

## Geodezyjna interpretacja wyników pomiarów przemieszczeń

### 1. Wstęp

Geodezyjna interpretacja wyników pomiarów przemieszczeń jest procesem wyciągania wniosków na temat wartości i znaczenia osiągniętych wyników pomiarów i obliczeń dokonywanych nad tymi rezultatami. Wnioskowanie o wartości i znaczeniu osiągniętych wyników pomiarów konieczne jest zarówno w czasie wykonywania pomiarów i obliczeń, jak też i po ich zakończeniu.

Wnioskowanie w czasie pomiarów i obliczeń ma na celu umożliwienie podejmowania decyzji co do sposobu dalszego postępowania w ramach procesu pomiarowego i obliczeniowego (na przykład w toku dokonywania wyrównania stacyjnego wyników pomiaru kierunków może się okazać, że niektóre wyniki osiągają wartości nadmiernie odbiegające od pozostałych, co skłania do powtórzeń pomiarów).

Wnioskowanie o znaczeniu osiągniętych wyników, dokonywane po zakończeniu pomiarów i obliczeń ma na celu ułatwienie znalezienia związków między wyznaczonymi przemieszczeniami i odkształceniami a przyczynami, które mogły je wywołać.

Bardzo ważne jest tu zdawanie sobie sprawy z różnicy między geodezyjną a branżową interpretacją wyników pomiarów przemieszczeń i odkształceń. Interpretacja geodezyjna ogranicza się do wyciągania wniosków na temat technicznej wartości wyników pomiarów oraz wniosków na temat geometrycznego ich znaczenia. Interpretacja branżowa, posługująca się wynikami pomiarów i wnioskami uzyskanymi w ramach interpretacji geodezyjnej ma na celu znalezienie związków między stwierdzonymi zmianami geometrycznymi, a przyczynami tych zmian oraz ocenę, czy stwierdzone zmiany są szkodliwe dla obiektu badań. Ponadto w ramach interpretacji branżowej, która opiera się również na wynikach innych niegeodezyjnych badań stanu bezpieczeństwa rozpatrywanego obiektu, wyciąga się wnioski na temat niezbędnych sposobów dodatkowych zabezpieczeń obiektu, zmian sposobu jego eksploatacji oraz wnioski natury naukowej,

oparte na konfrontacji wyznaczonych przemieszczeń i odkształceń z przewidywanymi na drodze teoretycznej (obliczeniowymi).

Należy podkreślić, że w zasadzie interpretacja geodezyjna poprzedza interpretację branżową, jakkolwiek mogą zaistnieć wypadki pewnego zażębiania się czynności interpretacyjnych lub wręcz wspólnego interpretowania wyników przez geodetów i specjalistów innych branż technicznych. Ma to miejsce w wypadkach, gdy wykonane pomiary przynoszą rezultaty wieloznaczne, nie dające możliwości wnioskowania o ich znaczeniu przy posługiwaniu się wyłącznie kryteriami natury geometrycznej.

W niniejszej pracy pragnę omówić wszelkie problemy związane z dokonywaniem geodezyjnej interpretacji wyników pomiarów przemieszczeń i odkształceń oraz podać opracowane przez siebie, nowe rozwiązania metodyczne w tym zakresie. Z uwagi na to, że będę musiał przy tym omówić też znane i stosowane sposoby postępowania, poczuwam się do obowiązku wyraźnego odróżnienia w tekście opracowań własnych i zacytowanych opracowań innych autorów. Szczególnie pragnę podkreślić, że przy omawianiu stosowanych metod pomiarów i obliczeń korzystałem w głównej mierze z książki Prof. dr T. Lazzariniego [5].

Na wstępie scharakteryzuję w najbardziej ogólny sposób problemy stanowiące przedmiot rozważań zawartych w niniejszej pracy.

W celu wyznaczenia przemieszczeń i odkształceń określonego obiektu stabilizujemy na jego powierzchni zespół tak zwanych punktów kontrolowanych. Ponadto w pewnej odległości od obiektu stabilizujemy zespół punktów kontrolnych i pomocniczych. Obydwa zespoły punktów powiązane zostają ze sobą obserwacjami geodezyjnymi, tworzącymi tak zwaną geodezyjną sieć kontrolną.

Punkty kontrolne zostają rozmieszczone w terenie w takich miejscach, które z dużym prawdopodobieństwem można traktować jako nie podlegające przemieszczeniom pod wpływem przemieszczania się obiektu badań ani pod innymi wpływami. Punkty te powinny być stałe pod względem położenia, którą to intencję projektanta sieci określimy nazywając je punktami stałymi a priori.

Punkty pomocnicze zostają rozmieszczone w terenie (a niekiedy i na powierzchni badanego obiektu) w takich miejscach, aby przy ich wykorzystaniu można było zapewnić wyznaczalność położenia punktów kontrolowanych względem punktów kontrolnych.

Punkty kontrolowane zostają rozmieszczone na powierzchni obiektu w takich miejscach, aby na podstawie wyznaczonych przemieszczeń tych punktów można było wnioskować o przemieszczeniach i odkształceniach całego obiektu lub określonych jego fragmentów.

Wykonanie pomiaru wszystkich elementów geodezyjnych sieci kontrolnej w toku tak zwanej obserwacji pierwotnej, pozwala na określenie

wzajemnego usytuowania wszystkich punktów wchodzących w jej skład (w najogólniejszym wypadku, gdy struktura sieci ma charakter pełny, tak jak to ma miejsce w sieciach geodezyjnych o normalnym przeznaczeniu). Powtórny pomiar tych samych elementów geodezyjnych (ograniczonych przez te same punkty sieci), wykonany po pewnym czasie w toku, tak zwanej obserwacji aktualnej może przynieść inne rezultaty, świadczące o wystąpieniu zmian wzajemnego położenia punktów sieci w stosunku do położenia określonego w wyniku obserwacji pierwotnej.

Podstawowym celem wykonywania takich pomiarów jest dostarczenie materiału do obliczenia przemieszczeń punktów kontrolowanych. Obliczenie to powinno nastąpić przy dostosowaniu sieci kontrolnej do tych punktów kontrolnych, które nie uległy przemieszczeniom — okazały się stałe a’posteriori [5]. Stwierdzenie, które z punktów kontrolnych stałych a’priori okazały się również stałe a’posteriori opiera się na analizie osiągniętych rezultatów pomiarów, zwanej identyfikacją punktów stałych.

Właściwe identyfikowanie punktów stałych a’posteriori na podstawie wyników wykonanych pomiarów jest podstawowym zagadnieniem z zakresu tej części interpretacji wyników, która odbywa się w toku obliczania przemieszczeń punktów.

Identyfikacja punktów stałych a’posteriori polega na wyszukiwaniu grup punktów tworzących figury geometryczne o zachowanych cechach niezmienności takich jak: kształt, wymiary (skala), orientacja w przestrzeni. Oznaką zachowania określonych cech niezmienności tych figur jest spełnienie kryteriów stałości, wyrażonych w postaci odpowiednich nierówności.

Przy identyfikacji punktów stałych a’posteriori niezbędne jest rozważanie pewnych problemów, wynikających głównie stąd, że odbywa się ona w oparciu o analizowanie różnic rezultatów dwukrotnego pomiaru elementów geodezyjnych sieci kontrolnej.

I problem wynika stąd, że za punkty stałe a’posteriori zmuszeni jesteśmy przyjmować punkty, które nie wykazały wzajemnych przemieszczeń względem siebie. Przyjmując przeto jako cechy stałości położenia punktów symptomy geometryczne wzajemnej ich nieruchomości powinniśmy zdawać sobie sprawę z tego, że wszystkie punkty stałe względem siebie mogą podlegać wspólnemu ruchowi względem bardziej rozległego obszaru terenu aniżeli obszar pokryty analizowaną siecią. Z tego też względu przemieszczenia punktów kontrolowanych wyznaczone względem tak określonych punktów stałych a’priori, zwane w praktyce przemieszczeniami bezwzględными, nie będą rzeczywiście bezwzględne w wypadku, gdy punkty stałe podlegają wspólnemu ruchowi. Świadomość tego stanu jest

niezbędna zwłaszcza w fazie projektowania rozmieszczenia w terenie punktów kontrolnych oraz w fazie interpretacji branżowej.

II problem wynika stąd, że jako oznakę stałości położenia punktów musimy przyjmować spełnienie kryterium stałości uwzględniającego błędy wykonanych pomiarów [5]. O niezmienności wzajemnego położenia punktów świadczy niezmiennosc rezultatów pomiarów wykonanych w toku obserwacji pierwotnej i aktualnej. Jednak trzeba się liczyć z tym, że nawet w wypadku, gdy punkty zachowały niezmiennosc wzajemnego położenia, to wyniki pomiaru elementów geodezyjnych ograniczonych przez te punkty będą się w pewnych granicach różnić ze względu na nieuniknione błędy pomiarowe. W tej sytuacji stwierdzenie czy punkt jest stały lub niestały nie może być dokonane w sposób bezbłędny — wymaga zastosowania kryterium stałości, które w ogólnej postaci wyraża się nierównością:

$$|G(dl) - R| < k \cdot m_{G(dl)} \quad (1)$$

gdzie:  $dl$  — różnica wyników dwukrotnej obserwacji elementu geodezyjnego,

$G(dl)$  — rozpatrywana funkcja różnic wyników dwukrotnej obserwacji,

$R$  — oczekiwana wartość tej funkcji, odpowiadająca bezbłędnemu wykonaniu obserwacji w wypadku wzajemnej nieruchomości rozpatrywanych punktów,

$k$  — współczynnik określający stosunek błędu granicznego obserwacji do błędu średniego,

$m_{G(dl)}$  — błąd średni funkcji  $G(dl)$ .

Wykonamy prosty przykład, wyjaśniający znaczenie czynników wchodzących do kryterium stałości.

Przypuśćmy, że w toku obserwacji pierwotnej wykonano pomiar odległości między dwoma punktami  $A$  i  $B$  otrzymując w rezultacie  $l = 135,028$  m. W toku obserwacji aktualnej otrzymano wynik powtórnego pomiaru odległości między tymi punktami równy  $l' = 135,026$  m. Błędy średnie obydwu pomiarów okazały się równe  $m_l = m_{l'} = 0,003$  m.

W rozpatrywanym prostym wypadku  $G(dl) = dl = l' - l = -0,002$  m. Gdy obydwa punkty są stałe względem siebie, to różnica dwukrotnego pomiaru odległości, wykonanego bezbłędnie powinna być równa  $R = 0,000$  mm. Błąd średni funkcji  $G(dl)$  określimy w naszym wypadku z wzoru  $m_{G(dl)} = m_{dl} = \sqrt{2} m_l = 0,004_2$ . Przyjmując np.  $k = 2$  otrzymamy na podstawie powyższych wartości zgodnie z wzorem (1)

$$|-0,002 - 0,000| < 2 \cdot 0,004_2.$$

Osiągnięty wynik świadczy o spełnieniu kryterium stałości opartego



na porównaniu wyników dwukrotnego pomiaru odległości między punktami  $A$  i  $B$ . Zauważmy, że z punktu widzenia możliwości dokładnościowych nawet różnica wyników pomiarów równa  $k \cdot m_{dl} = 0,084$  byłaby tu uznana za świadczącą o spełnieniu rozpatrywanego kryterium stałości wzajemnego położenia punktów  $A$  i  $B$ .

III problem wynika z tego, że jako stałe przyjmujemy te punkty, które wykazały spełnienie rozpatrywanych w kryterium cech stałości wzajemnego położenia, natomiast nie jest wiadome, czy nie podlegały one przemieszczeniom nie mającym wpływu na spełnienie tych cech. Biorąc pod uwagę poprzedni przykład badania stałości wzajemnego położenia punktów  $A$  i  $B$  wyłącznie na podstawie kryterium posługującego się różnicą wyników pomiaru wzajemnej odległości, nie mamy żadnej pewności, czy nie nastąpiła zmiana wzajemnej wysokości tych punktów lub poziomy obrót odcinka łączącego je.

W praktyce zazwyczaj struktura sieci i rodzaj wykonywanych w niej obserwacji nie pozwala na całkowite określenie zmian wzajemnego położenia punktów w przestrzeni, a jedynie pozwala na określenie zmian niektórych składowych tego położenia. Tak na przykład, w niwelacyjnej sieci kontrolnej możemy na podstawie wyznaczonych różnic przewyższeń stwierdzić jedynie, że pewne punkty podlegają lub nie podlegają przemieszczeniom pionowym, natomiast nie możemy na podstawie tych wyników stwierdzić, czy nie następują przemieszczenia poziome. Stwierdzenie, że pewna grupa punktów zachowała niezmiennność wzajemnego położenia pod względem wysokościowym (w oparciu o wyniki pomiarów niwelacyjnych i zastosowanie odpowiedniego kryterium stałości) nie jest równoznaczne ze stwierdzeniem niezmiennego wzajemnego położenia tych punktów w przestrzeni. Podobnie w sieciach kontrolnych służących do wyznaczania przemieszczeń poziomych stwierdzenie niezmienności wzajemnego poziomego położenia pewnej grupy punktów nie jest równoznaczne ze stwierdzeniem niezmiennego wzajemnego położenia tych punktów w przestrzeni.

Z formalnego punktu widzenia należałoby przyjmować jako stałe a posteriori tylko te punkty, które nie wykazały wzajemnego przemieszczenia w przestrzeni. Jednak w praktyce rozpatrywaniu podlegają zazwyczaj tylko te cechy stałości punktów, których ewentualne niespełnienie przy jednoczesnym przyjęciu, że punkty są stałe a posteriori, mogłoby odbić się szkodliwie na obliczeniu przemieszczeń (rozpatrywanych składowych przemieszczeń) punktów kontrolowanych.

Z tego względu autor sugeruje, aby projektowanie sieci kontrolnych uwzględniało możliwość identyfikowania punktów stałych w oparciu o możliwie jak największą ilość sprawdzanych cech stałości.

Z sugestii tej wynika potrzeba takiego projektowania, aby w miarę

możności punkty sieci były przystosowane do wyznaczania zarówno poziomych, jak i pionowych składowych przemieszczeń. Dalsze zalecenia wynikające z tej sugestii wynikną w rozdziale poświęconym identyfikacji punktów stałych.

IV p r o b l e m wynika stąd, że w praktyce mogą zajść wypadki zidentyfikowania w sieci kontrolnej kilku takich grup punktów, wewnątrz których spełnione zostały rozpatrywane cechy stałości, jednak jednocześnie poszczególne grupy okazały się niestałe pod względem położenia w stosunku do siebie. Jako przykład można podać wynik identyfikacji punktów stałych w sieci kontrolnej przeznaczonej do wyznaczania przemieszczeń punktów kontrolowanych na zaporze w Porąbce (por. [2]). Okazało się mianowicie, że w sieci tej, zawierającej 9 punktów kontrolnych, rozpatrywanie spełnienia cech stałości doprowadziło do zidentyfikowania 21 grup zawierających po 4 punkty, w których spełnione zostały cechy wzajemnej stałości, jednocześnie jednak żadna z tych grup nie wykazała stałości położenia względem pozostałych grup.<sup>1)</sup>

W momencie pojawienia się takich wyników powstaje wątpliwość, którą z grup zidentyfikowanych jako stałe należy przyjąć przy dalszych obliczeniach jako rzeczywiście stałą (miarodajną dla oparcia na niej obliczenia przemieszczeń punktów kontrolowanych). Rozstrzygnięcie tych wątpliwości wymaga posługiwania się dodatkowymi danymi lub założeniami. Należy dodać, że pojawienie się tych wątpliwości może występować częściej w sieciach, w których rodzaj wykonanych obserwacji ogranicza ilość możliwych do rozpatrywania cech stałości (por. problem III i wyjaśnienia zawarte w rozdziale dotyczącym identyfikacji punktów stałych).

V p r o b l e m wiążący się zarówno z identyfikowaniem punktów stałych, jak też obliczaniem przemieszczeń punktów kontrolowanych wynika z tego, że przemieszczenia i odkształcenia obiektu badań, jak też przemieszczenia punktów sieci kontrolnej, są zjawiskami natury geometrycznej zachodzącymi w czasie. W praktyce wykonywanie pomiaru wszystkich elementów sieci kontrolnej wymaga pewnego okresu czasu, w którym również następują przemieszczenia punktów sieci.

Jeśli istnieją dane pozwalające na ustalenie charakteru i szybkości zachodzenia przemieszczeń, to można do wyników pomiaru wprowadzać odpowiednie poprawki redukujące na określony moment czasu. Może to mieć miejsce w niektórych wypadkach badania ruchów skorupy ziemskiej [7] lub badania odkształceń terenu i obiektów pod wpływem eksploatacji górniczej [6]. Na ogół jednak, w wypadkach gdy charakter i szybkość zachodzenia przemieszczeń są bardziej zróżnicowane lub nie-

<sup>1)</sup> Problem ten traci na ostrości w wypadku, gdy wzajemne niezgodności grup są niewielkie i stosuje się zalecenia omówione w punkcie 2.4.

uchwytnie, pozostaje jedynie możliwość ustalenia niezbędnej kolejności i szybkości wykonania pomiaru poszczególnych elementów sieci. Ustalenia te mają na celu ograniczenie do zanedbywalnego minimum zmienności mierzonych elementów geodezyjnych w okresie pomiaru sieci kontrolnej. Biorąc jednak pod uwagę fakt, że zmienność taka ma na ogół miejsce, powinniśmy liczyć się przy identyfikacji punktów stałych i ocenie dokładności wyznaczenia przemieszczeń z pewnym zwiększeniem błędów w stosunku do ich wielkości wynikających wyłącznie z niedokładności pomiarów.

Przypuśćmy, że identyfikacja punktów stałych została dokonana, i że wynik jej nie budzi żadnych wątpliwości. Wówczas możemy przystąpić do obliczenia przemieszczeń punktów kontrolowanych, punktów pomocniczych i tych punktów kontrolnych, które nie wykazały stałości przy dostosowaniu sieci kontrolnej do punktów stałych a'posteriori. Obliczeniu temu powinno towarzyszyć obliczenie błędów średnich wyznaczenia przemieszczeń uwzględniające błędy wykonanych pomiarów oraz błędy identyfikacji punktów stałych. Obliczone wielkości błędów są niezbędne do oceny dokładności wyznaczenia przemieszczeń punktów i do stwierdzenia lub niestwierdzenia, że przemieszczenia takie wystąpiły.

Obliczone przemieszczenia punktów oraz błędy tych przemieszczeń stanowią podstawę do oceny zmian geometrycznych, jakim uległ badany obiekt. Należy sobie zdawać sprawę z tego, że poprzestanie na podaniu wyznaczonych przemieszczeń punktów w postaci zestawienia tabelarycznego na ogół nie unaocznia w dostatecznym stopniu geometrycznego znaczenia tych rezultatów. Dlatego zazwyczaj, niezależnie od wykazów wyznaczonych przemieszczeń wykonuje się również rysunki, na których oznaczone są miejsca rozpatrywanych punktów kontrolowanych na tle odpowiednich rzutów badanego obiektu, oraz podane są w odpowiednio większej skali wektory (lub wyznaczone składowe) przemieszczeń tych punktów.

Takie jednak przedstawienie rezultatów również nie jest zazwyczaj wystarczające, bowiem uwidacznia jedynie zmiany położenia punktów kontrolowanych, nie informując o tym, co się stało z rozpatrywanym obiektem. Trzeba zdawać sobie sprawę z tego, że w wyniku pomiarów geodezyjnych nie wyznaczamy przemieszczeń i odkształceń całego obiektu, a jedynie przemieszczenia poszczególnych punktów kontrolowanych, których nie może być zbyt dużo, bowiem powodowałoby to nadmierne koszty i przedłużenie czasu pomiarów. Dlatego w trakcie geodezyjnej interpretacji wyników pomiarów przemieszczeń punktów kontrolowanych przeprowadza się generalizację osiągniętych rezultatów.

Generalizacja opiera się na zastosowaniu określonych metod rachunkowych i graficznych w celu znalezienia związków między wyznaczonymi

przemieszczeniami punktów kontrolowanych, a przemieszczeniami i odkształceniami badanego obiektu.

Właściwe generalizowanie rezultatów pomiarów przemieszczeń stanowi podstawowe zagadnienie tej części interpretacji geodezyjnej, która ma na celu ułatwienie interpretacji branżowej przez wyjaśnienie geometrycznego znaczenia osiągniętych rezultatów pomiarów.

Dotychczas stosowana była generalizacja, nazwana przez autora prostą. Polegała ona wyłącznie na graficznym opracowaniu wyników pomiaru przemieszczeń punktów kontrolowanych, pozwalającym w łatwy, aczkolwiek uproszczony sposób zorientować się w przypuszczalnych przemieszczeniach innych, nie kontrolowanych punktów na powierzchni badanego obiektu. Generalizacja prosta jest wystarczająca jedynie w prostych wypadkach i przy bardzo powierzchownym dokonywaniu interpretacji branżowej z uwagi na to, że nie prowadzi ona do odróżnienia przemieszczeń badanego obiektu od jego odkształceń.

Na potrzebę odróżniania przemieszczeń obiektu od jego odkształceń zwraca szczególną uwagę Autor publikacji [1]. Biorąc pod uwagę taką potrzebę autor niniejszej pracy opracował metodę generalizacji złożonej [12], która pozwala na bardziej szczegółową ocenę geometrycznego stanu badanego obiektu, opartą na wynikach wykonanych pomiarów przemieszczeń. Generalizacja złożona pozwala na wykorzystanie wyznaczonych przemieszczeń punktów kontrolowanych do obliczenia najbardziej prawdopodobnych wartości parametrów określających przemieszczenia obiektu badań oraz do obliczenia przemieszczeń punktów kontrolowanych pod wyłącznym wpływem odkształceń obiektu.

W tym miejscu niezbędne jest ogólne wyjaśnienie, co rozumiemy przez przemieszczenie a co przez odkształcenie ciała — obiektu badań lub określonego jego fragmentu. Wyjaśnieniu temu mogą służyć następujące definicje.

1. Przemieszczenie ciała — zmiana położenia ciała w przestrzeni bez zmiany jego wymiarów i kształtu,

2. Odkształcenie ciała — zmiana wymiarów i kształtu ciała (lub jedna z tych zmian) bez przemieszczenia ciała w przestrzeni.<sup>2)</sup>

Wyznaczone przemieszczenia punktów kontrolowanych na powierzchni badanego obiektu mogą być wynikiem jednoczesnego przemieszczania się i odkształcania badanego obiektu, bądź też mogą powstawać pod wpływem jednego z tych czynników (przemieszczania lub odkształcania).

---

<sup>2)</sup> Bardziej szczegółowe wyjaśnienia dotyczące tych ogólnych definicji podane są w punkcie 4.

W ramach generalizacji złożonej wyznaczonych przemieszczeń punktów kontrolowanych dążymy w pierwszym rzędzie do obliczenia dla każdego punktu  $i$  części przemieszczenia spowodowanej wyłącznie przez przemieszczenie obiektu, którą oznaczmy  $\overline{dp'_i}$  oraz drugiej części przemieszczenia punktu wywołanej przez odkształcenie obiektu i błędy wyznaczenia, którą oznaczmy  $-v_{dp_i}$ . Obydwe obliczone części przemieszczenia każdego punktu powinny w sumie dawać przemieszczenie wyznaczone z pomiarów, które oznaczmy  $\overline{dp_i}$ .

$$\overline{dp_i} = \overline{dp'_i} - \overline{v_{dp_i}}. \quad (2)$$

W dalszej części pracy związek (2) będziemy wykorzystywali po przedstawieniu go w postaci

$$\overline{dp_i} + \overline{v_{dp_i}} = \overline{dp'_i}. \quad (3)$$

W wypadku gdy ciało podlega wyłącznie przemieszczeniom, przemieszczenia jego poszczególnych punktów materialnych nie są od siebie niezależne i dają się wyrazić za pośrednictwem 6 parametrów, charakteryzujących przemieszczenia ciała. Autor wyprowadził związki określające zależności składowych przemieszczeń poszczególnych punktów od wspomnianych sześciu parametrów [12], co umożliwia dokonywanie generalizacji złożonej.

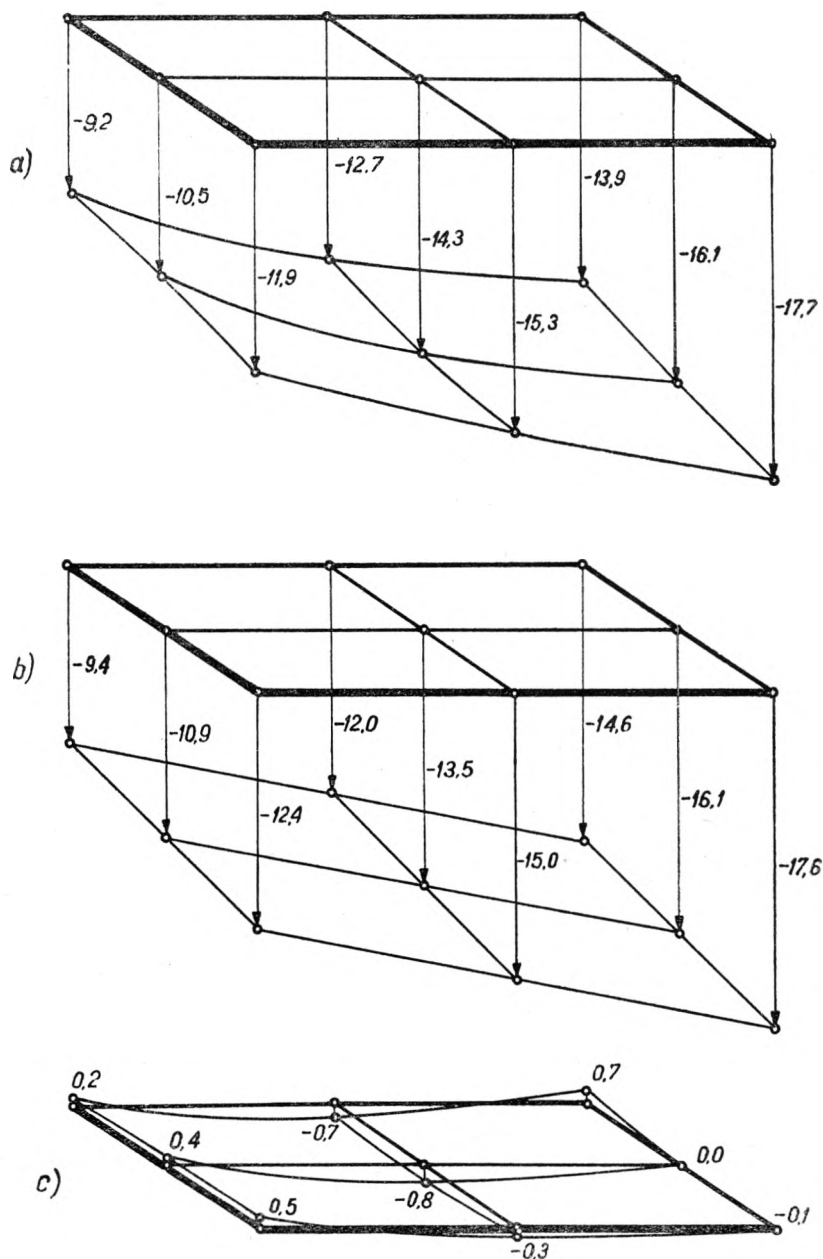
W drugiej części generalizacji złożonej zostają wykorzystane graficzne metody generalizacji prostej, które służą w tym wypadku do osobnego wyinterpolowania i przedstawienia przemieszczeń lub odkształceń powierzchni badanego obiektu na podstawie obliczonych części przemieszczeń punktów kontrolowanych, wywołanych przemieszczeniami lub odkształceniami obiektu.

Dla wyjaśnienia roli generalizacji złożonej posłużymy się prostym przykładem generalizacji wyznaczonych pionowych przemieszczeń reperów zastabilizowanych na powierzchni płyty fundamentowej.

Na powierzchni płyty znajduje się 9 reperów kontrolowanych. W wyniku pomiarów wyznaczono przemieszczenia pionowe tych reperów  $\underline{dz}$  pokazane na rysunku 1a za pomocą wektorów narysowanych w skali 2,5 : 1. Na rysunku tym rezultatem generalizacji prostej jest siatka linii przechodzących przez końce wektorów, która ilustruje w sposób przybliżony przewidywane przemieszczenia pionowe wszystkich punktów znajdujących się na odcinkach między sąsiednimi reperami kontrolowanymi.

Na rysunkach 1b, 1c uwidocznione są rezultaty generalizacji złożonej. Tak więc na rysunku 1b pokazano wektory przemieszczeń pod wyłącznym wpływem przemieszczeń płyty ( $\underline{dz'}$ ). Dla zwiększenia komunikatywności uzyskanych rezultatów połączono końce wektorów otrzymując wykresy





Rys. 1

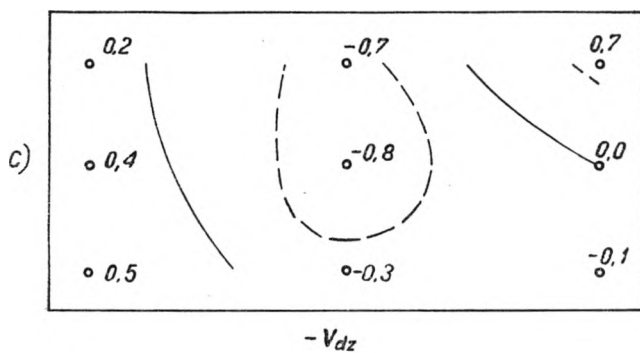
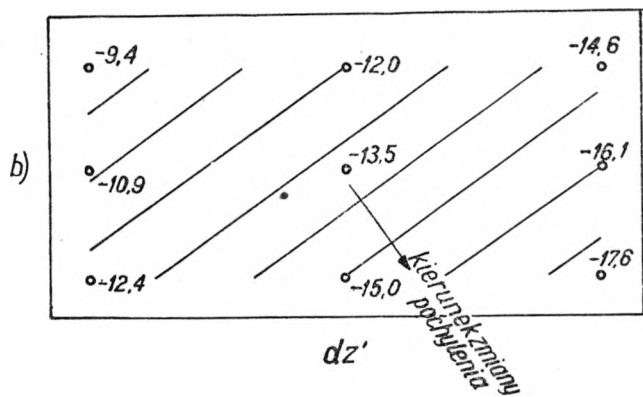
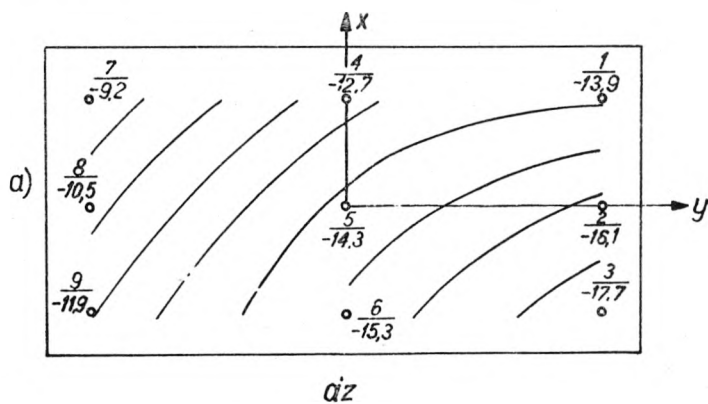
pionowych przemieszczeń odcinków łączących repéry. Uzyskana siatka linii wyraźnie ilustruje charakter pionowego przemieszczania się płyty, polegającego na jej obniżeniu i nachyleniu.

Na rysunku 1c pokazano wektory pionowych przemieszczeń reperów pod wyłącznym wpływem odkształceń płyty fundamentowej. Połączenie końców wektorów pozwala tu zorientować się w przypuszczalnych odkształceniach płyty na odcinkach łączących sąsiadujące repy. Utworzony w ten sposób wykres odkształceń płyty pozwala na przeanalizowanie stopnia ich szkodliwości dla wytrzymałości płyty. Gdybyśmy poprzestali na dokonaniu generalizacji prostej, to jest na utworzeniu wykresów pokazanych na rysunku 1a — ocena stopnia szkodliwości wyznaczonych przemieszczeń reperów dla wytrzymałości płyty byłaby bardzo utrudniona. Jak łatwo zauważyć, wyznaczone wielkości pionowych przemieszczeń reperów kontrolowanych ukształtowały się pod dominującym wpływem zagłębienia się obciążonej płyty w podłożu gruntowym. Tak więc wyznaczone przemieszczenia reperów charakteryzują w przykładzie odkształcenia podłoża i mogą służyć do dokonywania interpretacji branżowej w zakresie własności wytrzymałościowych podłoża. Dokonywanie interpretacji branżowej w zakresie własności wytrzymałościowych płyty fundamentowej wymaga raczej posługiwania się wielkościami przemieszczeń reperów pod wpływem odkształceń płyty, wykazanymi i zilustrowanymi na rysunku 1c. Dokonywanie interpretacji w zakresie oceny stanów równowagi konstrukcji montowanej na płycie (wyprowadzenia z prawidłowej pozycji), wymaga korzystania z przemieszczeń płyty wykazanych na rysunku 1b, bowiem ilustrują one w sposób jednoznaczny kierunek i najbardziej prawdopodobną wielkość zmiany pochylenia płyty.

Wyniki generalizacji zilustrowane na rysunku 1 w rzucie aksonometrycznym, zilustrowano też na rysunku 2 przy zastosowaniu innej metody graficznej i innego rzutu fundamentu. Na rysunku 2 pokazującym rzut poziomy fundamentu, wykreślono izolinie wyinterpolowane na podstawie wyznaczonych przemieszczeń reperów. Na rysunku 2a są to izolinie przypuszczalnych równych przemieszczeń punktów powierzchni płyty. Na rysunku 2b pokazano izolinie wyinterpolowane na podstawie obliczonych wartości  $dz'$  zaś na rysunku 2c pokazano izolinie wyinterpolowane na podstawie obliczonych wartości  $-v_{dz}$ .

W ramach generalizacji złożonej możliwe jest dokonanie oceny, czy wyznaczone wielkości  $v_{dp}'$ ,  $v_{dp}$  wystąpiły faktycznie, czy też wynikły wyłącznie z błędów pomiarowych. Służą do tego celu kryteria niestwierdzenia przemieszczeń i odkształceń badanego obiektu. Kryteriów tych nie należy oczywiście mylić z uprzednio wspomnianymi kryteriami stałości położenia punktów kontrolnych.

Z uwagi na to, że metoda generalizacji złożonej została szczegółowo opisana w pracy [12], w niniejszej pracy ograniczam się do krótkiego omówienia wzorów i zasad stosowania metody i koncentruję główną uwagę na problemach związanych z zakresem jej zastosowania.



Rys. 2

## 2. Identyfikowanie punktów stałych

### 2.1. Związki między różnicami wyników pomiarów okresowych a przemieszczeniami punktów ograniczających mierzone elementy geodezyjne

W wyniku obserwacji pierwotnej elementów geodezyjnych sieci kontrolnej otrzymujemy szereg wartości  $l_1, l_2, \dots, l_n$  (kierunków, kątów, długości, azymutów, kierunków zorientowanych), przewyższeń. W wyniku obserwacji aktualnej otrzymujemy szereg nowych wartości tych elementów  $l'_1, l'_2, \dots, l'_n$ . Różnice wartości odpowiednich elementów  $dl_1, dl_2, \dots, dl_n$  spowodowane są zmianami wzajemnego położenia punktów ograniczających w naturze mierzone elementy oraz błędami pomiarów. Dysponując zbiorem różnic  $dl$  elementów geodezyjnych, otrzymanym z dwukrotnego pomiaru sieci kontrolnej, możemy zastosować wstępne kryterium stałości położenia punktów o postaci

$$dl_i < k \cdot m_{dl_i} \quad (4)$$

gdzie:  $k$  — graniczna wielokrotność błędu średniego różnicy  $dl$

$m_{dl_i}$  — błąd średni różnicy  $dl_i$ .

Wielkość błędu średniego  $m_{dl_i}$  określimy w zależności od błędów średnich  $m_{l_i}, m'_{l_i}$  wyznaczenia wielkości  $l_i, l'_i$  z wzoru

$$m_{dl_i} = \sqrt{m_{l_i}^2 + m'^2_{l_i}}. \quad (5)$$

Jeśli nierówność (4) zostanie spełniona dla wszystkich różnic zaobserwowanych w sieci elementów geodezyjnych — nie mamy podstawy do stwierdzenia, że zaszły przemieszczenia punktów, pod warunkiem jednak, że rozkład różnic  $dl$  nie będzie zbyt odległym od rozkładu normalnego (zakładamy tu zgodność rozkładu błędów pomiarowych z rozkładem normalnym). Dlatego zastosowaniu kryterium (4) do wszystkich wyznaczonych różnic powinno towarzyszyć zbadanie rozkładu tych różnic. Przy badaniu rozkładu w głównej mierze będzie nas interesować procentowy udział różnic  $dl$  bliskich granicznej wielkości  $k \cdot m_{dl}$  oraz rozmieszczenie elementów, które uzyskały takie różnice. Wystąpienie różnic bliskich wartości granicznej w nadmiarze i przy jednoczesnym ich skupieniu w określonym rejonie sieci mogłoby świadczyć o istnieniu pewnych drobnych przemieszczeń, posiadających jednak wartości dosyć wyraźnie wyczuwalne pomimo zawierania się w granicach błędów wyznaczenia.

W wypadku, gdy pewna ilość zaobserwowanych różnic  $dl$  nie podporządkowuje się wstępnemu kryterium stałości w postaci nierówności (4) nabieramy przekonania, że część punktów sieci uległa przemieszczeniom i przystępujemy do poszukiwania punktów stałych.

Poszukiwanie punktów stałych opiera się w najogólniejszym ujęciu na analizowaniu związków między zaobserwowanymi wartościami różnic  $dl$  elementów geodezyjnych, a zmianami położenia punktów ograniczających te elementy [5]. W praktyce najczęściej spotyka się sytuacje, że poszczególne punkty sieci, które zachowały stałość wzajemnego położenia nie są bezpośrednio powiązane ze sobą obserwacjami elementów geodezyjnych. Dlatego analizowanie nie może ograniczać się do związków między różnicami pojedynczych elementów, a zmianami położenia punktów ograniczających je w terenie, lecz polega na analizowaniu całych układów utworzonych przez te związki, metodami omówionymi w punktach 2.2, 2.3 niniejszej pracy.

Pierwotną wartość rzeczywistą każdego elementu geodezyjnego  $L_i$  można wyrazić jako funkcję rzeczywistych wartości współrzędnych punktów ograniczających go w terenie

$$L_i = F(X_a, Y_a, Z_a, X_b, Y_b, Z_b \dots), \quad (6)$$

gdzie:  $a, b \dots$  — numery punktów ograniczających w terenie element o numerze  $i$ .

Rozpatrując bardzo małą zmianę rzeczywistą wartości elementu  $dL_i = L'_i - L_i$ , spowodowaną przez bardzo małe zmiany rzeczywiste współrzędnych  $dX_a = X'_a - X_a$ ,  $dY_a = Y'_a - Y_a$ ,  $dZ_a = Z'_a - Z_a$ ,  $dX_b = X'_b - X_b$ ,  $dY_b = Y'_b - Y_b$ ,  $dZ_b = Z'_b - Z_b, \dots$  przemieszczających się punktów, możemy napisać zależność

$$dL_i = \frac{\partial F}{\partial X_a} dX_a + \frac{\partial F}{\partial Y_a} dY_a + \frac{\partial F}{\partial Z_a} dZ_a + \frac{\partial F}{\partial X_b} dX_b + \frac{\partial F}{\partial Y_b} dY_b + \frac{\partial F}{\partial Z_b} dZ_b \dots \quad (7)$$

W rzeczywistości dysponujemy przybliżonymi wartościami różnic elementów geodezyjnych  $dl$ , które są obciążone wpływami błędów pomiarów. Gdybyśmy znali rzeczywiste wartości tych błędów, to rzeczywiste wartości elementu geodezyjnego można by wyrazić następująco <sup>3)</sup>:

$$L_i = l_i + \varepsilon_i + c_i \quad L'_i = l'_i + \varepsilon'_i + c_i.$$

Jednak w praktyce jesteśmy w stanie znaleźć jedynie najbardziej prawdopodobne wartości elementów geodezyjnych równe  $l_i + v_{l_i}$ ,  $l'_i + v'_{l_i}$  co pozwala na obliczenie najbardziej prawdopodobnych wartości zmian współrzędnych punktów ograniczających w terenie rozpatrywany element geodezyjny. Oznaczając najbardziej prawdopodobne wartości zmian współrzędnych  $dx_a, dy_a, dz_a, dx_b, dy_b, dz_b \dots$  i przyjmując, że najbardziej prawdopodobna zmiana wartości elementu geodezyjnego jest równa wyrównanej różnicy  $dl_i + (v'_{l_i} - v_{l_i}) = dl_i + v_{dl_i}$  podstawiamy je do związku (7) za-

<sup>3)</sup> gdzie  $c_i$  — wartość błędu stała we wszystkich pomiarach okresowych mierzonego elementu geodezyjnego.



miast wartości rzeczywistych  $dX_a, dY_a, dZ_a, dX_b, dY_b, dZ_b \dots dL_i$ ,

$$\frac{\partial F}{\partial X_a} dx_a + \frac{\partial F}{\partial Y_a} dy_a + \frac{\partial F}{\partial Z_a} dz_a + \frac{\partial F}{\partial X_b} dx_b + \frac{\partial F}{\partial Y_b} dy_b + \frac{\partial F}{\partial Z_b} dz_b + \dots = dl_i + v_{dl_i}. \quad (8)$$

W zależności (8) możemy w praktyce zastąpić rzeczywiste wartości współrzędnych, wartościami przybliżonymi, co pozwoli na praktyczne wykorzystanie jej dla celów rachunkowych.

Ogólna zależność (8) stanowi podstawę do obliczeń związanych z identyfikowaniem punktów stałych i wyznaczaniem przemieszczeń pozostałych punktów tak zwaną metodą różnicową, opracowaną i wprowadzoną do praktyki przez Prof. dra T. Lazzariniego [5].

W sieciach kontrolnych służących do wyznaczania poziomych składowych przemieszczeń  $dx, dy$  możemy spotkać się z obserwacjami wielkości takich elementów geodezyjnych jak: kierunki, kąty, kierunki zorientowane (względem celowych na bardzo odległe, nieruchome cele lub zorientowane przez pomiar azymutu w oparciu o obserwacje określonej gwiazdy), odległości. Ponadto przy pewnych szczególnych sposobach konstruowania sieci kontrolnej, uwzględniających zastosowanie urządzeń pomiarowo-kontrolnych, takich jak wahadła i ciągi strzałek, możemy spotkać również obserwacje wahadeł i strzałek [9]. W zagadnieniach związanych z identyfikacją punktów stałych w sieciach poziomych interesują nas głównie zależności między różnicami zaobserwowanych kierunków, kątów, kierunków zorientowanych i długości, a przemieszczeniami punktów ograniczających je w terenie. Zależności te — stanowiące szczególne odpowiedniki ogólnej zależności (8) mają następujące postaci 4):

a) Zależność między zmianą wyniku obserwacji kierunku  $i$ - $k$  ( $d\alpha_{ik}$ ) a zmianami współrzędnych punktów  $i$  (stanowiska) oraz  $k$  (celu)

$$ds_i + B_{ik} dx_i - A_{ik} dy_i - B_{ik} dx_k + A_{ik} dy_k = d\alpha_{ik} + v_{d\alpha_{ik}} \quad (9)$$

gdzie:  $s_i$  — stała orientacyjna o znaczeniu wyjaśnionym szczegółowo w [5],

$A_{ik} = \frac{\Delta x_{ik} \cdot \varrho}{\Delta x_{ik}^2 + \Delta y_{ik}^2}$ ,  $B_{ik} = \frac{\Delta y_{ik} \cdot \varrho}{\Delta x_{ik}^2 + \Delta y_{ik}^2}$  (w dalszych zależnościach współczynniki  $A, B$  mają to samo znaczenie).

b) Zależność między zmianą wyniku obserwacji kąta  $LCP$  ( $d\gamma_{LCP}$ ) a zmianami współrzędnych punktów:  $L$  (końca lewego ramienia),  $P$  (końca prawego ramienia),  $C$  (wierzchołka kąta).

$$B_{CL} dx_L - A_{CL} dy_L - B_{CP} dx_P + A_{CP} dy_P - (B_{CL} - B_{CP}) dx_C + (A_{CL} - A_{CP}) dy_C = d\gamma_{LCP} + v_{d\gamma_{LCP}} \quad (10)$$

c) Zależność między zmianą kierunku zorientowanego lub azymutu a zmianami współrzędnych punktów.

W wypadku gdy okresowo mierzymy kąt  $LCP$  ( $\beta$ ), którego wielkość

4) Podane zależności są znane w literaturze i praktyce.

ograniczona jest przez dwa punkty wchodzące w skład sieci kontrolnej (na przykład  $C$ ,  $P$ ), a jeden punkt ( $L$ ) jest tak bardzo oddalony od  $C$ , że ewentualne drobne zmiany położenia punktów  $C$ ,  $L$  nie wpływają w wyznaczalny sposób na zmianę kierunku  $CL$ , to zmiany tego kąta można uważać za równoznaczne ze zmianami kierunku między punktami wchodzącymi w skład sieci kontrolnej ( $CP$ ). Wówczas zależność między zmianą kąta  $\beta$  a zmianami współrzędnych punktów  $C$ ,  $P$  wyraża się wzorem

$$-B_{CP} dx_P + A_{CP} dy_P + B_{CP} dx_C - A_{CP} dy_C = d\beta_{CP} + v_{d\beta_{CP}} \quad (11)$$

d) Zależność między zmianą wyniku obserwacji długości ( $dd_{ik}$ ) a zmianami współrzędnych punktów  $i$  (początku),  $k$  (końca) odcinka  $d_{ik}$ .

$$-\cos \varphi_{ik} dx_i - \sin \varphi_{ik} dy_i + \cos \varphi_{ik} dx_k + \sin \varphi_{ik} dy_k = dd_{ik} + v_{dd_{ik}} \quad (12)$$

W sieciach niwelacji geometrycznej, służących do wyznaczania pionowych składowych przemieszczeń reperów kontrolowanych posługujemy się prostą zależnością między wyznaczoną z pomiarów zmianą przewyższenia  $dh$ , a zmianami rzędnych reperów  $i$ ,  $k$ .

$$-dz_i + dz_k = dh_{ik} + v_{dh_{ik}} \quad (13)$$

Jak łatwo zauważyć, ogólna zależność (8) oraz jej szczegółowe postaci (9÷13), odpowiadające określonym rodzajom elementów geodezyjnych, są podobne do równań poprawek, układanych w celu wyrównania sieci geodezyjnych metodą pośredniczącą. W omawianych zależnościach odmienne są tylko znaczenia czynników  $dl$ ,  $v_{dl}$  oraz niewiadomych  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$ .

Biorąc pod uwagę wyjaśnione uprzednio znaczenia tych czynników będziemy dalej zależności (9—13) nazywać równaniami poprawek zaobserwowanych różnic elementów geodezyjnych sieci kontrolnej lub wprost równaniami poprawek różnic obserwacji.

Zajmiemy się obecnie zagadnieniami związanymi z identyfikacją punktów stałych i obliczaniem przemieszczeń pozostałych punktów w sieciach o strukturze zapewniającej wzajemną wyznaczalność wszystkich punktów.

W praktyce spotykamy się z dwoma rodzajami takich sieci: sieć kontrolna służąca do wyznaczania poziomych składowych przemieszczeń punktów  $dx$ ,  $dy$  oraz sieć niwelacji geometrycznej, służąca do wyznaczania pionowych składowych  $dz$  przemieszczeń punktów.

Zazwyczaj punkty wymienionych rodzajów sieci nie pokrywają się ze sobą nawet wówczas, gdy wyznaczamy zarówno pionowe, jak i poziome wartości składowych przemieszczeń punktów kontrolowanych, zastabilizowanych na powierzchni badanego obiektu. Dlatego zagadnienia związane z identyfikacją omówię oddzielnie dla każdego z wspomnianych rodzajów sieci w punktach 2.2 i 2.3.

## 2.2 Identyfikacja punktów stałych w sieciach poziomych

W celu zidentyfikowania punktów stałych a'posteriori zestawiamy równania poprawek różnic wszystkich dokonanych dwukrotnie pomiarów elementów geodezyjnych sieci kontrolnej (w praktyce ze względu na dążenie do zmniejszenia prac rachunkowych równania takie układa się często jedynie dla fragmentu sieci zawierającego punkty kontrolne i pomocnicze) [5]. Zestawione równania poprawek różnic zrównoważymy dokładnie, dzieląc każde równanie przez odpowiednią, określoną a'priori wartość błędu średniego  $m_{dl}$ . Tak utworzony, zrównoważony dokładnie układ równań poprawek różnic obserwacji rozwiązujemy wstępnie przy zachowaniu następujących warunków:

$$1) \quad \left[ \left( \frac{v_{dl}}{m_{dl}} \right)^2 \right] = \min. \quad (14)$$

2) Na kształtowanie się poprawek wyrównawczych  $v_{dl}$  nie mogą mieć wpływu elementy dostosowania wyrównywanego układu [5].

Z warunku 1) wynika potrzeba rozwiązania zestawionego układu równań w zwykły sposób, przy zastosowaniu metody najmniejszych kwadratów. Warunek 2) decyduje o konieczności uzależnienia sposobu dostosowania sieci od rodzajów elementów geodezyjnych, których zaobserwowane różnice podlegają wyrównaniu.

Spełnienie warunku 2) jest równoznaczne z ograniczeniem ilości elementów dostosowania sieci do niezbędnego minimum. Wymagania w tym zakresie, określone przez autora niniejszej pracy w [8] wyrazimy w tablicy 1.

Tablica 1

| Lp | W sieci kontrolnej zawierającej obserwacje               | Elementy dostosowania |
|----|----------------------------------------------------------|-----------------------|
| 1  | kierunków lub kątów                                      | 2 punkty              |
| 2  | kierunków lub kątów i długości                           | 1 punkt, 1 kierunek   |
| 3  | kierunków lub kątów i kierunków zorientowanych           | 1 punkt, 1 długość    |
| 4  | kierunków lub kątów, długości i kierunków zorientowanych | 1 punkt               |
| 5  | długości                                                 | 1 punkt, 1 kierunek   |
| 6  | długości i kierunków zorientowanych                      | 1 punkt               |

Przyjęcie większej niż podana ilości elementów dostosowania mogłoby spowodować zwiększenie poprawek wyrównawczych powyżej wartości wynikających z błędów pomiarów w wypadku, gdy elementy te nie spełniają warunku stałości. Przyjęcie mniejszej niż podana ilość elementów dostosowania powoduje niemożliwość rozwiązania układu (jego nieoznaczoność).

Wprowadzenie warunków dostosowania polega na eliminacji odpowiednich niewiadomych z układu równań poprawek różnic obserwacji. Tak więc przyjęcie punktu  $P$  jako punktu dostosowania jest równoznaczne z założeniem  $dx_P = dy_P = 0$ , co pociąga za sobą możliwość skreślenia w układzie równań współczynników przy tych niewiadomych [5].

Przyjęcie kierunku  $i-k$ , jako kierunku dostosowania wymaga wprowadzenia warunku

$$\frac{dy_k - dy_i}{dx_k - dx_i} = \operatorname{tg} \varphi_{ik},$$

gdzie:  $\varphi_{ik}$  — kąt kierunkowy odcinka  $i-k$  odłożony w prawo od kierunku osi  $ox$  układu współrzędnych.

Ponieważ dostosowaniu do kierunku towarzyszy zawsze dostosowanie do punktu (por. tablica 1), korzystnie jest przyjąć, że jeden z punktów ograniczających kierunek dostosowania jest punktem dostosowania. Przyjmijmy na przykład, że punkt określający początek kierunku dostosowania ( $i$ ) jest punktem dostosowania. Wówczas warunek dostosowania do kierunku sprowadza się do prostej postaci

$$\frac{dy_k}{dx_k} = \operatorname{tg} \varphi_{ik}, \quad (15)$$

w konsekwencji czego możemy wyeliminować z układu równań np. niewiadomą  $dy_k$  przez zastąpienie jej wartością  $dx_k \cdot \operatorname{tg} \varphi_{ik}$ .

Przyjęcie długości  $i-k$ , jako długości dostosowania wymaga wprowadzenia warunku

$$\frac{dy_k - dy_i}{dx_k - dx_i} = -\operatorname{ctg} \varphi_{ik}.$$

Również dostosowaniu do długości towarzyszy zawsze dostosowanie do punktu, co pozwala przyjąć, że jeden z punktów ograniczających długość (np. punkt  $i$ ) jest punktem dostosowania. Wówczas warunek dostosowania do długości sprowadza się do prostej postaci

$$\frac{dy_k}{dx_k} = -\operatorname{ctg} \varphi_{ik}, \quad (16)$$

w konsekwencji czego możemy wyeliminować z układu równań np. niewiadomą  $dy_k$  przez zastąpienie jej wartością  $-dx_k \cdot \operatorname{ctg} \varphi_{ik}$ .

Omówione wyżej sposoby wprowadzenia do układu warunków dostosowania do kierunku i długości podane zostały przez autora w publikacji [8].

W wyniku wstępnego rozwiązania układu równań poprawek różnic obserwacji, dokonanego przy zachowaniu podanych warunków, otrzymujemy zbiór składowych przemieszczeń punktów sieci  $dx$ ,  $dy$ , który poddajemy analizie mającej na celu zidentyfikowanie punktów stałych a’posteriori [5].

Na wstępie zakładamy, że w sieci kontrolnej znajduje się pewna, chwilowo nieznana ilość punktów stałych a’posteriori, która jednak jest wystarczająca do stwierdzenia ich wzajemnej nieruchomości na podstawie różnic wykonanych pomiarów.

W sieci z pomierzonymi kierunkami lub kątami jesteśmy w stanie stwierdzić niezmiennność kształtu figur utworzonych przez punkty stałe. Figurą o najmniejszej ilości wierzchołków, w której możemy stwierdzić zachowanie niezmienności kształtu jest trójkąt.

W sieci z pomierzonymi kierunkami zorientowanymi jesteśmy w stanie stwierdzić niezmiennność kierunku odcinka zawartego między punktami stałymi — minimalna ilość punktów stałych jest równa 2.

W sieci z pomierzonymi długościami jesteśmy w stanie stwierdzić niezmiennność długości odcinka zawartego między punktami stałymi — minimalna ilość punktów stałych jest równa 2.

Oczywiście pewność prawidłowej identyfikacji jest znacznie większa w wypadku gdy punktów stałych a’posteriori jest więcej (porównaj problemy identyfikacji wymienione we wstępie). Dlatego przy projektowaniu sieci kontrolnych przewidujemy zazwyczaj około 10 punktów kontrolnych, licząc się również z tym, że pewna ich ilość może nie okazać się stała a’posteriori.

Jeśli przyjęte przy wstępnym rozwiązaniu układu równań poprawek różnic obserwacji punkty i inne elementy dostosowania były rzeczywiście stałe, to powinno się to uwidocznić w ten sposób, że obliczone składowe przemieszczeń  $dx$ ,  $dy$  pozostałych punktów stałych a’posteriori będą się różnić od zera jedynie w granicach błędów wyznaczenia. Tak więc powstaje możliwość sformułowania kryteriów stałości

$$|dx_P| \leq k \cdot m_{dx_P}, \quad (17a)$$

$$|dy_P| \leq k \cdot m_{dy_P}, \quad (17b)$$

gdzie  $P$  — numer punktu stałego a’posteriori.

W wypadku, gdy w wyniku wstępnego rozwiązania układu równań poprawek nie otrzymujemy składowych przemieszczeń spełniających powyższe kryteria stałości, dochodzimy do wniosku, że przyjęte punkty dostosowania uległy przemieszczeniu, jak również, że punkty ograniczające długość i kierunek dostosowania uległy przemieszczeniu.

W takim wypadku należałoby ponownie rozwiązać układ równań po-

prawek różnic obserwacji przy dostosowaniu sieci do innych punktów i elementów i powtarzać takie postępowanie tyle razy, aż natrafi się na takie elementy dostosowania, przy których obliczone składowe pozostałych punktów stałych a'posteriori spełnią kryteria (17). Dla zastosowania kryteriów (17) niezbędne jest przy tym obliczanie błędów średnich wyznaczanych składowych przemieszczeń, jako błędów funkcji wyrównanych różnic obserwacji przy zmieniających się elementach dostosowania.

Taki sposób postępowania, jakkolwiek najbardziej słuszny z teoretycznego punktu widzenia, nie może być w praktyce zastosowany ze względu na wielki nakład prac obliczeniowych, przy jednoczesnym krótkim okresie czasu, jaki mamy zazwyczaj do dyspozycji. Trzeba tu wspomnieć, że szybkie opracowywanie i przekazywanie wyników pomiarów przemieszczeń do analizy branżowej jest nie mniej ważne od sprawnej organizacji prac pomiarowych.

W tej sytuacji, zamiast wykonywania wielokrotnych wyrównań sieci przy kolejno zmieniających się elementach dostosowania, stosuje się przełiczenie składowych  $dx$ ,  $dy$  uzyskanych z wstępnego rozwiązania układu równań poprawek różnic obserwacji, na składowe  $\underline{dx}$ ,  $\underline{dy}$  odpowiadające dostosowywaniu sieci do kolejno zmieniających się par punktów. Do tego celu stosuje się metodę transformacji przemieszczeń opracowaną przez Prof. dr T. Lazzariniego z przeznaczeniem do identyfikacji punktów stałych i obliczenia przemieszczeń pozostałych punktów w sieciach z pomierzonymi kierunkami lub kątami [5].

W wyniku badań przeprowadzonych przez autora niniejszej pracy [8] okazało się, że w wypadku sieci liniowo-kątowych, liniowych i zorientowanych metoda transformacyjna dostarcza dodatkowe kryteria stałości, pozwalające na przeprowadzenie kontroli słuszności wniosków wyciąganych na podstawie spełnienia kryteriów (17). Wyniki tych dociekań rzucają interesujące światło na sprawę projektowania rodzajów elementów podlegających pomiarowi w sieci kontrolnej i dlatego omówię je nieco bardziej szczegółowo. W związku z tym konieczne jest też zacytowanie wzorów stosowanych przy transformacji przemieszczeń.

Do transformacji składowych przemieszczeń  $dx$ ,  $dy$  na składowe  $\underline{dx}$ ,  $\underline{dy}$  można stosować wymienione dalej wzory, zaczerpnięte z pracy [9], które są nieco uproszczone w stosunku do wzorów oryginalnych, podanych w [5] (uproszczenie wzorów nie zmienia tu rezultatów obliczeń w wyczuwalnych granicach).

$$\alpha = \frac{[y_r dx_r - x_r dy_r]}{[x_r^2 + y_r^2]}, \quad (18)$$

$$\beta = - \frac{[x_r dx_r + y_r dy_r]}{[x_r^2 + y_r^2]}, \quad (19)$$



$$\underline{dx}_P = x_{r_P} \cdot \beta - y_{r_P} \cdot \alpha + dx_P, \quad (20)$$

$$\underline{dy}_P = x_{r_P} \cdot \alpha + y_{r_P} \cdot \beta + dy_P. \quad (21)$$

W wzorach (18÷21) współrzędne  $x_r$ ,  $y_r$  oraz składowe  $dx_r$ ,  $dy_r$  są zredukowane o średnie wartości współrzędnych i składowych przemieszczeń punktów przyjmowanych w rozpatrywanej transformacji do dostosowania. Współczynniki transformacyjne  $\alpha$ ,  $\beta$  obliczamy z wzorów (18÷19) wyłącznie na podstawie współrzędnych i składowych przemieszczeń punktów dostosowania (uzyskanych z wstępnego rozwiązania układu równań poprawek różnic obserwacji), a następnie wykorzystujemy je do obliczenia składowych  $\underline{dx}$ ,  $\underline{dy}$  wszystkich punktów przy wykorzystaniu wzorów (20—21). Obliczone z wzorów (20 — 21) składowe  $\underline{dx}$ ,  $\underline{dy}$  przemieszczeń punktów kontrolnych poddajemy analizie, mającej na celu stwierdzenie, czy spełniają one kryteria (17) [5]. Istotna trudność na jaką tu natrafiamy, to konieczność posługiwania się wielkościami błędów średnich  $m_{\underline{dx}}$ ,  $m_{\underline{dy}}$  wyznaczenia tych składowych przy dostosowywaniu sieci do kolejno zmieniających się par punktów.

W praktyce ilość transformacji potrzebna do natrafienia na takie punkty dostosowania, które są stałe a’posteriori ogranicza się do kilku a najwyżej kilkunastu. Przy przypadkowym doborze kolejności dostosowywania sieci do poszczególnych par,<sup>5)</sup> ilość transformacji konieczna do zidentyfikowania punktów stałych jest tym mniejsza, im więcej punktów kontrolnych spełnia cechy stałości.

Obliczenie błędów średnich wyznaczenia składowych nie może być ze względu na znaczny nakład pracy dokonywane po wykonaniu poszczególnych pomiarów okresowych. Powinno ono być dokonane jednorazowo, po wykonaniu obserwacji pierwotnej i to w takiej ilości kombinacji dostosowania sieci do par punktów kontrolnych, aby istniała gwarancja posiadania kompletu obliczonych błędów niezbędnego do zastosowania kryteriów (17) przy dostosowaniu do dowolnej pary. Dlatego w okresie dokonywania tego obliczenia nie możemy wykorzystać późniejszych doświadczeń, które ułatwiają przy kolejnych opracowaniach wyników wytypowanie prawdopodobnie stałych par punktów. Obliczenie błędów wyznaczenia składowych przemieszczeń, jako błędów funkcji wyrównanych różnic obserwacji, powinno być dokonane w  $\binom{n}{2}$  kombinacjach (gdzie  $n$  — ilość punktów kontrolnych). Obliczenie takie zostało dokonane próbnie przy wykorzystaniu maszyny UMC-1, a wynik i sposób wykorzystania zostały przedstawione w pracy [10]. Pomimo przeprowadzenia prób w zakresie obliczania błędów w sposób ścisły przy zastosowaniu maszyny elektronowej, trzeba

<sup>5)</sup> Za podstawę kolejnych transformacji powinny być dobierane takie pary punktów, które zapewnią wyznaczenie przemieszczeń z możliwie najmniejszymi błędami średnimi.

stwierdzić, że w praktyce zagadnienie to nie zostało jeszcze opanowane, głównie ze względów organizacyjnych. W tej sytuacji kryteria stałości (17), jakkolwiek w istocie swej całkowicie uzasadnione teoretycznie, w praktyce stosowane są w sposób przybliżony z powodu wprowadzenia do nich wartości błędów średnich wyznaczenia składowych przemieszczeń, określonych w sposób przybliżony lub wręcz oszacowanych.

Powróćmy obecnie do sprawy dodatkowych kryteriów stałości pojawiających się w sieciach liniowo-kątowych, liniowych i zorientowanych. W tym celu musimy omówić znaczenie geometryczne czynności identyfikacyjnych w zależności od rodzajów elementów geodezyjnych pomierzonych w sieci kontrolnej.

#### a. Sieć z pomierzonymi kierunkami lub kątami

Przypuśćmy, że w rozpatrywanej sieci kontrolnej znajduje się grupa punktów stałych a’posteriori. Wynik identyfikacji powinien wskazywać te punkty w ten sposób, że jeśli jedna z transformacji przemieszczeń oparta została na dwu punktach dostosowania stałych a’posteriori, to składowe przemieszczeń  $dx$ ,  $dy$  pozostałych punktów stałych a’posteriori spełniają kryteria stałości (17) [5].

Założmy obecnie, że w rozpatrywanej sieci kontrolnej nie ma żadnego punktu stałego a’posteriori, natomiast jest grupa punktów, które zmieniły swe położenia w tak charakterystyczny sposób, że utworzona przez nie figura zachowała podobieństwo kształtu. Może to nastąpić wówczas, gdy punkty „rozejdą się” lub „zejdą” zwiększając tylko lub zmniejszając wymiary figury, jaką tworzyły przy pomiarze pierwotnym. W wyniku transformacji dokonanej przy dostosowaniu sieci do pary punktów, która należy do wspomnianej grupy zachowującej podobieństwo kształtu tworzonej przez nie figury i sprawiającej przez to pozory wzajemnej stałości punktów, otrzymamy składowe  $dx$ ,  $dy$  spełniające kryteria (17).

Tak więc dochodzimy do wniosku, że opieranie identyfikacji punktów stałych wyłącznie na wykonanych pomiarach kierunków lub kątów nie gwarantuje uniknięcia pomyłki polegającej na przyjęciu za stałe punktów pozornie tylko stałych. Trzeba jednak wspomnieć, że możliwość takiej pomyłki pojawia się tylko w szczególnych przypadkach wyżej wspomnianego sposobu przemieszczania się punktów i jest tym mniej prawdopodobna, im więcej punktów kontrolnych wchodzi do grupy punktów spełniających kryteria stałości (17).

#### b. Sieć z pomierzonymi długościami

W sieci z pomierzonymi długościami o niezmienności wzajemnego położenia punktów świadczy niezmiennosc długości boków zawartych między

nimi — zachowania nie tylko kształtu lecz i wymiarów figury utworzonej przez punkty stałe a' posteriori. Zidentyfikowanie punktów stałych polega tu również na zastosowaniu kolejnych transformacji przy dostosowaniu do par punktów i badaniu osiąganych rezultatów za pomocą kryteriów stałości (17) [5].

Zachodzi pytanie, jak przy tym wyrazi się fakt, że dokonane pomiary długości pozwalają na wykazanie stałości punktów w oparciu o dwie cechy — niezmiennosć kształtu i nadrzędną w stosunku do niej niezmiennosć wymiarów figury utworzonej przez punkty stałe. Aby odpowiedzieć na takie pytanie trzeba powrócić do wzorów (18—19) i wyjaśnić znaczenie geometryczne współczynników  $\alpha$ ,  $\beta$ .

Współczynniki transformacyjne dają się wyrazić za pomocą wzorów:

$$\alpha = \frac{d}{d'} \sin \varepsilon, \quad (22)$$

$$\beta = \frac{d}{d'} \cos \varepsilon - 1, \quad (23)$$

gdzie:  $d$  — średnia długość boku w figurze utworzonej przez punkty dostosowania, wynikająca z pomiaru pierwotnego;  $d'$  — średnia długość boku w figurze dostosowania, wynikająca z pomiaru aktualnego;  $\varepsilon$  — kąt, o jaki nastąpił obrót figury utworzonej przez punkty dostosowania przy pomiarze aktualnym w stosunku do pozycji przy pomiarze pierwotnym.

Jak już wspomniałem, w niniejszej pracy rozpatruje się bardzo niewielkie zmiany położenia punktów, które tym samym wywołują bardzo nie wielkie zmiany kierunków i długości. Tak więc można przyjąć, że  $\varepsilon \cong 0$  skąd wynika

$$\beta = \frac{d - d'}{d'}. \quad (24)$$

Wzór (24) wyraźnie wskazuje na to, że współczynnik transformacyjny  $\beta$  wyraża względną zmianę długości boku w figurze dostosowania, wynikającą ze zmiany jej wymiarów.

Załóżmy obecnie, że w sieci jest pewna grupa punktów, które przemieściły się w sposób zachowujący kształt utworzonej przez nie figury lecz nie zachowały jej pierwotnych wymiarów. Jeśli wykonamy transformację przemieszczeń przy dostosowaniu sieci do dwu punktów wchodzących w skład tej grupy, to w wyniku otrzymamy dla pozostałych punktów grupy składowe  $dx$ ,  $dy$  spełniające kryterium stałości (17). Zauważmy jednak, że w rozpatrywanym wypadku wynik obliczenia współczynnika transformacyjnego  $\beta$  nie może być równy 0. Tak więc stwierdzenie, że współczynnik  $\beta \neq 0$ , może być oznaką niezachowania stałości wzajemnego położenia przez przyjęte przy transformacji punkty dostosowania, pomimo spełnienia

kryteriów stałości (17). Biorąc pod uwagę fakt, że błędy pomiarów mogą spowodować uzyskanie wartości  $\beta \neq 0$  nawet w wypadku gdy punkty dostosowania zachowały stałość, napiszemy dodatkowe kryterium stałości w postaci nierówności

$$|\beta| \leq k \cdot m_\beta. \quad (25)$$

Z powyższych wywodów wynika wniosek, że dostosowanie sieci kontrolnych z pomierzonymi długościami do punktów stałych a'posteriori musi wyrazić się w postaci spełnienia kryteriów (17), (25). Niespełnienie jednego z tych kryteriów świadczy o tym, że przyjęte punkty dostosowania nie są stałe a'posteriori.

c) Sieć z pomierzonymi długościami i kierunkami lub kątami

Jak wiadomo, wykonanie w czasie obserwacji pierwotnej precyzyjnego pomiaru długości przynajmniej jednego odcinka sieci oraz pomiaru kierunków lub kątów w całej sieci wystarcza do określenia jej wymiarów. Ponowny pomiar długości tego samego odcinka oraz kierunków lub kątów pozwala na określenie zmian długości wszystkich boków sieci nawet w wypadku, gdy punkty ograniczające mierzony odcinek uległy przemieszczeniom. Wynika z tego, że przy identyfikowaniu punktów stałych w sieciach liniowo-kątowych sprawdzamy zachowanie cech stałości kształtu i wymiarów figury utworzonej przez punkty stałe a'posteriori — to znaczy, że wymagamy spełnienia kryteriów stałości (17), (25) podobnie jak w sieciach liniowych.

d) Sieć z pomierzonymi kierunkami lub kątami i kierunkami zorientowanymi

Załóżmy, że w rozpatrywanej sieci kontrolnej jest grupa punktów, które uległy takim przemieszczeniom, że utworzona przez nie figura zachowała pierwotny kształt i wymiary, lecz uległa obróceniu o nieznaczny co do wielkości kąt. Jeśli przy jednej z transformacji dostosujemy sieć do dwu punktów wchodzących w skład wspomnianej grupy, to dla pozostałych punktów tej grupy otrzymamy składowe  $dx$ ,  $dy$  spełniające kryterium stałości (17). Trzeba jednak pamiętać, że przez okresowy pomiar co najmniej jednego kierunku zorientowanego, nawet jeśliby okazał się on przy obserwacji aktualnej zmieniony, uzyskujemy możliwość wyznaczenia zmian orientacji wszystkich kierunków sieci. Tym samym wspomniany wyżej obrót całej grupy punktów, bez zmiany kształtu tworzonej przez nie figury, powinien uwydatnić się przy transformacji. Sposób w jaki to nastę-

puje wyjaśnia wzór (22), który możemy przedstawić w formie uproszczonej

$$\alpha = \varepsilon \quad (26)$$

przy założeniu, że  $\frac{d}{d'} = 1$ ,  $\varepsilon \cong 0$ .

Biorąc pod uwagę wyjaśnione uprzednio znaczenie kąta  $\varepsilon$  możemy stwierdzić, że w wypadku dostosowania sieci do dwu punktów wchodzących w skład grupy tworzącej figurę, która uległa obróceniu, powinniśmy otrzymać wartość współczynnika  $\alpha \neq 0$ . Odwrotnie też — w wypadku, gdy figura utworzona przez rozpatrywaną grupę punktów stałych nie ulega obrotowi — należy oczekiwać wartości współczynnika  $\alpha$  zbliżonej do zera. Oczekiwanie to wyrazimy w postaci kryterium stałości orientacji

$$|\alpha| \leq k \cdot m_\alpha. \quad (27)$$

Z powyższych wywodów wynika, że dostosowanie sieci kontrolnych z pomierzonymi kierunkami zorientowanymi i kierunkami lub kątami do punktów stałych a’posteriori musi wyrazić się w postaci spełnienia kryteriów (17), (27).

Z rozważań zawartych w punktach a) i d) wynika, że w wypadku gdy w sieci kontrolnej mierzymy zarówno długości, jak i kierunki zorientowane, powstaje możliwość stwierdzenia, że zachowane zostały cechy stałości kształtu, wymiarów i orientacji figury utworzonej przez punkty stałe a’posteriori. W wypadku takim stwierdzenie stałości opiera się na równoczesnym spełnieniu kryteriów (17), (25), (27).

Wnioski wynikające z powyższych rozważań ujmijemy w postaci tabelarycznej (por. tablica 2)

Do zastosowania kryterium stałości (25) niezbędna jest znajomość wielkości błędów średnich  $m_\beta$  odpowiadających odcinkom między wszystkimi parami punktów, które mogą być przy transformacjach przyjmowane do dostosowania. Biorąc pod uwagę wzór (24), wyjaśniający geometryczne znaczenie współczynnika  $\beta$  możemy wyrazić jego błąd wzorem

$$m_\beta = \frac{m_{(d-d')}}{d'}. \quad (28)$$

Wielkość błędu średniego  $m_{(d-d')}$  powinniśmy obliczać z wzoru na błąd funkcji wyrównanych różnic obserwacji jako błąd różnicy długości odcinka łączącego punkty przyjęte do dostosowania przy transformacji.

Podobnie do zastosowania kryterium stałości (27) niezbędna jest znajomość wielkości błędów średnich  $m_\alpha$  odpowiadających odcinkom między wszystkimi parami punktów, które mogą być przy transformacjach przyjmowane do dostosowania. Biorąc pod uwagę wzór (26), możemy wyrazić błąd  $m_\alpha$  wzorem

$$m_\alpha = m_\varepsilon. \quad (29)$$

Tablica 2

| Lp | W sieci kontrolnej zawierającej obserwacje               | Identyfikujemy punkty stałe w oparciu o cechy stałości | Oczekujemy spełnienia kryteriów stałości |
|----|----------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------|------------------------------------------|
| 1  | kierunków lub kątów                                      | kształtu                                               | (17)                                     |
| 2  | kierunków lub kątów i długości                           | kształtu, wymiarów                                     | (17), (25)                               |
| 3  | kierunków lub kątów i kierunków zorientowanych           | kształtu, orientacji                                   | (17), (27)                               |
| 4  | kierunków lub kątów, długości i kierunków zorientowanych | kształtu, wymiarów, orientacji                         | (17), (25), (27)                         |
| 5  | długości                                                 | kształtu, wymiarów                                     | (17), (25)                               |
| 6  | długości i kierunków zorientowanych                      | kształtu, wymiarów, orientacji                         | (17), (25), (27)                         |

Błąd zmiany kierunku łączącego parę punktów dostosowania ( $m_{\varepsilon}$ ) powinniśmy również obliczać z wzoru na błąd funkcji wyrównanych różnic obserwacji.

Obliczenie wielkości błędów średnich  $m_{\alpha}$ ,  $m_{\beta}$  jako błędów funkcji wyrównanych różnic obserwacji, może być w praktyce wykonane jednorazowo — bezpośrednio po wykonaniu obserwacji pierwotnej, przy użyciu maszyny elektronowej<sup>6)</sup>. Wykonanie tego obliczenia przy użyciu arytmometru jest pracochłonne. Dlatego trzeba się liczyć z tym, że jeszcze przez pewien czas kryteria (25), (27) będą stosowane w sposób przybliżony podobnie jak kryteria (17) ze względu na wykorzystywanie w nich przybliżonych wartości błędów współczynników transformacyjnych.

### 2.3. Identyfikacja reperów stałych w sieciach pionowych

Identyfikacja reperów stałych w sieciach niwelacji geometrycznej może być oparta na znacznie bardziej prostym postępowaniu, wynikającym z prostoty zależności (13).

<sup>6)</sup> Obliczenie należy wykonać dla wszystkich par punktów, które mogą stanowić podstawę do transformacji.



Jeśli sąsiadujące ze sobą na ciągu repery są stałe, to wyraża się to wprost w postaci spełnienia kryterium stałości (4). W wypadku przeciwnym identyfikacja reperów stałych może polegać na kolejnym sumowaniu różnic  $dh$  na odcinkach między reperami, o których wstępnie zakładamy, że są stałe. Wówczas jako kryterium stałości możemy traktować nierówność

$$|[dh]| \leq k \sqrt{[m_{dh}^2]} \quad (30)$$

gdzie:  $[dh]$  — suma nie wyrównanych różnic przewyższeń na ciągach między reperami stałymi a’posteriori;  $[m_{dh}^2]$  — suma kwadratów błędów średnich tych różnic.

Sprawdzenie spełnienia kryterium (30) powinno nastąpić na wszystkich najkrótszych drogach pomiędzy punktami wykazującymi stałość (na odcinkach łączących każdy z każdym punktem uważanym za stały). W wypadkach wątpliwych, gdy sumy różnic są bliskie granicznym wielkościom lub nieznacznie je przekraczają, bądź też ciągi między reperami stałymi są długie, należy sprawdzenie dokonać również na innych drogach łączących repery. Omówiony pokrótce sposób identyfikacji reperów stałych w oparciu o nie wyrównane różnice przewyższeń [5] zalecany jest w pracy [4] jako najbardziej korzystny. Walory tego sposobu to możliwość dokonywania identyfikacji nawet w warunkach polowych bez dużego nakładu pracy i skomplikowanych obliczeń oraz możliwość dodatkowego sprawdzenia wyników pomiarów przez analizowanie sum różnic przyrostów na ciągach łączących po różnych drogach rozpatrywane repery.

Inny sposób identyfikacji [5], oparty na wynikach wstępnego rozwiązania układu równań poprawek różnic obserwacji przedstawia się następująco.

Zestawiamy układ równań poprawek różnic przewyższeń (13) i rozwiązujemy go wstępnie przy dostosowaniu do jednego reperu położonego tak, aby rozkład błędów wyznaczenia zmian rzędnych  $dz$  w całej sieci był możliwie równomierny. W wyniku rozwiązania otrzymujemy składowe  $dz$  przemieszczeń pozostałych reperów, które mogą być obciążone wpływem przemieszczenia przyjętego reperu dostosowania. Jeśli w sieci istnieje grupa reperów stałych a’posteriori, to uwidoczni się to w ten sposób, że różnice składowych  $dz$  tych reperów będą się bardzo nieznacznie różnić od zera (wyznaczone z wstępnego wyrównania składowe  $dz$  reperów stałych będą do siebie zbliżone). Wykrycie grupy takich punktów jest niezwykle łatwe i dokonuje się w wyniku przeglądu zestawienia obliczonych składowych  $dz$ . Powstaje jedynie kwestia, jak małe powinny być różnice między wyznaczonymi składowymi  $dz$ , aby repery te można było uznać za stałe. Do zbadania może tu posłużyć kryterium stałości wyrażone nierównością

$$|dz_k - dz_i| \leq k \cdot m_{dh_{ik}} \quad (31)$$

gdzie:  $dz_k$ ,  $dz_i$  — obliczone ze wstępnego rozwiązania składowe przemieszczeń reperów;  $m_{dh_k}$  — błąd średni wyrównanej różnicy przewyższeń, wyrażonej wzorem  $dh_{ik} = dz_k - dz_i$ , obliczony jako błąd funkcji wyrównanych różnic obserwacji.

Aby można było przyjąć, że pewna grupa reperów spełnia warunki wzajemnej stałości położenia, należy stwierdzić spełnienie kryterium stałości (31) przez wszystkie różnice  $dh$  między parami punktów rozpatrywanej grupy.

Powyższy sposób identyfikacji reperów stałych a’posteriori cytuję tu z uwagi na to, że postępowanie przy jego zastosowaniu zawiera analogie do identyfikacji punktów stałych w sieciach poziomych [5].

#### 2.4. Uwagi dodatkowe do identyfikacji punktów stałych

W punkcie 2.2 dotyczącym identyfikacji punktów stałych w sieciach poziomych przedstawione zostało naświetlenie zagadnienia stopnia pewności identyfikacji w zależności od rodzaju i ilości sprawdzanych cech stałości. Z wywodów tam zawartych wynika, że stopień pewności identyfikacji wzrasta wraz z wzrostem ilości punktów spełniających określone kryteria stałości i wzrostem ilości sprawdzanych cech. Tak więc teoretycznie dla zwiększenia pewności, że wynik identyfikacji nie jest obciążony szczególnym sposobem przemieszczania się punktów, sprawiającym pozory ich wzajemnej stałości, należy dążyć do projektowania w sieci obserwacji pozwalających na wyznaczanie nie tylko zmian kształtu lecz również zmian wymiarów i orientacji. Pociąga to za sobą konieczność mierzenia długości niektórych odcinków oraz mierzenia azymutów (lub kierunków orientacyjnych na odległe cele).

W praktyce trzeba dodatkowo uwzględnić możliwości dokładnościowe pomiaru kierunków lub kątów, kierunków zorientowanych i długości oraz nakład prac i kosztów związanych z pomiarami. Na przykład w sieciach kontrolnych służących do wyznaczania przemieszczeń punktów kontrolowanych na zaporach wodnych, stosuje się pomiary kierunków, które można wyznaczyć stosunkowo szybko z błędem średnim rzędu  $0,3 \div 0,6''$  (kierunek średni z pomiaru w trzech seriach). Próby orientowania niektórych kierunków boków w sieci kontrolnej dla zapory w Rożnowie wykazały, że dokładność orientowania charakteryzuje się błędem średnim rzędu  $2''$  (pomiar na odległe cele orientacyjne w dolnym biegu rzeki oraz pomiar azymutu z Polaris). Możliwość dokonania pomiarów orientacyjnych jest przy tym ograniczona w znacznym stopniu przez warunki środowiska. Pomiary długości niektórych odcinków w takiej sieci powinny być dokonane ze średnim błędem względnym rzędu  $1 : 600\,000$  to jest tak, aby mogły dorównać dokładności pomiaru kierunków i stanowić równowartościowe z nimi elementy do analizy stałości [5].

Należy przypuszczać, że nakład prac na pomiar długości oraz konieczność transportowania dużego zestawu przyrządów (statywy, druty inwarowe itp.) uniemożliwi w praktyce najbliższych lat stosowanie tych pomiarów w sieciach kontrolnych dla zapór wodnych. Sytuacja taka może się radykalnie zmienić w momencie, gdy rozwój konstrukcji nowoczesnych dalmierzy doprowadzi do możliwości dokładnego mierzenia długości krótkich odcinków rzędu  $100 \div 500$  m.

Inaczej przedstawia się ta sprawa w sieciach kontrolnych pokrywających znaczne obszary o gęstej zabudowie. Tak na przykład na terenach eksploatacji górniczej, gdzie jednocześnie występuje zabudowa miejska i rozlokowane są liczne zakłady przemysłowe, naturalne warunki środowiska powodują obniżenie dokładności pomiarów kątowych. Jednocześnie na terenach takich istnieją duże trudności wytypowania miejsc wolnych od wpływu deformacji terenu, w których można by zastabilizować punkty kontrolne. W rezultacie musimy liczyć się z tym, że w sieciach kontrolnych na takich terenach możliwe jest identyfikowanie nieznacznej ilości punktów stałych (a nawet może się okazać, że na obszarze objętym siecią nie ma takich punktów w ogóle). Wówczas sieć kontrolna powinna mieć nadane wymiary liniowe przez pomiar długości niektórych odcinków. Wskazane jest aby sieć kontrolna na obszarze deformacji terenu była również zorientowana przez pomiar kierunków na odległe cele, znajdujące się poza obszarem deformacji.

Przy identyfikowaniu punktów stałych mogą wystąpić wypadki otrzymywania niejednoznacznych rezultatów wynikające stąd, że w rozpatrywanej sieci istnieje kilka lub więcej grup punktów, z których każda z osobna spełnia rozpatrywane cechy stałości, natomiast wszystkie te grupy zebrane w jedną całość nie spełniają rozpatrywanych cech stałości. Takie wypadki występują tym częściej, im mniej punktów wchodzi do grupy spełniającej rozpatrywane cechy stałości.

W związku z możliwością pojawienia się takich wyników trzeba zastosować dodatkowe kryteria, służące do podjęcia decyzji, która z grup punktów spełniających rozpatrywane kryteria stałości jest rzeczywiście stała.

Jeśli na przykład w sieci zidentyfikujemy jedną grupę sześciu punktów, trzy grupy czteropunktowe i 15 grup trzypunktowych, spełniających rozpatrywane kryterium stałości, a jednocześnie każda z tych grup wykazuje przemieszczenie w stosunku do pozostałych, to w zasadzie powinniśmy przyjąć, że rzeczywiście stałe punkty wchodzi w skład grupy sześciu punktów. Jest to kryterium dodatkowe, oparte na zasadzie ilościowej.

Należy wspomnieć, że zasada ilościowa nie jest jedyną i nie w każdym wypadku może być traktowana jako miarodajna. Wyobraźmy sobie, że punkty wchodzące w skład najliczniejszej grupy spełniającej rozpatry-

wane kryteria stałości położone są blisko siebie i zastabilizowane w części podłoża, co do której istnieją uzasadnione podejrzenia, że może się przemieszczać w stosunku do sąsiadujących części podłoża zalegającego na obszarze sieci kontrolnej. Wówczas przyjęcie takiej grupy punktów jako stałej mogłoby być szkodliwe dla oceny przemieszczeń obiektu badań. Dla podjęcia decyzji o tym, która grupa punktów spełniająca rozpatrywane cechy stałości jest faktycznie stała, posługujemy się w takich wypadkach dodatkowymi kryteriami opartymi na zasadzie jakościowej, wymagającymi korzystania z dodatkowych przesłanek natury geologicznej, hydrogeologicznej, gruntoznawczej itp. [5]. Jedną z często stosowanych dodatkowych przesłanek natury geometrycznej jest wynik badania stałości punktów na podstawie wcześniejszych pomiarów, poprzedzających analizowany pomiar aktualny. Jeśli na przykład podczas wcześniejszych obserwacji stwierdzona została ponad wszelką wątpliwość stałość niektórych punktów kontrolnych i niestałość innych punktów kontrolnych, to wynik taki stanowi na ogół dobrą dodatkową podstawę do wnioskowania o stałości aktualnej, z uwzględnieniem oczywiście informacji o zmianach środowiska jakie mogły nastąpić w okresie poprzedzającym obserwację aktualną.

Z powyższych uwag wynika, że identyfikowanie punktów stałych nie jest problemem, który daje się ograniczyć do rozpatrywania wyłącznie geometrycznych cech niezmienności figur tworzonych przez te punkty, w oparciu o obiektywne metody przeliczeń wyników wykonanych pomiarów geodezyjnych. W każdym wyniku identyfikacji może być zawarta pewna doza subiektywizmu, bowiem za wynik ten uważamy decyzję o przyjęciu stałości określonych punktów, opartą tylko częściowo (jakkolwiek zazwyczaj w głównej mierze) na obiektywnych wynikach dostarczonych przez kryteria stałości.

Na zakończenie tych uwag trzeba wspomnieć, że często wzajemne przemieszczenia grup punktów spełniających wewnątrznie rozpatrywane kryteria stałości są tak nieznaczne, że można sobie pozwolić na przyjęcie, że grupy te są wzajemnie stałe i uznać wszystkie punkty wchodzące w ich skład za stałe a'posteriori. Wówczas winniśmy liczyć się z pewnym zwiększeniem błędów wyznaczania przemieszczeń pozostałych punktów, o czym będzie mowa w następnym rozdziale.

### **3. Obliczanie przemieszczeń punktów kontrolowanych i wszystkich innych poruszonych punktów sieci oraz ocena dokładności wyznaczenia tych przemieszczeń**

Przemieszczenia punktów sieci kontrolnej mogą być obliczane kilkoma różnymi metodami. Każdej z nich odpowiada określony sposób obliczenia błędów wyznaczenia przemieszczeń punktów.

Podstawowym kryterium wyboru metody obliczenia przemieszczeń powinna być możliwość uzyskania najbardziej prawdopodobnych wartości przemieszczeń, obciążonych w najmniejszym stopniu błędami wyznaczenia. W praktyce o wyborze metody obliczenia przemieszczeń decyduje często czas przeznaczony na ten cel. Trzeba pamiętać, że wyniki pomiarów przemieszczeń mają tym większe znaczenie dla zachowania bezpieczeństwa obiektu badań, im szybciej mogą być wykorzystane do interpretacji branżowej, w wyniku której podejmuje się często decyzje o niezbędnych dodatkowych zabezpieczeniach lub zmianach sposobu wznoszenia bądź eksploataowania obiektu badań [5].

### 3.1. Obliczenie przemieszczeń punktów metodą transformacyjną

Najprostszym sposobem obliczania poziomych składowych przemieszczeń punktów jest przetransformowanie składowych  $dx$ ,  $dy$  otrzymanych z wstępnego rozwiązania układu równań poprawek różnic obserwacji na składowe  $\underline{dx}$ ,  $\underline{dy}$  przy dostosowaniu sieci do wszystkich zidentyfikowanych punktów stałych a’posteriori. Do tego celu służą wzory (18÷21). W praktyce sposób ten ogranicza się zazwyczaj do obliczenia przemieszczeń punktów tej części sieci, która podlegała wstępnemu wyrównaniu, natomiast przemieszczenia pozostałych punktów (zazwyczaj kontrolowanych) określa się metodą rachunkowo-graficzną [5].

Ocena dokładności obejmuje określenie błędów dostosowania oraz błędów wyznaczenia składowych przemieszczeń  $\underline{dx}$ ,  $\underline{dy}$  poszczególnych punktów. Ocena dokładności dostosowania odbywa się przy wykorzystaniu wzorów <sup>7)</sup>

$$m_{\underline{dx}} = \sqrt{\frac{[\underline{dx}^2]}{n}} \quad (32a)$$

$$m_{\underline{dy}} = \sqrt{\frac{[\underline{dy}^2]}{n}} \quad (32b)$$

$$m_{\underline{dp}} = \sqrt{\frac{[\underline{dx}^2] + [\underline{dy}^2]}{n}} \quad (32c)$$

gdzie:  $[\underline{dx}^2]$ ,  $[\underline{dy}^2]$  — sumy kwadratów składowych przemieszczeń punktów dostosowania, obliczonych z wzorów (20÷21);  $n$  — ilość punktów dostosowania.

Biorąc pod uwagę postać wzorów (32) łatwo zauważymy, że wspomniana

<sup>7)</sup> Wzory (32) są odpowiednikami wzorów (68) podanych w [5]. Wprowadzone zmiany oznaczeń wynikły z potrzeby nawiązania do wcześniejszych oznaczeń niniejszej pracy.



na w punkcie 2.4 konieczność przyjmowania niekiedy jako punktów stałych, punktów wchodzących w skład kilku grup, które uległy nieznacznym wzajemnym przemieszczeniom spowoduje zwiększenie błędów dostosowania powyżej granic usprawiedliwionych błędami pomiarów.

Obliczenie błędów przetransformowanych składowych przemieszczeń poszczególnych punktów następuje przy zastosowaniu wzorów podanych w [5] na stronach 50÷52.

Obliczenie błędów składowych przemieszczeń określonych metodą rachunkowo-graficzną dokonywane jest metodą przybliżoną w oparciu o wielkości uzyskiwanych trójkątów błędów (lub wieloboków błędów w wypadku gdy występują obserwacje nadliczbowe).

Przy obliczaniu przemieszczeń pionowych odpowiednikiem metody transformacyjnej jest zwykle zredukowanie składowych  $dz$ , obliczonych z wstępnego wyrównania, o średnią wielkość  $dz_{sr}$ , obliczoną na podstawie przemieszczeń reperów zidentyfikowanych jako stałe. Przemieszczenie dowolnego reperu oblicza się tu z wzoru

$$\underline{dz}_i = dz_i - dz_{sr}. \quad (33)$$

Obliczenie błędu dostosowania wykonuje się przy wykorzystaniu wzoru

$$m_{\underline{dz}} = \sqrt{\frac{[\underline{dz}^2]}{n}} \quad (34)$$

gdzie:  $[\underline{dz}^2]$  — suma kwadratów składowych przemieszczeń punktów dostosowania;  $n$  — ilość punktów dostosowania.

### 3.2. Obliczenie przemieszczeń punktów przez rozwiązanie układu równań poprawek różnic obserwacji

W wypadku, gdy elementy dostosowania sieci kontrolnej przy wstępnym rozwiązaniu układu równań poprawek różnic obserwacji okażą się stałe a’posteriori, to obliczone składowe  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$  wszystkich punktów będą zbliżone do poszukiwanych wartości składowych przemieszczeń (dla punktów stałych a’posteriori będą zbliżone do zera). W pewnych więc wypadkach, gdy wymagana dokładność wyznaczania składowych przemieszczeń nie jest duża w stosunku do dokładności pomiaru sieci, możemy poprzestać na tak wyznaczonych składowych. W wypadku, gdy dążymy do osiągnięcia możliwie jak największej dokładności wyznaczenia przemieszczeń, powinniśmy je obliczać przy dostosowaniu sieci do wszystkich punktów stałych a’posteriori. Sposób dostosowania powinien uwzględniać fakt, że punkty przyjęte jako stałe a’posteriori mogły w rzeczywistości ulegać przemieszczeniom o wielkościach nieuchwytnych



z punktu widzenia dokładności pomiarów. Uwzględnienie tego faktu przy obliczaniu przemieszczeń w oparciu o rozwiązanie układu równań poprawek różnic obserwacji polega na traktowaniu składowych przemieszczeń punktów dostosowania, jako wielkości pomierzonych z pewnymi określonymi błędami [3]. Wyraża się to w postaci uzupełnienia układu równań poprawek równaniami poprawek różnic takich fikcyjnych obserwacji.

Biorąc pod uwagę fakt, że rozwiązaniu podlega układ równań sprowadzonych do równoważności dokładnościowej przez podzielenie każdego równania (współczynników przy niewiadomych i wyrazów wolnych) przez błąd średni odpowiedniej różnicy obserwacji, wyrazimy te dodatkowe równania w postaci:

$$\frac{\underline{dx}_i}{m_{\underline{dx}_i}} = \frac{v_{\underline{dx}_i}}{m_{\underline{dx}_i}}; \quad (35a)$$

$$\frac{\underline{dy}_i}{m_{\underline{dy}_i}} = \frac{v_{\underline{dy}_i}}{m_{\underline{dy}_i}}; \quad (35b)$$

$$\frac{\underline{dz}_i}{m_{\underline{dz}_i}} = \frac{v_{\underline{dz}_i}}{m_{\underline{dz}_i}}. \quad (35c)$$

Największą trudność sprawia ustalenie a'priori wielkości błędów różnic fikcyjnych obserwacji  $m_{\underline{dx}}$ ,  $m_{\underline{dy}}$ ,  $m_{\underline{dz}}$ . Przyjęcie wielkości zbyt małych przyczynia się do nadmiernego usztywnienia układu, co wyrazi się w nieuzasadnionym zniekształceniu różnic wykonanych pomiarów przez poprawki wyrównawcze  $v_{dl}$  i wynikającym z tego zwiększeniu błędu typowego spostrzeżenia po wyrównaniu, powyżej wartości wynikającej z błędów pomiarów. Przyjęcie wielkości zbyt dużych spowoduje zwiększenie wyrażenia  $f(\underline{apa})^{-1}f$  we wzorze na błąd funkcji wyrównanych spostrzeżeń.

Podstawą do ustalenia a'priori wielkości błędów składowych punktów dostosowania powinny być wyniki analizy drobnych wzajemnych przemieszczeń punktów, które uznaliśmy za stałe w wyniku dokonanej identyfikacji. Najprostszym sposobem ustalenia tych błędów może być dokonanie wstępnej transformacji składowych przemieszczeń punktów zidentyfikowanych jako stałe, uzyskanych z wstępnego wyrównania, przy dostosowaniu do tych punktów. W rezultacie otrzymujemy dla punktów stałych a'posteriori składowe  $\underline{dx}$ ,  $\underline{dy}$ ,  $\underline{dz}$ , które możemy wykorzystać do obliczenia składowych błędów dostosowania z wzorów (32), (34). Otrzymane wielkości błędów możemy traktować dalej jako równe błędom ustalonym a'priori, służącym do zrównoważenia dokładnościowego równań (35).

Taki sposób postępowania nie uwzględnia różnic dokładności wyznaczenia wzajemnego położenia poszczególnych punktów stałych. Dlatego czynione są pewne próby zróżnicowania błędów różnic fikcyjnych obserwacji poszczególnych punktów stałych, w zależności od dokładności wy-

znaczenia każdego z punktów w sieci kontrolnej [4].

W wyniku rozwiązania układu równań poprawek różnic obserwacji sieci kontrolnej (obejmującego również równania typu (35) dla wszystkich punktów zidentyfikowanych jako stałe a’posteriori) otrzymujemy składowe przemieszczeń wszystkich punktów. Ponadto obliczamy błędy średnie tak wyznaczonych składowych przemieszczeń, traktując je jako błędy funkcji wyrównanych różnic obserwacji.

Jak już wspomniałem, w praktyce często stosuje się ze względów ekonomicznych podział sieci kontrolnej na dwa rzędy. Do pierwszego rzędu zalicza się część sieci wiążącą wzajemnie punkty kontrolne i pomocnicze, natomiast punkty kontrolowane traktuje się jako punkty drugiego rzędu. W wypadku gdy wyznaczamy przemieszczenia punktów pierwszego rzędu przez wyżej omówione rozwiązanie układu równań poprawek różnic obserwacji, wskazane jest aby przemieszczenia punktów kontrolowanych wyznaczone były nie metodą rachunkowo-graficzną lecz analityczną. Obliczenia takie, którego sposób podany jest w [5], zostało w [10] sprowadzone do bardzo prostej postaci rachunkowej, opartej na wykorzystaniu specjalnych formularzy z przygotowanymi zawczasu krakowianami transformującymi.

Znajomość błędów średnich obliczonych składowych przemieszczeń punktów kontrolowanych niezbędna jest do oceny, czy składowe te wynikają z rzeczywiście występujących przemieszczeń, czy też tylko z błędów pomiarowych i błędów dostosowania sieci do punktów stałych a’posteriori. W wypadku gdy obliczone składowe przemieszczenia osiągają wielkości zawierające się w granicach błędów wyznaczenia, nie mamy podstawy do stwierdzenia, że punkty kontrolowane uległy przemieszczeniom. Należy jednak podkreślić, że często zachodzą takie wypadki, że punkty kontrolowane podlegają w długim czasie przemieszczeniom powolnym lecz o wyraźnie systematycznym charakterze, co może spowodować, że przemieszczenia między kolejnymi obserwacjami sieci będą mniejsze od możliwych do wykrycia z punktu widzenia dokładności obserwacji. Ma to miejsce na przykład przy pomiarach osiadań budowli w wypadku, gdy są one dokonywane zbyt często. Wówczas przemieszczenia obliczone na podstawie wyników obserwacji aktualnej nie powinny podlegać interpretacji prowadzonej na bieżąco (powinny być uważane za nie istniejące), natomiast mogą się stać pomocne przy interpretacji prowadzonej po dalszych obserwacjach. Z tego względu wyniki wszystkich okresowych pomiarów powinny być gromadzone i przechowywane niezależnie od tego, czy wskazują na występowanie przemieszczeń, czy też nie wykazują ich w poszczególnych okresach między kolejnymi obserwacjami.

W wypadku, gdy wyznaczone przemieszczenia osiągają zdecydowanie większe wartości niż by to wynikało z błędów pomiarów, dochodzimy do wniosku, że wystąpiły one w rzeczywistości.

#### 4. Generalizacja wyznaczonych przemieszczeń punktów kontrolowanych

##### 4.1. Związki między przemieszczeniami i odkształceniami ciała stałego a przemieszczeniami jego punktów materialnych

We wstępie do niniejszej pracy podałem ogólne definicje przemieszczeń i odkształceń ciała. Obecnie rozważę szczegółowo wynikające z nich zagadnienia rachunkowe.

Każde ciało stałe możemy rozpatrywać jako nieskończony zbiór punktów materialnych. Jeśli rozpatrywane ciało jest absolutnie sztywne (nie podlega odkształceniom), to w wypadku, gdy przemieszcza się ono w przestrzeni, następują takie przemieszczenia wszystkich punktów materialnych tego ciała, które nie powodują zmian wzajemnego ich rozmieszczenia. Wektor przemieszczenia dowolnego punktu materialnego  $i$ , podlegającego takiemu warunkowi oznaczmy  $\overline{dp'_i}$ , zaś składowe tego wektora w prostokątnym układzie współrzędnych  $oxy$  oznaczmy  $dx'_i, dy'_i, dz'_i$ .

Przemieszczenia ciała sztywnego dają się w prosty sposób określić za pomocą sześciu parametrów:

$dx'_o, dy'_o, dz'_o$  — składowe przemieszczenia punktu materialnego, należącego do rozpatrywanego ciała i posiadającego początkowo współrzędne  $x = y = z = 0$ ,<sup>8)</sup>,

$\varepsilon_1$  — kąt zmiany nachylenia ciała odłożony w płaszczyźnie pionowej  $\pi$  (równoległej do osi  $oz$  układu współrzędnych),

$\varphi$  — kąt określający kierunek śladu płaszczyzny  $\pi$  na płaszczyźnie  $oxy$ , odłożony od osi  $ox$  w prawo (kierunek zmiany pochylenia),

$\varepsilon_2$  — kąt poziomego obrotu ciała, odłożony w płaszczyźnie  $oxy$  w prawo.

Składowe przemieszczenia dowolnego punktu materialnego  $i$ , należącego do ciała absolutnie sztywnego, dają się wyrazić za pośrednictwem powyższych parametrów przy wykorzystaniu następujących wzorów, wprowadzonych przez autora w pracy [12]:

$$dx'_o - z_i \varepsilon_1 \cos \varphi - y_i \varepsilon_2 = dx'_i; \quad (36a)$$

$$dy'_o - z_i \varepsilon_1 \sin \varphi + x_i \varepsilon_2 = dy'_i; \quad (36b)$$

$$dz'_o + x_i \varepsilon_1 \cos \varphi + y_i \varepsilon_1 \sin \varphi = dz'_i. \quad (36c)$$

Powyższe wzory są słuszne dla małych wielkości przemieszczeń jakimi zajmujemy się w niniejszej pracy.

Forma wzorów (36) jest nieco niekorzystna dla praktycznych rachunków z uwagi na występowanie w nich iloczynów  $\varepsilon_1 \cos \varphi, \varepsilon_1 \sin \varphi$ .

<sup>8)</sup> W pracy [12] parametry te oznaczono literą  $C$  w dolnej frakcji, co obecnie autor uznał za niekorzystne, zmieniając oznaczenie na  $O$ .

Podstawiając

$$\varepsilon_1 \cos \varphi = U, \quad (37a)$$

$$\varepsilon_1 \sin \varphi = V, \quad (37b)$$

możemy wzory (36) przedstawić w postaci:

$$dx'_o - z_i U - y_i \varepsilon_2 = dx'_i; \quad (38a)$$

$$dy'_o - z_i V + x_i \varepsilon_2 = dy'_i; \quad (38b)$$

$$dz'_o + x_i U + y_i V = dz'_i. \quad (38c)$$

Założmy obecnie, że rozpatrywane ciało nie jest absolutnie sztywne, to znaczy może podlegać zarówno przemieszczeniom, jak i odkształceniom. Wyrazi się to w ten sposób, że dowolny punkt materialny ciała ulegnie przemieszczeniu  $\overline{dp}_i$ , na którełoży się przemieszczenie  $\overline{dp}'_i$  uzależnione od parametrów przemieszczeń ciała oraz przemieszczenie  $-v_{dp}$  wynikające z odkształcenia ciała (por. wzór 2).

Biorąc pod uwagę składowe przemieszczeń napiszemy wzór (3) w postaci:

$$\underline{dx}_i + v_{\underline{dx}_i} = dx'_i; \quad (39a)$$

$$\underline{dy}_i + v_{\underline{dy}_i} = dy'_i; \quad (39b)$$

$$\underline{dz}_i + v_{\underline{dz}_i} = dz'_i; \quad (39c)$$

gdzie:  $\underline{dx}_i$ ,  $\underline{dy}_i$ ,  $\underline{dz}_i$  — wyznaczone z pomiarów składowe przemieszczenia punktu  $i$ .

$-v_{\underline{dx}_i}$ ,  $-v_{\underline{dy}_i}$ ,  $-v_{\underline{dz}_i}$  — składowe części przemieszczenia punktu spowodowane przez odkształcenie ciała i błędy wyznaczenia przemieszczenia.

Podstawiając lewe strony wzorów (39) odpowiednio do wzorów (38) otrzymamy:

$$dx'_o - z_i U - y_i \varepsilon_2 = \underline{dx}_i + v_{\underline{dx}_i}; \quad (40a)$$

$$dy'_o - z_i V + x_i \varepsilon_2 = \underline{dy}_i + v_{\underline{dy}_i}; \quad (40b)$$

$$dz'_o + x_i U + y_i V = \underline{dz}_i + v_{\underline{dz}_i}. \quad (40c)$$

Wzory (40) nazwane przez autora równaniami odkształceń, będą służyć do dokonywania pierwszej części generalizacji złożonej, to jest do odróżniania na podstawie wyznaczonych przemieszczeń punktów kontrolowanych, części tych przemieszczeń wywołanych przez przemieszczenia rozpatrywanego ciała ( $\overline{dp}'$ ) od części przemieszczeń wywołanych przez odkształcenia rozpatrywanego ciała ( $-v_{dp}$ ).

#### 4.2. Zasady odróżniania przemieszczeń ciała od jego odkształceń

W wyniku pomiarów i wcześniej omówionych obliczeń otrzymujemy po każdej okresowej obserwacji składowe  $\overline{dx}$ ,  $\overline{dy}$ ,  $\overline{dz}$  przemieszczeń punktów kontrolowanych, zastabilizowanych na powierzchni badanego obiektu

(ciała). Dla każdej wyznaczonej składowej przemieszczenia możemy ułożyć równanie odkształcenia o jednej z postaci (40). Układ równań odkształceń zestawiony dla wszystkich wyznaczonych składowych przemieszczeń punktów kontrolowanych pozwala na obliczenie wartości parametrów przemieszczeń badanego ciała oraz na obliczenie składowych przemieszczeń punktów kontrolowanych oddzielnie pod wpływem przemieszczeń ciała i oddzielnie pod wpływem jego odkształceń. Rozwiązanie takiego układu równań powinno nastąpić przy zachowaniu dodatkowych warunków i założeń, które obecnie omówię.

Rozpatrywane ciało potraktujemy jako nieskończony zbiór punktów materialnych. Jeśli ciało nie uległo przemieszczeniom lecz tylko odkształceniom, to parametry  $dx'_0 = dy'_0 = dz'_0 = U = V = \varepsilon_2 = 0$ , a jednocześnie każdy punkt przemieszcza się do nowej pozycji. Jeśli nie potrafimy przewidzieć sposobu przemieszczania się poszczególnych punktów, to powinniśmy przyjąć, że ciało odkształcone jest dostosowane aktualnymi pozycjami wszystkich punktów materialnych do pierwotnych ich pozycji.<sup>9)</sup> Najlepsze dostosowanie uzyskujemy przy zachowaniu warunku

$$[\underline{v_{dx}}^2 + \underline{v_{dy}}^2 + \underline{v_{dz}}^2] = \min \quad (41)$$

obejmującego składowe przemieszczenia wszystkich punktów materialnych ciała. Warunek ten powinien być spełniony również w wypadkach gdy ciało podlega zarówno drobnym odkształceniom, jak i przemieszczeniu bowiem wówczas obliczone wartości parametrów przemieszczeń określają najbardziej prawdopodobne przemieszczenie ciała.

Oczywiście rozwiązanie układu równań odnoszącego się do nieskończonego zbioru punktów materialnych ciała nie jest możliwe i dlatego należałoby wyselekcjonować z tego zbioru część punktów tworzących skończony zbiór, odzwierciedlający możliwie wiernie zmiany geometryczne jakim podlega badane ciało. Najbardziej prawidłowe byłoby wyselekcjonowanie skończonego zbioru punktów materialnych znajdujących się w wierzchołkach siatki utworzonej przez środki kul elementarnych o minimalnych jednakowych wartościach promieni, wypełniających rozpatrywane ciało. Jednak ze względu na techniczne i organizacyjne możliwości pomiarów, w praktyce dysponujemy niewielkim zbiorem wyznaczonych składowych przemieszczeń punktów kontrolowanych, które znajdują się tylko na dostępnych powierzchniach rozpatrywanego ciała i nie są rozmieszczone regularnie. W tej sytuacji jesteśmy w stanie obliczać tylko przybliżone wartości parametrów przemieszczeń ciała w oparciu o rozwiązanie układu równań odkształceń, zestawionego dla faktycznie wyznaczonych składo-

<sup>9)</sup> Zakładamy tu, że ciało jest sztywne lub odkształca się bardzo nieznacznie i w sposób trudny do przewidzenia



wych przemieszczeń niedużej na ogół ilości punktów kontrolowanych. Przy rozwiązaniu tym będziemy uważać warunek (41) za obowiązujący w odniesieniu do wszystkich wyznaczonych składowych przemieszczeń punktów kontrolowanych, które wykorzystujemy do obliczenia parametrów przemieszczeń ciała.

W praktyce rozpatrujemy zawsze przemieszczenia i odkształcenia ciała podlegającego działaniu sił zewnętrznych o zróżnicowanych wielkościach, kierunkach i znaczeniu dla trwałości obiektu. W związku z tym nie możemy stosować warunku (41) w całej rozciągłości i obliczanie parametrów przemieszczeń opierać będziemy na wyznaczonych składowych przemieszczeniach pewnej części punktów kontrolowanych.

Przyjmijmy jako zasadę, że obliczenie przemieszczeń obiektu ma nas poinformować, jakie nastąpiły zmiany położenia tej jego części, która opiera się bezpośrednio na podłożu i charakteryzuje się stosunkowo największą sztywnością. Zasada ta nie jest w pełni jednoznaczna, a realizacja jej może się dosyć znacznie różnić przy różnych konstrukcjach badanych obiektów, jednak pozostawienie zupełnej dowolności postępowania mogłoby przynieść zupełnie fałszywe rezultaty, utrudniające interpretację branżową. Tezę tę zilustruję na przykładzie badania komina pokazanego na rys. 3.

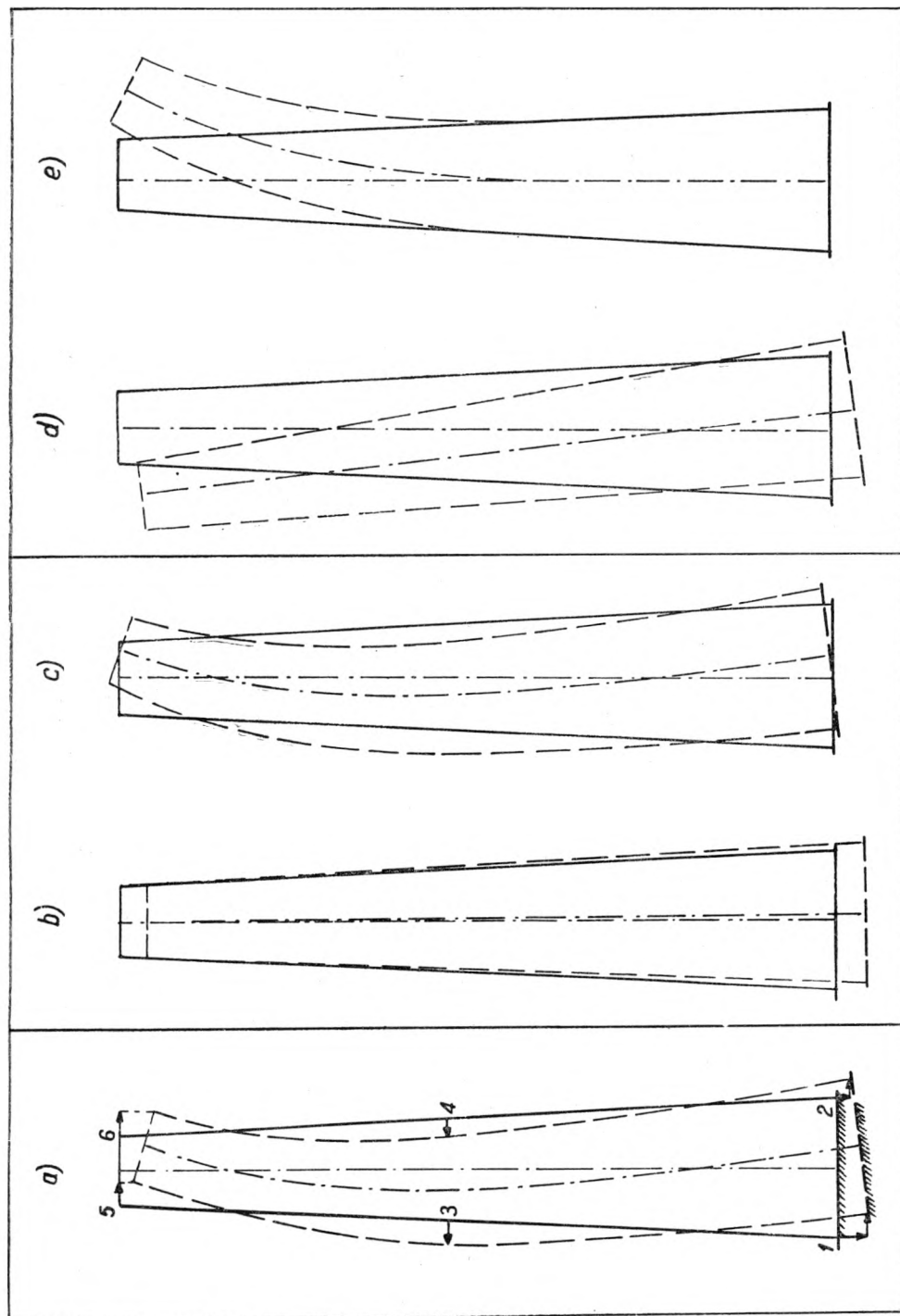
Zgodnie z rysunkiem 3a pokazującym jeden przekrój pionowy komina i wyznaczone w tym przekroju składowe przemieszczenia punktów kontrolowanych, przemieszczona i jednocześnie odkształcona postać przekroju charakteryzuje się w sposób przybliżony linią przerywaną.

Gdybyśmy wykorzystali do określenia parametrów przemieszczeń wyznaczone z pomiaru składowe przemieszczenia wszystkich punktów kontrolowanych pokazane na rysunku 3a, to w wyniku otrzymalibyśmy przemieszczenie przekroju zilustrowane na rysunku 3b i odkształcenie zilustrowane na rysunku 3c.

Ze względu na znaczną wiotkość trzonu komina, która uwidoczniła się między innymi przez duże wygięcie górnej części przekroju, bardziej właściwe byłoby wykorzystanie do określenia przemieszczeń przekroju wyłącznie wyznaczonych przemieszczeń punktów u podstawy. W wyniku otrzymalibyśmy wówczas przemieszczenia przekroju uwidocznione na rysunku 3d oraz odkształcenia przekroju uwidocznione na rysunku 3e. Rezultaty przedstawione na rysunkach 3d, 3e są bardziej przekonujące od rezultatów przedstawionych na rysunkach 3b, 3c i w bardziej właściwy sposób pozwalają określić zależność między przemieszczeniami i odkształceniami a przyczynami ich wystąpienia. W rozpatrywanym wypadku główną przyczyną przemieszczeń jest ruch podłoża zaś przyczyny odkształceń uwiadaczających się na rysunku 3e w górnej części przekroju komina to parcie wiatru i jednostronne nagrzewanie.

Z podanej uprzednio zasady wynika, że do obliczenia parametrów prze-





Rys. 3

mieszceń badanego obiektu należy wykorzystywać wyznaczone przemieszczenia punktów kontrolowanych, zastabilizowanych na fundamentach i na monolitycznych częściach konstrukcji bezpośrednio graniczących z fundamentami. Dla wszystkich wyznaczonych składowych przemieszczeń takich punktów układamy równania odkształceń, a następnie uzyskany układ równań rozwiązujemy przy zachowaniu warunku (41).

Z warunku (41) wynika, że rozwiązanie układu równań odkształceń powinno nastąpić na znanej drodze, poprzez obliczenie na ich podstawie układu równań normalnych i rozwiązanie go.

Zauważmy, że wyznaczone z pomiaru przemieszczenia, a nawet poszczególne składowe przemieszczenia punktów kontrolowanych, mogą różnić się między sobą dokładnością. Jak już wcześniej wspomniałem (rozdział 3), miarą dokładności wyznaczenia składowej przemieszczenia punktu kontrolowanego jest błąd średni. Uwzględnienie różnic dokładności wyznaczenia poszczególnych składowych przemieszczeń przy rozwiązaniu układu równań odkształceń polegać będzie na uprzednim sprowadzeniu poszczególnych równań układu do równoważności dokładnościowej.

Jak wiadomo, polega to na podzieleniu każdego równania przez błąd średni wyznaczenia odpowiedniej składowej przemieszczenia. W rezultacie zamiast równań odkształceń typu (40) otrzymamy równania odkształceń sprowadzone do równoważności dokładnościowej:

$$\frac{1}{m_{dx_i}} dx'_o - \frac{z_i}{m_{dx_i}} U - \frac{y_i}{m_{dx_i}} \varepsilon_2 = \frac{dx_i}{m_{dx_i}} + \frac{v_{dx_i}}{m_{dx_i}}; \quad (42a)$$

$$\frac{1}{m_{dy_i}} dy'_o - \frac{z_i}{m_{dy_i}} V + \frac{x_i}{m_{dy_i}} \varepsilon_2 = \frac{dy_i}{m_{dy_i}} + \frac{v_{dy_i}}{m_{dy_i}}; \quad (42b)$$

$$\frac{1}{m_{dz_i}} dz'_o + \frac{x_i}{m_{dz_i}} U + \frac{y_i}{m_{dz_i}} V = \frac{dz_i}{m_{dz_i}} + \frac{v_{dz_i}}{m_{dz_i}}. \quad (42c)$$

Rozwiązanie układu równań odkształceń sprowadzonego do równoważności dokładnościowej poprzez obliczenie na ich podstawie układu równań normalnych i rozwiązanie go prowadzi do spełnienia warunku

$$\left[ \left( \frac{v_{dx}}{m_{dx}} \right)^2 + \left( \frac{v_{dy}}{m_{dy}} \right)^2 + \left( \frac{v_{dz}}{m_{dz}} \right)^2 \right] = \min. \quad (43)$$

Należy wspomnieć, że wyżej omówione postępowanie oparte jest na uproszczeniu pojęciowym, polegającym na traktowaniu wyznaczonych składowych przemieszczeń punktów kontrolowanych jako wielkości niezależnych, gdy tymczasem są one w rzeczywistości funkcjami wyrównanych wcześniej różnic obserwacji sieci kontrolnej. Całkowicie poprawne z teoretycznego punktu widzenia postępowanie wymagałoby wprowadzenia warunków wynikających z równań (36) do wyrównania różnic obserwacji

sieci kontrolnej, jednak przeciwko takiemu rozwiązaniu zagadnienia przemawiają względy praktyczne. Względy te to znaczne skomplikowanie równań powodujące znaczne zwiększenie nakładu prac obliczeniowych oraz trudność uwzględnienia zasady, że obliczenie parametrów przemieszczeń obiektu odbywać się powinno na podstawie wyznaczonych przemieszczeń części punktów kontrolowanych. Trzeba tu dodać, że stosownie do wyników obliczeń generalizacyjnych może się okazać niekiedy konieczne podjęcie decyzji o zmianie punktów kontrolowanych, których przemieszczenia zostają wykorzystane do obliczenia parametrów przemieszczeń obiektu. Może to nastąpić wówczas, gdy przemieszczenia punktu wykorzystanego do obliczenia parametrów przemieszczeń kształtują się wyraźnie pod dominującym wpływem odkształceń obiektu, a w nieznaczej tylko części pod wpływem jego przemieszczeń, co może wypaczyć rzeczywisty obraz przemieszczeń.

Biorąc pod uwagę wspomniane aspekty praktyczne można uznać zastosowane uproszczenie za usprawiedliwione.

W wyniku rozwiązania zrównoważonego dokładnościowo układu równań odkształceń typu (42) przy spełnieniu warunku (43) otrzymujemy najbardziej prawdopodobne wartości parametrów przemieszczeń, które podstawiamy do poszczególnych równań w celu obliczenia składowych przemieszczeń poszczególnych punktów pod wpływem przemieszczeń i odkształceń obiektu. Z kolei obliczamy wartość typowego błędu wyrażoną wzorem

$$M = \sqrt{\frac{\left[\left(\frac{v_{dx}}{m_{dx}}\right)^2 + \left(\frac{v_{dy}}{m_{dy}}\right)^2 + \left(\frac{v_{dz}}{m_{dz}}\right)^2\right]}{n-r}}, \quad (44)$$

gdzie:  $n$  — ilość równań odkształceń;  $r$  — ilość wyznaczonych parametrów przemieszczeń ( $n-r = n_n$  — ilość spostrzeżeń nadliczbowych).

Na dokładność wyznaczenia parametrów przemieszczeń ma wpływ osiągnięta wielkość błędu typowego spostrzeżenia  $M$ . Dlatego, jak już wspomniałem, do obliczenia parametrów przemieszczeń obiektu wykorzystujemy składowe przemieszczenia tej części punktów kontrolowanych, które znajdują się na stosunkowo sztywnej części obiektu, tak aby otrzymać możliwie jak najmniejsze wartości składowych przemieszczeń pod wpływem odkształceń. Osiągnięcia najmniejszej wartości błędu  $M$  możemy spodziewać się wówczas, gdy punkty wykorzystane do obliczenia parametrów przemieszczeń obiektu nie podlegają przemieszczeniom spowodowanym przez odkształcenia. Wówczas obliczone wielkości  $v_{dx}$ ,  $v_{dy}$ ,  $v_{dz}$  spowodowane są wyłącznie błędami wyznaczenia składowych  $\underline{dx}$ ,  $\underline{dy}$ ,  $\underline{dz}$ . Oczekiwana w takim wypadku wartość błędu  $M$  nie powinna różnić się

od jedności więcej niż o wpływ błędu średniego błędu średniego. W tej sytuacji możemy sformułować kryterium niestwierdzenia odkształceń obiektu w miejscach punktów kontrolowanych, których wyznaczone przemieszczenia wykorzystano do obliczenia parametrów przemieszczeń obiektu.

$$M \leq 1 + \frac{1}{\sqrt{2(n-r)}}. \quad (45)$$

Kryterium powyższe wynika z wzoru na błąd średni błędu średniego.

Po rozwiązaniu zrównoważonego dokładnościowo układu równań odkształceń przystępujemy do obliczenia błędów średnich wyznaczenia obliczonych parametrów przemieszczeń, posilując się przy tym obliczoną wielkością typowego błędu  $M$  oraz wartościami współczynników na przekątnej głównej w odwrotności tabeli współczynniskowej układu równań normalnych.

Mając obliczone wartości parametrów przemieszczeń obiektu, jak również błędy średnie wyznaczenia tych parametrów możemy ocenić, czy w wyniku dokonanych pomiarów i obliczeń stwierdziliśmy rzeczywiste wystąpienie przemieszczeń obiektu, czy też obliczone wartości parametrów spowodowane są tylko niedokładnością wyznaczenia i identyfikacji punktów stałych. Do tego celu będą służyć kryteria braku (niestwierdzenia) przemieszczeń, wyrażone wzorami:

$$dx'_o \leq k m_{dx'o}; \quad (46a)$$

$$dy'_o \leq k m_{dy'o}; \quad (46b)$$

$$dz'_o \leq k m_{dz'o}; \quad (46c)$$

$$U \leq k m_U; \quad (46d)$$

$$V \leq k m_V; \quad (46e)$$

$$\varepsilon_2 \leq k m_{\varepsilon_2}. \quad (46f)$$

Powstaje pytanie, w jaki sposób wykorzystać wyznaczone składowe przemieszczeń punktów kontrolowanych, które nie mogły być podstawą do obliczenia parametrów przemieszczeń badanego obiektu. Otóż dla wszystkich wyznaczonych składowych przemieszczeń tych punktów kontrolowanych układamy równania odkształceń typu (40), a następnie podstawiamy do nich obliczone uprzednio wartości parametrów przemieszczeń. W rezultacie możemy dla dowolnego punktu kontrolowanego obliczyć wielkości składowych  $dx'$ ,  $dy'$ ,  $dz'$  wynikające z przemieszczeń obiektu oraz wielkości składowych  $-v_{dx}$ ,  $-v_{dy}$ ,  $-v_{dz}$  wynikające w rozpatrywanym miejscu z odkształceń. Znając wielkości błędów średnich wyznaczenia składowych przemieszczeń możemy następnie obliczyć wartości czynników

$\frac{v_{dx}}{m_{dx}}, \frac{v_{dy}}{m_{dy}}, \frac{v_{dz}}{m_{dz}}$  dla wszystkich punktów kontrolowanych. W celu sprawdzenia

nia, czy uzyskane wielkości  $-v_{dx}$ ,  $-v_{dy}$ ,  $-v_{dz}$  wszystkich punktów kontrolowanych świadczą o rzeczywistym wystąpieniu odkształceń obiektu możemy obliczone czynniki wykorzystać do obliczenia z wzoru (44) wartości  $M$  (przy czym jako  $n$  przyjmujemy w tym wypadku ilość wszystkich wyznaczonych składowych przemieszczeń punktów kontrolowanych, zamiast ilości składowych wykorzystanych uprzednio do obliczenia parametrów przemieszczeń), a następnie zastosować kryterium wyrażone nierównością (45). Może się wówczas okazać, że kryterium to zostanie spełnione przez wszystkie punkty kontrolowane, co będziemy uważać za symptomy braku odkształceń obiektu (niestwierdzenia ich w wyniku pomiarów). W takim wypadku możliwe staje się ponowne obliczenie parametrów przemieszczeń w oparciu o wyznaczone składowe przemieszczenia wszystkich punktów kontrolowanych, co oczywiście zwiększy dokładność określenia tych parametrów.

Należy podkreślić, że obliczenie parametrów przemieszczeń obiektu w oparciu o wyznaczone składowe przemieszczenia wszystkich punktów kontrolowanych, nie poprzedzone tego rodzaju analizą, byłoby ryzykowne i mogłoby prowadzić do znacznego spaczenia rezultatów.

#### 4.3 Warunki wyznaczalności przemieszczeń obiektu

Jak wynika z punktu 4.1 określenie przemieszczeń ciała sztywnego wymaga wyznaczenia sześciu parametrów, to znaczy, że niezbędne jest wyznaczenie co najmniej sześciu składowych przemieszczeń punktów kontrolowanych. Jednak o wyznaczalności parametrów przemieszczeń decyduje nie tylko ilość wyznaczonych składowych lecz również rozmieszczenie punktów kontrolowanych i rodzaje wyznaczanych składowych.

Jak wiadomo, do wyznaczenia pozycji ciała sztywnego w przestrzeni niezbędne jest wyznaczenie pozycji trzech jego punktów materialnych, nie leżących na jednej prostej. Jeśli oznaczymy te punkty literami  $A$ ,  $B$ ,  $C$ , to w celu określenia zmiany położenia ciała powinniśmy wyznaczyć:

- trzy składowe przemieszczeń punktu  $A$  (całkowite przemieszczenie punktu  $A$  w przestrzeni),
- dwie składowe przemieszczenia punktu  $B$  w płaszczyźnie prostopadłej do kierunku  $AB$  (całkowite przemieszczenie punktu  $B$  w tej płaszczyźnie),
- jedną składową przemieszczenia punktu  $C$  w kierunku prostopadłym do płaszczyzny zawierającej punkty  $A$ ,  $B$ ,  $C$ .

W praktyce wyznaczamy składowe  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$  przemieszczeń punktów kontrolowanych w kierunkach zgodnych z kierunkami osi prostokątnego układu współrzędnych  $oxyz$ . Dlatego powyższe warunki wyznaczalności

mogą być spełnione tylko w szczególnym wypadku, gdy rozpatrywane trzy punkty znajdują się w płaszczyźnie równoległej do jednej z płaszczyzn rzutów, a jednocześnie dwa z tych punktów znajdują się na prostej równoległej do jednej z osi układu. Dodatkową przyczyną dla której w praktyce będziemy korzystali z inaczej sformułowanych warunków wyznaczalności jest fakt, że w wyniku pomiarów wyznaczamy zazwyczaj pionową składową przemieszczeń reperów kontrolowanych i poziome składowe przemieszczeń celowników kontrolowanych, przy czym repery i celowniki nie znajdują się w tych samych miejscach.

Biorąc pod uwagę te czynniki, oraz pamiętając, że zajmujemy się niewielkimi przemieszczeniami ciała, możemy sformułować następujące warunki wyznaczalności przemieszczeń ciała:

1. Składowe przemieszczeń wzdłuż jednej osi prostokątnego układu współrzędnych  $oxyz$  trzeba wyznaczyć na trzech punktach nie leżących na jednej prostej, ani nie leżących w płaszczyźnie równoległej do tej osi (w miarę możliwości należy dążyć do usytuowania ich w płaszczyźnie prostopadłej do tej osi oraz do wzajemnego rozmieszczenia w jednakowych dużych odległościach).

2. Składowe przemieszczeń wzdłuż drugiej osi prostokątnego układu współrzędnych  $oxyz$  trzeba wyznaczyć na dwu punktach nie leżących na prostej równoległej do tej osi ani na prostej równoległej do osi wspomnianej w warunku 1 (w miarę możliwości należy dążyć do usytuowania ich na prostej równoległej do trzeciej osi i do wzajemnego rozmieszczenia w dużej odległości).

3. Składową przemieszczenia wzdłuż trzeciej osi trzeba wyznaczyć na jednym, dowolnie usytuowanym punkcie.

Z uwagi na to, że punkty kontrolowane, przeznaczone do określania parametrów przemieszczeń przemieszczają się częściowo również pod wpływem odkształceń obiektu, z reguły dążymy do zwiększenia ich ilości ponad niezbędne minimum.

W praktyce bardzo często spotykamy się z ograniczeniem programu pomiarów do wyznaczania jednej lub dwu składowych przemieszczeń badanego obiektu w kierunkach przewidywanych największych przemieszczeń i odkształceń. Są to zazwyczaj kierunki, wzdłuż których działają na obiekt i podłoże dominujące siły, mające największe znaczenie dla trwałości i wytrzymałości oraz stanu bezpieczeństwa obiektu.

Dla większości obiektów dominujące znaczenie mają siły skierowane pionowo, wynikające z ciężaru własnego obiektu oraz obciążenia użytkowego ludźmi, składowanymi materiałami, maszynami itp. Tak więc najczęściej stosowanym rodzajem pomiarów są pomiary przemieszczeń i odkształceń pionowych, wykonywane metodą niwelacji geometrycznej. Niekiedy do sił pionowych przyłączają się siły poziome działające najczęściej



wzdłuż jednego kierunku. Następuje to na przykład przy parciu mas gruntu na mury oporowe, parciu wody na powierzchnię muru zapory itp.

Oczywiście ograniczenie programu pomiarów do wyznaczania jednej lub dwu składowych przemieszczeń punktów kontrolowanych uniemożliwia wyznaczanie wszystkich sześciu parametrów przemieszczeń. Tak więc w wypadku wyznaczania jedynie pionowej składowej przemieszczeń reperów kontrolowanych uzyskujemy możliwość określenia parametrów  $dz'_o$ ,  $U$ ,  $V$  przez rozwiązanie układu równań typu (40c) lub (42c). Wówczas rozmieszczenie reperów kontrolowanych, których wyznaczone przemieszczenia wykorzystujemy do obliczenia parametrów przemieszczeń powinno być dokonane z uwzględnieniem pierwszego warunku wyznaczalności. Przy takim ograniczeniu zakresu wyznażeń, ograniczeniu ulega również

wzór (44), w którym występują jedynie czynniki  $\frac{v_{dz}}{m_{dz}}$  zaś  $r = 3$ .

Ograniczenie programu do wyznaczania dwu składowych przemieszczeń punktów kontrolowanych prowadzi do obliczenia jedynie pięciu parametrów przemieszczeń. Rozmieszczenie punktów kontrolowanych, których wyznaczone składowe przemieszczenia wykorzystujemy do obliczenia parametrów przemieszczeń odbywać się powinno wówczas przy zachowaniu pierwszego i drugiego warunku wyznaczalności. Obliczenie parametrów przemieszczeń opiera się tu na rozwiązaniu układu równań odkształceń zestawionych dla dwu wyznaczonych składowych przemieszczeń punktów kontrolowanych.

Druga część generalizacji złożonej wykracza poza odróżnianie przemieszczeń punktów kontrolowanych spowodowanych przez przemieszczenia obiektu od przemieszczeń punktów spowodowanych przez odkształcenia obiektu. Ma ona na celu przybliżone zorientowanie się w charakterze przemieszczeń i odkształceń powierzchni obiektu na podstawie wyznaczonych przemieszczeń punktów kontrolowanych. Tak więc druga część generalizacji złożonej będzie polegać na wyinterpolowaniu wielkości przemieszczeń w nie kontrolowanych miejscach obiektu. Wynik tej części generalizacji ma znaczenie wyłącznie orientacyjne — ułatwiające zauważenie ewentualnych charakterystycznych tendencji w kształtowaniu się przemieszczeń i odkształceń obiektu lub jego poszczególnych fragmentów.

Do wykonania drugiej części generalizacji złożonej stosujemy głównie metody graficzne, których użycie zilustruję przy omawianiu zastosowań metody generalizacji złożonej.

W tym miejscu pragnę dodatkowo podkreślić, że ze względu na wyłącznie orientacyjne znaczenie interpolowania przemieszczeń między punktami kontrolowanymi, wszelkie obliczenia prowadzone w ramach interpretacji branżowych, mające na celu liczbowe określenie związków

między przemieszczeniami i odkształceniami a zjawiskami, które są ich przyczyną, należy prowadzić wyłącznie w oparciu o obliczone przemieszczenia punktów kontrolowanych.

#### 4.4. Zastosowania metody generalizacji złożonej

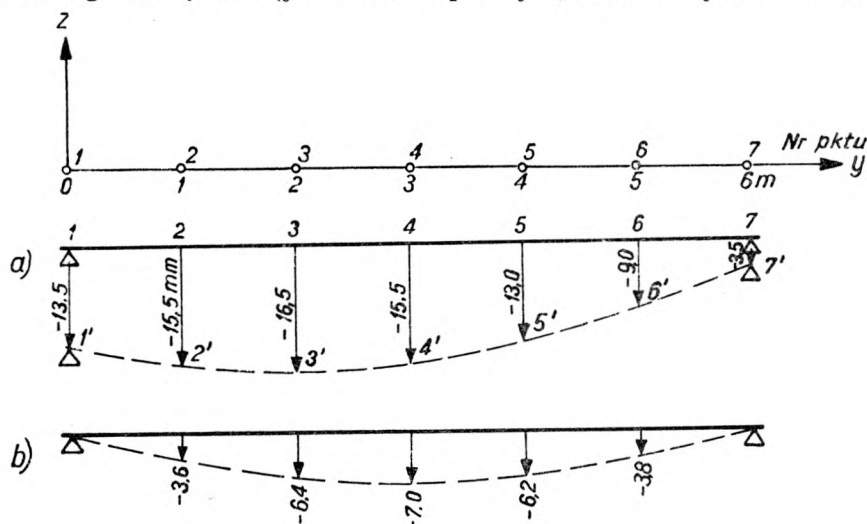
Metoda generalizacji złożonej wyznaczonych przemieszczeń punktów kontrolowanych powinna być stosowana we wszystkich wypadkach, gdy szczególnie ważna jest potrzeba odróżniania przemieszczeń obiektu od jego odkształceń. Należy podkreślić, że w wielu wypadkach metodę tą stosujemy nie do analizy geometrycznego stanu całego obiektu lecz do poszczególnych jego fragmentów, wyróżniających się pełnioną rolą.

Obecnie zilustruję kolejno niektóre przypadki zastosowania metody generalizacji złożonej, poczynając od najbardziej prostych.

##### 4.4.1. Ugięcia belki obustronnie podpartej

Zgodnie z rysunkiem 4 belka obustronnie podparta poddana została obciążeniu, które wywołało przemieszczenia pionowe punktów kontrolowanych 1—7 do nowych pozycji 1'—7'. Pionowe składowe tych przemieszczeń zostały wyznaczone w wyniku pomiarów.

Zauważmy, że przemieszczenia punktów 1, 7 znajdujących się nad podporami wywołane zostały przemieszczeniem podpór pod wpływem przyłożonego obciążenia (jak również pewnym, nieznacznym odkształce-



Rys. 4

niem liniowym przekroju belki, które tu pominiemy). W związku z tym wyznaczone przemieszczenia pionowe pozostałych punktów zostały w niewątpliwy sposób spowodowane częściowo przez przemieszczenia podpór. Jeśli pragniemy otrzymać wielkości przemieszczeń punktów 2—6 pod wyłącznym wpływem ugięcia belki, to należy wyznaczone przemieszczenia tych punktów zredukować o wpływ przemieszczeń podpór, do czego możemy wykorzystać wzory metody generalizacji złożonej. Biorąc pod uwagę fakt, że punkty kontrolowane zawarte są w jednej płaszczyźnie pionowej wykorzystamy tu wzór (40c) w skróconej formie  $dz'_o + y_i V = dz_i + v_{dz_i} = dz'_i$ . Obliczenie parametrów przemieszczeń dokonamy na podstawie wyznaczonych przemieszczeń punktów 1, 7

$$\text{punkt 1} \quad dz'_o + 0 \cdot V = -13,5;$$

$$\text{punkt 7} \quad dz'_o + 6 \cdot V = -3,5;$$

skąd:  $dz'_o = -13,5$ ;  $V = 1,67$ .

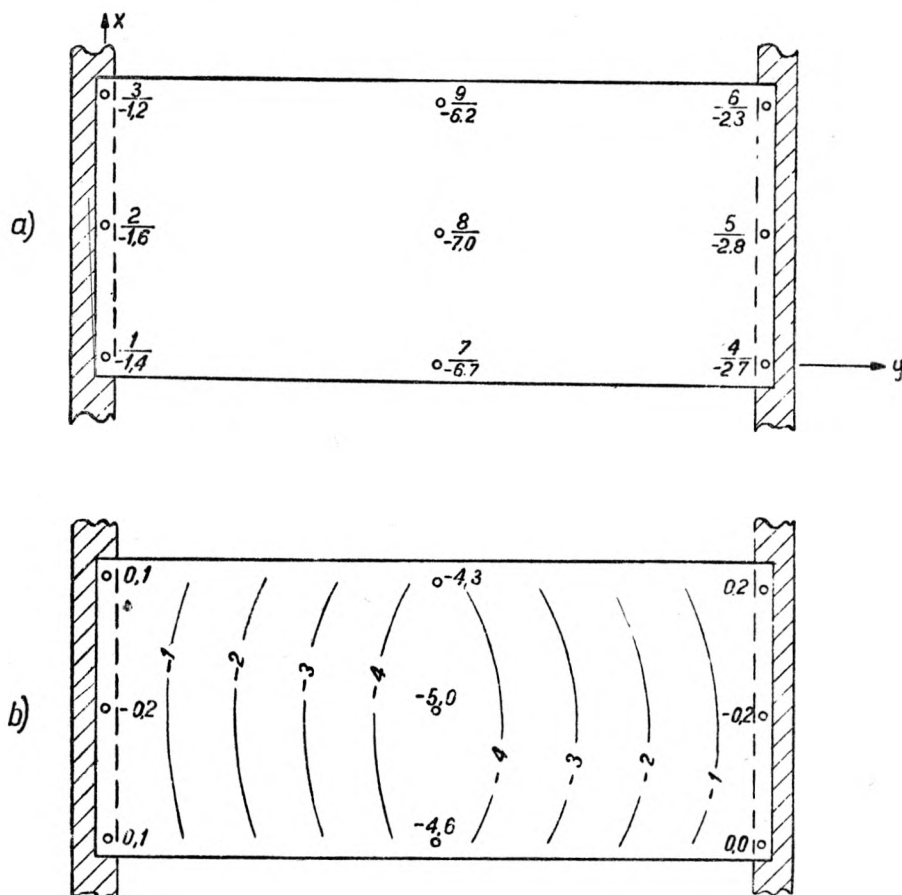
Dla pozostałych punktów układamy równania typu (40c) i podstawiamy do nich obliczone wyżej wartości parametrów przemieszczeń otrzymując wartości  $v_{dz}$ :

$$\begin{array}{ll} dz'_o + 1 \cdot V = -15,5 + v_{dz_2} & \text{skąd } v_{dz_2} = 3,6 \\ dz'_o + 2 \cdot V = -16,5 + v_{dz_3} & v_{dz_3} = 6,4 \\ dz'_o + 3 \cdot V = -15,5 + v_{dz_4} & v_{dz_4} = 7,0 \\ dz'_o + 4 \cdot V = -13,0 + v_{dz_5} & v_{dz_5} = 6,2 \\ dz'_o + 5 \cdot V = -9,0 + v_{dz_6} & v_{dz_6} = 3,8 \end{array}$$

Na rysunku 4a połączono linią krzywą końce wektorów wyznaczonych przemieszczeń otrzymując wykres przemieszczenia i ugięcia, natomiast na rysunku 4b połączono linią krzywą końce wektorów przemieszczeń  $-v_{dz}$  otrzymując wykres samego tylko ugięcia belki.

#### 4.4.2. Odkształcenia pionowe płyty podpartej w określonych miejscach

Zgodnie z rysunkiem 5 płyta została podparta na ścianach wzdłuż dwu równoległych krawędzi. Na płycie tej oznaczono repery kontrolowane 1—9, których pionowe przemieszczenia, wywołane obciążeniem płyty zostały wyznaczone z pomiarów i podane na rysunku 5a. Aby przekonać się o tym, jakim przemieszczeniom uległy punkty na płycie pod wyłącznym wpływem jej odkształceń, należy wyznaczone przemieszczenia zredukować o wpływ przemieszczeń podpór. W tym celu obliczamy wielkości parametrów przemieszczeń w oparciu o wyznaczone przemieszczenia punktów znajdujących się w strefie podparcia 1—6. Przebieg takiego obliczenia podany jest w tablicy 3.



Rys. 5

Obliczenie trzech parametrów przemieszczeń  $dz'_o$ ,  $U$ ,  $V$  nastąpiło w tabelicy 3 na podstawie rozwiązania sześciu równań odkształceń typu (40c), w związku z czym otrzymano drobne wielkości składowych przemieszczeń punktów 1—6, wywołane odkształceniami. Zredukowanie wyznaczonych przemieszczeń punktów 7—9 polega na ułożeniu dla nich równań odkształceń typu (40c) i podstawieniu do tych równań wartości parametrów przemieszczeń obliczonych w powyższej tabelicy. W rezultacie wykonania takich czynności otrzymano:  $v_{dz_7} = 4,6$ ,  $v_{dz_8} = 5,0$ ,  $v_{dz_9} = 4,3$ .

Obliczone wartości pionowych przemieszczeń  $-v_{dz}$  wynikających wyłącznie z odkształceń obciążonej płyty wykazano na rysunku 5b. Na rysunku tym pokazano również wynik drugiej części generalizacji złożonej w postaci izolinii odkształceń powierzchni płyty. Izolinie te zostały wyinterpolowane na podstawie wyznaczonych składowych  $-v_{dz}$ .

Tablica 3

| Lp | $dz'_o$ | $+ x_i U$ | $+ y_i V$ | $= \underline{dz_i}$ | $S$    | $v_{\underline{dz_i}}$ |
|----|---------|-----------|-----------|----------------------|--------|------------------------|
| 1  | 1,0     | 0,0       | 0,0       | -1,4                 | -0,4   | -0,1                   |
| 2  | 1,0     | 1,7       | 0,0       | -1,6                 | 1,1    | 0,2                    |
| 3  | 1,0     | 2,4       | 0,0       | -1,2                 | 2,2    | -0,1                   |
| 4  | 1,0     | 0,0       | 8,8       | -2,7                 | 7,1    | 0,0                    |
| 5  | 1,0     | 1,7       | 8,8       | -2,8                 | 8,7    | 0,2                    |
| 6  | 1,0     | 2,4       | 8,8       | -2,3                 | 9,9    | -0,2                   |
|    | 6,00    | 8,20      | 26,40     | -12,00               | 28,60  |                        |
|    |         | 17,30     | 36,08     | -15,88               | 45,70  |                        |
|    |         |           | 232,32    | -68,64               | 226,16 |                        |
|    | 2,45    | 3,35      | 10,78     | -4,90                | 11,67  |                        |
|    |         | 2,47      | -0,01     | 0,22                 | 2,66   |                        |
|    |         |           | 10,78     | -1,47                | 9,30   |                        |
|    | -1,51   | 0,09      | -0,14     |                      |        |                        |

#### 4.4.3. Odształcenia pionowe płyty podpartej na całej powierzchni

W wypadku, gdy płyta podparta jest na całej powierzchni (na przykład płyta fundamentowa) można wyznaczone przemieszczenia punktów kontrolowanych zredukować o wielkości wynikające z jej przemieszczeń, rozwiązując układ równań odształceń typu (40c) obejmujący wszystkie punkty kontrolowane. Rezultatem takiego postępowania są na przykład wyniki pokazane na rysunkach 1, 2 i omówione we wstępie do niniejszej pracy. W wyniku obliczenia otrzymano na podstawie wyznaczonych przemieszczeń wykazanych na rysunku 1a wartości parametrów:  $dz'_o =$

$$= -13,5 \text{ mm}, U = 1,5 \frac{\text{mm}}{\text{m}}, V = -1,3 \frac{\text{mm}}{\text{m}}.$$

Przypuśćmy, że interesuje nas wpływ przemieszczenia fundamentu na przemieszczenia dowolnego punktu  $P$ , znajdującego się na powierzchni konstrukcji wzniesionej na tym fundamencie. Przyjmiemy na przykład, że punkt  $P$  konstrukcji wzniesionej na rozpatrywanej płycie fundamentowej ma współrzędne  $x = 1,5 \text{ m}$ ,  $y = -1,0 \text{ m}$ ,  $z = 12,0 \text{ m}$  (w układzie współrzędnych pokazanym na rysunku 2, przy założeniu, że repery kontrolowane na płycie fundamentowej mają rzędną  $z = 0$ ). Dla punktu  $P$  zestawiamy równania typu (38) i podstawiamy do nich obliczone wartości parametrów przemieszczeń płyty. Biorąc pod uwagę, że wyznaczone zo-

stały jedynie trzy parametry  $dz'_c$ ,  $U$ ,  $V$ , otrzymamy równania w postaci:

$$-z U = dx' = -12,0 \cdot 1,5 = -18,0 \text{ mm},$$

$$-z V = dy' = -12,0(-1,3) = 15,6 \text{ mm},$$

$$dz'_o + x U + y V = dz' = -13,5 + 1,5 \cdot 1,5 - 1,0(-1,3) = -10,0 \text{ mm}.$$

#### 4.4.4. Wykorzystanie obliczonych przemieszczeń i odkształceń do regulacji ustawienia konstrukcji

Zagadnienie to zilustruję na prostym przykładzie ściany ustawionej na palach, pokazanej schematycznie na rysunku 6.

Przypuśćmy, że repery kontrolowane, zastabilizowane w ścianie nad miejscami podparcia na palach, wykazały osiadania pokazane na rysunku 6a. Według tego rysunku wykres osiadań poprowadzony przez końce wektorów osiadań jest wklęsły, co powoduje występowanie w dolnej części ściany poziomych naprężeń rozciągających, a w górnej części ściany (po nad osią obojętną) wywołuje naprężenia ściskające. Zlikwidowanie tych naprężeń wymaga doprowadzenia kształtu wykresu osiadań do linii prostej przez wyregulowanie wysokości podparcia ściany na poszczególnych palach. Na rysunku 6b pokazano wielkości, o które należałoby zmienić wysokości podparcia ściany na poszczególnych palach aby uzyskać taki efekt. Gdybyśmy jednocześnie pragnęli zlikwidować pochylenie podłużne ściany wywołane osiadaniami, to należałoby doprowadzić wykres osiadań do kształtu linii prostej usytuowanej poziomo, co pokazano na rysunku 6c. Aby uzyskać pierwotne położenie ściany, należałoby przy regulacji spowodować zmiany wysokości podparcia o wielkości podane na rysunku 6a (z odwrotnymi znakami).

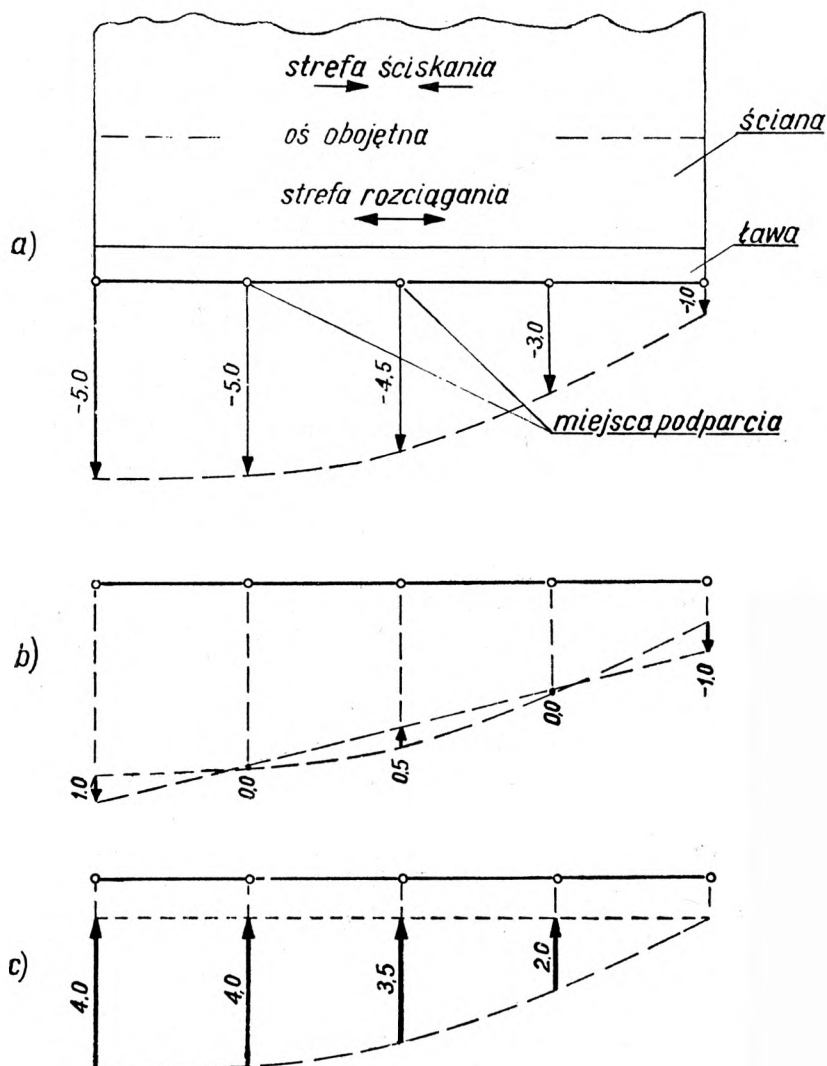
Jeśli przechyl podłużny i obniżenie powierzchni podparcia ściany nie przyjęły wartości nadmiernych z punktu widzenia prawidłowej pracy ściany i elementów konstrukcyjnych z nią związanych lub na niej opartych, to oczywiście najkorzystniejsze jest wyregulowanie wysokości podparcia na poszczególnych palach o wielkości wykazane na rysunku 6b (odkształcenia pionowe). Wynika to stąd, że są one znacznie mniejsze od wielkości z rysunków 6a, 6c, wobec czego w trakcie regulacji wystąpią stosunkowo mniejsze różnice naprężeń wywołanych nierównomierną pracą poszczególnych podnośników. Należy tu podkreślić, że w wielu wypadkach może się okazać niemożliwe jednoczesne regulowanie wysokości podparcia na wszystkich podporach, co dodatkowo wpływa na konieczność ograniczenia wielkości poprawek regulacyjnych do niezbędnego minimum.

Omawiane zagadnienie regulowania wysokości podparcia konstrukcji ma bezpośredni związek z wykorzystaniem metody generalizacji złożonej



z uwagi na to, że obliczane składowe przemieszczeń wywołanych przemieszczeniami bądź odkształceniami konstrukcji mogą być w zależności od celu regulacji wykorzystane wprost jako poprawki regulacyjne.

Charakterystycznym przykładem praktycznego zastosowania metody generalizacji złożonej do obliczania poprawek regulacyjnych jest przypadek opisany w pracy [11], dotyczący badania przemieszczeń i odkształceń powierzchni podparcia zbiorników gazu typu MAN.



Rys. 6

#### 4.4.5. Badanie przemieszczeń i odkształceń sekcji zapory wodnej

Betonową sekcję zapory możemy traktować jako blok, którego przemieszczenia i odkształcenia są spowodowane w głównej mierze przez:

- 1) osiadanie podłoża,
- 2) poziome parcie wody na odwodną ścianę sekcji,
- 3) wypieranie pod wpływem ciśnienia wody przedostającej się ze zbiornika do podłoża,
- 4) zmiany temperatury wody i powietrza, wywołujące zmiany temperatury betonu,
- 5) zmiany temperatury i naprężenia betonu pod wpływem procesów chemicznych, występujących w trakcie jego tężenia i zwiększającego się obciążenia.

Zgodnie z [13] badana sekcja zapory powinna być zaopatrzona w repery kontrolowane dla wyznaczania przemieszczeń pionowych  $\underline{dz}$ , celowniki do wyznaczania przemieszczeń poziomych  $\underline{dx}$ ,  $\underline{dy}$  metodą trygonometryczną oraz bolce stałej prostej dla wyznaczania przemieszczeń pionowych  $\underline{dz}$  i poziomych  $\underline{dx}$ . Ponadto sekcja może być zaopatrzona w wahadła dla wyznaczania poziomych składowych  $\underline{dx}$ ,  $\underline{dy}$  przemieszczeń punktów w galeriach na różnych poziomach w stosunku do punktu przytwierdzenia wahadła (w miarę możliwości identycznego z miejscem bolca stałej prostej). Wymagane według [13] miejsca punktów kontrolowanych oraz wyznaczane składowe przemieszczeń tych punktów pokazuje schematycznie rysunek 7.

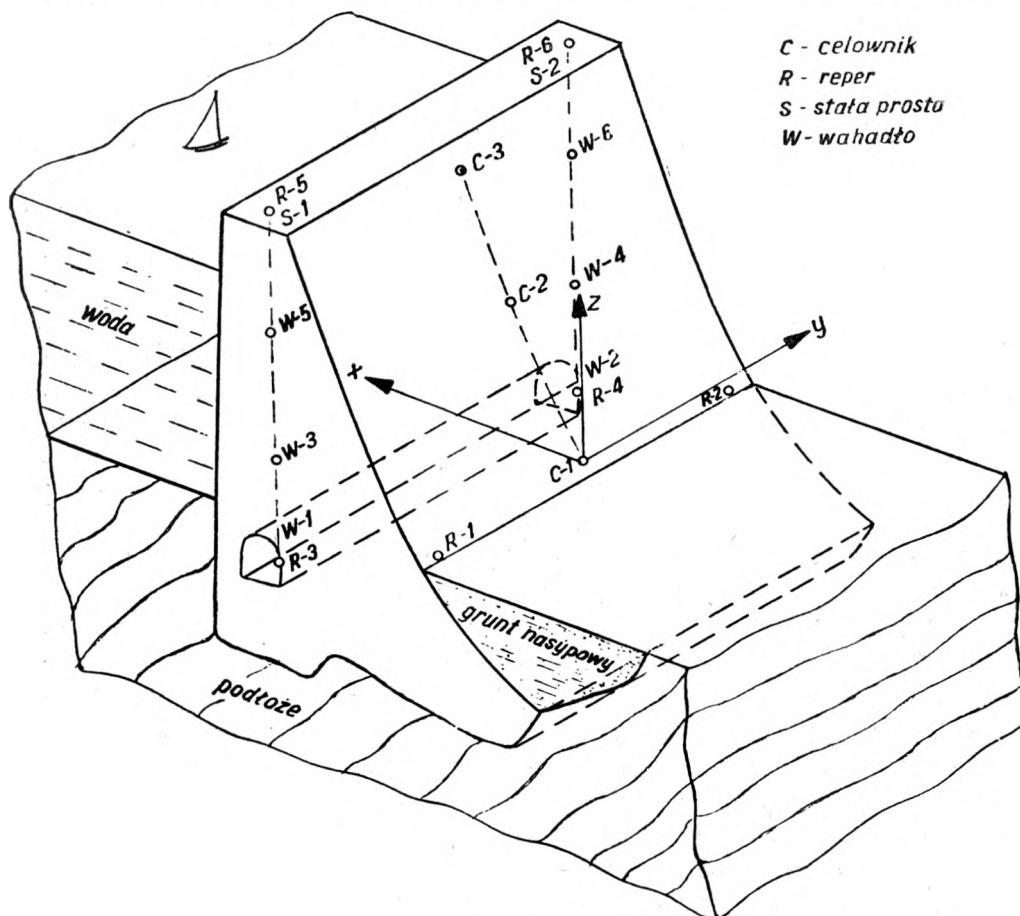
Przestrzegając sformułowaną w punkcie 4.2 zasadę doboru punktów kontrolowanych do określenia parametrów przemieszczeń przyjmujemy, że obliczenie parametrów przemieszczeń sekcji opierać się będzie wyłącznie na wyznaczonych składowych przemieszczeniach następujących punktów kontrolowanych:

- składowe  $\underline{dz}$  punktów  $R-1$ ,  $R-2$  na odpowiedzialnej stronie sekcji i punktów  $R-3$ ,  $R-4$  w najniższej galerii kontrolnej,
- składowe  $\underline{dx}$  punktów  $W-1$ ,  $W-2$  (stanowisk odczytowych wahadeł w najniższej galerii kontrolnej) i punktu  $C-1$  (najniżej położonego celownika na odpowiedzialnej stronie sekcji),
- składowa  $\underline{dy}$  punktu  $C-1$ .

Wymienione punkty są rozmieszczone na powierzchni najbardziej sztywnej części sekcji, znajdującej się w strefie stosunkowo małego wpływu zmian termicznych (z wyjątkiem pierwszego okresu podczas budowy i bezpośrednio po jej zakończeniu). Pewną wątpliwość może budzić wykorzystywanie przemieszczeń celownika  $C-1$ , który ze względów pomiarowych jest zazwyczaj umieszczany dosyć wysoko nad powierzchnią terenu. Dlatego korzystne byłoby wyznaczanie metodą trygonometryczną

przemieszczeń  $dx$ ,  $dy$  punktów  $S-1$ ,  $S-2$  i za ich pośrednictwem wyznaczanie przemieszczeń poziomych punktów  $W-1$ ,  $W-2$ , które zastępowałyby przemieszczenia punktu  $C-1$  (obecnie możliwe jest wyznaczanie wyłącznie składowych  $dx$  przemieszczeń punktów  $W-1$ ,  $W-2$  z uwagi na to, że takie składowe wyznacza się metodą stałej prostej dla punktów  $S-1$ ,  $S-2$  na koronie zapory).

Wyznaczone przemieszczenia punktów kontrolowanych  $R-5$ ,  $R-6$ ,  $C-2$ ,  $C-3$ ,  $W-3$ ,  $W-6$ ,  $S-1$ ,  $S-2$  powinny być wykorzystane wyłącznie do określe-



Rys. 7

nia przemieszczeń pod wpływem odkształceń sekcji z uwagi na to, że znajdują się one w strefie mogącej podlegać większym odkształceniom, aniżeli strefa uprzednio wymienionych punktów przeznaczonych do obliczania parametrów przemieszczeń.

Jak wynika z podanych w punkcie 4.3 warunków wyznaczalności prze-

mieszczeń, zalecany przez [13] stopień zaopatrzenia badanej sekcji w punkty kontrolowane zabezpiecza wyznaczalność przemieszczeń tej sekcji. Należy jednak zwrócić uwagę, że określona przez [13] ilość punktów kontrolowanych nadających się do wykorzystania przy obliczaniu parametrów przemieszczeń sekcji jest tylko o jeden większa od minimalnej, niezbędnej do rozwiązania tego zadania. W tej sytuacji praktycznie nie istnieje możliwość oceny, czy punkty wykorzystane do obliczenia parametrów przemieszczeń nie przemieszczają się również pod wpływem odkształceń sekcji, ani do oceny wielkości przemieszczeń punktów spowodowanych odkształceniami sekcji. Dlatego bardzo ważna jest możliwość sprawdzenia zgodności niektórych obliczonych parametrów przemieszczeń ze wskazaniami uzyskanymi za pomocą dodatkowych urządzeń pomiarowo-kontrolnych, wbudowanych w sekcję. Tak więc na przykład obliczone wartości parametrów  $U$ ,  $V$  i pochodnych od nich parametrów  $\varepsilon_1$ ,  $\varphi$  powinny być potwierdzone przez wyniki pomiarów klinometrem. Skręt poziomy sekcji określony przez wartość parametru  $\varepsilon_2$  może być w pewnym stopniu potwierdzony przez wyniki pomiaru ciągu poligonowego, założonego w najniższej galerii.

Należy wspomnieć, że zgodnie z [13] w zaporze betonowej, która może się składać z kilkunastu a nawet kilkudziesięciu sekcji, badanie przemieszczeń bezwzględnych w zilustrowanym zakresie dotyczy zasadniczo jedynie trzech badanych sekcji i ewentualnie dodatkowo sekcji, w które wbudowana jest hydroelektrownia. Pozostałe sekcje według [13] powinny być zaopatrzone jedynie w repery kontrolowane, urządzenia do pomiaru przemieszczeń względnych (klinometry i szczelinomierze) oraz ewentualnie w punkty ciągu poligonowego, w którym pomiarowi podlegają kąty lub strzałki. W tej sytuacji można wyznaczać dla wszystkich sekcji parametry  $dz'_o$ ,  $U$ ,  $V$  w oparciu o wyznaczone składowe  $dz$  przemieszczeń reperów kontrolowanych. Wyznaczenie pozostałych parametrów przemieszczeń dla sekcji w mniejszym stopniu zaopatrzonych w punkty kontrolowane wymaga odpowiedniego powiązania z sekcjami badanymi. W celu wyznaczenia dla tych wszystkich sekcji parametrów  $dx'_o$ ,  $\varepsilon_2$  niezbędne jest na każdej normalnej sekcji założenie w najniższej galerii dwu punktów w pobliżu obydwu dylatacji, które miałyby wyznaczone składowe  $dx$  przemieszczeń z ciągu poligonowego nawiązanego obustronnie do punktów na sekcjach badanych. Określenie parametru  $dy'_o$  można z pewnym przybliżeniem uzyskać przez sumowanie przemieszczeń względnych  $dy$  pomierzonych na poszczególnych dylatacjach szczelinomierzem, poczynając od jednej sekcji badanej (o wyznaczonych przemieszczeniach  $dy$  punktów w galerii w pobliżu dylatacji) i kończąc sumowanie na drugiej sekcji badanej. Sposób taki jest możliwy do zastosowania w wypadku, gdy wykorzystane szczelinomierze znajdują się w przybliżeniu na jednej prostej poziomej, a po-

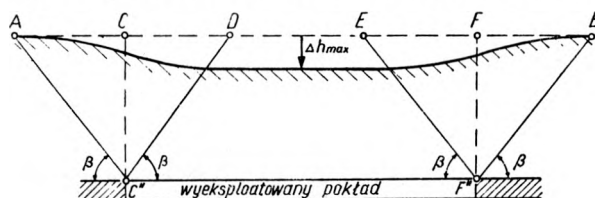
nadto sekcje nie są głęboko splekane. Trzeba wspomnieć, że podobny sposób wykorzystania przemieszczeń względnych wyznaczonych szczelinomierzami dla określenia składowych  $\underline{dx}$ ,  $\underline{dz}$  przemieszczeń bezwzględnych prowadzi do błędnych wyników, ze względu na skręty i pochylenia poszczególnych sekcji.

Przewidziany przez [13] stopień zaopatrzenia sekcji zapory w punkty kontrolowane daje możliwość stosowania zaledwie minimalnego programu badania przemieszczeń i odkształceń. Jeśli dodamy do tego, że w praktyce często względy konstrukcyjne lub terenowe uniemożliwiają zainstalowanie wszystkich zalecanych punktów i urządzeń oraz odpowiednie ich powiązanie pomiarami w jednolitą sieć, może się okazać, że niektóre sekcje nie będą miały dostatecznej ilości wyznaczonych składowych przemieszczeń punktów kontrolowanych do obliczenia parametrów przemieszczeń. Wówczas trudno jest mówić o wyznaczeniu przemieszczeń i odkształceń sekcji zapory, a jedynie możliwe jest stwierdzenie, że wyznaczone zostały poszczególne składowe przemieszczeń pewnej liczby punktów kontrolowanych, które są przydatne jedynie do bardzo przybliżonej oceny zachowania się sekcji. Takie wypadki niestety występują w praktyce bardzo często.

#### 4.4.6. Zastosowanie generalizacji złożonej przy badaniu przemieszczeń i odkształceń obiektów na powierzchni, znajdujących się w strefie wpływów eksploatacji górniczej

Na terenach eksploatacji górniczej podłoże obiektów powierzchniowych podlega odkształceniom wynikającym z jednej strony z obciążenia posadowionym obiektem, a z drugiej strony, z powstawania w miejscach wyrobisk pustej przestrzeni. Jeśli eksploatacja złoża odbywa się na odpowiednio dużej głębokości, to jej wpływ na zachowanie się powierzchni terenu (i podłoża na poziomie posadowienia fundamentów obiektów powierzchniowych) wyraża się w postaci powstawania tak zwanych niecek osiadań. Charakterystyczne strefy takiej niecki pokazane zostały schematycznie na przekroju pionowym (por. rysunek 8).

Zgodnie z tym rysunkiem, jeśli został wyeksploatowany pokład na



Rys. 8

odcinku  $C''F''$  to powierzchnia terenu powinna ulec obniżeniu maksymalnemu o wielkości  $\Delta h_{\max}$  na odcinku przekroju  $DE$  i stopniowo zmniejszającym się na zewnątrz obniżeniom na odcinkach  $DA$ , i  $EB$ . Obniżenia terenu na odcinkach  $CD$  i  $EF$  wywołują jego wklęsnięcie zaś na odcinkach  $AC$  i  $FB$  uwypuklenie.

Wklęsnięcie powierzchni wywołuje występowanie naprężeń ściskających w konstrukcji obiektów posadowionych w strefach  $CD$  i  $EF$  zaś uwypuklenie powierzchni wywołuje naprężenia rozciągające w konstrukcji obiektów posadowionych w strefach  $AC$  i  $FB$ . Zmiany kształtu powierzchni terenu (i podłoża na poziomie posadowienia fundamentów) wywołane są przez przemieszczenia elementarnych cząstek górotworu zalegającego nad wyrobiskiem i w strefach przyległych. Przemieszczenia te w poszczególnych strefach niecki osiadań i w różnych fazach jej powstawania w miarę przesuwania się frontu eksploatacji górniczej odchylają się różnie od kierunku pionowego, co wywołuje nie tylko pionowe, lecz i poziome odkształcenia podłoża obiektów powierzchniowych. W związku z tym poza zmianami wysokości, pochylenia i krzywizny powierzchni podparcia fundamentów występują również poziome składowe parcia gruntu na boczne powierzchnie fundamentów oraz poziome przemieszczenia podłoża tych fundamentów, co wywołuje poziome przemieszczanie fundamentów połączone z ich ściskaniem lub rozrywaniem.

Sytuacja pokazana schematycznie na rysunku 8 ilustruje w przybliżeniu stan po zakończeniu tworzenia się niecki osiadań — dotyczy tak zwanej niecki statycznej. W trakcie eksploatacji górniczej istniejący na powierzchni obiekt wchodzi kolejno w różne strefy tworzącej się niecki (tak zwanej niecki dynamicznej) i może w poszczególnych okresach czasu podlegać przemieszczeniom i odkształceniom wynikającym z równomiernego osiadania, osiadania połączonego z uwypuklaniem lub wklęsaniem i wynikającym stąd pochylaniem się terenu oraz ściskania lub rozciągania poziomego. Analiza stopnia bezpieczeństwa obiektów powierzchniowych, których fundamenty poddane są takim oddziaływaniom jest niezwykle skomplikowana.

Parametry niecki osiadań mogą być określone na drodze teoretycznej w oparciu o znajomość sposobu i rozmiaru eksploatacji górniczej, o wyniki pomiarów deformacji terenu (określenie wg [6]) oraz o rozmaite dane geologiczne i hydrogeologiczne dotyczące górotworu zalegającego ponad eksploatowanym wyrobiskiem i w jego otoczeniu. Również wpływy określonych wielkości parametrów niecki osiadań to jest wielkości osiadań, krzywizn (wklęsnięć i uwypukleń), pochyłeń oraz tak zwanych odkształceń właściwych podłoża (względnych wydłużeń lub skróceń poziomych odcinków między znakami geodezyjnymi, zastabilizowanymi w tym podłożu) na stan bezpieczeństwa obiektów powierzchniowych mogą być okre-



ślone na drodze teoretycznej. Jednak rzeczywiste wpływy eksploatacji górniczej mogą być określone dopiero w oparciu o badanie przemieszczeń i odkształceń samych obiektów. Ponieważ trudno jest objąć takimi badaniami wszystkie obiekty znajdujące się na powierzchni, należy dążyć do tego, aby wyniki pomiarów przemieszczeń punktów kontrolowanych na określonym obiekcie mogły być skonfrontowane z parametrami niecki osiadań terenu w miejscu rozpatrywanego obiektu. W tym celu niezbędne jest wyrażenie wyników pomiaru przemieszczeń znaków kontrolowanych na obiekcie w formie porównywalnej z parametrami niecki osiadań. Możliwość taką daje generalizacja złożona wyznaczonych przemieszczeń punktów kontrolowanych. Konfrontacja parametrów niecki osiadań terenu z wynikami generalizacji wyznaczonych przemieszczeń punktów na obiekcie może dotyczyć:

1) porównania obliczonych wielkości  $\varepsilon_1$ ,  $\varphi$  z wielkością i kierunkiem pochylenia niecki osiadań terenu w miejscu obiektu,

2) porównania wielkości  $dz'_0$  (obliczonej przy założeniu, że początek układu znajduje się na linii pionowej przechodzącej przez środek ciężkości obiektu) z wielkością obniżenia niecki osiadań w miejscu obiektu (oczywiście nie można oczekiwać pełnej zgodności tych wielkości z uwagi na to, że osiadanie  $dz'_0$  spowodowane jest łącznym wpływem obniżenia podłoża wskutek eksploatacji górniczej i obciążenia obiektem),

3) porównania kierunku i wielkości poziomego przemieszczenia obiektu charakteryzowanych w przybliżeniu przez parametry  $dx'_0$ ,  $dy'_0$  z kierunkami i wielkościami poziomych przemieszczeń znaków terenowych, służących do wyznaczania parametrów niecki osiadań,

4) porównania krzywizn wykresów pionowych odkształceń fundamentów z krzywizną niecki osiadań terenu (porównanie przekroji pionowych lub przebiegu izolinii odkształceń i przebiegu izolinii obniżenia niecki osiadań),

5) porównania rozkładu przemieszczeń poziomych  $-v_{dx}$ ,  $-v_{dy}$  pod wpływem odkształceń fundamentu z kierunkami i wielkościami odkształceń właściwych wyznaczonych w otoczeniu obiektu.

W niniejszym punkcie podaję jedynie ogólne uwagi o możliwym zakresie zastosowania generalizacji złożonej przy analizie stanu bezpieczeństwa obiektów na powierzchni, znajdujących się w strefie odkształceń podłoża pod wpływem eksploatacji górniczej, nie wdając się w zagadnienie szczegółowego określenia zakresu i metod postępowania. Zagadnienie to jest bardzo szerokie i wymaga odrębnego omówienia, być może wykraczającego poza problemy interpretacji wyników pomiarów i obejmującego ustalenia, dotyczące zakresu i trybu wykonywania pomiarów. Na potrzebę kontrolowania wyników pomiarów przemieszczeń i odkształceń obiektów na powierzchni z parametrami określającymi odkształcenia po-

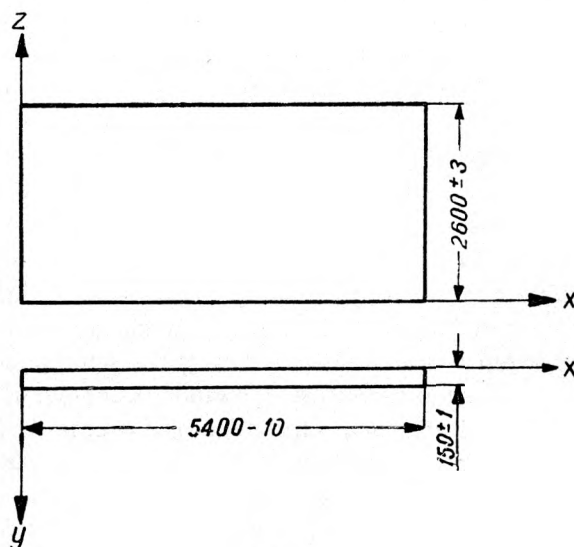
wierzchni terenu zwraca się szczególną uwagę w pracy [6]. W tej sytuacji przedstawione wyżej propozycje autora dotyczące wykorzystania do tych celów generalizacji złożonej, wychodzą na przeciw praktycznym potrzebom ochrony obiektów na terenach eksploatacji górniczej.

#### 4.5. Inne zastosowania metody generalizacji złożonej

Podane w punkcie 4.4 przykłady zastosowań metody generalizacji złożonej nie wyczerpują oczywiście zakresu możliwości jej użycia przy analizie wyznaczonych przemieszczeń. Jednak dokonany dobór przykładów pozwala zdać sobie sprawę z tych możliwości przy rozwiązywaniu dowolnego zadania z zakresu badania przemieszczeń i odkształceń.

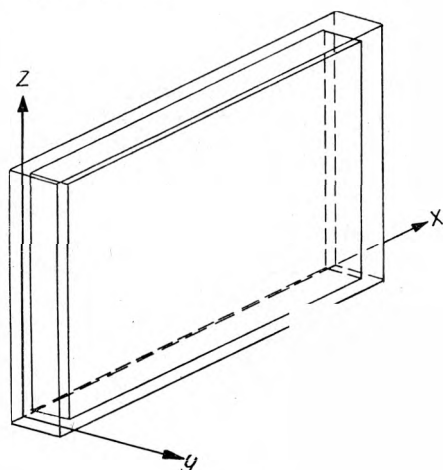
W niniejszym punkcie pragnę wskazać, że metoda ta nadaje się nie tylko do analizy wyznaczonych przemieszczeń lecz również do analizy różnic między projektowanym i rzeczywistym usytuowaniem zespołu punktów materialnych badanego ciała, to jest do określania odchyłek projektowych. Zagadnienie to zostało dosyć szeroko omówione w pracy [12]. W tym miejscu zatrzymamy się przy jednym, szczególnie ciekawym zastosowaniu metody generalizacji złożonej, dotyczącym wyznaczania odchyłek kształtu elementów prefabrykowanych w budownictwie.

Przypuśćmy, że mają być produkowane elementy prefabrykowane o kształcie płyt prostokątnych i wymiarach tolerowanych jak na rysunku 9.



Rys. 9

Podane na rysunku 9 wymiary i odchyłki dopuszczalne wskazują, że cała powierzchnia wyprodukowanego elementu prefabrykowanego powinna zawierać się w przestrzeni zawartej między powierzchniami prostopadłościanu o wymiarach minimalnych  $5390 \times 2597 \times 149$  i prostopadłościanu o wymiarach maksymalnych  $5400 \times 2603 \times 151$ , przy czym obydwa prostopadłościany są usytuowane względem siebie współosiowo, tak jak to pokazuje przykładowo rysunek 10.



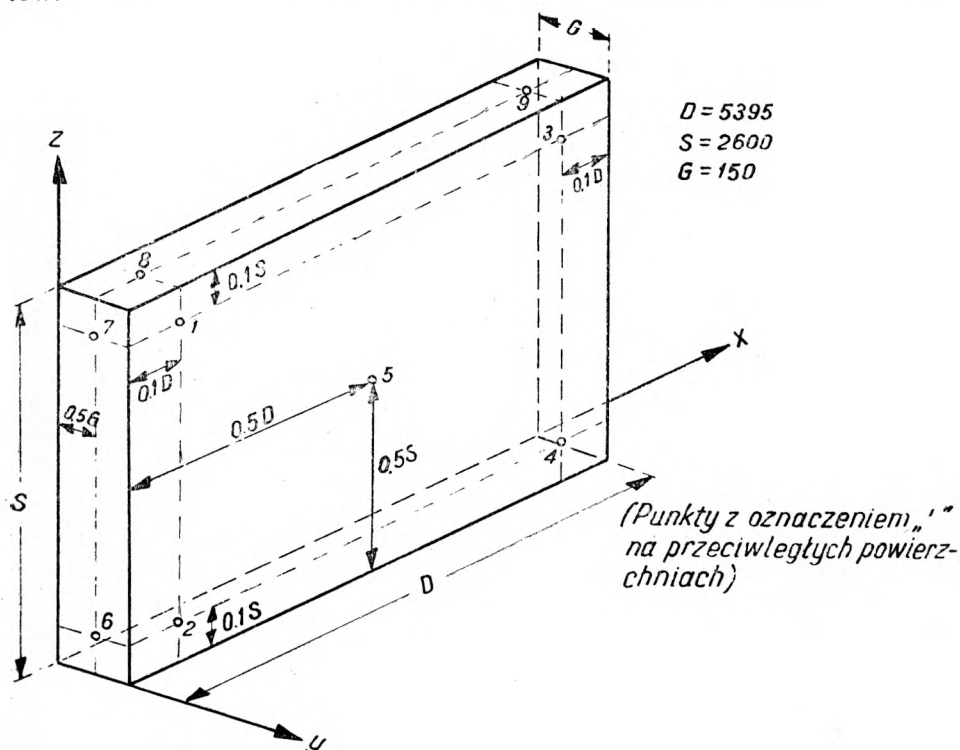
Rys. 10

Element można uważać za wykonany bezbłędnie, jeśli jego powierzchnia jest identyczna z powierzchnią prostopadłościanu o wymiarach średnich w stosunku do skrajnych, to jest wymiarów nominalnych  $5395 \times 2600 \times 150$ . Ponieważ jednak w rzeczywistości nie jest możliwe uzyskanie elementów o takich wymiarach i kształcie z uwagi na błędy produkcji, powstaje konieczność wyznaczania odchyłek kształtu i wymiarów wyprodukowanego elementu od kształtu i wymiarów nominalnych. Określenie odchyłek kształtu i wymiarów polegać będzie na wyznaczeniu odchyłek położenia zespołu wytypowanych punktów na powierzchni wykonanego elementu w stosunku do powierzchni projektowej. Przez odchyłkę położenia punktu rozumiemy odległość punktu od powierzchni projektowej, na której powinien się on znajdować.

Jako dopuszczalne wielkości odchyłek będziemy przyjmować odległości od odpowiednich powierzchni projektowych o wymiarach nominalnych do powierzchni elementów o wymiarach skrajnych (por. rysunek 10). Tak więc zgodnie z rysunkami 9, 10 dopuszczalne odchyłki położenia punktów znajdujących się na powierzchniach w przybliżeniu równoległych do płaszczyzny  $oyz$  będą równe  $\pm 2,5$  mm (0,25 tolerancji wymiaru skierowanego wzdłuż osi  $ox$ ), dopuszczalne odchyłki położenia punktów znaj-

dujących się na powierzchniach w przybliżeniu równoległych do płaszczyzny  $oxz$  będą równe  $\pm 0,5$  mm (0,25 tolerancji wymiaru skierowanego wzdłuż osi  $oy$ ) oraz dopuszczalne odchyłki położenia punktów znajdujących się na powierzchniach w przybliżeniu równoległych do płaszczyzny  $oxy$  będą równe  $\pm 1,5$  mm (0,25 tolerancji wymiaru skierowanego równoległe do osi  $oz$ ).

Na rysunku 11 pokazano przykładowo rozmieszczenie badanych punktów.



Rys. 11

Zgodnie z tym rysunkiem i podanymi wyżej wymiarami nominalnymi możemy wyrazić projektowe współrzędne oznaczonych punktów w projektowym układzie współrzędnych  $OXYZ$ , którego osie pokrywają się z trzema krawędziami elementu. Współrzędne takie podane są w kolumnach 2, 3, 4 tablicy 4.

Podkreślone w tablicy współrzędne podano z pełną dokładnością, ponieważ dotyczą one składowej prostopadłej do odpowiedniej płaszczyzny elementu projektowego, na której znajduje się rozpatrywany punkt. Pozostałe współrzędne będą pełnić w rachunku rolę współczynników przy niewiadomych i dlatego podane są z mniejszą dokładnością (do 1 cm).

Na powierzchniach wykonanego i dostarczonego do badań elementu wytyczamy i oznaczamy z błędem granicznym 1 cm pozycje punktów kontrolowanych zgodnie z wymiarami podanymi na rysunku 11. Następnie wyznaczamy w prostokątnym układzie współrzędne  $oxyz$  w przybliżeniu równoległym do układu projektowego  $OXYZ$  te współrzędne oznaczonych punktów, które odpowiadają podkreślonym w tablicy 4 współrzędnym projektowym. Wyznaczone z pomiarów współrzędne punktów oznaczonych na powierzchni wykonanego elementu podano w kolumnach 5, 6, 7 tablicy 4. W kolumnie 8 zawarte są różnice między wyznaczonymi z pomiaru, a projektowymi współrzędnymi oznaczonych punktów. Różnice te są obciążone wzajemnym przesunięciem początków układów współrzędnych, nierównoległością osi tych układów oraz interesującymi nas odchyłkami położenia punktów oznaczonych na powierzchniach badanego elementu. W celu określenia odchyłek położenia oznaczonych punktów redukujemy w pierwszym rzędzie uzyskane różnice współrzędnych odejmując na przykład od wszystkich różnic  $y - Y$  różnicę otrzymaną na punkcie nr 1, od wszystkich różnic  $x - X$  różnicę otrzymaną na punkcie nr 6 oraz od wszystkich różnic  $z - Z$  różnicę otrzymaną na punkcie nr 8. W rezultacie otrzymujemy zredukowane różnice, które wykazano w kolumnie 9 tablicy 4. Zredukowane tak różnice współrzędnych są w dalszym ciągu obciążone wpływem przesunięcia początków układów współrzędnych (jakkolwiek w znacznie mniejszym stopniu) oraz nierównoległością osi układów. Usunięcie tych wpływów jest możliwe przy zastosowaniu metody generalizacji złożonej odchyłek, to jest rozwiązaniu układu równań typu (40) dotyczącego zespołu oznaczonych punktów. Układ będzie obejmował równania odpowiadające wyznaczonym składowym różnic współrzędnych (wyrazami wolnymi poszczególnych równań będą różnice współrzędnych wykazane w kolumnie 9 tablicy 4).

Rozwiązanie takiego układu (zawartego w kolumnach 10÷16 tablicy 4) doprowadziło do obliczenia parametrów  $dx'_o$ ,  $dy'_o$ ,  $dz'_o$ ,  $U$ ,  $V$ ,  $\varepsilon_2$ , które w rozpatrywanym wypadku określają wielkości przesunięć początków układów współrzędnych oraz skręty tych układów względem siebie. Wielkości te nie mają dla nas żadnego innego znaczenia, jak tylko znaczenie elementów służących do dokonania redukcji różnic współrzędnych z kolumny 9, o wpływy różnic położenia układów współrzędnych. Podstawiając obliczone wielkości tych parametrów do poszczególnych równań otrzymamy wartości  $-v_{dx}$ ,  $-v_{dy}$ ,  $-v_{dz}$ , które w rozpatrywanym zagadnieniu będą równoznaczne z wyznaczonymi wielkościami odchyłek położenia oznaczonych punktów względem powierzchni elementu o wymiarach projektowych, dopasowanego w maksymalnym stopniu do zespołu oznaczonych punktów.

Wyznaczone w ten sposób odchyłki położenia punktów oznaczonych

na powierzchniach badanych elementów pozwalają na określenie różnych charakterystycznych zniekształceń wykonanego elementu jak: zwichrowania powierzchni, skrócenia linii przekrojów i inne pochodne zniekształcenia, mające wpływ na przydatność elementu do montażu. Odchyłki podanych wymiarów nominalnych można wyznaczyć wprost jako różnice odchyłek położenia punktów o tych samych numerach na przeciwległych powierzchniach elementu.

Aktualnie prowadzone badania dokładności produkcji elementów prefabrykowanych w budownictwie ograniczają się do sprawdzania wymiarów długości, szerokości i grubości elementów w oznaczonych przekrojach. Naturalnie taki zakres badań uniemożliwia określenie różnego rodzaju odchyłek kształtu elementów, z których najbardziej szkodliwe dla możliwości montażu to odchyłki od prostopadłości długich krawędzi oraz zwichrowania powierzchni.

Należy spodziewać się, że w niedalekiej przyszłości dążenie do zwiększenia dokładności montażu budynków (a przynajmniej utrzymania dokładności obecnie wymaganej i nagminnie nie dotrzymywanej) spowoduje zdecydowaną zmianę charakteru prefabrykacji i przedstawienie się na produkcję bardzo dokładnych elementów, zaopatrzonych w urządzenia do wzajemnego ich centrowania przy montażu. Szczególnie istotne będzie wówczas zachowanie wysokich dokładności wzajemnego rozmieszczenia elementów centrujących. Określanie odchyłek wzajemnego usytuowania takich urządzeń w każdym elemencie będzie wymagało traktowania wyznaczeń jako przestrzennych, do czego niezbędne będzie stosowanie metody rachunkowej pozwalającej na dokonanie przestrzennej transformacji układu terenowego do układu projektowego. Jak łatwo zauważyć, możliwości takie daje omówiona wyżej metoda generalizacji złożonej w odniesieniu do układów nieznacznie w stosunku do siebie skręconych.

#### L I T E R A T U R A

- [1] *Ciesielski R.*: Uwagi o przyczynach odkształceń budowli Przegląd Geodezyjny nr 8, Warszawa 1966.
- [2] *Gaździcki J., Janusz W.*: Próby wykorzystania elektronicznej maszyny cyfrowej UMC-1 do rachunkowego opracowania wyników pomiaru odkształceń budowli hydrotechnicznych. Prace IGW t. II, zeszyt 3, 1964.
- [3] *Hausbrandt St.*: Wyrównanie sieci trygonometrycznych z odrzuceniem założenia bezbłędności punktów nawiązania. Geodezja i Kartografia, t. III zeszyt 1, 1954.
- [4] *Hermanowski A.*: Przesunięcia pionowe reperów lokalnych powierzchniowych sieci niwelacji precyzyjnej wyznaczane na podstawie pomiarów okresowych. Zeszyty naukowe Politechniki Warszawskiej. Geodezja nr 21, 1967.
- [5] *Lazzarini T.*: Geodezyjne pomiary odkształceń i ich zastosowanie w budownictwie. PPWK, Warszawa 1961.



- [6] *Szpetkowski St.*: Pomiary deformacji na terenach eksploatacji górniczej. Wyd. Śląsk, Katowice 1968.
- [7] *Wyrzykowski T.*: Zastosowanie niwelacji precyzyjnej do wyznaczania współczesnych pionowych ruchów skorupy ziemskiej i wpływ tych ruchów na wyniki i wyznaczane błędy niwelacji. *Prace IGiK t. XII, zeszyt 1(25)*, 1965.
- [8] *Janusz W.*: Sposoby obliczania poziomych przemieszczeń punktów sieci geodezyjnych w zależności od rodzaju dokonywanych okresowo obserwacji. *Przegląd Geodezyjny nr 2*, 1964.
- [9] *Janusz W.*: Zagadnienie automatycznego wyznaczania odkształceń budowli przy wykorzystaniu modelu konstrukcji geodezyjnej w postaci stałej instalacji zespołu urządzeń pomiarowych. *Prace IGiK t. XI, zeszyt 2(24)*, 1964.
- [10] *Janusz W.*: Usprawnienie obliczania przesunięć punktów w kontrolnych sieciach geodezyjnych dla pomiarów odkształceń. *Prace IGiK, t. XIV, zeszyt 1(31)*, 1967.
- [11] *Janusz W.*: Wstęp do generalizacji wyników pomiarów odchylek projektowych i odkształceń urządzeń technicznych. *Prace IGiK, t. XV, zeszyt 2(35)*, 1968.
- [12] *Janusz W.*: Metoda generalizacji złożonej wyników pomiarów przemieszczeń i odchylek usytuowania punktów. *Prace IGiK, t. XV, zeszyt 3(36)*, 1968.
- [13] Centralny Urząd Gospodarki Wodnej. Tymczasowe wskazówki projektowania wyposażenia budowli piętrzących i budowli wodnych z nimi związanych w urządzenia kontrolno-pomiarowe.

*Recenzował: prof. dr Tadeusz Lazzarini*

ВОЙЦЕХ ЯНУШ

## ГЕОДЕЗИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

### Резюме

Определение деформаций и перемещений строительного объекта базируется на результатах геодезических измерений перемещений комплекта проверяемых точек, закрепленных на поверхности объекта.

Результаты геодезических измерений перемещений должны быть анализированы из точки зрения:

1. Технического значения результатов измерений и вычислений.
2. Геометрического смысла определенных перемещений контрольных точек.
3. Зависимостей между определенными перемещениями и деформациями и явлениями которые их вызывают.

Анализ касающийся технического значения и геометрического смысла результатов измерений называется геодезической интерпретацией результатов измерений перемещений. Анализ касающийся зависимостей между определенными перемещениями и явлениями, которые их вызывают называется отраслевой интерпретацией. Геодезическую интерпретацию выполняет геодезическим составом с целью обеспечения соответствующего уровня получаемых результатов а также облегчения специалистам других отраслей осознание геометрического смысла этих результатов. Отраслевую интерпретацию выполняют специалисты разных технических отраслей в зависимости от того какие явления и каких они касаются частей объекта (или основания) вызвали возникновение перемещений и деформаций.

Геодезическая интерпретация касающаяся технического значения результатов измерений и вычислений имеет целью:

1. Недопустить получению слишком больших ошибок измерений.
2. Вычисление перемещений проверяемых точек по отношению к пунктам сети, которые сохранили постоянно положение.

Особо важным вопросом, который требует анализа, является правильное отождествление постоянных точек на основании результатов произведенных измерений геодезической контрольной сети. В настоящей работе рассматриваются применяемые методы отождествления а также тщательно объясняется геометрический смысл этих методов. Из этих объяснений возникают веские выводы, касающиеся проектирования разных видов наблюдений контрольных сетей и зависимостей между видами применяемых наблюдений и степенью уверенности правильного отождествления постоянных точек.

Геодезическая интерпретация, касающаяся геометрического смысла определенных перемещений проверяемых точек имеет целью выяснить характер пове-

дения исследуемого объекта в целом. С этой целью является необходимым отличать перемещение объекта, как твердого тела от деформации объекта. Поскольку результаты геодезических измерений касаются перемещений отдельных проверяемых точек, поэтому геодезическая интерпретация должна вести к выделению в каждой проверяемой точке этой части перемещения которую вызывает перемещение целого объекта от этой части перемещения, которую вызывает деформация объекта. Этой цели служат формулы метода составной комплексной генерализации проводимые вместе с расбором в настоящей работе.

Выделение частей перемещения точек, вызванных перемещением объекта от частей перемещения точек вызванных деформациями объекта является чрезвычайно существенным для правильного выполнения отраслевой интерпретации. В заключительной части работы проиллюстрировано этот тезис рядом выбранных примеров применения метода составной (комплексной) генерализации.

WOJCIECH JANUSZ

## GEODETIC INTERPRETATION OF RESULTS OF SURVEYS OF DISPLACEMENTS

### Summary

The determination of deformations and displacements suffered by structures is based on the results obtained from geodetic surveys of the displacements of a system of control points stabilized on the surface of the given structure.

This sort of results of geodetic surveys of displacements should be analyzed from the viewpoint of:

1. the technical value of the results of both surveys and calculations,
2. the geometric importance of the determined displacements of control points,
3. the interdependence between the determined displacements and deformations, and the phenomena which have caused them.

The analysis considering the technical value and the geometric importance of the results of the surveys made, is called the geodetic interpretation of the results of surveys of displacements. The analysis of the interdependence between the determined displacements and of the phenomena causing these displacements is called the scientific-branch interpretation. The geodetic interpretation is the job of the geodetic personnel; its purpose is to attain a suitably high value of the results obtained, and to enable specialists of other branches of science to comprehend more easily the geometric importance of the results achieved. The branch interpretation is the task allotted to specialists from a variety of technical branches, dependent on the kind of phenomena this interpretation refers to, and the type of elements of the structure or its substratum which might have been responsible for the displacements and deformations which have taken place.

The purpose of the geodetic interpretation of the technical value obtained from the results of surveys and calculations is:

1. to preclude excessive errors in the surveys made, and
2. to calculate the displacements of the control points with regard to those points of the network which have remained undisturbed.

A particularly important matter to be investigated carefully is the correct identification of the fixed points, on the basis of the results obtained from the geodetic survey of the control network. The present paper discusses the identification methods to be applied and stresses in detail the geometric importance of these methods. From these explanations valuable conclusions can be drawn how to contrive a variety of observations in control networks, as well as inferences on the interrelation between the kinds of observations applied and the degree how far the fixed points have been identified correctly.

Tablica 4

| Nrp. | X            | Y            | Z            | x     | y     | z     | dl    | dl <sub>r</sub> | dx' <sub>o</sub> | dy' <sub>o</sub> | dz' <sub>o</sub> | U        | V         | ε <sub>2</sub> | 10 dl <sub>r</sub> | S         | 10v     | v       | v <sub>dop</sub> |
|------|--------------|--------------|--------------|-------|-------|-------|-------|-----------------|------------------|------------------|------------------|----------|-----------|----------------|--------------------|-----------|---------|---------|------------------|
| 1    | 2            | 3            | 4            | 5     | 6     | 7     | 8     | 9               | 10               | 11               | 12               | 13       | 14        | 15             | 16                 | 17        | 18      | 19      | 20               |
| 1    | 0,54         | <b>0,150</b> | 2,34         |       | 0,384 |       | 0,234 | 0,000           |                  | 1,00             |                  |          | − 2,34    | 0,54           | 0,00               | − 0,80    | − 0,042 | − 0,004 | ± 0,0005         |
| 2    | 0,54         | <b>0,150</b> | 0,26         |       | 0,387 |       | 0,237 | 0,003           |                  | 1,00             |                  |          | − 0,26    | 0,54           | 0,03               | 1,31      | − 0,062 | − 0,006 | „                |
| 3    | 4,86         | <b>0,150</b> | 2,34         |       | 0,393 |       | 0,243 | 0,009           |                  | 1,00             |                  |          | − 2,34    | 4,86           | 0,09               | 3,61      | − 0,052 | − 0,005 | „                |
| 4    | 4,86         | <b>0,150</b> | 0,26         |       | 0,394 |       | 0,244 | 0,010           |                  | 1,00             |                  |          | − 0,26    | 4,86           | 0,10               | 5,70      | − 0,052 | − 0,005 | „                |
| 5    | 2,70         | <b>0,150</b> | 1,30         |       | 0,376 |       | 0,226 | − 0,008         |                  | 1,00             |                  |          | − 1,30    | 2,70           | − 0,08             | 2,32      | 0,083   | 0,008   | „                |
| 1'   | 0,54         | <b>0,000</b> | 2,34         |       | 0,230 |       | 0,230 | − 0,004         |                  | 1,00             |                  |          | − 2,34    | 0,54           | − 0,04             | − 0,84    | − 0,002 | 0,000   | „                |
| 2'   | 0,54         | <b>0,000</b> | 0,26         |       | 0,231 |       | 0,231 | − 0,003         |                  | 1,00             |                  |          | − 0,26    | 0,54           | − 0,03             | 1,25      | − 0,002 | 0,000   | „                |
| 3'   | 4,86         | <b>0,000</b> | 2,34         |       | 0,239 |       | 0,239 | 0,005           |                  | 1,00             |                  |          | − 2,34    | 4,86           | 0,05               | 3,57      | − 0,012 | − 0,001 | „                |
| 4'   | 4,86         | <b>0,000</b> | 0,26         |       | 0,238 |       | 0,238 | 0,004           |                  | 1,00             |                  |          | − 0,26    | 4,86           | 0,04               | 5,64      | 0,008   | 0,001   | „                |
| 5'   | 2,70         | <b>0,000</b> | 1,30         |       | 0,221 |       | 0,221 | − 0,013         |                  | 1,00             |                  |          | − 1,30    | 2,70           | − 0,13             | 2,27      | 0,133   | 0,013   | „                |
| 6    | <b>0,000</b> | 0,08         | 0,26         | 0,098 |       |       | 0,098 | 0,000           | 1,00             |                  |                  | − 0,26   |           | − 0,08         | 0,00               | 0,66      | 0,024   | 0,002   | ± 0,0025         |
| 7    | <b>0,000</b> | 0,08         | 2,34         | 0,105 |       |       | 0,105 | 0,007           | 1,00             |                  |                  | − 2,34   |           | − 0,08         | 0,07               | − 1,35    | 0,001   | 0,030   | „                |
| 6'   | <b>5,395</b> | 0,08         | 0,26         | 5,497 |       |       | 0,102 | 0,004           | 1,00             |                  |                  | − 0,26   |           | − 0,08         | 0,04               | 0,70      | − 0,016 | − 0,002 | „                |
| 7'   | <b>5,395</b> | 0,08         | 2,34         | 5,501 |       |       | 0,106 | 0,008           | 1,00             |                  |                  | − 2,34   |           | − 0,08         | 0,08               | − 1,34    | − 0,009 | − 0,001 | „                |
| 8    | 0,54         | 0,08         | <b>2,600</b> |       |       | 2,640 | 0,040 | 0,000           |                  |                  | 1,00             | 0,54     | 0,08      |                | 0,00               | 1,62      | − 0,018 | − 0,002 | ± 0,0015         |
| 9    | 4,86         | 0,08         | <b>2,600</b> |       |       | 2,629 | 0,029 | − 0,011         |                  |                  | 1,00             | 4,86     | 0,08      |                | − 0,11             | 5,83      | − 0,007 | − 0,001 | „                |
| 8'   | 0,54         | 0,08         | <b>0,000</b> |       |       | 0,036 | 0,036 | − 0,004         |                  |                  | 1,00             | 0,54     | 0,08      |                | − 0,04             | 1,58      | 0,022   | 0,002   | „                |
| 9'   | 4,86         | 0,08         | <b>0,000</b> |       |       | 0,028 | 0,028 | − 0,012         |                  |                  | 1,00             | 4,86     | 0,08      |                | − 0,12             | 5,82      | 0,003   | 0,000   | „                |
|      |              |              |              |       |       |       |       |                 | 4,0000           | 10,0000          | 4,0000           | − 5,2000 | − 13,0000 | − 0,3200       | 0,1900             | − 1,3300  |         |         |                  |
|      |              |              |              |       |       |       |       |                 |                  |                  |                  | 10,8000  | 0,3200    | 27,0000        | 0,0300             | 24,0300   |         |         |                  |
|      |              |              |              |       |       |       |       |                 |                  |                  |                  | 58,9088  | 0,8640    |                | − 0,2700           | 14,8500   |         |         |                  |
|      |              |              |              |       |       |       |       |                 |                  |                  |                  |          | 0,4160    | − 35,1000      | − 1,5008           | 64,2880   |         |         |                  |
|      |              |              |              |       |       |       |       |                 |                  |                  |                  |          | 25,5784   | − 0,0190       | − 0,0190           | − 21,3566 |         |         |                  |
|      |              |              |              |       |       |       |       |                 |                  |                  |                  |          |           | 110,2504       | 0,7570             | 103,0034  |         |         |                  |
|      |              |              |              |       |       |       |       |                 | 2,0000           | 3,1623           | 2,0000           | − 2,6000 | − 4,1109  | − 0,1600       | 0,0950             | − 0,6650  |         |         |                  |
|      |              |              |              |       |       |       |       |                 |                  |                  |                  | 5,4000   | 0,1600    | 8,5381         | 0,0095             | 7,5989    |         |         |                  |
|      |              |              |              |       |       |       |       |                 |                  |                  |                  | 4,7947   |           | − 0,1350       | − 0,1350           | 7,4250    |         |         |                  |
|      |              |              |              |       |       |       |       |                 |                  |                  |                  |          | 2,9416    | − 0,1095       | 0,0142             | 4,6852    |         |         |                  |
|      |              |              |              |       |       |       |       |                 |                  |                  |                  |          |           | − 0,0002       | 0,0142             | 2,9556    |         |         |                  |
|      |              |              |              |       |       |       |       |                 |                  |                  |                  |          |           | 6,1095         | 0,1131             | 6,2225    |         |         |                  |
|      |              |              |              |       |       |       |       |                 | 0,0193           | − 0,0407         | − 0,0063         | − 0,0228 | 0,0048    | 0,0185         |                    |           |         |         |                  |

The object of the geodetic interpretation of the geometric importance of the determined dislocation of control points is to throw light on the character of how the structure under observation has been behaving. In order to do this, displacements of the investigated structure — considered as a rigid body — must be distinguished from its deformations. Inasmuch as the results of the geodetic surveys refer to displacements of individual points which serve as control points, the geodetic interpretation should differentiate between the part which represents the displacement of every control point due to displacement of the whole structure, and the part representing the displacement of this same point caused by deformation of the structure. This purpose can be achieved by using the formulas for complex generalization which the author presents and discusses in the present paper.

Of exceptional importance for a correct interpretation by the scientific branch is this differentiation between the part played by displacements of points due to displacement of the structure, and the part played by displacements of points caused by deformation of the structure. In the final part of the paper the author illustrates his theses by giving selected examples of how the method of complex generalization should be, and has been applied.



