tym pewniejsze z im większej ilości pojedynczych elementów są wyznaczane, wobec tego i analiza sieci niwelacyjnej wzorami Vignala jest tym pewniejsza im obszerniejszego i bardziej jednorodnego materiału dotyczy.

²⁾ Po wprowadzeniu poprawek w systemie wysokości normalnych.

Pod tym względem polska państwowa sieć niwelacji precyzyjnej I klasy, mierzona w latach 1952—1955, ma dwa zasadnicze mankamenty.

Pierwszy to to, że pomiar sieci, w jej części zachodniej i wschodniej, był wykonywany dwoma różnymi metodami (pomiar na 2 i 4 kliny). Otrzymany w ten sposób materiał pomiarowy sieci nie jest więc jednorodny.

Drugą ujemną cechą analizowanego materiału sieci jest niewielka ilość zamkniętych poligonów (osiem). Wynika stąd mniejsza pewność oceny dokładności sieci w oparciu o wielkości błędów niezamknięć (φ) tej niewielkiej ilości stosunkowo dużych poligonów, a pośrednio i w oparciu o poprawki linii otrzymane z wyrównania. Mała ilość poligonów wiąże się też bezpośrednio z występowaniem bardzo długich linii niwelacyjnych i niewielką ich ilością.

Sieć o tak małej gęstości linii i znacznej ich długości nie tworzy dogodnego materiału do analizy wzorami Vignala. Z jednej strony bowiem nie pozwala na określenie wartości Z na podstawie wielkości u_{F_1} , gdyż brak jest wystarczającej ilości poligonów o różnych przejściowych długościach. Z drugiej strony, mała ilość linii nie daje pewnego materiału dla wyznaczenia średnich wartości $\frac{\lambda^2}{L}$ oraz $\frac{\mu^2}{L}$.

Ze względu więc na niejednorodność materiału pomiarowego, należało rozbić go przy analizie na dwie części, osobno obliczając niektóre elementy dla zachodniej części sieci, mierzonej przy użyciu 2 klinów, oraz osobno dla części wschodniej, mierzonej przy użyciu 4 klinów.

Celem ujednolicenia materiału nie uwzględnione zostały w analizie linie wiszące (dograniczne), które nie wchodziły do wyrównania sieci, a tym samym nie mogłyby być analizowane wszystkimi wzorami Vignala.

Z materiału sieci zostały też odrzucone bardzo krótkie linie tworzące 4 małe, kilkunasto- i kilkudziesięcio kilometrowe poligoniki przy punktach wiekowych (Łęczyca, Jaroty, Wilkowo i Borów). Włączenie ich stworzyłoby bardzo niejednorodny pod względem długości linii materiał.

Ogólna długość około 5650 km linii sieci została więc zmniejszona o około 830 km i ostatecznie analizie podlegał materiał ponad 4820 km linii niwelacyjnych.

4. Określenie wartości Z

Określenie wartości Z , tj. długości linii powyżej której błędy systematyczne nabierają charakteru błędów przypadkowych — potrzebne dla właściwego ustawienia dalszej analizy sieci — wykonane zostało w sposób następujący.

Z całego materiału sieci niwelacji precyzyjnej I klasy zostały wybrane 34 odcinki, mające początkowo po 90 km, a następnie uzupełnione do 120 km. Z ogólnej ilości 34 odcinków 14 było pomierzonych metodą na 2 kliny (metoda A), a 20 — metodą na 4 kliny (metoda B). Odcinki te zostały osobno zgrupowane, stanowiąc oddzielne materiały do analizy.

W celu wyznaczenia zmienności wartości wielkości $u_L = \pm \frac{1}{3} \sqrt{\text{śr.} \frac{\lambda^2}{L}}$ oraz $v_L = \pm \frac{1}{3} \sqrt{\text{śr.} \frac{\mu^2}{L}}$, jako funkcji długości linii niwelacyjnej, z całych 120-kilometrowych odcinków wydzielono odcinki 10, 20, 30... 120 kilometrów. Dla tak utworzonych i pokrywających się częściowo odcinków, wartości u_L i v_L obliczone były jako:

$$u'_L = \pm \frac{1}{3} \sqrt{\frac{1}{n_L} \cdot \left[\frac{\lambda^2}{L} \right]}, \quad (10)$$

$$v'_L = \pm \frac{1}{3} \sqrt{\frac{1}{n_L} \cdot \left[\frac{\mu^2}{L} \right]}, \quad (11)$$

oraz jako:

$$u''_L = \pm \frac{1}{3} \sqrt{\frac{[\lambda^2]}{[L]}}, \quad (12)$$

$$v''_L = \pm \frac{1}{3} \sqrt{\frac{[\mu^2]}{[L]}}, \quad (13)$$

gdzie:

λ — suma różnic przewyższeń z pomiaru „tam” i „z powrotem” obliczona dla odcinka o długości L , czyli $\lambda = [\varrho]$,

μ — analogiczna suma różnic przewyższeń wyznaczona za pomocą linii wyrównującej dla długości L .

Zestawienie wymienionych powyżej wartości u_L i v_L , dla długości linii $10 \leq L \leq 120$ km, z rozbiciem na metodę A i B oraz dla całego materiału, zawiera tablica 1.

Warto zaznaczyć, iż linie wyrównujące dla obliczenia wartości v'_L i v''_L wyznaczane tu były w sposób przybliżony, tzn. metodą graficzną.

Wykres zmienności wartości u'_L dla dwu grup linii mierzonych różnymi metodami, przedstawiony jest na rysunku 1. Analogicznie na rysunku 2 przedstawiono zmienność wartości v'_L , a na rysunku 3 — zmienność wartości u'_L i v'_L , obliczonych dla całości materiału.³⁾

Należy stwierdzić, że wykresy zmienności wartości u'_L i v'_L nie wskazują na występowanie wyraźnej granicy (Z), począwszy od której błędy

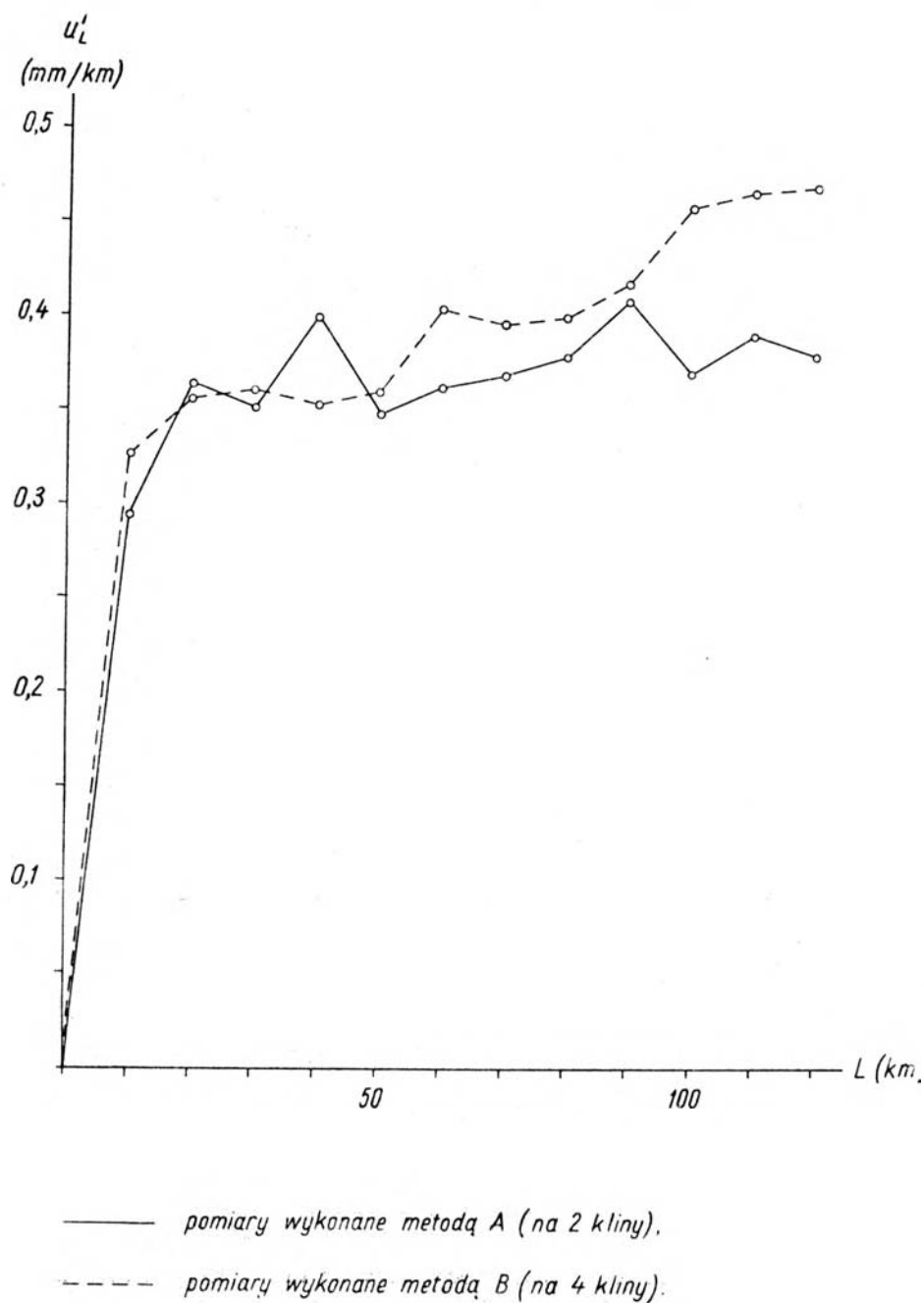
³⁾ Na rys. 1, 2 i 3 naniesione zostały jedynie wykresy wartości u'_L i v'_L , gdyż wartości u''_L i v''_L były prawie identyczne.

Zestawienie wartości wielkości, u'_L , u''_L , v'_L i v''_L dla różnych długości linii

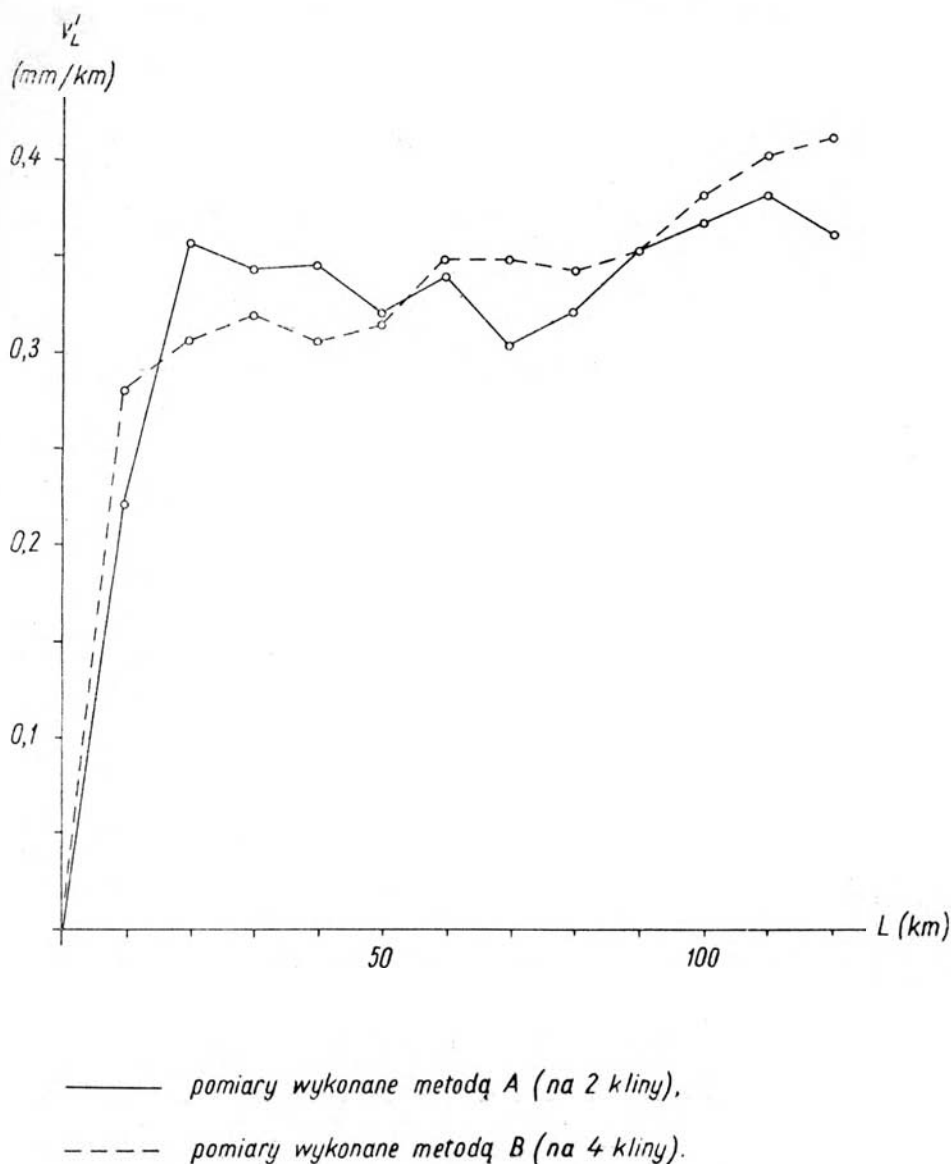
T a b l i c a 1

L (km)	10				20				30				40			
Wielkość	u'_L	u''_L	v'_L	v''_L	u'_L	u''_L	v'_L	v''_L	u'_L	u''_L	v'_L	v''_L	u'_L	u''_L	v'_L	v''_L
Dla pomiaru:																
metodą A	0,292	0,293	0,220	0,220	0,361	0,361	0,355	0,355	0,350	0,351	0,343	0,345	0,399	0,399	0,345	0,345
metodą B	0,324	0,324	0,279	0,279	0,355	0,355	0,306	0,306	0,359	0,361	0,319	0,320	0,351	0,351	0,306	0,306
Cała sieć	0,311	0,311	0,256	0,256	0,357	0,357	0,327	0,327	0,355	0,357	0,329	0,330	0,372	0,372	0,323	0,323
L (km)	50				60				70				80			
Wielkość	u'_L	u''_L	v'_L	v''_L	u'_L	u''_L	v'_L	v''_L	u'_L	u''_L	v'_L	v''_L	u'_L	u''_L	v'_L	v''_L
Dla pomiaru:																
metodą A	0,348	0,348	0,320	0,320	0,361	0,358	0,339	0,335	0,368	0,372	0,304	0,308	0,379	0,387	0,322	0,329
metodą B	0,359	0,359	0,314	0,314	0,402	0,398	0,349	0,346	0,395	0,399	0,349	0,353	0,399	0,408	0,342	0,349
Cała sieć	0,355	0,355	0,316	0,317	0,385	0,382	0,345	0,342	0,384	0,388	0,331	0,335	0,391	0,399	0,334	0,341
L (km)	90				100				110				120			
Wielkość	u'_L	u''_L	v'_L	v''_L	u'_L	u''_L	v'_L	v''_L	u'_L	u''_L	v'_L	v''_L	u'_L	u''_L	v'_L	v''_L
Dla pomiaru:																
metodą A	0,408	0,410	0,354	0,356	0,370	0,371	0,367	0,367	0,390	0,390	0,383	0,383	0,380	0,381	0,362	0,363
metodą B	0,418	0,420	0,353	0,355	0,458	0,458	0,381	0,381	0,466	0,466	0,403	0,403	0,469	0,470	0,412	0,413
Cała sieć	0,414	0,416	0,353	0,355	0,424	0,424	0,375	0,375	0,437	0,437	0,395	0,395	0,435	0,436	0,392	0,393

(w mm/km)



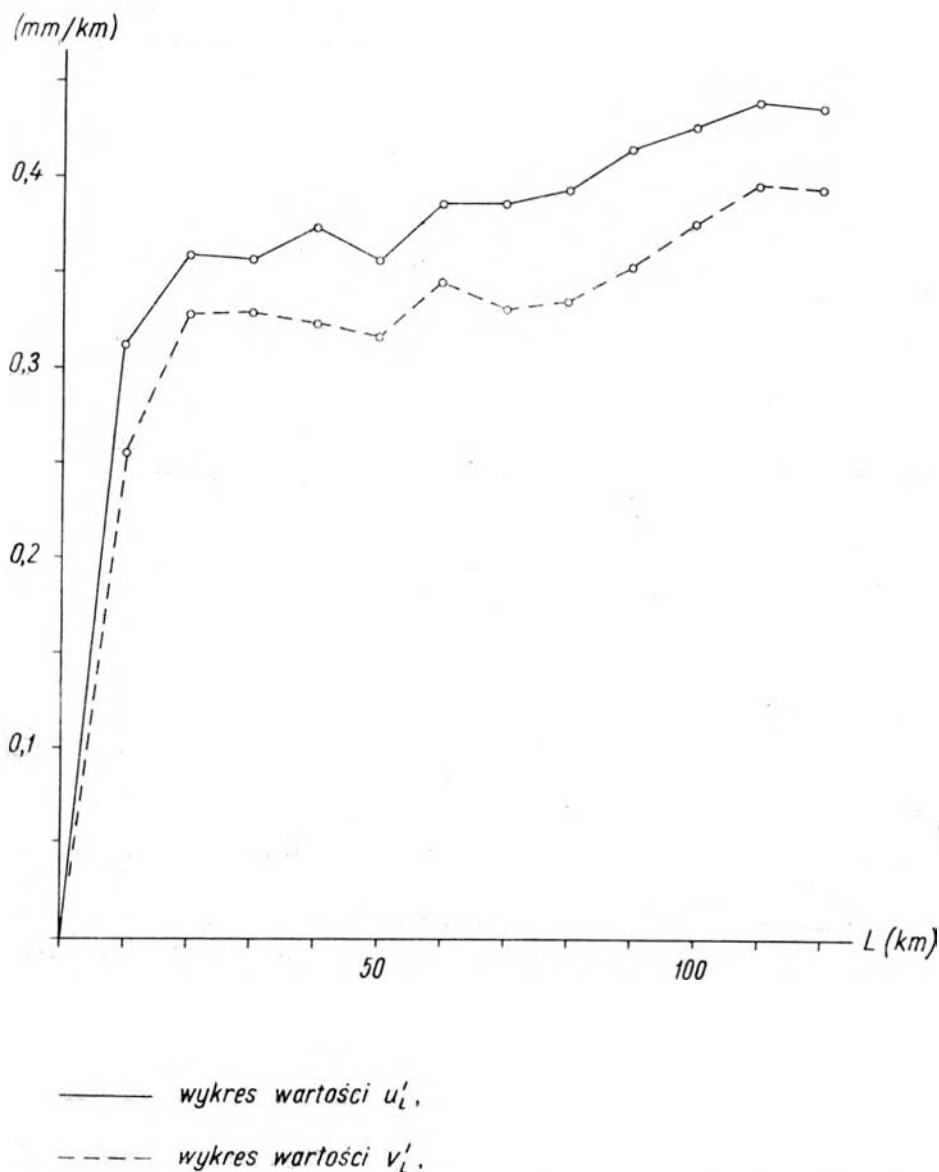
Rys. 1. Wykres zmienności wartości u'_L w zależności od długości linii niwelacyjnych i metody pomiaru (metoda A i B)



Rys. 2. Wykres zmienności wartości v'_L w zależności od długości linii niwelacyjnych i metody pomiaru (metoda A i B)

systematyczne nabierają charakteru błędów przypadkowych. Wartości u'_L i v'_L w zasadzie rosną powoli, począwszy od linii o długościach 20 km aż do linii o długościach 120 km. Można jednak uważać, że długość 60 km jest charakterystyczna dla wykresu i przyjąć ją za odpowiadającą w przybliżeniu wartości Z.

Analizując wykresy można zauważyć, że bardziej prawidłowy przebieg ma krzywa dla pomiarów wykonywanych przy użyciu 2 klinów (bardzo mały wzrost wartości u_L' i v_L' wraz ze wzrostem długości L).



Rys. 3. Wykres zmienności wartości u_L' i v_L' w zależności od długości linii niwelacyjnych. Łączne zestawienie dla pomiarów obu metodami (metoda A i B)

5. Analiza dokładności metod wyznaczania linii wyrównujących

Następnym wstępnym etapem do właściwej analizy dokładności sieci wzorami Vignala była analiza dokładności różnych metod wyznaczania linii wyrównujących. Dokładność ich wyznaczenia rzutuje bowiem na dokładność określenia wartości v' i v'' . W grę wchodziła też i strona ekonomiczna pracochłonności różnych możliwych do zastosowania metod.

Wzięto pod uwagę 4 metody:

- a) metodę graficzną,
- b) metodę graficzno-analityczną K. Kučery,
- c) ścisłą metodę analityczną,
- d) uproszczoną metodę graficzno-analityczną (T. Wyrzykowskiego).

Metoda graficzna — Polega na wyznaczeniu jednej linii prostej, możliwie najlepiej aproksymującej linię łamaną wykresu wartości $[q]$. Wyznacza się ją „na oko” za pomocą liniału, w taki sposób by pola zawarte między obiema liniami — z obu stron linii wyrównującej — były możliwie małe i równe sobie.

Metoda graficzno-analityczna K. Kučery — Polega na analitycznym określeniu linii wyrównującej w oparciu o uproszczone wzory:

$$\begin{aligned}\frac{K+P}{2} &= \frac{q \cdot [s] + y_0 + y_n}{2(n+1)} = a, \\ \frac{K-P}{2} &= \frac{6[is] - 3(k+1) \cdot [s]}{k^2 - 1} = b,\end{aligned}\tag{14}$$

$$\begin{aligned}K &= a + b, \\ P &= a - b,\end{aligned}\tag{15}$$

$$\mu = K - P,\tag{16}$$

gdzie:

P, K — poszukiwane rzędne początkowego i końcowego punktu linii wyrównującej,

n — ilość odcinków między sąsiednimi reperami na danej linii,

k — ilość odcinków o równej długości, na które została podzielona cała długość (L) linii niwelacyjnej,

$$q = \frac{2n}{k},$$

s — wartość rzędnej środka linii wyrównującej, wyznaczonej metodą graficzną dla odcinka linii niwelacyjnej o długości $d = \frac{L}{k}$,

y_0 — rzędna początkowego punktu wykresu wartości $[q]$, ($y_0 = 0$),

y_n — rzędna końcowego punktu wykresu ($y_n = [q] = \lambda$),

i — kolejny numer odcinka, na które podzielona została cała linia niwelacyjna.

Ścisła metoda analityczna — Polega na określeniu równania linii wyrównującej, typu

$$y = a + bx, \quad (17)$$

z zależności:

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{\Delta} ([xx] \cdot [y] - [x] \cdot [xy]), \\ b &= \frac{1}{\Delta} (-[x] \cdot [y] + n \cdot [xy]), \\ \Delta &= n \cdot [xx] - [x]^2, \end{aligned} \quad (18)$$

gdzie:

n — ilość reperów na linii niwelacyjnej,

x — współrzędna odpowiadająca odległości i -tego punktu od punktu początkowego,

y — współrzędna odpowiadająca wartości $[q]$ liczonej od punktu początkowego do i -tego punktu linii.

Wtedy:
$$\mu = b \cdot L. \quad (19)$$

Uproszczona metoda graficzno-analityczna (T. Wyrzykowskiego) — polega ona na:

a) wykreśleniu ciągłej linii łamanej, składającej się z odcinków linii prostej — wyznaczonych metodą graficzną — aproksymujących charakterystyczne części wykresu wartości $[q]$ (odcinki te odpowiadają kilku odcinkom linii niwelacyjnej i nie muszą być jednakowej długości, jak to przewiduje metoda K. Kučery),

b) na wyznaczeniu ostatecznej linii wyrównującej metodą ścisłą, biorąc pod uwagę współrzędne punktów załamania uprzednio wyznaczonej linii aproksymującej, których ilość jest kilkakrotnie mniejsza, niż ilość punktów linii niwelacyjnej (uproszczenie obliczeń w stosunku do metody ścisłej).

* * *

Celem określenia wielkości błędów metody graficznej, wykonane zostały tą metodą wyznaczenia 4 linii wyrównujących, niezależnie przez 3 osoby (T. W., T. B. i Z. S.), a jednocześnie te same 4 linie wyrównujące wyznaczone zostały ścisłą metodą analityczną. Dla wykresów wartości $[q]$ przyjmowano skalę 10 : 1, przy skali odległości 1 : 100 000. Otrzymane wyniki zestawiono w tablicy 2. Na ich podstawie można wyciągnąć następujące wnioski:

1) Przeciętna odchyłka pojedynczego wyznaczenia μ od wartości średniej, wyznaczonej też z metody graficznej, jest rzędu $\pm 1,2$ mm/100 km.

Przeciętna odchyłka pojedynczego wyznaczenia μ od wartości wyznaczonej metodą ścisłą jest rzędu $\pm 2,7$ mm/100 km.

2) Odpowiednie do poprzednio wymienionych błędy średnie wynoszą: $m_{0_v} = \pm 1,7$ mm/100 km, $m_{0_s} = \pm 3,6$ mm/100 km.

3) Wymienione powyżej wartości wskazują, że średni błąd pojedynczego wyznaczenia błędu systematycznego $[\sigma]$ — w oparciu o graficzną metodę określenia linii wyrównującej — równy jest około 35% określanej wielkości tego błędu (w tym przypadku: $\sigma \approx \pm 0,05$ mm/km). Dla poszczególnych linii błąd może być jednak nawet kilkakrotnie większy od samego błędu σ (np. tabl. 2, linia 2 — wyznaczenie T. B. i Z. S.).

4) Porównując błędy pozorne z rzeczywistymi widzimy, że te ostatnie są dwukrotnie większe. Świadczy to o systematycznych tendencjach błędów metody graficznej. Zauważyć tu można np. tendencję graficznego wyznaczania linii wyrównującej o mniejszym pochyleniu, niż to wynika z metody ścisłej.

5) Ogólnie biorąc, wyniki metody graficznego wyznaczania linii wyrównującej są w znacznym stopniu zależne od indywidualnych predyspozycji osoby wyznaczającej. Wskazuje na to porównanie wyznaczeń T. W. z wyznaczeniami T. B. i Z. S. (tabl. 2).

Prócz określenia linii wyrównujących metodą graficzną i ścisłą (tabl. 2), dla tych samych 4 linii niwelacyjnych wyznaczone zostały linie wyrównujące również i dwoma pozostałymi metodami poprzednio opisanymi (tabl. 3). W metodzie K. Kučery wykonywano po 3 obliczenia dla każdej linii, zmieniając za każdym razem ilość odcinków (k).

Otrzymane wyniki można podsumować w sposób następujący:

1. Metoda K. Kučery i tzw. metoda uproszczona dają rezultaty dużo bliższe metodzie ścisłej, niż metoda graficzna. Średnie błędy wyznaczone z obliczonych przykładów były kilkakrotnie mniejsze; dla metody K. Kučery $m_{0_s} \approx \pm 0,5$ mm/100 km, dla metody uproszczonej $m_{0_s} \approx \pm 0,7$ mm/100 km.

2. Obie te metody dają dużo mniejszy rozrzut błędów niż metoda graficzna.

3. Średni błąd pojedynczego wyznaczenia błędu systematycznego (σ) jest tu równy około 5% wielkości samego błędu σ , czyli około $\pm 0,003$ mm/km.

4. Porównanie metody K. Kučery z tzw. metodą uproszczoną przemawia za tą pierwszą (nieco mniejszy błąd, przy tym samym nakładzie pracy obliczeniowej).

Dla pełniejszej charakterystyki obu metod należy dodać, że przy me-

T a b l i c a 3

Porównanie wyników wyznaczeń linii wyrównujących różnymi metodami

Linia	L km	Metoda graficzna				Metoda ścisła	Metoda K. Kućery					Metoda uproszczona
Stargard	106,4	T.W.	T.B.	Z.S.	$n = 62, K$ -11,47 P +1,78 μ -13,25	k 16 d 6,65 K -11,81 P +1,63 μ -13,44	18	20	5,91 11,77 1,61 13,38	5,32 -11,78 +1,59 -13,37	$n = 14, K$ -11,58 P +0,62 μ -12,20	
		K -11,8	-10,1	-8,6								
		P +1,5	+0,1	-1,0								
Buślary	103,4	$n = 1,$	śr. -10,4		$n = 59, K$ +2,62 P -6,60 μ +9,22	k 16 d 6,47 K +2,51 P -6,51 μ +9,02	18	20	5,75 5,17 2,63 6,54 9,17 9,13	5,17 śr. +2,57 -6,54 +9,11	$n = 39, K$ -11,43 P +1,57 μ -13,00	
		K +0,8	-1,0	-0,5								
		P -4,3	-2,5	-3,0								
Sławno	92,2	$n = 1,$	śr. +3,0		$n = 51, K$ +18,95 P +5,50 μ +13,45	k 13 d 7,09 K +18,57 P +6,11 μ +12,46	15	17	6,14 18,59 6,15 12,40	5,42 śr. +18,57 +6,11 +12,46	$n = 26, K$ +2,53 P -5,90 μ +8,43	
		K +18,8	+15,6	+19,4								
		P +4,9	+3,5	+6,3								
Godętowo	119,4	$n = 1,$	śr. +13,0		$n = 82, K$ -7,87 P +1,28 μ -9,15	k 24 d 4,98 K -7,55 P +1,23 μ -8,78	30	36	3,98 7,53 1,21 8,74	3,32 śr. -7,55 +1,23 -8,78	$n = 33, K$ -7,38 P +1,12 μ -8,50	
		K -7,9	-7,0	-5,9								
		P +1,8	+0,6	+0,7								
Czarlin	119,4	$n = 1,$	śr. -8,0		$n = 82, K$ -7,87 P +1,28 μ -9,15	k 24 d 4,98 K -7,55 P +1,23 μ -8,78	30	36	3,98 7,53 1,21 8,74	3,32 śr. -7,55 +1,23 -8,78	$n = 33, K$ -7,38 P +1,12 μ -8,50	
		K -7,9	-7,0	-5,9								
		P +1,8	+0,6	+0,7								

w (milimetrach)

totdzie K. Kučery dzielono linie na odcinki pomocnicze o równej długości, których ilość (k) wynosiła około 35% ogólnej ilości odcinków wchodzących do obliczeń metodą ścisłą. Przy metodzie uproszczonej ilość odcinków pomocniczych wynosiła odpowiednio około 40%.

6. Wyznaczenie wielkości wyjściowych do analizy sieci wzorami Vignala

6.1. Podział sieci na elementy do analizy

Jak już było powiedziane w rozdziale 3, polska sieć niwelacji precyzyjnej I klasy nie była wygodna do analizy wzorami Vignala. Ma ona bowiem przeciętnie bardzo długie linie (230 km) i niewielką ich ilość (21 linii). Wzięcie ich więc, jako podstawowych elementów do analizy, pociągałoby za sobą oparcie tej analizy o niepewną statystycznie ilość elementów. W dodatku przeciętna długość tych linii znacznie przekracza wielkość $Z = 60$ km.

Przystępując do wyznaczeń wielkości $\left[\frac{q^2}{R}\right]$, $\frac{\lambda^2}{L}$ oraz $\frac{\mu^2}{L}$ — występujących dalej we wzorach Vignala — należało określić jakich przeciętnych długości L będą one dotyczyły.

Przyjęto koncepcję podziału linii — między węzłami sieci — w taki sposób by uzyskać większą ilość krótszych linii, przy zachowaniu jednak ogólnego warunku $L_m > Z$.

21 linii, tworzących obwodnice 8 poligonów sieci, zostało więc podzielone na 52 krótsze linie (rys. 4) o przeciętnej długości $L_m = 93$ km, zachowując tym samym wspomniany warunek $L_m > Z$.

Przy podziale kierowano się dwoma zasadami:

a) każda nowo utworzona linia musiała być fragmentem jednej tylko linii dawnej, łączącej punkty węzłowe sieci,

b) musiała ona być utworzona z odcinków dla których uprzednio oddzielnie obliczono średni błąd przypadkowy i systematyczny, wzorami Lallemanda (przeciętna ich długość wynosiła $L_m' = 29$ km).

6.2. Określenie sum wartości q , wartości λ oraz μ

Wartości $\left[\frac{q^2}{R}\right]$ oraz $\frac{\lambda^2}{L}$ zostały wzięte z operatów obliczeniowych Państwowego Przedsiębiorstwa Geodezyjnego (PPG) [5], dotyczących tej sieci, przygotowywanej do pierwszego jej wyrównania w systemie wysokości ortometrycznych normalnych. Ten właśnie materiał był potem ma-



Rys. 4. Szkic linii sieci niwelacji precyzyjnej I klasy, wykorzystanych jako materiał do analizy dokładności wzorami Vignala. Podział na krótsze linie, dla których wyznaczane były linie wyrównujące

teriałem wyjściowym do ponownego obliczenia sieci w systemie wysokości normalnych i ten tylko zawierał obliczone już wartości $\left[\frac{q^2}{R} \right]$ oraz $\frac{\lambda^2}{L}$ dla poszczególnych odcinków, stanowiących podstawę dla obliczenia średnich błędów przypadkowych i systematycznych wzorami Lallemenda.

Wartości μ — ponieważ w operacie PPG zostały one wyznaczone dla wyżej wymienionych krótkich odcinków, o przeciętnej długości $L_m = 29$ km, przybliżoną metodą graficzną — zostały wyznaczone w Pracowni N. P. i R. S. Z. IGiK dla nowo utworzonych linii ($L_m = 93$ km) ściśle metodą analityczną, rezygnując ostatecznie w tym przypadku z analizowanych uprzednio metod przybliżonych. Metoda ścisła pozwala bowiem na uniknięcie błędów przy określaniu pochylenia linii wyrównującej, a tym samym na uniknięcie błędów w określeniu systematycznych i przypadkowych błędów pomiaru niwelacji, o które w tej analizie głównie chodziło.

6.3. Niezamknięcia poligonów i wyrównanie sieci

Dalszymi wielkościami wchodzącymi do wzorów Vignala są wielkości niezamknięć poligonów i wielkości poprawek do przewyższeń linii, otrzymane z wyrównania sieci.

W tym przypadku materiałem opracowywanym były przewyższenia na liniach, między punktami węzłowymi sieci, obliczone w systemie wysokości normalnych, tj. w przyjętym ostatecznie w Polsce systemie wysokości.

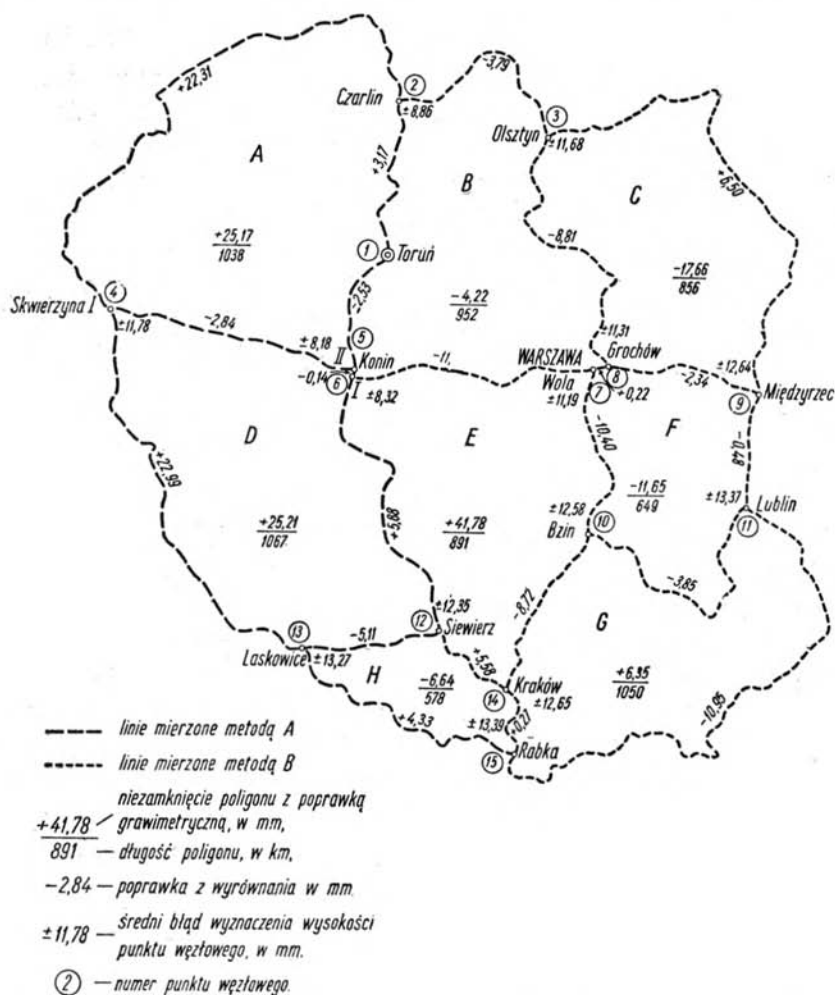
W stosunku do materiału, jaki wszedł poprzednio do wyrównania podstawowej sieci niwelacji precyzyjnej obliczonej w systemie wysokości normalnych, wystąpiły tu czasem drobne różnice w wartościach przewyższeń linii i zamknięciach poligonów spowodowane:

- a) odrzuceniem paru bardzo krótkich linii, tworzących małe poligoniki przy punktach wiekowych sieci,
- b) sporadycznymi przypadkami wprowadzenia do sieci wyników drobnych pomiarów poprawkowych,
- c) w przypadku jednej linii — wprowadzeniem wyników drugiej komparacji łat (czego uprzednio nie zrobiono).

Ponieważ do wzorów Vignala potrzebne są wartości $\frac{\gamma^2}{L}$, gdzie γ — poprawka z wyrównania dla danej linii L , wyrównano więc sieć analizowaną, jako niezależną, opartą na wysokości jednego punktu wyjściowego (daw-

ny punkt główny: Toruń—Ratusz). Na sieć (rys. 5) składa się: 8 poligonów (o przeciętnej długości 885 km), 22 linie, oraz 14 punktów węzłowych.

Sieć została przygotowana do wyrównania w Pracowni N. P. i R. S. Z. IGiK. Samo wyrównanie zostało wykonane na maszynie elektronowej



Rys. 5. Szkic linii sieci włączonych do wyrównania. Podano: wartości niezamknięć poligonów i ich długości, wartości poprawek do przewyższeń linii oraz średnie błędy punktów węzłowych

w Zakładzie Rachunków i Obliczeń Geodezyjnych IGiK. Wyznaczono: a) poprawki do przewyższeń linii, b) poprawki do wysokości punktów węzłowych, c) średni błąd pomiaru 1 km linii, który wyniósł $m_0 = \pm 0,837$ mm, d) średnie błędy wyznaczenia wysokości punktów węzłowych sieci.

7. Omówienie zespołu wzorów Vignala

Analiza dokładności sieci niwelacyjnej wzorami Vignala operuje szeregiem nowych pojęć i określeń. Wydaje się więc celowe pokrótce je omówić. Tym bardziej, że polska literatura geodezyjna nie posiada dotychczas takiego omówienia. Zrobimy to w oparciu o tekst zawarty m. in. w uchwałach MAG, przyjętych w czasie Ogólnego Zgromadzenia MUGG w Oslo w 1948 r. [4].

Zacniemy od zestawienia wielkości występujących w tych wzorach, od ich oznaczeń i określeń.

η — współczynnik charakterystyczny błędów przypadkowych, zwany prawdopodobnym błędem przypadkowym na kilometr. Dla dowolnej długości L wyniesie on $\eta \sqrt{L}$.

ζ — współczynnik charakterystyczny błędów systematycznych, zwany wartością prawdopodobną przypadkową graniczną (na kilometr) błędu systematycznego.

Dla długości $L \geq Z$ błąd ten wyniesie $\zeta \sqrt{L}$. Dla długości $L < Z$ prawdopodobny błąd systematyczny będzie równy $\zeta_L \cdot \sqrt{L}$, przy czym współczynnik ζ_L wzrasta od 0 do ζ , gdy L wzrasta od 0 do Z .

$\tau = \sqrt{\eta^2 + \zeta^2}$ — współczynnik charakterystyczny błędu całkowitego, zwany wartością prawdopodobną przypadkową graniczną (na kilometr) błędu całkowitego albo: prawdopodobny całkowity błąd graniczny na kilometr,

u_R, u_L, u_F, u_{F_i} — ta sama co uprzednio wielkość, wyprowadzona z odcinków R, L i F oraz z wartości: $\varrho, \lambda, \varphi$ i γ ,
gdzie:

R (km) — długość odcinka między sąsiednimi reperami,

L (km) — długość dowolnego odcinka niwelacji (linii lub sekcji),

F (km) — długość zamkniętego poligonu,

ϱ (mm) — różnica między wynikiem pomiaru „tam” i „z powrotem”, w odniesieniu do R ,

λ (mm) — ta sama różnica w odniesieniu do L ,

φ (mm) — niezamknięcie poligonu, po wprowadzeniu poprawek ze względu na system wysokości,

γ (mm) — poprawka z wyrównania w odniesieniu do długości L ,

U — granica wielkości $u_L, u_F, u_{F\gamma}$ dla $L_m, F_m \geq Z$,

v_L — wielkość wyprowadzona z u_L , zastępując elementy λ przez elementy μ ,
gdzie:

μ (mm) — różnica, dla ciągłego odcinka o długości L , między skrajnymi rzędnymi linii wyrównującej, wykreślonej na podstawie wykresu sum różnic ϱ , i odchylającej się minimalnie od niego,

V — granica wielkości v_L dla $L_m \geq Z$.

Po omówieniu wielkości występujących we wzorach Vignala przejdziemy do nich samych.

A. Współczynnik τ , prawdopodobna przypadkowa wartość graniczna, na kilometr, błędu całkowitego, lub prawdopodobny całkowity błąd graniczny na kilometr.

Zostaje on określony jako:

$$\tau = U \quad (20)$$

oraz:

$$\tau^2 = V^2 - \frac{1}{5} \eta^2, \quad (21)$$

przy:

$$U = \lim u_L, u_F, u_{F\gamma} \text{ dla } L_m, F_m \geq Z, \quad (22)$$

$$V = \lim v_L \text{ dla } L_m \geq Z. \quad (23)$$

Poszczególne wielkości: u_L, v_L, u_F i $u_{F\gamma}$ można wyznaczyć ogólnie jako:

$$u_L^2 = \frac{1}{9} \text{sr.} \frac{\lambda^2}{L}, \quad (24)$$

$$v_L^2 = \frac{1}{9} \text{sr.} \frac{\mu^2}{L}, \quad (25)$$

$$u_F^2 = \frac{4}{9} \text{sr.} \frac{\varphi^2}{F}, \quad (26)$$

$$u_{F\gamma}^2 = \frac{4}{9n_F} \cdot \left[\frac{\gamma^2}{L} \right]. \quad (27)$$

Średnie wartości $\frac{\lambda^2}{L}, \frac{\mu^2}{L}$ i $\frac{\varphi^2}{F}$ mogą być wyznaczone przy założeniu, że

poszczególne wartości $\frac{\lambda^2}{L}$, $\frac{\mu^2}{L}$ i $\frac{\varphi^2}{F}$ mają wagi jednakowe ($p = 1$), lub że wagi te są proporcjonalne do długości L i F .

Otrzymujemy więc dwa odpowiadające sobie zestawy wzorów:

a) dla wag jednakowych ($p = 1$):

$$u_L'^2 = \frac{1}{9n_L} \cdot \left[\frac{\lambda^2}{L} \right], \quad (24a)$$

$$v_L'^2 = \frac{1}{9n_L} \cdot \left[\frac{\mu^2}{L} \right], \quad (25a)$$

$$u_F'^2 = \frac{4}{9n_F} \cdot \left[\frac{\varphi^2}{F} \right], \quad (26a)$$

b) dla wag niejednakowych, równych L i F :

$$u_L''^2 = \frac{1}{9} \cdot \left[\frac{\lambda^2}{L} \right], \quad (24b)$$

$$v_L''^2 = \frac{1}{9} \cdot \left[\frac{\mu^2}{L} \right], \quad (25b)$$

$$u_F''^2 = \frac{4}{9} \cdot \left[\frac{\varphi^2}{F} \right]. \quad (26b)$$

B. Współczynnik η , czyli prawdopodobny błąd przypadkowy na kilometr, wyznacza się jako:

$$\eta^2 = u_R^2 - \zeta^2 \cdot j^2, \quad (28)$$

gdzie:

$$u_R^2 = \frac{1}{9} \text{ śr. } \frac{\varrho^2}{R}, \quad (29)$$

oraz:

$$j^2 = \frac{K}{Z} \text{ śr. } R, \quad (30)$$

współczynnik

$$K = 2 \text{ lub } 3. ^4) \quad (31)$$

I tak jak poprzednio, ze względu na różny sposób wagowania, będziemy mieli:

a) dla wag jednakowych ($p = 1$)

$$u_R'^2 = \frac{1}{9n_R} \cdot \left[\frac{\varrho^2}{R} \right], \quad (29a)$$

⁴⁾ $K = \sigma_0^2 \cdot \frac{\zeta^2}{L}$, gdzie σ_0^2 — nachylenie stycznej w początkowym punkcie krzywej wykresu wartości u_L^2 .

oraz:

$$j'^2 = \frac{K}{Z} \cdot \frac{[R]}{n_R}. \quad (30a)$$

b) dla wag niejednakowych, równych R

$$u_R''^2 = \frac{1}{9} \cdot \frac{[Q^2]}{[R]}, \quad (29b)$$

oraz:

$$j''^2 = \frac{K}{Z} \cdot \frac{[R^2]}{[R]}. \quad (30b)$$

C. Współczynnik ζ , czyli wartość prawdopodobna przypadkowa graniczna (na kilometr) błędu systematycznego, wyrażony jest jako:

$$\zeta_1^2 = U^2 - \eta^2, \quad (32)$$

lub

$$\zeta_2^2 = V^2 - \frac{6}{5} \eta^2. \quad (33)$$

D. Zestawiając równanie (32) lub (33) z równaniem (28), można wyznaczyć wartość η i ζ z układu dwu równań z dwoma niewiadomymi.

Odpowiednio podstawiając i przekształcając, otrzymujemy:

$$\eta_1^2 = \frac{u_R^2 - j^2 \cdot U^2}{1 - j^2}, \quad (34)$$

lub

$$\eta_2^2 = \frac{u_R^2 - j^2 \cdot V^2}{1 - \frac{6}{5} j^2}, \quad (35)$$

oraz:

$$\zeta_1^2 = \frac{U^2 - u_R^2}{1 - j^2}, \quad (36)$$

lub

$$\zeta_2^2 = \frac{V^2 - \frac{6}{5} u_R^2}{1 - \frac{6}{5} j^2}. \quad (37)$$

Ze względu na różny sposób wagowania będziemy mieli:

a) dla wag jednakowych ($p = 1$)

$$\eta_1'^2 = \frac{u_R'^2 - j'^2 \cdot U'^2}{1 - j'^2}, \quad (34a)$$

lub

$$\eta_2'^2 = \frac{u_R'^2 - j'^2 \cdot V'^2}{1 - \frac{6}{5} j'^2}, \quad (35a)$$

oraz:

$$\zeta_1'^2 = \frac{U'^2 - u_R'^2}{1 - j'^2}, \quad (36a)$$

lub

$$\zeta_2'^2 = \frac{V'^2 - \frac{6}{5} u_R'^2}{1 - \frac{6}{5} j'^2}, \quad (37a)$$

b) dla wag niejednakowych

$$\eta_1''^2 = \frac{u_R''^2 - j''^2 \cdot U''^2}{1 - j''^2}, \quad (34b)$$

lub

$$\eta_2''^2 = \frac{u_R''^2 - j''^2 \cdot V''^2}{1 - \frac{6}{5} j''^2}, \quad (35b)$$

oraz:

$$\zeta_1''^2 = \frac{U''^2 - u_R''^2}{1 - j''^2}, \quad (36b)$$

lub

$$\zeta_2''^2 = \frac{V''^2 - \frac{6}{5} u_R''^2}{1 - \frac{6}{5} j''^2}. \quad (37b)$$

E. Wracając do współczynnika τ — wzór (21) — można go przedstawić w innej formie, podstawiając na η^2 prawą stronę równania (35). Mamy wtedy

$$\tau_1^2 = U_1^2 = \frac{(1 - j^2) \cdot V^2 - \frac{1}{5} u_R^2}{1 - \frac{6}{5} j^2}. \quad (38)$$

Dla wag jednakowych ($p = 1$) będzie

$$\tau_1'^2 = U_1'^2 = \frac{(1 - j'^2) \cdot V'^2 - \frac{1}{5} u_R'^2}{1 - \frac{6}{5} j'^2}, \quad (38a)$$

a dla wag niejednakowych:

$$\tau_1''^2 = U_1''^2 = \frac{(1-j''^2) \cdot V''^2 - \frac{1}{5} u_R''^2}{1 - \frac{6}{5} j''^2}. \quad (38b)$$

F. Obliczając wartość u_F wg wzoru (26), a właściwie — wartość u_F' wg wzoru (26a) oraz wartość u_F'' wg wzoru (26b), zaleca się włączyć do obliczeń również i poligon obwodowy o długości F_e i niezamknięciu φ_e .

Przy przyjęciu równych wag wielkości $\frac{\varphi^2}{F}$, mamy

$$u_F'^2 = \frac{4}{9(n_F+1)} \cdot \left(\left[\frac{\varphi^2}{F} \right] + \frac{\varphi_e^2}{F_e} \right), \quad (39a)$$

a przy założeniu wag wielkości $\frac{\varphi^2}{F}$ równych F , mamy

$$u_F''^2 = \frac{4}{9(n_F+1)} \cdot \left(n_F \cdot \frac{[\varphi^2]}{[F]} + \frac{\varphi_e^2}{F_e} \right). \quad (39b)$$

G. Warto zauważyć, że podstawiając do wzorów (34) i (36) wartości U wyznaczone z wzoru (22), otrzymujemy — dla obu sposobów wagowań i obu wartości K — w wyniku tożsamości

$$\eta_1^2 + \zeta_1^2 = \tau^2 = U^2, \quad (40)$$

a podstawiając do wzorów (34) i (36) wartości U_1 , wyznaczone wg wzoru (38), otrzymujemy

$$\eta_1^2 + \zeta_1^2 = \tau_1^2 = U_1^2, \quad (41)$$

oraz

$$\eta_1^2 + \zeta_1^2 = \eta_2^2 + \zeta_2^2. \quad (42)$$

W tym drugim przypadku zachodzi bowiem równość:

$$\begin{aligned} \eta_1 &= \eta_2, \\ \zeta_1 &= \zeta_2. \end{aligned} \quad (43)$$

Aby więc nie liczyć dwukrotnie tych samych wartości, przyjęto w tej analizie podstawiać do wzorów (34) i (36) wartość U — wyznaczoną wg wzoru (22) — spełniającą tym samym równanie (40).

Wartości η_2 i ζ_2 wyznaczone z wzorów (35) i (37), spełniają natomiast równanie

$$\eta_2^2 + \zeta_2^2 = \tau_1^2 = U_1^2. \quad (44)$$

8. Charakterystyka dokładności polskiej sieci niwelacji precyzyjnej I klasy wzorami Vignala

8.1. Zestawienie obliczonych wartości wyjściowych

Poniżej zestawione zostały wartości wyjściowe, obliczone na podstawie materiału polskiej sieci niwelacji precyzyjnej I klasy. Są one oznaczone symbolami, które występują dalej we wzorach Vignala, analizujących błędy sieci niwelacyjnej.

8.1.1. Zachodnia część sieci (pomiar metodą A)

$$\begin{aligned}
 n_L &= 22, & [L] &= 2156,45 \text{ km}, \\
 L_m &= 98,02 \text{ km}, & \left[\frac{\lambda^2}{L} \right] &= 23,3105, \\
 [\lambda^2] &= 2081,737, & \left[\frac{\mu^2}{L} \right] &= 24,2296, \\
 [\mu^2] &= 2280,111, & \left[\frac{\varrho^2}{R} \right] &= 1109,554, \\
 [\varrho^2] &= 1558,894, & [R^2] &= 3550,285, \\
 n_R &= 1644, & R_m &= 1,312 \text{ km},
 \end{aligned}$$

8.1.2. Wschodnia część sieci (pomiar metodą B)

$$\begin{aligned}
 n_L &= 30, & [L] &= 2667,82 \text{ km}, \\
 L_m &= 88,93 \text{ km}, & \left[\frac{\lambda^2}{L} \right] &= 50,9431, \\
 [\lambda^2] &= 4619,981, & \left[\frac{\mu^2}{L} \right] &= 55,4453, \\
 [\mu^2] &= 4917,609, & \left[\frac{\varrho^2}{R} \right] &= 1158,320, \\
 [\varrho^2] &= 1708,475, & [R^2] &= 4529,472, \\
 n_R &= 1924, & R_m &= 1,387 \text{ km}.
 \end{aligned}$$

8.1.3. Cała sieć

$$\begin{aligned}
 n_L &= 52, & [L] &= 4824,27 \text{ km}, \\
 L_m &= 92,77 \text{ km}, & \left[\frac{\lambda^2}{L} \right] &= 74,2536, \\
 [\lambda^2] &= 6701,718, & \left[\frac{\mu^2}{L} \right] &= 79,6749, \\
 [\mu^2] &= 7197,720, & \left[\frac{\varrho^2}{R} \right] &= 2267,874, \\
 [\varrho^2] &= 3267,369, & [R^2] &= 8079,757, \\
 n_R &= 3568, & R_m &= 1,352 \text{ km}, \\
 n_F &= 8, & \left[\frac{\gamma^2}{L} \right] &= 5,6081, \\
 [\varphi^2] &= 3564,460, & \left[\frac{\varphi^2}{F} \right] &= 3,8725, \\
 \varphi_e &= +58,34 \text{ mm}, & \frac{\varphi_e^2}{F_e} &= 1,3261, \\
 [F] &= 7080,29 \text{ km}, & F_e &= 2566,57 \text{ km}, \\
 & & F_m &= 885,04 \text{ km}.
 \end{aligned}$$

8. 2. Wyniki analizy dokładności sieci przy założeniu jednakowych wag

Jako pierwsza zostanie przedstawiona analiza sieci przy założeniu jednakowych wag poszczególnych wartości: $\frac{\lambda^2}{L}$, $\frac{\mu^2}{L}$, $\frac{\varphi^2}{F}$, $\frac{\varrho^2}{R}$ i R . Określane wielkości będą więc — zgodnie z przyjętą symboliką wzorów Vignala — oznaczane znakiem „prim”.

8.2.1. Wstępna, oddzielna analiza dwu części sieci

Jak już wspomniano uprzednio, zachodnia część sieci została pomierzona metodą przy użyciu 2 klinów (metoda A), a część wschodnia — przy użyciu 4 klinów (metoda B). Wstępną więc część analizy wykonano oddzielnie dla tych dwu części sieci.

Dla zachodniej części sieci, mierzonej metodą A, otrzymano następujące wartości:

$$u_L' = \pm 0,343 \text{ mm/km}, \quad (24a)$$

$$v_L' = \pm 0,350 \text{ mm/km}, \quad (25a)$$

$$u_R' = \pm 0,274 \text{ mm/km}, \quad (29a)$$

Dla wschodniej części sieci, mierzonej metodą B, otrzymano analogicznie:

$$u_L' = \pm 0,434 \text{ mm/km}, \quad (24a)$$

$$v_L' = \pm 0,453 \text{ mm/km}, \quad (25a)$$

$$u_R' = \pm 0,259 \text{ mm/km}. \quad (29a)$$

8.2.2. Analiza materiału całej sieci

Dalsza analiza dotyczyła już całego materiału sieci. Otrzymano, na te same co poprzednio wielkości, następujące wartości:

$$u_L' = \pm 0,398 \text{ mm/km}, \quad (24a)$$

$$v_L' = \pm 0,413 \text{ mm/km}, \quad (25a)$$

$$u_R' = \pm 0,266 \text{ mm/km}. \quad (29a)$$

W oparciu o wartości niezamknięć 9 poligonów — łącznie z poligonem obwodowym — (rys. 5) wyznaczono

$$u_F' = \pm 0,507 \text{ mm/km}. \quad (39a)$$

Wyrównanie sieci (patrz punkt 6.3) pozwoliło na określenie wartości $u_{F\gamma}$, opartej na wartościach poprawek (γ) do przewyższeń linii

$$u_{F\gamma} = \pm 0,558 \text{ mm/km}. \quad (27)$$

Ponieważ przy wyznaczaniu powyższych wartości zachowany został warunek $L_m, F_m \geq Z$, wobec tego zgodnie z wzorem (20) i (22), przyjmując maksymalną wartość, można napisać

$$\tau' = U' = \pm 0,558 \text{ mm/km}, \quad (20a)$$

oraz zgodnie z równaniem (23)

$$V' = \pm 0,413 \text{ mm/km}. \quad (23a)$$

Dalsze wielkości charakteryzujące błędy sieci niwelacyjnej wyznacza się z wzorów, do których wchodzi pomocnicza wielkość j , obliczana z kolei z wzoru (30), w którym występuje współczynnik $K = 2$ lub $K = 3$. Chcąc określić wpływ przyjęcia na wielkość K liczby 2 lub 3, wykonano dalszy rachunek w dwu wariantach — raz przyjmując $K = 2$, a drugi raz $K = 3$.

8.2.2.1. Wielkości charakterystyczne sieci, określone przy przyjęciu współczynnika $K = 2$

Przyjmując $K = 2$ oraz określoną uprzednio — rozdział 4 — wartość $Z = 60 \text{ km}$, mamy

$$j'^2 = 0,045070. \quad (30a)$$

Prawdopodobny przypadkowy błąd na kilometr, wyznaczony w oparciu o wielkość U' , wyniesie wtedy

$$\eta_1' = \pm 0,243 \text{ mm/km}, \quad (34a)$$

a ta sama wielkość wyznaczona w oparciu o V' będzie równa

$$\eta_2' = \pm 0,258 \text{ mm/km}. \quad (35a)$$

Z kolei na wartość prawdopodobną przypadkową graniczną (na kilometr) błędu systematycznego, w oparciu o wielkość U' , otrzymujemy

$$\zeta_1' = \pm 0,502 \text{ mm/km}, \quad (36a)$$

a w oparciu o wielkość V'

$$\zeta_2' = \pm 0,301 \text{ mm/km}. \quad (37a)$$

Ostatecznie — zgodnie z wzorem (38a) — określimy prawdopodobny całkowity błąd graniczny na kilometr, jako

$$\tau_1' = U_1' = \pm 0,396 \text{ mm/km}. \quad (38a)$$

8.2.2.2. Wielkości charakterystyczne sieci, określone przy przyjęciu współczynnika $K = 3$

Przyjmując do obliczeń współczynnik $K = 3$, otrzymano — analogicznie jak w paragrafie 8.2.2.1. — następujące wartości:

$$j'^2 = 0,067605, \quad (30a)$$

$$\eta_1' = \pm 0,230 \text{ mm/km}, \quad (34a)$$

$$\eta_2' = \pm 0,254 \text{ mm/km}, \quad (35a)$$

$$\zeta_1' = \pm 0,508 \text{ mm/km}, \quad (36a)$$

$$\zeta_2' = \pm 0,305 \text{ mm/km}, \quad (37a)$$

$$\tau_1' = U_1' = \pm 0,397 \text{ mm/km}. \quad (38a)$$

8.3. Wyniki analizy dokładności sieci przy założeniu niejednakowych wag

W poprzedniej części tego rozdziału (8.2.) analizowano dokładność polskiej sieci niwelacji precyzyjnej I klasy, przy założeniu że występujące w nich elementy: $\frac{\lambda^2}{L}$, $\frac{\mu^2}{L}$, $\frac{\varphi^2}{F}$, $\frac{\varrho^2}{R}$ i R mają jednakowe wagi. Druga — analogiczna do poprzedniej — część analizy wzorami Vignala wykonana będzie przy założeniu, że wymienione uprzednio elementy mają wagi odpowiednio proporcjonalne do długości L , F i R .

Ponieważ pomiędzy obu wyznaczeniami odpowiednich wartości zachod-

dzi analogia postępowania, ograniczymy się prawie wyłącznie do podania wyników liczbowych.

8.3.1. Wstępna, oddzielna analiza dwu części sieci

Dla zachodniej części sieci, mierzonej metodą A, w oparciu o wzory (24b), (25b) i (29b), otrzymano:

$$u_L'' = \pm 0,328 \text{ mm/km}, \quad (24b)$$

$$v_L'' = \pm 0,343 \text{ mm/km}, \quad (25b)$$

$$u_R'' = \pm 0,283 \text{ mm/km}. \quad (29b)$$

Dla wschodniej części sieci, mierzonej metodą B, otrzymano odpowiednio:

$$u_L'' = \pm 0,439 \text{ mm/km}, \quad (24b)$$

$$v_L'' = \pm 0,452 \text{ mm/km}, \quad (25b)$$

$$u_R'' = \pm 0,267 \text{ mm/km}. \quad (29b)$$

8.3.2. Analiza materiału całej sieci

Wyznaczenie tych samych co uprzednio wielkości, na podstawie materiału całej sieci, dało następujące wartości:

$$u_L'' = \pm 0,393 \text{ mm/km}, \quad (24b)$$

$$v_L'' = \pm 0,407 \text{ mm/km}, \quad (25b)$$

$$u_R'' = \pm 0,274 \text{ mm/km}. \quad (29b)$$

Z niezamknięć 9 poligonów — łącznie z poligonem obwodowym — wyznaczono

$$u_F'' = \pm 0,514 \text{ mm/km}. \quad (39b)$$

Wspólną granicą wartości u_L'' , u_F'' i u_{F_T} (wartość $u_{F_T} = 0,558 \text{ mm/km}$ jest dla obu analiz wspólna) i w tym przypadku będzie

$$\tau'' = U'' = \pm 0,558 \text{ mm/km}, \quad (20b)$$

oraz zgodnie z równaniem (23)

$$V'' = \pm 0,407 \text{ mm/km}. \quad (23b)$$

8.3.2.1. Wielkości charakterystyczne sieci, określone przy przyjęciu współczynnika $K = 2$

Analogicznie jak uprzednio w punkcie 8.2.2.1, przyjmując $K = 2$ oraz określoną w rozdziale 4 wartość $Z = 60 \text{ km}$, mamy w oparciu o wzór (30b)

$$j''^2 = 0,055827. \quad (30b)$$

Prawdopodobny przypadkowy błąd na kilometr, wyznaczony w oparciu o wartość U'' , wynosi

$$\eta_1'' = \pm 0,248 \text{ mm/km}, \quad (34b)$$

a wyznaczony w oparciu o wartość V''

$$\eta_2'' = \pm 0,266 \text{ mm/km}. \quad (35b)$$

Na wartość prawdopodobną przypadkową graniczną (na kilometr) błędu systematycznego, w oparciu o wielkość U'' , otrzymujemy

$$\zeta_1'' = \pm 0,500 \text{ mm/km}, \quad (36b)$$

a w oparciu o wielkość V''

$$\zeta_2'' = \pm 0,284 \text{ mm/km}. \quad (37b)$$

Zgodnie z wzorem (38b), określimy prawdopodobny całkowity błąd graniczny na kilometr, jako

$$\tau_1'' = U_1'' = \pm 0,389 \text{ mm/km}. \quad (38b)$$

8.3.2.2. Wielkości charakterystyczne sieci, określone przy przyjęciu współczynnika $K = 3$

Przyjmując do obliczeń współczynnik $K = 3$, otrzymujemy — tak jak w punkcie 8.3.2.1. przy współczynniku $K = 2$ — następujące, analogiczne do poprzednich wielkości:

$$j''^2 = 0,083741, \quad (30b)$$

$$\eta_1'' = \pm 0,232 \text{ mm/km}, \quad (34b)$$

$$\eta_2'' = \pm 0,261 \text{ mm/km}, \quad (35b)$$

$$\zeta_1'' = \pm 0,508 \text{ mm/km}, \quad (36b)$$

$$\zeta_2'' = \pm 0,290 \text{ mm/km}, \quad (37b)$$

$$\tau_1'' = U_1'' = \pm 0,390 \text{ mm/km}. \quad (38b)$$

9. Omówienie wyników analizy dokładności polskiej sieci niwelacji precyzyjnej I klasy wzorami Vignala

9.1. Omówienie wyników analizy dotyczącej całej sieci

Przystępując do omawiania wyników analizy trzeba na wstępie powiedzieć, że na ostateczną ocenę błędów pomiaru niwelacji i błędów sieci niwelacyjnej mały wpływ miały 2 różne sposoby wagowania (rozdz. 8.2.

i 8.3.) i przyjęte 2 różne współczynniki K ($K = 2$ i $K = 3$). Utworzone w ten sposób 4 warianty obliczeń dały bardzo zbliżone do siebie obrazy rozkładu błędów. Można więc wyniki analizy uogólnić, omawiając tylko jeden, dowolny wariant. Przy omawianiu powoływać się będziemy na dane odnoszące się do analizy przy założeniu równych wag i współczynnika $K = 2$ (rozdz. 8.2.2. i 8.2.2.1.).

Wyniki analizy przedstawiają się ogólnie jako logiczny układ wyznaczonych wartości.

Najmniejszą wartość wśród błędów o charakterze błędów całkowitych — jak tego należało się spodziewać — otrzymano na wielkość u_R' ($\pm 0,266$ mm/km). Wielkość ta bowiem, wyznaczona na podstawie stosunków $\frac{\sigma^2}{R}$, przy przeciętnej długości odcinka $R_m = 1,35$ km, charakteryzuje w zasadzie prawie wyłącznie prawdopodobny błąd przypadkowy.

Wielkości u_L' i v_L' mają już większe i podobne do siebie wartości ($\pm 0,398$ i $\pm 0,413$ mm/km), gdyż podobne są wartości λ i μ wyznaczone dla poszczególnych analizowanych linii, o przeciętnej długości $L_m = 93$ km. Wielkości te zawierają już oczywiście, prócz błędów przypadkowych, wpływ błędów systematycznych. One też chyba dobrze charakteryzują błąd, który można by nazwać prawdopodobnym całkowitym błędem pomiaru niwelacji linii.

Z kolei wielkości u_F' i u_{F_T} mają też podobne do siebie wartości ($\pm 0,507$ i $\pm 0,558$ mm/km), jeszcze większe od poprzednich. Podobieństwo ich wartości wynika z analogicznych warunków geometrycznych (zamknięcia poligonów), z których bezpośrednio lub pośrednio zostały wyznaczone. Wzrost ich wartości, w stosunku do wartości u_L' i v_L' , wynika z czterech przyczyn:

a) z dodatkowego źródła błędu związanego z niejednoczesnością pomiaru linii poligonu, a więc — z ruchami końcowych punktów linii (współczesne pionowe ruchy skorupy ziemskiej i ruchy powierzchniowe),

b) z niedoskonałości wprowadzonych poprawek ze względu na przyjęty system wysokości,

c) z błędów komparacji metra lat,

d) ze wzrostu wpływu błędów systematycznych wraz ze wzrostem długości linii, na co wskazuje — mimo przyjęcia umownej granicy $Z = 60$ km — powolny wzrost wartości u_L i v_L wraz ze wzrostem L_m (rys. 1, 2 i 3).

Przejdziemy teraz do tzw. prawdopodobnego całkowitego błędu granicznego na kilometr, oznaczonego przez τ . Można go było wyznaczyć dwukrotnie, otrzymując dwie wyraźnie różne wartości:

a) jako graniczna wartość $\tau' = U' = \lim u_L', u_F', u_{F_T}$ dla $L_m, F_m \geq Z$, otrzymując: $\tau' = U' = \pm 0,558$ mm/km,

b) jako funkcja $\tau_1' = U_1' = f(V', u_R', j')$, otrzymując: $\tau_1' = U_1' = \pm 0,396$ mm/km.

Znaczne różnice między tymi wartościami wynikają z tego, iż w pierwszym przypadku otrzymujemy całkowity błąd obejmujący źródła błędów wymienione uprzednio w punktach a), b), c) i d), a w drugim przypadku — bez tych źródeł błędów.

W związku z powyższym proponuje się przyjęcie dwu odrębnych określeń dla obu tych wielkości, a mianowicie:

a) dla $\tau = U = \lim u_L, u_F, u_{F_1}$, przy $L_m, F_m \geq Z$, przyjęcie określenia „prawdopodobny całkowity błąd graniczny, na kilometr, sieci niwelacyjnej”,

b) dla $\tau_1 = U_1 = f(V, u_R, j)$, przy $L_m \geq Z$, przyjęcie określenia „prawdopodobny całkowity błąd graniczny, na kilometr, linii niwelacyjnej”.

Należy zwrócić uwagę na dużą zbieżność wartości $\tau_1' = \pm 0,396$ mm/km z wartościami u_L' i v_L' ($\pm 0,398$ i $\pm 0,413$ mm/km), co wskazywałoby dodatkowo na słuszność przyjęcia proponowanego określenia dla wielkości τ_1' .

Dwie wielkości τ — τ i τ_1 — wiążą sobą wielkości błędów przypadkowych (η) i systematycznych (ζ) poprzez równania:

$$\tau^2 = \eta_1^2 + \zeta_1^2, \quad (40)$$

$$\tau_1^2 = \eta_2^2 + \zeta_2^2. \quad (44)$$

Tak jak w poprzednim przypadku dla τ , proponuje się dwu różnym wielkościom błędów przypadkowych (η_1, η_2) i systematycznych (ζ_1, ζ_2) dać dwa odrębne określenia, a mianowicie:

η_1 — prawdopodobny błąd przypadkowy (na kilometr) *sieci niwelacyjnej*,

η_2 — prawdopodobny błąd przypadkowy (na kilometr) *linii niwelacyjnej*,

ζ_1 — wartość prawdopodobna graniczna (na kilometr) błędu systematycznego *sieci niwelacyjnej*,

ζ_2 — wartość prawdopodobna graniczna (na kilometr) błędu systematycznego *linii niwelacyjnej*.

Na prawdopodobny błąd przypadkowy sieci otrzymano $\eta_1' = \pm 0,243$ mm/km, a na analogiczny błąd linii, $\eta_2' = \pm 0,258$ mm/km, a więc wartości bardzo sobie bliskie i bliskie wartości $u_R' = \pm 0,266$ mm/km, co przemawia za przypadkowym charakterem tego błędu.

Inaczej przedstawia się sprawa z prawdopodobną graniczną wartością (na kilometr) błędu systematycznego, która jest bardziej zróżnicowana: dla sieci — $\zeta_1' = \pm 0,502$ mm/km, dla linii — $\zeta_2' = \pm 0,301$ mm/km. Wiadzimy, że wartości ζ_1 i ζ_2 są wyraźnie duże, a nawet większe od wyznaczonych błędów przypadkowych. Wymaga to pewnego omówienia. Otóż:

a) ζ jest współczynnikiem charakterystycznym błędów systematycznych i — zgodnie z założeniami Vignala — jest współczynnikiem przy pierwiastku z długości linii, a nie przy samej jej długości (jak to ma miejsce w teorii Lallemanda), stąd jego większa wartość,

b) zakłada się tu, że błąd całkowity niwelacji składa się jedynie z błędów przypadkowych i systematycznych, a więc to co nie mieści się w wyznaczonym błędzie przypadkowym jest błędem systematycznym. Stąd w wyznaczonym błędzie systematycznym — dla sieci — jest wpływ wspomnianych już ruchów końcowych punktów linii, niedoskonałości poprawek grawimetrycznych, błędu metra i podziału łąty oraz błędów wynikających z niewprowadzania poprawek ze względu na dobowe zmiany kierunku linii pionu [3]. — W błędzie systematycznym wyznaczonym dla linii tkwi część tych błędów.

9.2. Omówienie wyników oddzielnej analizy dwu części sieci, mierzonych różnymi metodami

Zestawienie danych dotyczących zachodniej i wschodniej części sieci, mierzonych różnymi metodami — przy wykorzystaniu 2 i 4 klinów — wskazywało, że obie te części mają nieco inne składowe elementy.

Przypomnijmy:

Zachodnia część sieci (Pomiar na 2 kliny; metoda A)	Wschodnia część sieci (Pomiar na 4 kliny; metoda B)
$[L] = 2156 \text{ km},$	$[L] = 2668 \text{ km},$
$n_L = 22,$	$n_L = 30,$
$L_m = 98,02 \text{ km},$	$L_m = 88,93 \text{ km},$
$R_m = 1,312 \text{ km},$	$R_m = 1,387 \text{ km},$

Różnice występują jednak szczególnie w obliczonych wartościach u_R , u_L i v_L . Mamy bowiem:

Zachodnia część sieci	Wschodnia część sieci
$u_R' = \pm 0,274 \text{ mm/km},$	$u_R' = \pm 0,259 \text{ mm/km},$
$u_L' = \pm 0,343 \text{ mm/km},$	$u_L' = \pm 0,434 \text{ mm/km},$
$v_L' = \pm 0,350 \text{ mm/km},$	$v_L' = \pm 0,453 \text{ mm/km},$
$u_R'' = \pm 0,283 \text{ mm/km},$	$u_R'' = \pm 0,267 \text{ mm/km},$
$u_L'' = \pm 0,328 \text{ mm/km},$	$u_L'' = \pm 0,439 \text{ mm/km},$
$v_L'' = \pm 0,343 \text{ mm/km},$	$v_L'' = \pm 0,452 \text{ mm/km}.$

Widzimy, że zachodnia część sieci, mierzona metodą na 2 kliny, przy nieco większym błędzie wyznaczonym z odcinków (u_R) — co sugeruje nieco większy błąd przypadkowy — miała zdecydowanie mniejszy błąd wyznaczony z linii, mimo że średnia długość linii była tu większa. Sugerowałoby

to z kolei występowanie znacznie mniejszego błędu systematycznego, niż we wschodniej części sieci, mierzonej metodą przy użyciu 4 klinów. Dla ewentualnego potwierdzenia tej sugestii, w oparciu o pierwszy sposób wagowania i jedną wartość K ($K = 2$) — pomijając elementy obliczane na podstawie materiału całej sieci — dla obu części oddzielnie wyznaczono błędy przypadkowe, systematyczne i błąd całkowity. — Wzory (35a), (37a) i (38a). Otrzymano:

Zachodnia część sieci	Wschodnia część sieci
$\eta_2' = \pm 0,271 \text{ mm/km,}$	$\eta_2' = \pm 0,246 \text{ mm/km,}$
$\zeta_2' = \pm 0,185 \text{ mm/km,}$	$\zeta_2' = \pm 0,364 \text{ mm/km,}$
$\tau_1' = U_1' = \pm 0,328 \text{ mm/km,}$	$\tau_1' = U_1' = \pm 0,440 \text{ mm/km.}$

Potwierdzone więc zostało wyraźnie przypuszczenie o znacznie mniejszym błędzie systematycznym linii niwelacyjnej (ζ_2) w zachodniej części sieci. Błąd całkowity linii (τ_1) również wypadł dla tej części sieci mniejszy.

Wyniki te wskazują zdecydowanie na przewagę metody pomiaru przy użyciu 2 klinów.

10. Charakterystyka dokładności sieci w oparciu o inne wzory

Celem ułatwienia dokonania oceny dokładności analizowanego materiału sieci niwelacji precyzyjnej I klasy oraz ułatwienia oceny przydatności samych wzorów Vignala, podamy tu wartości błędów tej sieci ocenione innymi wzorami, w tym i wzorami Lallemenda.⁵⁾ Wszystkie one — w odróżnieniu od wzorów Vignala — będą tu podane w kategorii błędów średnich. Celem porównania tych błędów z błędami prawdopodobnymi, odpowiednie wartości podane zostały w nawiasach.

Dokładność pomiaru sieci charakteryzują następujące błędy średnie 1 km linii, wyznaczone z różnic między pomiarem „tam” i „z powrotem”.

Z różnic na poszczególnych odcinkach

$$m_1 = \pm \frac{1}{2} \sqrt{\left[\frac{\sigma^2}{R} \right] \cdot \frac{1}{n_R}} = \pm 0,399 (\pm 0,266) \text{ mm}, \quad (45)$$

gdzie $n_R = 3568$,
z różnic na liniach⁶⁾

⁵⁾ W odróżnieniu od analogicznych wartości podanych w rozdz. 2, dotyczących całego materiału sieci, tu podane zostają wartości błędów wyznaczone tylko z materiału wykorzystanego przy analizie wzorami Vignala. Różnica między całym materiałem sieci, a materiałem wykorzystanym omówiona została w rozdz. 3.

⁶⁾ W tym przypadku dzięki stosowaniu zasady wyznaczania jednej linii wyrównującej dla każdej linii niwelacyjnej, o przeciętnej długości $L_m = 93 \text{ km}$, we wzorach (46), (49) i (50) można było przyjąć $L' = L$.

$$m_2 = \pm \frac{1}{2} \sqrt{\left[\frac{\mu^2}{L}\right] \cdot \frac{1}{n_L}} = \pm 0,619(\pm 0,413) \text{ mm}, \quad (46)$$

gdzie $n_L = 52$,

z niezamknięć poligonów

$$m_3 = \pm \sqrt{\left[\frac{\varphi^2}{F}\right] \cdot \frac{1}{n_F}} = \pm 0,760(\pm 0,507) \text{ mm}, \quad (47)$$

gdzie $n_F = 9$ (łącznie z poligonem obwodowym).

Należy tu zaznaczyć, że wielkości błędów m_1 , m_2 i m_3 , w kategorii błędów średnich, odpowiadają ściśle wielkościom u_R' , v_L' i u_F' , w kategorii błędów prawdopodobnych.

Średni błąd, obliczony z poprawek po wyrównaniu, wyniósł

$$m_0 = \pm \sqrt{\frac{[p v v]}{r}} = \pm 0,837(\pm 0,558) \text{ mm/km}, \quad (48)$$

odpowiadając w kategorii błędów prawdopodobnych wielkości $u_{F\gamma}$, wg oznaczeń Vignala.

Przechodząc do wzorów Lallemanda, mamy następujące błędy średnie (w nawiasie — wartości błędów prawdopodobnych):

błąd przypadkowy

$$\eta = \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{[Q^2]}{[L]} - \frac{[R^2]}{[L]^2} \cdot \left[\frac{\mu^2}{L}\right]} = \pm 0,403(\pm 0,272) \text{ mm/km}, \quad (49)$$

błąd systematyczny, obliczony dwoma drogami

$$\sigma_\mu = \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{[L]} \cdot \left[\frac{\mu^2}{L}\right]} = \pm 0,064(\pm 0,043) \text{ mm/km}, \quad (50)$$

oraz

$$\sigma_\eta = \pm \sqrt{\frac{1}{[L^2]} \left\{ \frac{[\varphi^2]}{2} - \eta^2 \cdot [L] \right\}} = \pm 0,075(\pm 0,051) \text{ mm/km}. \quad (51)$$

Rozpatrując oddzielnie zachodnią i wschodnią część sieci, otrzymano:

Zachodnia część sieci

Wschodnia część sieci

$$\eta = \pm 0,420 (\pm 0,283) \text{ mm/km},$$

$$\eta = \pm 0,389 (\pm 0,262) \text{ mm/km},$$

$$\sigma_\mu = \pm 0,053 (\pm 0,036) \text{ mm/km},$$

$$\sigma_\mu = \pm 0,072 (\pm 0,049) \text{ mm/km}.$$

Jak widzimy, wartość błędu przypadkowego otrzymana z wzoru Lallemanda jest bardzo zbliżona do analogicznej wielkości wyznaczonej ze wzorów Vignala. Natomiast wartości błędu systematycznego — z uwagi na różnice w założeniach — są wyraźnie rozbieżne.

Na uwagę zasługuje uzyskanie dwukrotnie mniejszej wartości błędu systematycznego σ_μ , obliczonego dla materiału sieci analizowanego wzo-

rami Vignala, przy $L_m' = 93$ km — wzór (50) — niż wartości tego samego błędu obliczonego dla materiału całej sieci — wzór (8), przy $L_m' = 29$ km. Widać tu wyraźną zależność między wyznaczaną wartością błędu, a przeciętną długością linii wyrównującej.

Układ wielkości odpowiednich błędów, wyznaczonych oddzielnie dla zachodniej i wschodniej części sieci, potwierdza to samo zjawisko, które uprzednio zostało stwierdzone w oparciu o wzory Vignala, a mianowicie — znacznie większy błąd systematyczny we wschodniej części sieci.

11. Porównanie wyników analizy dokładności wzorami Vignala sieci polskiej i czzechosłowackiej

Analiza dokładności wzorami Vignala, wykonana przez dr B. Kruisa [1], dotyczyła zachodniej części podstawowej sieci niwelacji precyzyjnej CSRS, pomierzonej w latach 1939—1950. Metoda pomiaru była podobna do stosowanej w zachodniej części polskiej sieci (stosowano odczyty łąty: wstecz — wstecz — w przód — w przód).

Celem scharakteryzowania tej sieci, podamy kilka danych ogólnych:

$$\begin{aligned} [L] &= 3384 \text{ km}, & n_L &= 54, & L_m &= 62,66 \text{ km}, \\ & & n_F &= 16, & F_m &= 323 \text{ km}, \\ & & n_R &= 6860, & R_m &= 0,493 \text{ km}. \end{aligned}$$

Z danych tych wynika, że sieć czzechosłowacka jest dużo gęstsza niż polska, mając znacznie krótsze linie, mniejsze poligony i znacznie krótsze przeciętne długości odcinków między reperami.

Analizując zmienność wartości u_L , v_L i $u_{F\gamma}$, w zależności od zmienności L_m i F_m , z dwu pierwszych wielkości wyznaczono wyraźną granicę $Z = 50$ km. Do obliczeń wzorami Vignala przyjęto współczynnik $K = 2$.

Przytoczmy wartości błędów prawdopodobnych, otrzymane wzorami Vignala przy przyjęciu założenia równych wag (wartości otrzymane przy założeniu wag niejednakowych były bardzo podobne):

$$u_R' = \pm 0,290 \text{ mm/km}, \quad (29a)$$

$$u_L' = \pm 0,265 \text{ mm/km}, \quad (24a)$$

$$v_L' = \pm 0,286 \text{ mm/km}, \quad (25a)$$

$$u_F' = \pm 0,556 \text{ mm/km}, \quad (26a)$$

$$u_{F\gamma}' = \pm 0,558 \text{ mm/km}, \quad (27)$$

$$\tau' = U' = \pm 0,558 \text{ mm/km}, \quad (20a)$$

$$\eta_1' = \pm 0,283 \text{ mm/km}, \quad (34a)$$

$$\zeta_1' = \pm 0,483 \text{ mm/km}, \quad (36a)$$

$$\tau_1' = U_1' = \pm 0,255 \text{ mm/km}, \quad (38a)$$

$$\eta_2' = \pm 0,290 \text{ mm/km}, \quad (35a)$$

$$\zeta_2' = \pm 0,138 \cdot \sqrt{-1} \text{ mm/km}. \quad (37a)$$

Wzorami Lallemenda otrzymano następujące błędy średnie (w nawiasie — wartości błędów prawdopodobnych):

$$\eta = \pm 0,430 (\pm 0,290) \text{ mm/km}, \quad (49)$$

$$\sigma_\mu = \pm 0,053 (\pm 0,036) \text{ mm/km}, \quad (50)$$

$$\sigma_\varphi = \pm 0,064 (\pm 0,043) \text{ mm/km}. \quad (51)$$

Otrzymane z analizy wzorami Vignala błędy sieci niwelacji precyzyjnej CSRS można spróbować scharakteryzować i porównać z analogicznymi wielkościami sieci polskiej w sposób następujący.

W sieci niwelacyjnej CSRS otrzymano większy niż w sieci polskiej błąd wyznaczony z odcinków (u_R'), a co ciekawsze — wypadł on większy niż błędy wyznaczone dla całych linii (u_L' , v_L'), co wskazywałoby na brak błędów systematycznych linii. Wskazuje też na to mała nierzeczywista wartość błędu systematycznego linii (ζ_2').

Na nierealność oceny błędu systematycznego linii wskazuje tu wartość błędu całkowitego τ_1' , mniejsza od swej składowej, tj. od błędu przypadkowego η_2' . Potwierdza ją też duża rozbieżność między wartościami ζ_1' i ζ_2' . Że jednak w sieci CSRS — w stosunku do sieci polskiej — mniejszy jest błąd systematyczny, a nieco większy błąd przypadkowy, wskazują też na to i błędy wyznaczone wzorami Lallemenda.

Błędy przypadkowe wydają się w sieci CSRS — tak jak i w sieci polskiej — dobrze wyznaczone (zgodność między wartościami η_1' , η_2' i u_R').

Analogicznie jak w sieci polskiej, wyssały tu duże rozbieżności między odpowiednimi wartościami błędów τ i ζ obliczonymi z różnych elementów składowych sieci — z linii (τ_1' , ζ_2') i z zamkniętych poligonów (τ , ζ_1'). Błędy obliczone z poligonów sieci były dużo większe, na co wpływ miały zapewne te same czynniki, które wymieniono przy omawianiu wyników analizy sieci polskiej (rozdz. 9.1.).

Należy stwierdzić dużą zgodność wartości błędów obu sieci, wyznaczonych wzorami opierającymi się o większe elementy sieci, tj. o poligony (u_F , u_{F_v} , $\tau = U$, η_1 , ζ_1), oraz — rozbieżność wartości błędów obu sieci, wyznaczonych wzorami opierającymi się o mniejsze ich elementy, tj. o pojedyncze linie (u_L , v_L , V , $\tau_1 = U_1$, η_2 , ζ_2), z tym jednak iż bliższe sobie są wartości błędów uzyskane z sieci CSRS i z zachodniej części sieci polskiej,

co wynika prawdopodobnie z podobnych metod pomiaru (pomiar na 2 kliny).

12. Podsumowanie wyników analizy. Wnioski

Podsumowując wyniki analizy dokładności wzorami Vignala, polskiej sieci niwelacji precyzyjnej I klasy mierzonej w latach 1952—1955, należy stwierdzić, że dały one logiczny obraz rozkładu błędów tej sieci. — Kolejne wartości błędów prawdopodobnych — odpowiadające coraz to większym elementom sieci (odcinki, linie, poligony) — rosły, co odpowiada występowaniu wzrastającej ilości czynników, powodujących głównie błędy systematyczne. Tym należy też tłumaczyć trudność w ustaleniu granicznej wartości Z , a wobec tego — pewną sprzeczność z ogólnymi założeniami teorii wzorów Vignala. Sprzeczność ta nie wydaje się jednak zbyt groźna dla wyników tej analizy (mały wpływ wartości Z oraz — w sieci polskiej — $L_m \gg Z$).

Wartości błędów przypadkowych otrzymane wzorami Vignala podobne są do wartości analogicznych błędów tej sieci określonych na podstawie wzorów Lallemanda. — W przypadku błędów systematycznych należy wziąć pod uwagę mnożnik $\sqrt{L_m}$.

Wydzielenie w analizie materiału zachodniej i wschodniej części sieci — mierzonych różnymi metodami — pozwoliło na stwierdzenie przewagi metody pomiaru przy użyciu 2 klinów (część zachodnia sieci). Przewaga przypisywana samej metodzie pomiaru może mogłaby być jeszcze wytłumaczona i innymi czynnikami w wyniku dodatkowej, szczegółowej analizy materiału pomiarowego.

Zaletą wzorów Vignala jest możliwość wyodrębnienia dwu charakterystyk dokładności (błąd całkowity, przypadkowy i systematyczny); raz — na podstawie danych dotyczących odcinków i oddzielnych linii, drugi raz — na podstawie danych dotyczących odcinków i zamkniętych poligonów. Za dodatkową zaletę wzorów Vignala może być uważane wprowadzenie do analizy błędów elementów uzyskanych z wyrównania sieci. Zwykle, średni błąd obliczony na ich podstawie (m_0 — wzór 48) — nie jest wykorzystywany dalej dla oceny błędów przypadkowych i systematycznych.

Jak można stwierdzić na podstawie wyników analizy sieci polskiej i czechosłowackiej, dwie oddzielne analizy, oparte o wzory przy założeniach:

a) równych wag wyjściowych elementów: $\frac{\lambda^2}{L}$, $\frac{\mu^2}{L}$, $\frac{\varphi^2}{F}$, $\frac{\varrho^2}{R}$ i R , oraz

b) ich wag proporcjonalnych do długości L , F i R , prowadzą do prawie tych samych wyników liczbowych.

Założenie wymienione w punkcie a) daje teoretycznie nieco lepsze wyniki, co stwierdza sam autor wzorów, a przy tym wzory z nich wynikające są pokrewne wzorom wcześniej już stosowanym.

Założenie wymienione w punkcie b) daje podstawę wzorom prostszym w rachunku. W tym przypadku niesłuszne wydaje się wagowanie wielkości R dla wyznaczenia R_m , wzór (30b). Element ten, poprzez wielkość j'' , ma jednak znikomy wpływ na wynik analizy błędów.

Równie znikome różnice w ostatecznych wynikach analizy daje stosowanie dwu różnych współczynników $K = 2$ i $K = 3$ dla określenia wielkości j' i j'' .

Ostatecznie więc, analizę dokładności sieci niwelacji precyzyjnej wzorami Vignala można w zasadzie opierać o wzory oparte tylko na założeniu równych wag wyjściowych elementów, przyjmując jedną wartość współczynnika K .

Wzory Vignala w sposób cenny wzbogacają stosowany dotychczas repertuar wzorów dla oceny dokładności, w odniesieniu do dużych sieci niwelacji precyzyjnej. Powinny więc być szerzej stosowane by mogły stać się powszechnym miernikiem, służącym ujednoliceniu ocen dokładności niwelacji precyzyjnej.

LITERATURA I INNE ŹRÓDŁA

- [1] Kruis B.: Posouzení přesnosti nivelačních základů ČSR, Zeměměřický sborník, Praha 1953.
- [2] Wyrzykowski T.: Porównanie poziomów dwu dawnych sieci niwelacji precyzyjnej na obszarze Polski z poziomem obecnej sieci. Prace Inst. Geod. i Kart., t. IX, zeszyt 1 (19), Warszawa 1962.
- [3] Wyrzykowski T.: Poprawka niwelacyjna ze względu na dobowe zmiany kierunku linii pionu spowodowane przez Księżyc i Słońce. Prace Inst. Geod. i Kart., t. XV, zeszyt 3 (36), Warszawa 1968.
- [4] Bulletin Géodésique, N 18, Paris 1950.
- [5] Operaty obliczeniowe sieci niwelacji precyzyjnej I klasy. Państwowe Przedsiębiorstwo Geodezyjne, rękopisy i maszynopisy, Warszawa 1955.
- [6] Rapport sur les travaux géodésiques exécutés de 1945 à 1957. Sprawozdanie na XI Ogólne Zgromadzenie MUGG w Toronto, Warszawa 1957.
- [7] Rapport sur les travaux géodésiques exécutés en Pologne de 1957 à 1960. Sprawozdanie na XII Ogólne Zgromadzenie MUGG w Helsinkach, Warszawa 1960.
- [8] Tymczasowa instrukcja niwelacji precyzyjnej I i II klasy. Centr. Urząd Geod. i Kart., Warszawa 1956.

Recenzował: dr inż. Jerzy Bokun

Rękopis złożono w Redakcji w maju 1969 r.

ТАДЭУШ ВЫЖИКОВСКИ

АНАЛИЗ ТОЧНОСТИ ПОЛЬСКОЙ ПРЕЦИЗИОННОЙ СЕТИ НИВЕЛИРОВАНИЯ I КЛАССА ПО ФОРМУЛАМ ВИНЬЯЛЯ

Резюме

Анализ точности польской сети прецизионного нивелирования I класса по формулам Виньяля [4] проведен с целью практической проверки применения этих формул к анализу точности больших нивелирных сетей, а также сходимости их оценки с оценкой точности проводимой другими общеупотребляемыми формулами.

Сеть прецизионного нивелирования I класса измеренная в 1952—1955 гг. образует 8 больших полигонов, 4 малые полигоны при вековых пунктах, а также 17 коротких приграничных линий [2], [6], [7]. Общая длина линий сети — 5,5 тыс. км. Сеть вычислена в системе нормальных высот М. С. Молоденского. Характеристика этой сети, принятые при ее измерении критерии, а также полученные средние квадратические ошибки представлены во 2 главе.

Перед приступлением к анализу точности сети проведено два вступительных анализа. А именно:

1. Проведено анализ изменчивости значений вспомогательных в формулах Виньяля величин u_L и v_L , в зависимости от длины нивелирных линий (L), с целью определения длины Z выше которой систематические ошибки имеют характер случайных ошибок (глава 4). Результаты показано на рисунках 1 и 2 при разделении всего нивелирного материала на 2 части измеряемые двумя различными методами: метод А — измерение на двух клиньях (западная часть сети), метод В — измерение на 4 клиньях (восточная часть сети). Рисунок 3 относится к всему нивелирному материалу.

Принято $Z = 60$ км как характерную для графика, при дальнейшем постоянном но небольшом стремлении к росту величин u_L и v_L .

2. Сравнивая со строгим аналитическим методом, проведено анализ ошибок 3 различных методов определения уравнивающих линий определяющих величину μ (глава 5). В графическом методе, проведенном здесь на 4 линиях и независимых определениях 3 лиц (табл. 2), средняя квадратическая ошибка определяемых величин μ была равна $\pm 3,6$ мм для 100 км нивелирной линии. Это соответствует приблизительно 35% систематической ошибки нивелирования. Ошибки двух графо-аналитических методов (К. Кучеры и Т. Выжиковского) были значительно меньше: $\pm 0,5$ мм и $\pm 0,7$ мм на 100 км нивелирной линии. Они соответствуют около 5% полученной систематической ошибки нивелирования.

Глава 6 посвящена определению исходных величин для анализа по формулам Виньяля, для главных линий сети, без приграничных линий и малых полигонов

при вековых пунктах. На рисунке 4 показано схему анализируемых линий сети, общей длины 4824 км, а также разделение на 52 короткие линии ($L_m = 93$ км) для которых определено уравнивающие линии строгим методом. На рисунке 5 показаны результаты уравнивания сети.

Величины входящие в формулы Виньяля, их обозначения и определения, а также взаимные их отношения представлены в главе 7.

Величины входящие в формулы Виньяля, их обозначения и определения, исходных величин; часть 8.2 — результаты анализа точности при одинаковых весах соответствующих величин: $\frac{\lambda^2}{L}$, $\frac{\mu^2}{L}$, $\frac{\varphi^2}{F}$, $\frac{\varrho^2}{R}$ и R для коэффициента $K = 2$ и $K = 3$; часть 8.3 — результаты такого-же анализа с весами прямо пропорциональными длинам L , F и R .

Глава 9 посвящена обсуждению результатов анализа. На результаты анализа ничтожное влияние оказывали различные способы применения весов и различные коэффициенты K (и так здесь будет оговорена только часть 8.2.2. и 8.2.2.1.).

Результаты анализа представляют собой логическое соотношение определяемых величин.

Наименьшую величину, среди ошибок о свойстве общей ошибки, получено для u'_R ($\pm 0,266$ мм/км), т.к. характеризует она в основном только вероятную случайную ошибку.

Величины u'_L и v'_L имеют большие, но сходные с собой значения ($\pm 0,398$ и $\pm 0,413$ мм/км) и содержат, кроме случайных ошибок, влияние систематических ошибок нивелирных линий.

В свою очередь величины u'_F и $u'_{F\tau}$ имеют еще большие и тоже сходные с собой значения ($\pm 0,507$ и $\pm 0,558$ мм/км). Рост величины этих ошибок в сравнении с прежними наступает из-за новых источников ошибок (влияние движения поверхности земной коры, ошибки компарирования реек и ошибки определения поправок в данной системе высот).

Вероятную предельную общую ошибку на 1 километр (τ) определено дважды:

а) как предельная её величина $\tau' = U' = \lim u'_L, u'_F, u'_{F\tau}$

для $L_m, F_m \geq Z$ получая $\tau' = U' = \pm 0,558$ мм/км,

в) как функция $\tau'_1 = U'_1 = f(v', u'_R, j')$

получая $\tau'_1 = U'_1 = \pm 0,396$ мм/км.

Большие расхождения между величинами τ' и τ'_1 имеют место из-за того, что величина $\tau' = U'$ содержит тоже источники ошибок, которых нет в величине $\tau'_1 = U'_1$ и о которых была речь при величинах u'_F и $u'_{F\tau}$.

В связи с выше изложенным предлагается принять для $\tau = U$ название „вероятная общая предельная ошибка на километр нивелирной сети“, а для $\tau_1 = U_1$ такое-же название по отношению к нивелирной линии.

Связь значений τ и τ_1 и величин случайных (η) и систематических (ζ) ошибок представляют уравнения:

$$\tau^2 = \eta_1^2 + \zeta_1^2, \quad (40)$$

$$\tau_1^2 = \eta_2^2 + \zeta_2^2. \quad (44)$$

Как раньше, предлагается величины η_1 и ζ_1 называть как относящиеся к нивелирной сети, а величины η_2 и ζ_2 к нивелирной линии.

Получено: $\eta'_1 = \pm 0,243$ мм/км, $\eta'_2 = \pm 0,258$ мм/км, т.е. величины очень близкие

к себе и к значению $u'_R = \pm 0,266$ мм/км, что говорит о случайном характере этой ошибки.

Систематические ошибки очень разные. Для сети $\xi'_1 = \pm 0,502$ мм/км, для линии $\xi'_2 = \pm 0,301$ мм/км. Большое значение получилось потому, что согласно принципу формул Виньяля — ξ является коэффициентом при квадратном корне с длины линии, а не при самой длине, как это имеет место в формулах Лаллемана.

Анализируя отдельно материалы двух частей сети (пункт 9.2) измеряемых методом А (на 2 клинья) и методом В (на 4 клинья), получено:

измерения методом А	измерения методом В
$\eta'_2 = \pm 0,271$ мм/км,	$\eta'_2 = \pm 0,246$ мм/км,
$\xi'_2 = \pm 0,185$ мм/км,	$\xi'_2 = \pm 0,364$ мм/км,
$\tau'_1 = U'_1 = \pm 0,328$ мм/км,	$\tau'_1 = U'_1 = \pm 0,440$ мм/км.

Этим подтверждается мнение о меньших систематических ошибках в методе измерения на 2 клинья; для этого метода общая ошибка тоже получалась меньше.

В главе 10, к анализируемому по формулам Виньяля материалу сети, помещено — для сравнения — сводку средних ошибок (в скобках значения вероятных ошибок) определенных формулами Лаллемана и другими. Необходимо обратить внимание на в двое раз меньшую систематическую ошибку σ'_μ , вычисленную для данных анализируемых по формулам Виньяля (50) при $L'_m = 93$ км, чем такая ошибка вычисленная для всего материала сети (8) при $L'_m = 29$ км. Здесь заметная зависимость между определенным значением этой ошибки а средней длиной уравнивающей линии (L'_m).

Глава 11 содержит сравнение результатов анализа точности по формулам Виньяля польской и чехословацкой сетей [1]. Аналогично как в польской, в чехословацкой сети выступили значительные расхождения между соответствующими значениями ошибок τ и ξ вычисленными из различных составных элементов сети — из линии (τ'_1, ξ'_2) и из замкнутых полигонов ($\tau' \xi'_1$). Ошибки вычисленные из полигонов были значительно больше.

Необходимо заметить большое согласие значений ошибок двух сетей определенных формулами опирающимися на больших элементах сети, т.е. на полигонах ($u_F, u_{F\gamma}, \tau = U, \eta_1, \xi_1$), а также различие ошибок двух сетей определенных на основании меньших элементов, т.е. одиночных линий ($u_L, v_L, V, \tau_1 = U_1, \eta_2, \xi_2$).

Формулы Виньяля ценным образом обогащают применяемый до сих пор состав формул для оценки точности, применительно к большим сетям прецизионного нивелирования. Они должны быть применяемые шире, чтобы стать общим измерителем однородной оценки точности прецизионного нивелирования.

TADEUSZ WYRZYKOWSKI

ANALYSIS OF ACCURACY OF POLISH NETWORK OF FIRST-CLASS PRECISION LEVELLING MADE BY MEANS OF VIGNAL'S FORMULAE

Summary

The purpose of analyzing the accuracy of the Polish network of first-class precision levelling by the use of Vignal's [4] formulae was to determine practically, how far these formulae can be applied to analyses of the accuracy of large levelling networks and how far the results obtained agree with results from other commonly used formulae.

The first-class precision levelling network surveyed in the period from 1952 to 1955 consisted of eight large polygons, four small polygons, and seventeen short boundary-directed lines [2], [6], [7]. The total length of this network was 5500 km, and it was calculated for M. S. Molodenski's system of normal altitudes. Chapter 2 reports the characteristic of this network, the criteria assumed for its survey, and the mean errors determined.

Prior to his proper analysis of the accuracy of this network, the author made two preliminary determinations, namely:

1) he analyzed the variableness of the auxiliary values of magnitudes u_L and v_L in Vignal's formulae which depends on the lengths of the levelling lines (L); the purpose was to find that length Z beyond which the systematic errors rather assume the character of accidental errors (Chapter 4). The results of this analysis are shown in Figs. 1 and 2; here all levelling data were subdivided into two parts surveyed by two different methods: method A-surveyed by the means of two wedges (western part of the network) and method B-surveyed by the means four wedges (eastern part of the network). Fig. 3 takes in the whole material covered by the levelling survey. $Z = 60$ km was chosen as the value characterizing the diagram; however, it appeared at the same time that the values u_L and v_L show a slight but constant tendency towards increasing.

2) he analyzed the errors which occur in the application of three different methods of determining compensating lines for defining the values μ in correlation with the errors found in the strictly analytical method (Chapter 5). For the graphic method, which here was verified on the basis of four survey lines and of observations made independently by three different operators (Table 2), the mean error in determining the value of μ for 100 km levelling survey lines proved to be $\pm 3,6$ mm; this corresponds approximately to 35% of the systematic error determined in levelling surveys. The error resulting from two graphical-analytical methods (of K. Kucera and T. Wyrzykowski) were much smaller: $\pm 0,5$ mm and $\pm 0,7$ mm respectively

per 100 km surveying line. These figures correspond to approximately 5% of the value of systematic error determined in levelling.

In Chapter 6 the author discusses how to determine the initial values for analyses by means of Vignal's method — a method embracing only the principal lines of the network, omitting the boundary-directed lines and any small polygons at the secular points. Fig. 4 illustrates the pattern of the analyzed network lines — of 4824 km total length — and its division into 52 shorter lines ($L_m = 93$ km each) for which compensating lines were determined by the precise method. Fig. 5 pictures the results obtained by compensating the network.

The values appearing in Vignal's formulae, as well as the way how they were determined and defined, and their mutual interrelation are the topic dealt with in Chapter 7.

Chapter 8 presents a list of the results obtained in the above analysis. In Part 8.1 the author gives the initial values, in 8.2 an analysis of the accuracy obtained for coefficients $K = 2$ and $K = 3$, assuming identical weights for each of the values $\frac{\lambda^2}{L}$, $\frac{\mu^2}{L}$, $\frac{\varphi^2}{F}$, $\frac{\sigma^2}{R}$ and R . Finally, Part 8.3 brings the results of the same analysis of accuracy where, however, the particular weights were applied in due proportion to the lengths of L , F and R .

In Chapter 9 the author discusses the results of the above analysis. He shows that unessential is the effect of the different ways how the weights were assumed, and how the value of coefficient K was chosen; for this reason he deals further in detail only with sub-parts 8.2.2. and 8.2.2.1.

The results obtained in this analysis appear as a logical system of determined values.

Lowest among the errors bearing the character of total errors is value u_R' ($\pm 0,266$ mm/km); this is understandable because fundamentally this value represents only the probable accidental error.

The values u_L' and v_L' show higher figures and they resemble each other ($\pm 0,398$ and $\pm 0,413$ mm/km); apart from the accidental errors they comprehend the effect of systematic errors of the levelling lines.

Next in magnitude are the values u_F' and u_{F_Y}' whose figures are higher yet and also resemble each other ($\pm 0,507$ and $\pm 0,558$ mm/km). The increased values of these errors, compared with the preceding errors, must be ascribed to the fact that new sources of errors have been added (the effect of movements of the Earth's crust, inaccuracies in comparing levelling rods, and errors in determining corrections in the given altitude system).

The probable total limit error per kilometer (τ) has been determined in a twofold way:

a) as limit value $\tau' = U' = \lim u_L', u_F', u_{F_Y}'$ for L_m with $F_m \geq Z$, which gave $\tau' = U' = \pm 0,558$ mm/km, and

b) as function $\tau_1' = U_1' = f(V', u_R', j')$, giving $\tau_1' = U_1' = \pm 0,396$ mm/km.

The considerable difference between values τ' and τ_1' stems from the fact, that value $\tau' = U'$ also contains the sources of errors mentioned in discussing u_F' and u_{F_Y}' ; value $\tau_1' = U_1'$ is free of these error sources.

In view of the above the author suggests for $\tau = U$ the term „probable total limit error per 1 km of the levelling network”, and for $\tau_1 = U_1$ an identical term but related to 1 km of a levelling line.

In values τ and τ_1 are joined the accidental errors (η) with the systematic errors

(ζ) by means of equations:

$$\tau^2 = \eta_1^2 + \zeta_1^2, \quad (40)$$

$$\tau_1^2 = \eta_2^2 + \zeta_2^2. \quad (44)$$

Like before, the author proposes to relate the values η_1 and ζ_1 to the levelling network and the values η_2 and ζ_2 to a levelling line.

Obtained were by this method: $\eta_1' = \pm 0,243$ mm/km and $\eta_2' = \pm 0,258$ mm/km, thus values closely approaching each other and close to value $u_R' = \pm 0,266$ mm/km; this implies that this error is of an accidental character.

The systematic errors are more diversified; for the network $\zeta_1' = \pm 0,502$ mm/km, for a line $\zeta_2' = \pm 0,301$ mm/km. This high value of ζ is due to the fact that — in accordance with the assumptions made for Vignal's formulae — ζ is a coefficient of the square root of the length of the line, not of the length of line itself, as is the case for Lallemand's formulae.

By analysing separately the data for two parts of the network (Part 9.2), surveyed by method A (two wedges) and then by method B (4 wedges) we obtain:

by method A	by method B
$\eta_2' = \pm 0,271$ mm/km,	$\eta_2' = \pm 0,246$ mm/km,
$\zeta_2' = \pm 0,185$ mm/km,	$\zeta_2' = \pm 0,364$ mm/km,
$\tau_1' = U_1' = \pm 0,328$ mm/km,	$\tau_1' = U_1' = \pm 0,440$ mm/km,

This confirms the belief, that smaller systematic errors are obtained by the use of the 2-wedge method — the method for which the total error also proved to be smaller.

Chapter 10 refers to the network data analyzed by Vignal's formulae; for comparison's sake also listed were the values for the mean errors (and, in brackets, for probable errors) as determined by Lallemand's and other formulae. Worthy of note is the value of the systematic error σ_{sys} calculated from the data analyzed by Vignal's formulae (50) for $L_m' = 93$ km, this value is barely one half the figure for the same error calculated from the material for the entire network (8), with $L_m' = 29$ km. Clearly noticeable is here the interrelation between the determined value of this error and the mean length of the compensating line (L_m').

Chapter 11 shows a comparison of the results of the analysis, made by the use of Vignals formulae, of the accuracy of the Polish and the Czechoslovakian network [1]. In the Czechoslovakian network, like in that of Poland, marked divergences appeared between the respective values of the errors τ and ζ calculated from a variety of component elements of the network: from a line (τ_1', ζ_2') and from closed polygons (τ', ζ_1'). The errors calculated from polygons were much greater.

Worth mentioning is for both networks the high degree of concordance of errors determined by formulae based on larger elements of these networks, i. e. on the polygons ($u_F, u_{F_1}, \tau = U, \eta_1, \zeta_1$); also remarkable is the divergence found in both networks as to the errors determined by formulae based on minor elements, i. e. on particular lines ($u_L, v_L, V, \tau_1 = U_1, \eta_2, \zeta_2$).

In conclusion the author asserts that Vignal's formulae are valuable means for enriching the sum of formulae heretofore used for ascertaining the accuracy of wide networks of precision levelling. This is why he recommends them to be applied more extensively, so as to become a common gauge leading to standardizing estimates of the accuracy of precise levelling.

