

Jednowskaźnikowa notacja krakowianowa

W pamięciach elektronicznych maszyn cyfrowych elementy jednowymiarowych zespołów liczbowych, np. kolumn lub wierszy krakowianowych, mogą być łatwo identyfikowane na podstawie adresów komórek pamięci. Przy zapisie elementów $a_1, a_2 \dots a_n$ kolumny **a** do kolejnych komórek pamięci o adresach $c+1, c+2 \dots c+n$, położenie elementu a_i określone jest bezpośrednio adresem $c+i$, spełniającym w sposób naturalny rolę wskaźnika elementów kolumny.

Krakowiany i macierze są dwuwymiarowymi zespołami liczbowymi, których elementy oznacza się dwoma wskaźnikami. W związku z tym w programowaniu zachodzi potrzeba przeliczania tych wskaźników na adresy komórek pamięci. Dotyczy to zwłaszcza programowania w języku maszyny, choć także przy stosowaniu bardziej złożonych języków algorytmicznych, umożliwiających operowanie tablicami wielowskaźnikowymi, korzystne jest niekiedy posługiwanie się jednym wskaźnikiem odpowiadającym adresowi.

Nie ulega zatem kwestii, że z punktu widzenia techniki programowania celowe jest w pewnych przypadkach oznaczanie elementów tablic dwuwymiarowych jednym wskaźnikiem. W pracy niniejszej przedstawia się koncepcję jednowskaźnikowej notacji krakowianowej, wraz z przykładami zastosowań.

1. Podstawowe definicje i wzory

Element krakowianu **a** o m kolumnach i n wierszach oznaczać będziemy pisząc

$$a \langle h \rangle,$$

gdzie h jest wskaźnikiem określającym położenie elementu w tabeli, zwanym krótko adresem.

Adres przybiera kolejno wartości $1, 2 \dots n$ dla elementów pierwszej kolumny, $n+1, n+2 \dots 2n$ — dla elementów drugiej kolumny, wreszcie $(m-1)n+1, (m-1)n+2 \dots mn$ — dla elementów ostatniej kolumny.

Mamy zatem ogólnie

$$\mathbf{a} = \begin{Bmatrix} a \langle 1 \rangle & a \langle n+1 \rangle & \dots & a \langle (m-1)n+1 \rangle \\ a \langle 2 \rangle & a \langle n+2 \rangle & \dots & a \langle (m-1)n+2 \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a \langle n \rangle & a \langle 2n \rangle & \dots & a \langle mn \rangle \end{Bmatrix} \quad (1)$$

Stosując notację jednowskaźnikową zapiszemy tabelę krakowianu $\mathbf{a}$ o 3 kolumnach i 4 wierszach w sposób następujący

$$\mathbf{a} = \begin{Bmatrix} a \langle 1 \rangle & a \langle 5 \rangle & a \langle 9 \rangle \\ a \langle 2 \rangle & a \langle 6 \rangle & a \langle 10 \rangle \\ a \langle 3 \rangle & a \langle 7 \rangle & a \langle 11 \rangle \\ a \langle 4 \rangle & a \langle 8 \rangle & a \langle 12 \rangle \end{Bmatrix}$$

Adres jest więc numerem bieżącym elementów, przy czym numerację prowadzi się dla kolejnych kolumn, poczynając zawsze od góry.

Nietrudno zauważyć, że elementowi położonemu w i -tej kolumnie i j -tym wierszu, czyli elementowi $a_{i,j}$ odpowiada adres wyrażony wzorem

$$h = (i-1)n + j, \quad (2)$$

gdzie n jest liczbą wierszy krakowianu $\mathbf{a}$.

Mamy zatem

$$a \langle (i-1)n + j \rangle = a_{i,j} \quad (3)$$

Wzór (2) umożliwia obliczenie adresu h na podstawie danych wartości wskaźników i oraz j . W przypadku, gdy dany jest adres h wskaźnik i może być obliczony przy użyciu nietrudnego do uzasadnienia wzoru

$$i = E\left(\frac{h-1}{n}\right) + 1, \quad (4)$$

w którym występuje część całkowita ilorazu $\frac{h-1}{n}$. Wskaźnik i można również obliczać posługując się oczywistą nierównością

$$(i-1)n < h \leq i \cdot n \quad (5)$$

Znając i uzyskuje się j na podstawie wzoru (2) przekształconego do postaci

$$j = h - (i-1) \cdot n \quad (6)$$

Weźmy dla przykładu element $a \langle 18 \rangle$ czterowierszowego krakowianu $\mathbf{a}$.

Jest on położony w piątej kolumnie oraz w drugim wierszu, ponieważ:

$$i = E\left(\frac{18-1}{4}\right) + 1 = 4 + 1 = 5,$$

$$j = 18 - 4 \cdot 4 = 2.$$

Dla lepszego przedstawienia właściwości notacji jednowskażnikowej zastosujemy ją teraz przykładowo do opisanego niektórych pojęć i definicji algebry krakowianowej.

1. Element przekątny, tj. element położony w i -tej kolumnie oraz w j -tym wierszu zaopatrzony jest adresem

$$p_i = (i-1)n + i. \quad (7)$$

2. Krakowian $\mathbf{b}$ jest transpozją krakowianu $\mathbf{a}$ o m kolumnach i n wierszach, tj. $\mathbf{b} = \tau \mathbf{a}$, jeśli

$$b \langle (j-1)m + i \rangle = a \langle (i-1)n + j \rangle. \quad (8)$$

3. Krakowian $\mathbf{c}$ jest sumą dwóch krakowianów $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ o m kolumnach i n wierszach, tj. $\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$, jeśli

$$c \langle h \rangle = a \langle h \rangle + b \langle h \rangle, \quad h = 1, 2 \dots mn. \quad (9)$$

4. Krakowian $\mathbf{b}$ jest iloczynem liczby z oraz krakowianu $\mathbf{a}$ o m kolumnach i n wierszach, tj. $\mathbf{b} = z \cdot \mathbf{a}$, jeśli

$$b \langle h \rangle = z \cdot a \langle h \rangle, \quad h = 1, 2 \dots mn. \quad (10)$$

5. Krakowian $\mathbf{c}$ jest iloczynem dwóch n -wierszowych krakowianów $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, tj. $\mathbf{c} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$, jeśli

$$c \langle h \rangle = \sum_{k=1}^n a \langle (i-1)n + k \rangle \cdot b \langle (j-1)n + k \rangle \quad (11)$$

gdzie wskaźniki i , j są określone przez adres $h = (i-1)m + j$, zaś m jest liczbą kolumn krakowianu $\mathbf{b}$ i jednocześnie liczbą wierszy iloczynu $\mathbf{c}$.

2. Tablice trójkątne

W wielu zadaniach algebry krakowianowej, a zwłaszcza przy rozwiązywaniu układów równań liniowych, występują krakowiany symetryczne i trójkątne. Obydwa wymienione rodzaje krakowianów charakteryzują się tym, że ich zapis może być ograniczony do $\frac{n(n+1)}{2}$ elementów tworzących tablicę trójkątną. Pozostałe elementy w pierwszym przypadku mogą być łatwo określone na mocy symetrii, zaś w drugim przypadku są z założenia

równe zero. Jest rzeczą oczywistą, że operowanie tablicami trójkątnymi zamiast kwadratowymi przynosi duże korzyści, umożliwiając przede wszystkim lepsze wykorzystanie pamięci maszyny elektronicznej.

Weźmy pod uwagę n -kolumnowy i n -wierszowy krakowian a o tablicy trójkątnej utworzonej przez elementy znajdujące się na głównej przekątnej oraz powyżej niej

$$a = \begin{pmatrix} a \langle 1 \rangle & a \langle 2 \rangle & \dots & a \langle \frac{n(n-1)}{2} + 1 \rangle \\ & a \langle 3 \rangle & \dots & a \langle \frac{n(n-1)}{2} + 2 \rangle \\ & & \dots & \dots \\ & & & a \langle \frac{n(n+1)}{2} \rangle \end{pmatrix} \quad (12)$$

Podobnie jak to było dla tablic prostokątnych, adres h elementu $a \langle h \rangle$ jest numerem bieżącym powstałym przy numerowaniu elementów kolejnych kolumn poczynając zawsze od góry.

Adres p_i i -tego elementu przekątnego, tzn. elementu położonego w i -tej kolumnie oraz i -tym wierszu, wyraża się wzorem

$$p_i = \frac{i(i+1)}{2} \quad (13)$$

Korzystając z powyższego wzoru można zapisać adres elementu położonego w i -tej kolumnie oraz j -tym wierszu w następujący sposób

$$h = p_{i-1} + j, \quad (14)$$

gdzie $i = 1, 2 \dots n$, $i \geq j$, zaś $p_0 = 0$.

Mając dany adres h można obliczyć wskaźnik kolumny i , w której położony jest element $a \langle h \rangle$, na drodze porównywania h z adresami elementów przekątnych. Element $a \langle h \rangle$ znajduje się w kolumnie i jeśli p_{i-1} jest największym z adresów elementów przekątnych spełniających nierówność

$$p_{i-1} < h. \quad (15)$$

Z kolei wskaźnik wiersza j może być obliczony na podstawie wzoru (14):

$$j = h - p_{i-1}. \quad (16)$$

Istotne znaczenie ze względów praktycznych mają również krakowianie o tablicach trójkątnych, przy których zapisie pominięto początkowe elementy zerowe, tj. te elementy, które równają się zero i w danej kolumnie znajdują się ponad pierwszym, licząc od góry, elementem różnym od zera.

W schematycznie przedstawionym poniżej krakowianie o tablicy trójk-

kątnej wyróżniono i -tą kolumnę zawierającą z_i nie zapisywanych, początkowych elementów zerowych.

$$\mathbf{a} = \left\{ \begin{array}{c} \begin{array}{c} 0 \uparrow \\ \dots z_i \\ 0 \downarrow \\ a \langle p_{i-1}+1 \rangle \\ a \langle p_{i-1}+2 \rangle \\ \dots \\ a \langle p_{i-1}+j-z_i \rangle \\ \dots \\ a \langle p_i \rangle \end{array} \end{array} \right\}$$

W krakowianach tego typu adres p_i i -tego elementu przekątnego wyraża się wzorem

$$p_i = \frac{i(i+1)}{2} - \sum_{k=1}^i z_k \quad (17)$$

zaś adres elementu położonego w i -tej kolumnie oraz i -tym wierszu — wzorem

$$h = p_{i-1} + j - z_i, \quad (18)$$

gdzie $i = 1, 2 \dots n$, $i \geq j$, $j > z_i$, zaś $p_0 = 0$.

Analogicznie jak w omówionym uprzednio przypadku pełnych tablic trójkątnych wskaźnik kolumny i może być obliczony na podstawie danego adresu h przez porównywanie h z adresami elementów przekątnych. Element $a \langle h \rangle$ leży w kolumnie i jeśli p_{i-1} jest największym z adresów elementów przekątnych, przy którym

$$p_{i-1} < h. \quad (19)$$

Znając p_{i-1} oraz z_i można łatwo obliczyć j (18)

$$j = h - p_{i-1} + z_i. \quad (20)$$

Dla przykładu zwróćmy uwagę na krakowian

$$\mathbf{a} = \left\{ \begin{array}{ccccc} 12 & -11 & 0 & 0 & 0 \\ & 33 & 0 & 21 & 0 \\ & & 25 & 0 & 0 \\ & & & 13 & 1 \\ & & & & 17 \end{array} \right\}$$

Trójkątną tablicę tego krakowianu zapiszemy w notacji jednowskaźnikowej pomijając początkowe elementy zerowe występujące w kolumnach: trzeciej (2 elementy), czwartej (1 element) i piątej (3 elementy).

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a\langle 1 \rangle & a\langle 2 \rangle & - & - & - \\ & a\langle 3 \rangle & - & a\langle 5 \rangle & - \\ & & a\langle 4 \rangle & a\langle 6 \rangle & - \\ & & & a\langle 7 \rangle & a\langle 8 \rangle \\ & & & & a\langle 9 \rangle \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{rccccc} i = & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ z_i = & 0 & 0 & 2 & 1 & 3 \\ p_i = & 1 & 3 & 4 & 7 & 9 \end{array}$$

Pod tabelą podane zostały numery kolejnych kolumn i oraz odpowiadające im wartości z_i , p_i .

Sprawdzimy wzory (17) — (20) obliczając:

a) adres p_4 czwartego elementu przekątnego $a_{4,4} = 13$,

$$p_4 = \frac{i(i+1)}{2} - \sum_{k=1}^i z_k = \frac{4 \cdot 5}{2} - (0+0+2+1) = 7,$$

b) adres elementu $a_{4,2} = 21$

$$h = p_{i-1} + j - z_i = 4 + 2 - 1 = 5,$$

c) wskaźniki i , j elementu $a\langle 8 \rangle$:

$$p_4 = 7 < 8, \quad \text{zatem} \quad i = 4 + 1 = 5,$$

$$j = h - p_{i-1} + z_i = 8 - 7 + 3 = 4.$$

3. Rozwiązanie układu równań normalnych metodą pierwiastka krakowianowego

Niech dany będzie układ równań normalnych

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{a}^2 + \mathbf{1} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{0}, \quad (21)$$

powstały na drodze transformacji Gaussa z układu równań poprawek

$$\mathbf{v} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{a} + \mathbf{1}$$

Celem rozwiązania układu równań normalnych (21) metodą pierwiastka krakowianowego należy obliczyć krakowian współczynników

$$\mathbf{A} = \sqrt{\mathbf{a}^2}$$

oraz kolumnę wyrazów wolnych $\mathbf{L} = (\mathbf{1} \cdot \mathbf{a}) \cdot \tau \mathbf{A}^{-1}$ trójkątnego układu równań

$$\mathbf{x} \cdot \tau \mathbf{A} + \mathbf{L} = \mathbf{0}, \quad (22)$$

umożliwiającego łatwe obliczenie kolejnych niewiadomych

$$\mathbf{x} = \tau \{x_1, x_2 \dots x_m\}. \quad (23)$$

poczynając od niewiadomej ostatniej.

Utwórzmy krakowian danych początkowych **b** obejmujący współczynniki, wyrazy wolne i sumowe układu równań normalnych (21) zapisane poniżej w symbolice Gaussa

$$\mathbf{b} = \left\{ \begin{array}{cccccc} [aa] & [ab] & \dots & [am] & [al] & [as] \\ & [bb] & \dots & [bm] & [bl] & [bs] \\ & & \dots & & \dots & \dots \\ & & & [mm] & [ml] & [ms] \\ & & & & [ll] & [ls] \\ & & & & & [ss] + 1 \end{array} \right\} \quad (24)$$

W ostatnich dwóch wierszach trójkątnej tabeli tego krakowianu wpisane elementy $[ll]$, $[ls]$ i $[ss] + 1$ umożliwiają obliczenie $[vv]$ oraz dostarczające dodatkowych kontroli rachunkowych.¹⁾

Obliczając pierwiastek z krakowianu (24) otrzymamy

$$\mathbf{B} = \sqrt{\mathbf{b}} = \left\{ \begin{array}{cccccc} A_{1,1} & A_{2,1} & \dots & A_{m,1} & L_1 & S_1 \\ & A_{2,2} & \dots & A_{m,2} & L_2 & S_2 \\ & & \dots & & \dots & \dots \\ & & & A_{m,m} & L_m & S_m \\ & & & & \sqrt{[vv]} & \sqrt{[vv]} \\ & & & & & 1 \end{array} \right\} \quad (25)$$

Elementami krakowianu **B** są elementy krakowianu **A**, kolumny **L**, kolumny sumowej $\mathbf{S} = \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2 + \dots + \mathbf{A}_m + \mathbf{L}$, pierwiastki z sumy kwadratów poprawek oraz jedność uzyskana na miejscu $[ss] + 1$.

Wzory metody pierwiastka krakowianowego w notacji jednowskaźnikowej można przedstawić w postaci²⁾

$$B \langle p_i \rangle = \sqrt{b \langle p_i \rangle - \sum_{k=p_{i-1}+1}^{p_i-1} (B \langle k \rangle)^2}, \quad (26)$$

gdzie $i = 1, 2 \dots m+1, m+2$,

$$B \langle h \rangle = \frac{1}{B \langle p_j \rangle} \left(b \langle h \rangle - \sum_{k=1}^{j-1} B \langle p_j - k \rangle \cdot B \langle h - k \rangle \right), \quad (27)$$

¹⁾ Dodanie jedności do $[ss]$ ma na celu liniowe uniezależnienie kolumny sumowej od poprzednich kolumn krakowianu **b**, co jest korzystne ze względów rachunkowych.

²⁾ W następujących tu wzorach należy przyjmować, że suma równa się zeru, jeśli górna granica sumowania jest mniejsza od dolnej.

gdzie $h \neq p_i$, $j = h - p_{i-1}$,

$$x \langle r \rangle = - \frac{1}{B \langle p_r \rangle} \left(B \langle p_m + r \rangle + \sum_{k=r+1}^m x \langle k \rangle \cdot B \langle p_{k-1} + r \rangle \right), \quad (28)$$

gdzie $r = m, m-1 \dots 2, 1$.

W przypadku, gdy przy zapisie krakowianu $\mathbf{b}$ do pamięci pomijane są początkowe elementy zerowe kolumn 1, 2... m zawierających współczynniki przy niewiadomych, wzory powyższe można przedstawić w następujący sposób

$$B \langle p_i \rangle = \sqrt{b \langle p_i \rangle - \sum_{k=p_{i-1}+1}^{p_i-1} (B \langle k \rangle)^2}, \quad (29)$$

gdzie $i = 1, 2 \dots m+1, m+2$,

$$B \langle h \rangle = \frac{1}{B \langle p_j \rangle} \left(b \langle h \rangle - \sum_{k=1}^{t-1} B \langle p_j - k \rangle \cdot B \langle h - k \rangle \right) \quad (30)$$

gdzie $h \neq p_i$, $j = h - p_{i-1} + z_i$, zaś

$$t = \begin{cases} p_j - p_{j-1} & \text{gdy } p_j - p_{j-1} \leq h - p_{i-1}, \\ h - p_{i-1} & \text{gdy } p_j - p_{j-1} > h - p_{i-1}, \end{cases}$$

$$x \langle r \rangle = - \frac{1}{B \langle p_r \rangle} \left(B \langle p_m + r \rangle + \sum_{k=r+1}^m x \langle k \rangle \cdot B \langle p_k + r - k \rangle \right), \quad (31)$$

gdzie $r = m, m-1 \dots 2, 1$, zaś sumowaniem obejmuje się tylko te iloczyny $x \langle k \rangle \cdot B \langle p_k + r - k \rangle$, dla których $p_k + r - k > p_{k-1}$.

Przykład. Dany jest krakowian danych początkowych $\mathbf{b}$ (24)

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} [aa] & [ab] & [ac] & [ad] & [al] & [as] \\ & [bb] & [bc] & [bd] & [bl] & [bs] \\ & & [cc] & [cd] & [cl] & [cs] \\ & & & [dd] & [dl] & [ds] \\ & & & & [ll] & [ls] \\ & & & & & [ss] + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 & 0 & -10 & -8 \\ & 2 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ & & 4 & -4 & 4 & 4 \\ & & & 14 & -43 & -32 \\ & & & & 263 & 216 \\ & & & & & 184 \end{pmatrix}$$

Obliczymy niewiadome x_1, x_2, x_3, x_4 oraz $\sqrt{[vv]}$, pomijając początkowe elementy zerowe i stosując wzory (29) — (31).

$$\begin{array}{cccccc} \text{Mamy tu: } i = & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ z_i = & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ p_i = & 1 & 3 & 4 & 7 & 12 & 18 \quad (p_0 = 0) \end{array}$$

Elementy $b \langle h \rangle$ uporządkowane są w pamięci maszyny według adre-

sów h tworząc ciąg

$$b\langle h \rangle = \begin{matrix} h=1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 \\ 4 & -2 & 2 & 4 & 1 & -4 & 14 & -10 & 2 & 4 & -43 & 263 & -8 & 3 & 4 & -32 & 216 & 184 \end{matrix}$$

Po wykonaniu obliczeń według wzorów (29) — (30) otrzymamy

$$B\langle y \rangle = \begin{matrix} h=1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 \\ 2 & -1 & 1 & 2 & 1 & -2 & 3 & -5 & -3 & 2 & -12 & 9 & -4 & -1 & 2 & -9 & 9 & 1 \end{matrix}$$

Zgodnie z (25) uzyskaliśmy $B\langle p_5 \rangle = B\langle p_6 - 1 \rangle = \sqrt{[vv]} = 9$ oraz $B\langle p_6 \rangle = 1$. Stosując wzór (31) obliczymy teraz niewiadome:

$$\begin{aligned} r &= 4 & 3 & 2 & 1 \\ x\langle r \rangle &= 4 & 3 & -1 & 2 \end{aligned}$$

Jest rzeczą oczywistą, że przedstawione wzory mogą być stosowane nie tylko do układów równań normalnych powstałych w trakcie wyrównania metodą spostrzeżeń pośrednich, ale również do innych rodzajów symetrycznych układów równań liniowych rozwiązywalnych metodą pierwiastka krakowianowego.

Jak pokazuje praktyka obliczeniowa, krakowiany współczynników dużych układów równań normalnych zawierają z reguły znaczną liczbę początkowych elementów zerowych, dochodzącą niejednokrotnie do 80÷90% ogólnej liczby współczynników. Zastosowanie wzorów (29) — (31) pozwala zatem na rozwiązywanie większych układów równań, niż w przypadku użycia wzorów (26) — (28), wymagających wprowadzenia do pamięci maszyny pełnej tabeli trójkątnej ze wszystkimi elementami zerowymi. Dodatkową korzyścią jest tu skrócenie czasu rachunku wynikające z pominięcia działań na elementach zerowych.

Zagadnienie pomijania w obliczeniach zbędnych elementów zerowych jest przykładem specyfiki stosowania elektronicznych maszyn cyfrowych, jak również przykładem uzasadniającym konieczność dokładnego formułowania algorytmów przeznaczonych do zaprogramowania. Rachmistrz rozwiązujący przy użyciu arytmometru układ równań metodą pierwiastka krakowianowego posługuje się wyłącznie kilkoma prostymi wzorami lub regułami. Podawanie obdarzonemu ludzką inteligencją wykonawcy obliczeń dodatkowych, trywialnych instrukcji w rodzaju „nie mnoż elementów zerowych” jest oczywiście nonsensowne. Jak widać nie można tego powiedzieć w stosunku do elektronicznych maszyn cyfrowych.

Programowanie obliczeń z pomijaniem działań na elementach zerowych przedstawiane już było fragmentarycznie w niektórych z poprzednich prac autora.

Rękopis złożono w Redakcji w lutym 1969 r.

ЕЖИ ГАЗДИЦКИ

ОДНОИНДЕКСНАЯ КРАКОВЯННАЯ ЗАПИСЬ

Резюме

Элементы двухмерных таблиц обозначается двумя индексами, из которых один является индексом колонны, а второй — строки. При составлении алгоритмов вычислений с помощью электронных цифровых вычислительных машин в некоторых случаях является целесообразным пользоваться одним индексом, соответствующим адресу ячеек запоминающего устройства.

В работе представляется одноиндексная запись элементов краковянов, которых таблицы имеют прямоугольную или треугольную форму, при чем учитывается возможность пренебрежения нулевыми элементами. Кроме того приводятся в одноиндексной записи формулы предназначенные для решения систем линейных уравнений по методу краковянного корня.

JERZY GAŻDZICKI

SINGLE-INDEX CRACOVIAN MARKING

Summary

The elements of two-dimensional tables are marked by two indices, one of which denotes the column, the second the row. In certain instances, when presenting algorithms of calculations made on electronic computers, it is advantageous to apply one index only which corresponds to the address of the cells of the computer's memory.

In his present paper the author presents a one-dimensional marking of elements in the cracovians; the tables of these values are either rectangular or triangular in shape, and the possibility is taken into account of omitting zero elements. Moreover, in his one-dimensional marking the author presents formulas applicable for solving systems of linear equations by the method of the cracovian root.

