

Metoda generalizacji złożonej wyników pomiarów przemieszczeń i odchyłek usytuowania punktów

1. Wstęp

W pracy pt. „Wstęp do generalizacji wyników pomiarów odchyłek projektowych i odkształceń urządzeń technicznych” [2] uzasadniłem i zilustrowałem na prostych przykładach potrzebę dokonywania generalizacji złożonej wyników pomiarów odchyłek i przemieszczeń punktów. Publikacja [2] nie zawierała jeszcze omówienia ogólnej metody obliczeń związanych z generalizacją złożoną a podane w niej przykłady liczbowe dotyczyły przypadków szczególnych o uproszczonym charakterze, które miały na celu głównie poglądowe wyjaśnienie różnic między stosowaną dotychczas generalizacją prostą a postulowaną generalizacją złożoną.

Generalizacją prostą nazywamy tu graficzne opracowania wyników pomiarów przemieszczeń, pozwalające w łatwy aczkolwiek uproszczony sposób zorientować się w przemieszczeniach i odkształceniach obiektu badań. Generalizacja złożona różni się od generalizacji prostej tym, że przedstawieniu w postaci graficznej nie podlegają przemieszczenia punktów uzyskane bezpośrednio z pomiaru lecz obliczone w dwu oddzielnych grupach części przemieszczeń punktów, wynikające wyłącznie z przemieszczeń obiektu i części przemieszczeń punktów, wynikające wyłącznie z odkształceń obiektu.

Odpowiednio w zakresie generalizacji złożonej odchyłek projektowych osobno zostają obliczone i przedstawione części odchyłek wynikające z systematycznych błędów wykonania i montażu i osobno części odchyłek o charakterze przypadkowym.

Na wstępie niezbędne jest podanie definicji, które pozwolą bliżej zorientować się w istocie rozpatrywanego zagadnienia.

1) Przemieszczenie bryły — zmiana położenia bryły w przestrzeni bez zmiany jej wymiarów i kształtu.

2) Odkształcenie bryły — zmiana wymiarów i kształtu bryły bez przemieszczenia jej w przestrzeni.

3) Wyznaczone z pomiaru przemieszczenie punktu znajdującego się na powierzchni bryły — wektor $\overline{dp}$ zmiany położenia punktu w przestrze-

ni, która mogła być spowodowana przez przemieszczenie, odkształcenie albo pod łącznym wpływem przemieszczenia i odkształcenia bryły (przynajmniej tego przemieszczenia nie jest określona a priori).

4) Obliczone przemieszczenie powierzchni bryły w miejscu kontrolowanego punktu — wektor $\overline{dp'}$ przemieszczenia punktu pod wyłącznym wpływem przemieszczenia bryły.

5) Odkształcenie powierzchni bryły w miejscu kontrolowanego punktu — wektor $-\overline{v_{dp}}$ przemieszczenia punktu pod wyłącznym wpływem odkształcenia bryły.

6) Pomiędzy wektorami $\overline{dp}$, $\overline{dp'}$, $\overline{v_{dp}}$ zachodzi związek:

$$\overline{dp} + \overline{v_{dp}} = \overline{dp'} \quad (1)$$

7) Wyznaczona odchyłka położenia punktu — wektor $\overline{dP}$ różnicy między wyznaczoną a projektowaną pozycją punktu w przestrzeni.

8) Odchyłka usytuowania powierzchni bryły w miejscu kontrolowanego punktu — wektor $\overline{dP'}$ odchyłki położenia punktu spowodowany przez odchyłkę usytuowania bryły.

9) Odchyłka kształtu powierzchni bryły w miejscu kontrolowanego punktu — wektor $-\overline{v_{dP}}$ odchyłki położenia punktu spowodowany przez odchyłkę kształtu bryły.

10) Pomiędzy wektorami $\overline{dP}$, $\overline{dP'}$, $\overline{v_{dP}}$ zachodzi związek:

$$\overline{dP} + \overline{v_{dP}} = \overline{dP'} \quad (1a)$$

Istotą wyznaczeń geodezyjnych jest ich punktowość, to jest możliwość ścisłego określenia pozycji, przemieszczeń lub odchyłek położenia oznaczonych lub naturalnych — charakterystycznych punktów na powierzchni badanego obiektu. Wybór punktów na powierzchni obiektu, których przemieszczenia lub odchyłki położenia podlegają wyznaczaniu, winien być dokonywany w taki sposób, aby wyznaczane składowe wektorów przemieszczeń lub odchyłek zespołu punktów mogły w prawidłowy sposób świadczyć o przemieszczeniach, odkształceniach, odchyłkach usytuowania i odchyłkach kształtu całego obiektu lub jego podstawowych elementów. Tak więc w wyniku pomiarów i zasadniczych obliczeń wyznacza się jedynie wektory przemieszczeń $\overline{dp}$ lub wektory odchyłek położenia $\overline{dP}$ punktów (albo nawet tylko poszczególne składowe tych wektorów).

Zespół wyznaczonych wektorów przemieszczeń lub odchyłek może podlegać generalizacji prostej, która pozwala na przybliżone zilustrowanie zachowania się bryły, na powierzchni której znajdują się kontrolowane punkty. Generalizacja ta polega na graficznej interpolacji przemieszczeń lub odchyłek powierzchni bryły na podstawie wyznaczonych wektorów przemieszczeń lub odchyłek położenia punktów. W wyniku tej generali-

zacji nie jesteśmy w stanie odróżnić w sposób ścisły przemieszczeń bryły od jej odkształceń i odchyłek usytuowania bryły od odchyłek jej kształtu.

Dla wzbogacenia treści wyznaczonych przemieszczeń lub odchyłek położenia punktów celowe jest stosowanie generalizacji złożonej, która polega na obliczaniu najbardziej prawdopodobnych wielkości $\overline{dp'}$, $\overline{v_{dp}}$ lub $\overline{dP'}$, $\overline{v_{dP}}$ na podstawie wyznaczonych z pomiaru wektorów $\overline{dp}$ lub $\overline{dP}$ oraz na przedstawieniu osiągniętych rezultatów za pomocą graficznych metod generalizacji prostej. Graficzne metody generalizacji prostej służą w tym przypadku do oddzielnego przedstawiania przemieszczeń i odkształceń lub odchyłek usytuowania i odchyłek kształtu badanego obiektu.

Generalizacja złożona stanowi niezbędny dalszy etap opracowania wyników pomiarów kontrolnych, decydujący o możliwości głębszego wnioskowania o stanie bezpieczeństwa badanego obiektu i o koniecznych zabiegach zwiększających to bezpieczeństwo. Możliwe dzięki stosowaniu generalizacji złożonej odróżnianie przemieszczeń od odkształceń i odchyłek usytuowania od odchyłek kształtu obiektów — jak się wydaje — posiada doniosłe znaczenie teoretyczne i praktyczne.

2. Ogólna metoda generalizacji złożonej wyznaczonych przemieszczeń

Założmy, że pewna bryła zmieniła swe położenie w przestrzeni bez zmiany kształtu (rozpatrujemy tu bardzo małe zmiany położenia). Dowolny punkt P na powierzchni tej bryły o współrzędnych x, y, z w wyniku przemieszczenia bryły zajął nową pozycję P' o współrzędnych x', y', z' . Składowe wektora przemieszczenia punktu $\overline{dp'}$ pod wpływem przemieszczenia bryły są równe:

$$\begin{aligned} dx' &= x' - x; \\ dy' &= y' - y; \\ dz' &= z' - z. \end{aligned} \quad (2)$$

Przemieszczenie punktu z pozycji P do pozycji P' możemy określić jako skutek następujących ruchów bryły:

1) Obrót bryły o kąt ε_1 wokół osi poziomej $O_1 - O_2$ przechodzącej przez początek układu współrzędnych prostokątnych $Oxyz$, co wywoła przemieszczenie punktu z pozycji P do pozycji P_1 (wektor tego przemieszczenia posiada składowe, które oznaczmy dx'_a, dy'_a, dz'_a). (Por. rys. 1).

2) Obrót bryły o kąt ε_2 wokół osi przechodzącej przez początek układu współrzędnych prostokątnych $Oxyz$, prostopadłej do płaszczyzny przekroju bryły, która pierwotnie była pozioma a w wyniku uprzednio wymienionego obrotu została nachylona do poziomu o kąt ε_1 . Obrót ten wy-

Zgodnie z rysunkiem możemy napisać:

$$\begin{aligned} dx'_a &= -dl \cdot \cos \varphi = -R_1 \{ \cos \psi - \cos(\psi + \varepsilon_1) \} \cos \varphi; \\ dy'_a &= -dl \cdot \sin \varphi = -R_1 \{ \cos \psi - \cos(\psi + \varepsilon_1) \} \sin \varphi; \\ dz'_a &= R_1 \{ \sin(\psi + \varepsilon_1) - \sin \psi \}. \end{aligned} \quad (4)$$

Ponieważ w naszym przypadku $\varepsilon_1 \cong 0$ możemy napisać powyższe zależności w formie uproszczonej:

$$\begin{aligned} dx'_a &= -R_1 \sin \psi \cos \varphi \cdot \varepsilon_1 = -z \varepsilon_1 \cos \varphi; \\ dy'_a &= -R_1 \sin \psi \cos \varphi \cdot \varepsilon_1 = -z \varepsilon_1 \sin \varphi; \\ dz'_a &= R_1 \cos \psi \cdot \varepsilon_1 = \sqrt{x^2 + y^2} \cdot \sin(\varphi + 90^\circ - \alpha) \varepsilon_1 = \\ &= \sqrt{x^2 + y^2} (\cos \varphi \cos \alpha + \sin \varphi \sin \alpha) \varepsilon_1 = \\ &= x \varepsilon_1 \cos \varphi + y \varepsilon_1 \sin \varphi. \end{aligned} \quad (5)$$

Podstawiając do równań (5) niewiadome U, V o następującym znaczeniu:

$$\begin{aligned} U &= \varepsilon_1 \cos \varphi; \\ V &= \varepsilon_1 \sin \varphi; \end{aligned} \quad (6)$$

otrzymamy:

$$\begin{aligned} dx'_a &= -z U; \\ dy'_a &= -z V; \\ dz'_a &= xU + yV. \end{aligned} \quad (7)$$

Zakładając $\varepsilon_1 \cong 0, \varepsilon_2 \cong 0$ możemy przyjąć, że obrót bryły wymieniony w punkcie 2) dokonuje się wokół osi Oz zamiast wokół osi odchylonej od niej o kąt ε_1 w kierunku określonym przez kąt φ . W rezultacie możemy napisać zgodnie z wzorami na transformację współrzędnych płaskich:

$$\begin{aligned} x_2 - x_1 \cos \varepsilon_2 + y_1 \sin \varepsilon_2 &= 0; \\ y_2 - y_1 \cos \varepsilon_2 - x_1 \sin \varepsilon_2 &= 0; \\ z_2 - z_1 &= 0; \end{aligned} \quad (8)$$

gdzie: x_2, y_2, z_2 — współrzędne pozycji P_2 ;

x_1, y_1, z_1 — współrzędne pozycji P_1 .

Po uproszczeniach wynikających z założenia $\varepsilon_2 \cong 0$ oraz uwzględnieniu znaczenia składowych wektora przemieszczenia punktu z pozycji P_1 do pozycji P_2 możemy napisać równania (8) w formie:

$$\begin{aligned} dx'_b &= -y \varepsilon_2; \\ dy'_b &= x \varepsilon_2; \\ dz'_b &= 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Na podstawie równań (3), (7), (9) możemy napisać:

$$\begin{aligned} dx' &= -z U - y \varepsilon_2 + dx'_c; \\ dy' &= -z V + x \varepsilon_2 + dy'_c; \\ dz' &= xU + yV + dz'_c. \end{aligned} \quad (10)$$

W wyniku pomiaru otrzymujemy składowe dx , dy , dz wektora przemieszczeń $\overline{dp}$. Na podstawie równania (1) możemy napisać równania (10) w postaci:

$$\begin{aligned} dx'_c - zU - y\varepsilon_2 &= dx + v_{dx} = dx'; \\ dy'_c - zV + x\varepsilon_2 &= dy + v_{dy} = dy'; \\ dz'_c + xU + yV &= dz + v_{dz} = dz'. \end{aligned} \quad (11)$$

Jeśli na powierzchni rozpatrywanej bryły znajduje się zespół punktów, dla których wyznaczono składowe przemieszczeń, powstaje możliwość napisania układu równań „odkształceń” typu (11). W przypadku, gdy bryła jest sztywna lub odkształca się w nieznacznym stopniu rozwiązanie takiego układu powinno następować przy spełnieniu warunku:

$$[v_{dx}^2 + v_{dy}^2 + v_{dz}^2] = \min., \quad (12)$$

co prowadzi do obliczenia najbardziej prawdopodobnych wartości parametrów przemieszczeń dx'_c , dy'_c , dz'_c , U , V , ε_2 .

Określenie parametrów ε_1 , φ wymaga wykorzystania obliczonych parametrów U , V stosownie do zależności (6) z których wynika:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \sqrt{U^2 + V^2} \\ \varphi &= \arctg \frac{V}{U}. \end{aligned} \quad (13)$$

Podstawienie obliczonych wartości parametrów przemieszczeń do równań „odkształceń” pozwala na obliczenie składowych dx' , dy' , dz' wektorów przemieszczeń oraz składowych $-v_{dx}$, $-v_{dy}$, $-v_{dz}$ wektorów odkształceń powierzchni bryły w miejscach wszystkich kontrolowanych punktów.

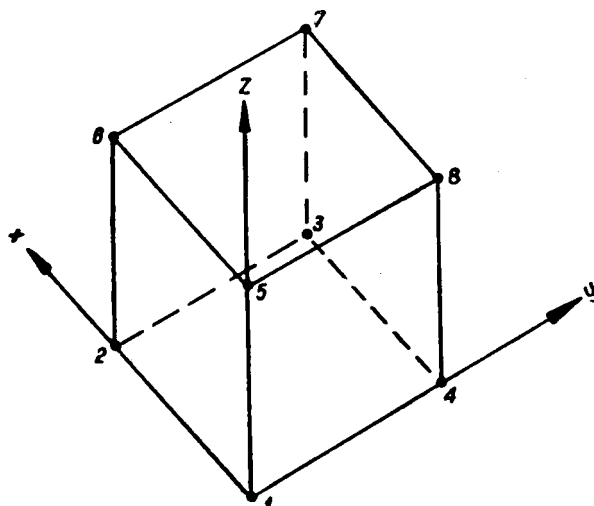
Dla zilustrowania efektów stosowania wyprowadzonych wzorów wykonamy prosty przykład liczbowy.

Przykład 1 złożonej generalizacji wyznaczonych przemieszczeń

Bryła o kształcie sześcianu o bokach $1 \times 1 \times 1$ m posiada wyznaczone składowe wektorów przemieszczeń ośmiu punktów stanowiących jej naroża. Składowe te wyrażone w mm zestawiono w tablicy 1 w kolumnie oznaczonej w nagłówku $\overline{dp}$. W tablicy tej zestawiono i rozwiązano układ 24 równań odkształceń. Jako współczynniki przy niewiadomych w tabeli współczynnikowej układu równań wpisano odpowiednie współrzędne naroży sześcianu, wyrażając je w metrach. Współrzędne te określono na podstawie znanych długości krawędzi sześcianu usytuowanego względem osi układu współrzędnych prostokątnych $Oxyz$ zgodnie z rysunkiem 2.

Tablica 1

Nr pktu	dx'_c	dy'_c	dz'_c	U	V	ϵ_2	$\bar{dp}$	S	$\bar{v}_{dp}$	$\bar{dp}'$
1	1,0						-11,0	-10,0	5,9	-5,1
2	1,0						-2,0	-1,0	-3,1	-5,1
3	1,0					-1,0	6,0	6,0	-1,2	4,8
4	1,0					-1,0	5,0	5,0	-0,2	4,8
5	1,0			-1,0			-7,0	-7,0	5,0	-2,0
6	1,0			-1,0			1,0	1,0	-3,0	-2,0
7	1,0			-1,0	-1,0		10,0	9,0	-2,1	7,9
8	1,0			-1,0	-1,0		9,0	8,0	-1,1	7,9
1		1,0					2,0	3,0	2,3	4,3
2		1,0				1,0	-6,0	-4,0	0,4	-5,6
3		1,0				1,0	-3,0	-1,0	-2,6	-5,6
4		1,0					5,0	6,0	-0,7	4,3
5		1,0			-1,0		6,0	6,0	2,3	8,3
6		1,0			-1,0	1,0	-2,0	-1,0	0,4	-1,6
7		1,0			-1,0	1,0	1,0	2,0	-2,6	-1,6
8		1,0			-1,0		8,0	8,0	0,3	8,3
1			1,0				2,0	3,0	2,4	4,4
2			1,0	1,0			-1,0	1,0	2,3	1,3
3			1,0	1,0	1,0		-5,0	-2,0	2,3	-2,7
4			1,0		1,0		-3,0	-1,0	3,4	0,4
5			1,0				7,0	8,0	-2,6	4,4
6			1,0	1,0			4,0	6,0	-2,7	1,3
7			1,0	1,0	1,0		0,0	3,0	-2,7	-2,7
8			1,0		1,0		3,0	5,0	-2,6	0,4
	8,00	8,00	8,00	-4,00	-4,00	-4,00	11,00	11,00		
				4,00	4,00	4,00	11,00	19,00		
				8,00	2,00	2,00	7,00	23,00		
					8,00	-2,00	-15,00	-3,00		
						8,00	-18,00	-10,00		
							-40,00	-32,00		
	2,83	2,83	2,83	-1,41	-1,41	-1,41	3,89	3,89	0	
				1,41	1,41	1,41	3,89	6,71	2	
				2,01	0,01	0,01	2,47	8,13	2	
					2,01	-0,01	-6,47	-4,45	4	
						2,01	-7,93	-5,94	3	
							-19,91	-17,91	0	
	-5,1	4,3	4,4	-3,1	-4,0	-9,9	Niewiadome			

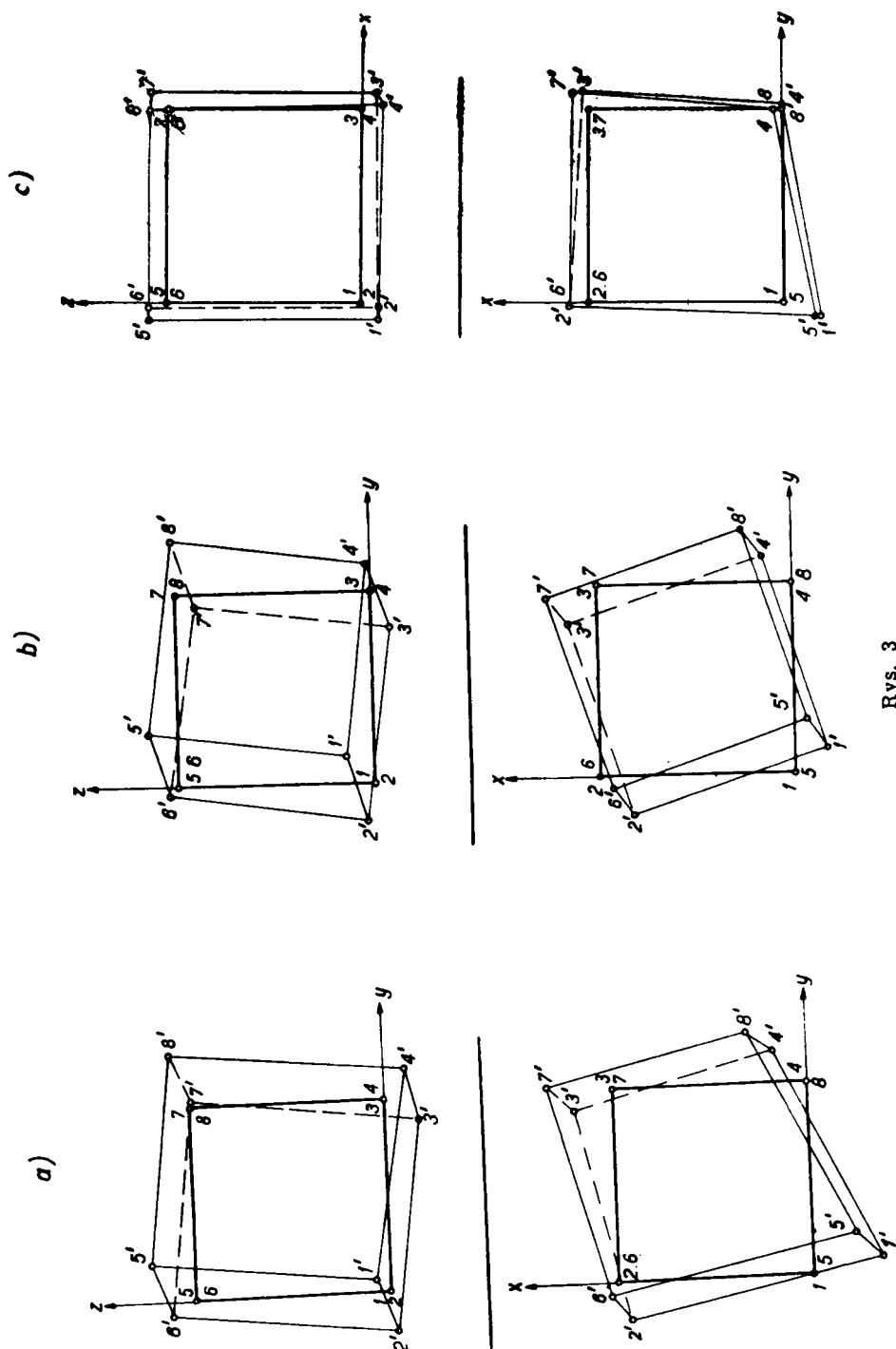


Rys. 2

W rezultacie rozwiązania zestawionego układu równań odkształceń, dokonanego metodą najmniejszych kwadratów otrzymano wartości U , V , ε_2 wyrażone w $\frac{\text{mm}}{\text{m}}$ oraz wartości dx'_c , dy'_c , dz'_c wyrażone w mm. Wartości te podstawiono następnie do równań odkształceń otrzymując składowe wektorów odkształceń sześcianu $\overline{v_{dp}}$ zestawione w przedostatniej kolumnie tablicy oraz składowe wektorów przemieszczeń sześcianu zestawione w ostatniej kolumnie tablicy 1.

Rezultaty pomiaru i obliczeń generalizujących wyznaczone przemieszczenia przedstawiono na rysunku 3.

Na rysunkach 3a, 3b, 3c linią grubą pokazano rzuty sześcianu w jego pierwotnym usytuowaniu względem osi układu współrzędnych $Oxyz$. Na rysunku 3a odłożono od wierzchołków sześcianu składowe wektorów $\overline{dp}$ uzyskując pozycje rzutów wierzchołków $1'$, $2'$... sześcianu, który uległ przemieszczeniu i odkształceniom. Na rysunku 3b odłożono od wierzchołków sześcianu składowe wektorów $\overline{dp'}$ uzyskując pozycje wierzchołków sześcianu, który uległ przemieszczeniu bez odkształcenia. Na rysunku 3c odłożono od wierzchołków sześcianu składowe wektorów $\overline{v_{dp}}$ (z odwrotnymi znakami) uzyskując pozycje rzutów wierzchołków sześcianu, który uległ odkształceniom bez przemieszczenia względem osi układu współrzędnych. Oczywiście rzuty sześcianu, który uległ przemieszczeniu i odkształceniom są na tych rysunkach dodatkowo zniekształcone na skutek różnic skal sześcianu i wektorów przemieszczeń, jednak jest to nieunikniona cecha graficznych sposobów przedstawiania przemieszczeń i od-



kształceń tworów trójwymiarowych. Pomimo tych dodatkowych zniekształceń porównanie rysunków 3a, 3b, 3c wyraźnie ilustruje efekty wynikające z zastosowanej generalizacji złożonej. Szczególnie istotna jest tu możliwość ocenienia wielkości odkształceń sześcianu wolnych od wpływu jego przemieszczeń. Wydzielenie odkształceń sześcianu na rysunku 3a nie wydaje się możliwe bez dokonania generalizacji złożonej, jakkolwiek na rysunku tym widoczne są pewne oznaki odkształceń w postaci wydłużenia przekątnej $1'-3'$ w stosunku do przekątnej $2'-4'$.

3. Praktyczne przypadki zastosowań metody generalizacji przemieszczeń punktów

Jak wiadomo, w praktyce nie jest na ogół możliwe zaprojektowanie sieci geodezyjnych w taki sposób, aby każdy kontrolowany punkt miał wyznaczone wszystkie trzy składowe przemieszczeń. Na przykład przy badaniu przemieszczeń i odkształceń zapór wodnych możliwe jest wyznaczanie metodą trygonometryczną poziomych składowych przemieszczeń punktów zasygnalizowanych na odpowiedniej powierzchni muru w miejscach, które nie są bezpośrednio dostępne dla pomiarów przemieszczeń pionowych metodą niwelacji precyzyjnej (składowe pionowe przemieszczenia można w tym przypadku wyznaczać metodą niwelacji trygonometrycznej, która jednak ze względów dokładnościowych nie znalazła w Polsce szerszego zastosowania). Z kolei punkty, dla których można wyznaczyć metodą niwelacji precyzyjnej przemieszczenia pionowe znajdują się na ogół w miejscach, gdzie wyznaczenie obydwu poziomych składowych przemieszczeń jest utrudnione.

Z tych względów należy liczyć się z potrzebą generalizowania przemieszczeń na podstawie wyznaczanych pojedynczych (lub par) składowych przemieszczeń poszczególnych punktów. W praktyce, w zależności od programu badań mogą występować następujące przypadki:

1) Wyznaczane są składowe przemieszczenia wszystkich kontrolowanych punktów obiektu wzdłuż jednej osi układu współrzędnych (na przykład, gdy program przewiduje wyłącznie wyznaczanie osiadań).

2) Wyznaczane są składowe przemieszczenia wzdłuż dwu osi (na przykład wyznaczanie przemieszczeń poziomych metodą trygonometryczną lub wyznaczanie jednej poziomej składowej przemieszczeń metodą stałej prostej i pionowej składowej przemieszczeń metodą niwelacji precyzyjnej).

3) Wyznaczane są trzy składowe przemieszczenia kontrolowanych punktów obiektu, przy czym pewne grupy tych punktów mają wyznaczone różne składowe przemieszczenia. Przykładem takiego przypadku jest

przeciętnie spotykany zakres pomiarów przemieszczeń zapór wodnych, gdzie występuje jednocześnie wyznaczanie poziomej i pionowej składowej przemieszczeń trzpieni stałej prostej, dwu poziomych składowych przemieszczeń celowników oraz pionowej składowej przemieszczeń reperów.

Występowanie wspomnianych przypadków nie zaprzecza możliwości dokonywania generalizacji przemieszczeń, natomiast stawia potrzebę nieco odmiennego użycia równań odkształceń aniżeli w przypadku dysponowania trzema składowymi przemieszczeń każdego kontrolowanego punktu.

Z zastosowania różnych metod pomiarowych do wyznaczania poszczególnych składowych przemieszczeń punktów wynika potrzeba zróżnicowania zaufania do technicznej wartości osiąganych rezultatów, wyrażającego się przyjmowaniem różnych dokładności wyznaczonych składowych przemieszczeń. Również w ramach stosowania jednej z metod pomiarowych powinniśmy liczyć się ze zróżnicowaniem dokładności wyznaczania składowych przemieszczeń poszczególnych punktów w zależności od lokalnych zróżnicowań warunków wykonania pomiarów oraz od zróżnicowań konstrukcyjnej wartości poszczególnych fragmentów sieci pomiarowej. W mniej lub bardziej precyzyjny sposób możemy więc ocenić techniczną wartość każdej wyznaczonej składowej przemieszczenia punktu, wyrażając ją za pomocą wartości błędu średniego wyznaczenia składowej m_{dx} , m_{dy} lub m_{dz} .

Uwzględnienie stopnia zaufania do każdej wyznaczonej składowej przemieszczenia polega przy generalizacji przemieszczeń na zrównoważeniu dokładnościowym układu równań odkształceń. Według ogólnie stosowanych zasad zrównoważenie to następuje w wyniku podzielenia każdego równania odkształceń przez wartość błędu średniego wyznaczenia odpowiedniej składowej przemieszczenia oraz na rozwiązaniu tak zrównoważonego układu równań. Rozwiązanie dokonywane metodą najmniejszych kwadratów prowadzi w tym przypadku do spełnienia nieco odmiennego niż (12) warunku w postaci:

$$\left[\left(\frac{v_{dx}}{m_{dx}} \right)^2 + \left(\frac{v_{dy}}{m_{dy}} \right)^2 + \left(\frac{v_{dz}}{m_{dz}} \right)^2 \right] = \min. \quad (14)$$

W konsekwencji zrównoważenia dokładnościowego układu równań odkształceń możemy uwzględnić techniczną wartość generalizowanych rezultatów. Uzyskujemy przy tym dodatkowe możliwości oceny osiągniętych rezultatów generalizacji złożonej. Mianowicie w wyniku podstawienia do poszczególnych równań obliczonych uprzednio parametrów przemieszczeń otrzymujemy wielkości $\frac{v_{dx}}{m_{dx}}$, $\frac{v_{dy}}{m_{dy}}$, $\frac{v_{dz}}{m_{dz}}$, które pozwalają ocenić

wyznaczone składowe odkształceń v_{dx} , v_{dy} , v_{dz} bądź jako rezultaty błędów wyznaczenia lub jako wynik rzeczywiście występujących odkształceń obiektu. W przypadku braku odkształceń wielkości tych stosunków powinny być zbliżone do jedności, nie przekraczając w sporadycznych skrajnych przypadkach wartości równej granicznej wielokrotności błędu średniego. Bardziej kompleksową ocenę występowania lub niewystępowania odkształceń uzyskamy posługując się obliczoną wartością:

$$M = \sqrt{\frac{\left(\frac{v_{dx}}{m_{dx}}\right)^2 + \left(\frac{v_{dy}}{m_{dy}}\right)^2 + \left(\frac{v_{dz}}{m_{dz}}\right)^2}{n_n}} \quad (15)$$

gdzie: n_n — różnica między ilością równań odkształceń a ilością obliczanych parametrów przemieszczeń.

W przypadku, gdy wyznaczone składowe przemieszczeń $\overline{v_{dp}}$ są spowodowane tylko błędami wyznaczenia składowych $\overline{dp}$ możemy oczekiwać, że spełnione będzie kryterium braku odkształceń o postaci:

$$M < 1 + \frac{1}{\sqrt{2n_n}}. \quad (16)$$

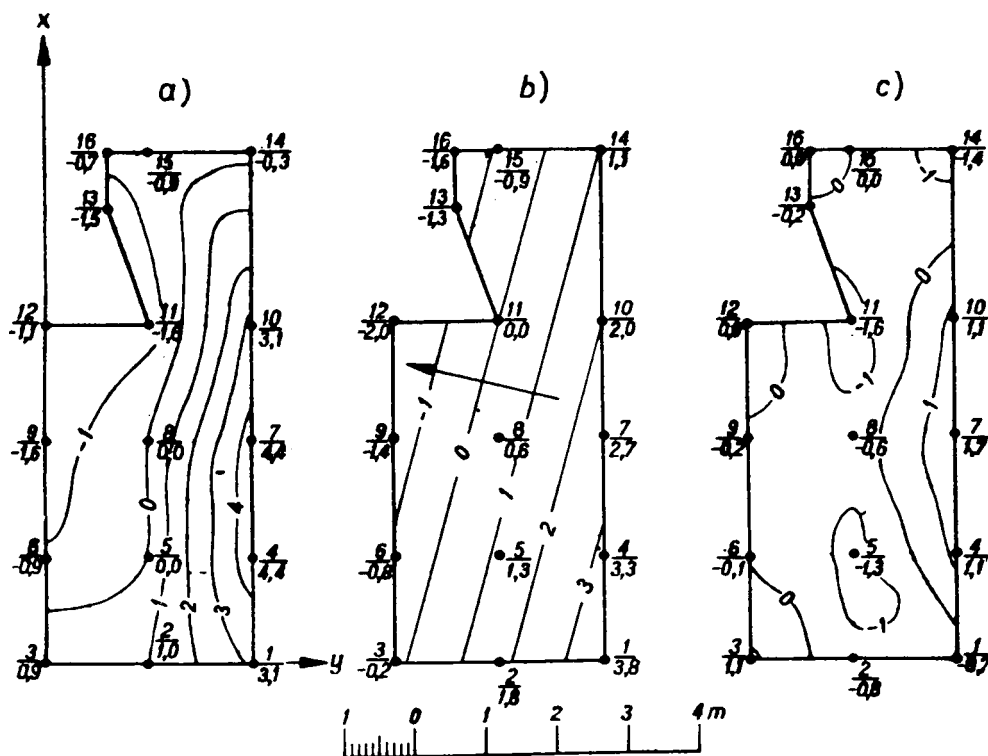
Obecnie zilustruję na kolejnych przykładach przebieg obliczania parametrów przemieszczeń przy zróżnicowaniu lub ograniczeniu ilości wyznaczanych składowych przemieszczeń punktów.

Przykład 2 generalizacji złożonej wyznaczonych przemieszczeń

Na rysunku 4a pokazano rzut poziomy fundamentu, na którym znajduje się 16 reperów o wyznaczonych pionowych składowych przemieszczeniach. Ograniczenie programu badań do wyznaczania wyłącznie osiadań powoduje tu konieczność ograniczenia się do wyznaczenia parametrów przemieszczeń dz'_c , U , V przez rozwiązanie układu równań odkształceń typu: $dz'_c + xU + yV = dz + v_{dz} = dz'$. W tablicy 2 zestawiono i rozwiązano układ równań odkształceń odpowiadający rozmieszczeniu reperów, określone na rysunku 4. Przy równoważeniu dokładnościowym układu równań przyjęto, że dokładność wyznaczenia osiadań wszystkich rozpatrywanych reperów była jednakowa i wyraziła się błędem średnim $m_{dz} = 0,1$ mm. W równaniach współczynniki przy niewiadomych zostały wyrażone w $\frac{m}{mm}$ natomiast składowe dz wyrażono w mm.

Na rysunku 4b pokazano za pomocą izolinii przemieszczenia pionowe fundamentu, natomiast na rysunku 4c pokazano za pomocą izolinii pionowe odkształcenia fundamentu. Izolinie pokazane na rysunku 4a stanowią wynik generalizacji prostej wyznaczonych osiadań dz reperów

i kryją w sobie zarówno przemieszczenia, jak i odkształcenia fundamentu. Izolinie na rysunku 4b zostały wyinterpolowane w oparciu o obliczone wartości dz' natomiast izolinie na rysunku 4c zostały wyinterpolowane w oparciu o obliczone wartości v_{dz} .



Rys. 4

Przykład 3 generalizacji złożonej wyznaczonych przemieszczeń

Na rysunku 5 pokazano betonowy, monolityczny fragment budowli, na którego powierzchni znajduje się 8 reperów i 6 celowników. W tabelicy 3 po lewej stronie zestawiony został układ równań odkształceń stosownie do rozmieszczenia reperów i celowników oraz do wyznaczonych wartości składowych ich przemieszczeń. W prawej części tabelicy 3 znajduje się układ tych równań zrównoważony dokładnościowo z uwzględnieniem wartości błędów średnich składowych przemieszczeń, które wykazano w kolumnie oznaczonej w nagłówku $\overline{m_{dp}}$. W wyniku dokonanego rozwiązania tego układu stwierdzono, że badany fragment budowli uległ przemieszczeniom określonym przez następujące wartości parametrów: $dx_c' =$

Tablica 2

Nr pktu	dz'_c	U	V	$\frac{dz}{m_{dz}}$	S	$\frac{v_{dz}}{m_{dz}}$	v_{dz}	dz'
1	10	0	28	31	69	7	0,7	3,8
2	10	0	14	10	34	8	0,8	1,8
3	10	0	0	9	19	-11	-1,1	-0,2
4	10	15	28	44	97	-11	-1,1	3,3
5	10	15	14	0	39	13	1,3	1,3
6	10	15	0	-9	16	1	0,1	-0,8
7	10	31	28	44	113	-17	-1,7	2,7
8	10	31	14	0	55	6	0,6	0,6
9	10	31	0	-16	25	2	0,2	-1,4
10	10	48	28	31	117	-11	-1,1	2,0
11	10	48	14	-16	56	16	1,6	0,0
12	10	48	0	-11	47	-9	-0,9	-2,0
13	10	64	9	-15	68	2	0,2	-1,3
14	10	72	28	-3	107	14	1,4	1,1
15	10	72	14	-9	67	0	0,0	-0,9
16	10	72	9	-7	84	-9	-0,9	-1,6
	1 600	5 620	2 280	830	10 330	$M = \sqrt{\frac{1593}{13}} = 11$ $\varepsilon_1 = 1,49 \frac{\text{mm}}{\text{m}}$ $\varphi = 105^\circ$		
		30 118	8 196	- 743	43 191			
			5 062	3 708	19 246			
	40,0	140,5	57,0	20,8	258,2	3		
		101,9	1,8	-36,0	67,7	7		
			42,5	60,9	103,6	6		
	-0,18	-0,38	1,43	Niewiadome				

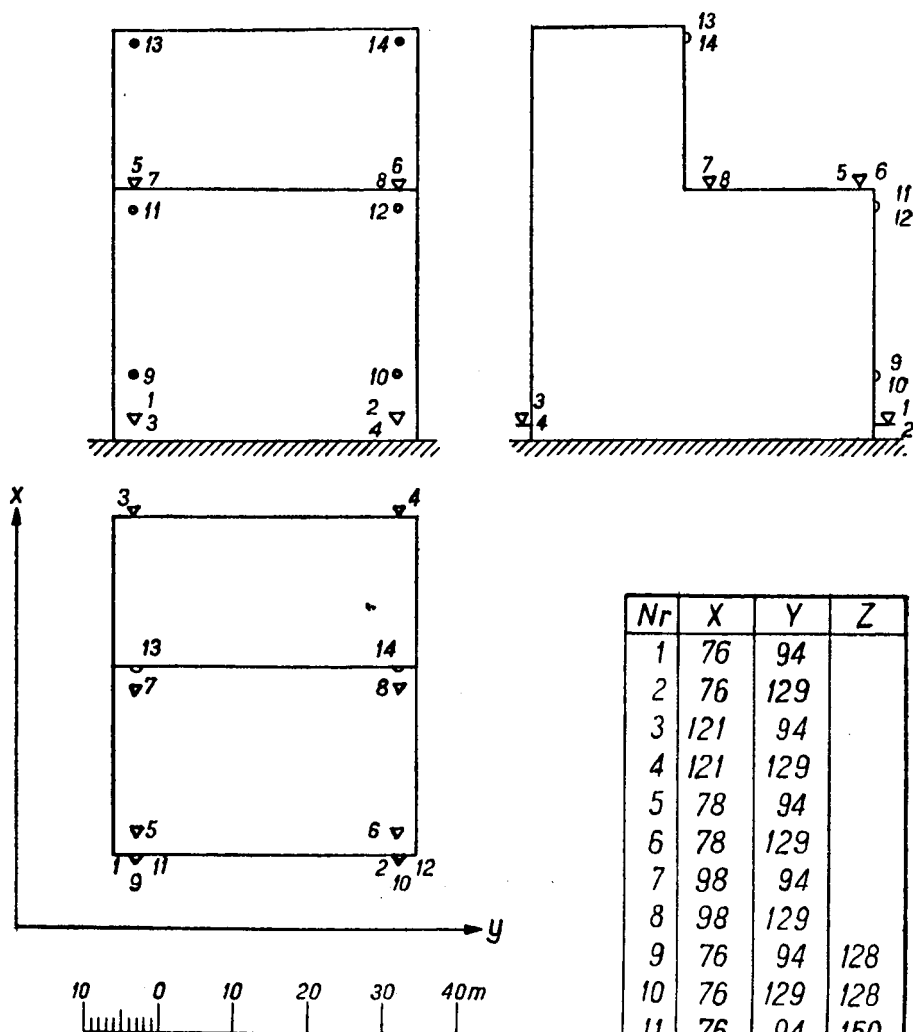
$= -29,7 \text{ mm}$, $dy'_c = -10,0 \text{ mm}$, $dz'_c = 19,5 \text{ mm}$, $\varepsilon_1 = 0,225 \frac{\text{mm}}{\text{m}}$, $\varphi = 196^\circ$,

$\varepsilon_2 = 0,023 \frac{\text{mm}}{\text{m}}$. Niezależnie od przemieszczeń wystąpiły tu również odkształcenia określone przez wartości v_{dx} , v_{dy} , v_{dz} zestawione w kolumnie oznaczonej w nagłówku v_{dp} . Fakt wystąpienia odkształceń stwierdzony został bezspornie, bowiem wielkość $M = 3,1$ zdecydowanie nie spełnia kryterium (16).

W niniejszym przykładzie zwraca uwagę zastosowany sposób ułożenia równań odkształceń, prowadzący do zbliżenia do siebie wartości współczynników przy poszczególnych wyznaczanych parametrach. W związku z tym, że współczynniki przy niewiadomych U , V , ε_2 w przypadku wyrażenia ich w metrach osiągałyby znacznie większe wartości

Tablica 3

Nr. skład.	dx_c'	dy_c'	dz_c'	U	V	ε_2	$\overline{dp}$	$m\overline{ap}$	dx_c'	dy_c'	dz_c'	U	V	ε_2	$\overline{dp}/m\overline{ap}$	S	$\overline{V_{dp}}/m\overline{ap}$	$\overline{V_{dp}}$	$\overline{dp}'$			
dz	1		1,00	0,76	0,94		-3,1	0,3			3,33	2,54	3,14		-10,35	-1,34	0,72	0,22	-2,9			
	2		1,00	0,76	1,29		-4,7	0,3			3,33	2,54	4,31		-15,70	-5,52	-1,18	-0,35	-5,0			
	3		1,00	1,21	0,94		-11,3	0,3			3,33	4,04	3,14		-37,70	-27,19	-4,40	-1,32	-12,6			
	4		1,00	1,21	1,29		-16,8	0,3			3,33	4,04	4,31		-56,00	-44,32	6,64	1,99	-14,8			
	5		1,00	0,78	0,94		-3,8	0,5			2,00	1,56	1,88		-7,60	-2,16	1,11	0,56	-3,2			
	6		1,00	0,78	1,29		-5,1	0,5			2,00	1,56	2,58		-10,20	-4,06	-0,63	-0,32	-5,4			
	7		1,00	0,98	0,94		-7,6	0,5			2,00	1,96	1,88		-15,20	-9,36	0,05	0,02	-7,6			
	8		1,00	0,98	1,29		-8,0	0,5			2,00	1,96	2,58		-16,00	-9,46	-3,49	-1,74	-9,7			
dx	9	1,00		-1,28		-0,94	-1,5	0,8	1,25			-1,60		-1,17	-1,86	-3,38	-3,30	-2,64	-4,1			
	10	1,00		-1,28		-1,29	-4,8	0,9	1,11			-1,42		-1,43	-5,33	-7,07	-0,17	-0,15	-5,0			
	11	1,00		-1,50		-0,94	2,2	0,9	1,11			-1,67		-1,05	2,45	0,84	-1,67	-1,50	0,7			
	12	1,00		-1,50		-1,29	-2,3	1,0	1,00			-1,50		-1,29	-2,30	-4,09	2,12	2,12	-0,2			
	13	1,00		-1,73		-0,94	4,6	1,1	0,91			-1,57		-0,86	4,18	2,66	0,81	0,89	5,5			
	14	1,00		-1,73		-1,29	0,1	1,2	0,83			-1,44		-1,08	0,08	-1,61	3,97	4,76	4,9			
dy	9		1,00		-1,28	0,76	0,2	0,3		3,33			-4,27	2,53	0,67	2,26	-1,77	-0,53	-0,3			
	10		1,00		-1,28	0,76	-0,2	0,3		3,33			-4,27	2,53	-0,67	0,92	-0,43	-0,13	-0,3			
	11		1,00		-1,50	0,76	0,9	0,5		2,00			-3,00	1,52	1,80	2,32	0,24	0,12	1,0			
	12		1,00		-1,50	0,76	1,5	0,5		2,00			-3,00	1,52	3,00	3,52	-0,96	-0,48	1,0			
	13		1,00		-1,73	0,98	1,2	0,6		1,67			-2,88	1,63	2,00	2,42	2,86	1,72	2,9			
	14		1,00		-1,73	0,98	1,5	0,6		1,67			-2,88	1,63	2,50	2,92	2,36	1,42	2,9			
									6,5437	35,7556	60,3556	-9,5538 57,9028 72,2506	-50,0574 67,4570 64,7202 148,3076	-7,1843 28,3740 10,4965 -40,1150 30,8228	-3,9516 17,1150 -496,7675 -530,4097 -597,7240 21,1424	-14,1460 31,1872 -311,0521 -334,5934 -407,4116 43,5364	$M = \sqrt{\frac{131,84}{14}} = 3,1$ $[\overline{dp}^2] - [LL] = 132,51$ $\varepsilon_1 = \frac{22,52}{100} \frac{\text{mm}}{\text{m}} =$ $= 0,22 \frac{\text{mm}}{\text{m}}$ $\varphi = 196^\circ$ $\varepsilon_2 = \frac{2,29}{100} \frac{\text{mm}}{\text{m}} =$ $= 0,02 \frac{\text{mm}}{\text{m}}$					
									2,5581	5,9796	7,7689	-3,7347 7,4532 1,6590	-8,3714 8,6830 0,0024 1,6831	-2,8085 4,7451 0,0046 -0,2328 0,6041	-1,5447 2,8622 -63,9431 -35,9240 -10,9674 1,3818	-5,5299 5,2156 -40,0381 -34,2582 -9,5172 1,9862	8 5 0 0 1 59					
									-29,70	-10,02	19,47	-21,65	-6,20	2,29	Niewiadome							



Rys. 5

Nr	X	Y	Z
1	76	94	
2	76	129	
3	121	94	
4	121	129	
5	78	94	
6	78	129	
7	98	94	
8	98	129	
9	76	94	128
10	76	129	128
11	76	94	150
12	76	129	150
13	98	94	173
14	98	129	173

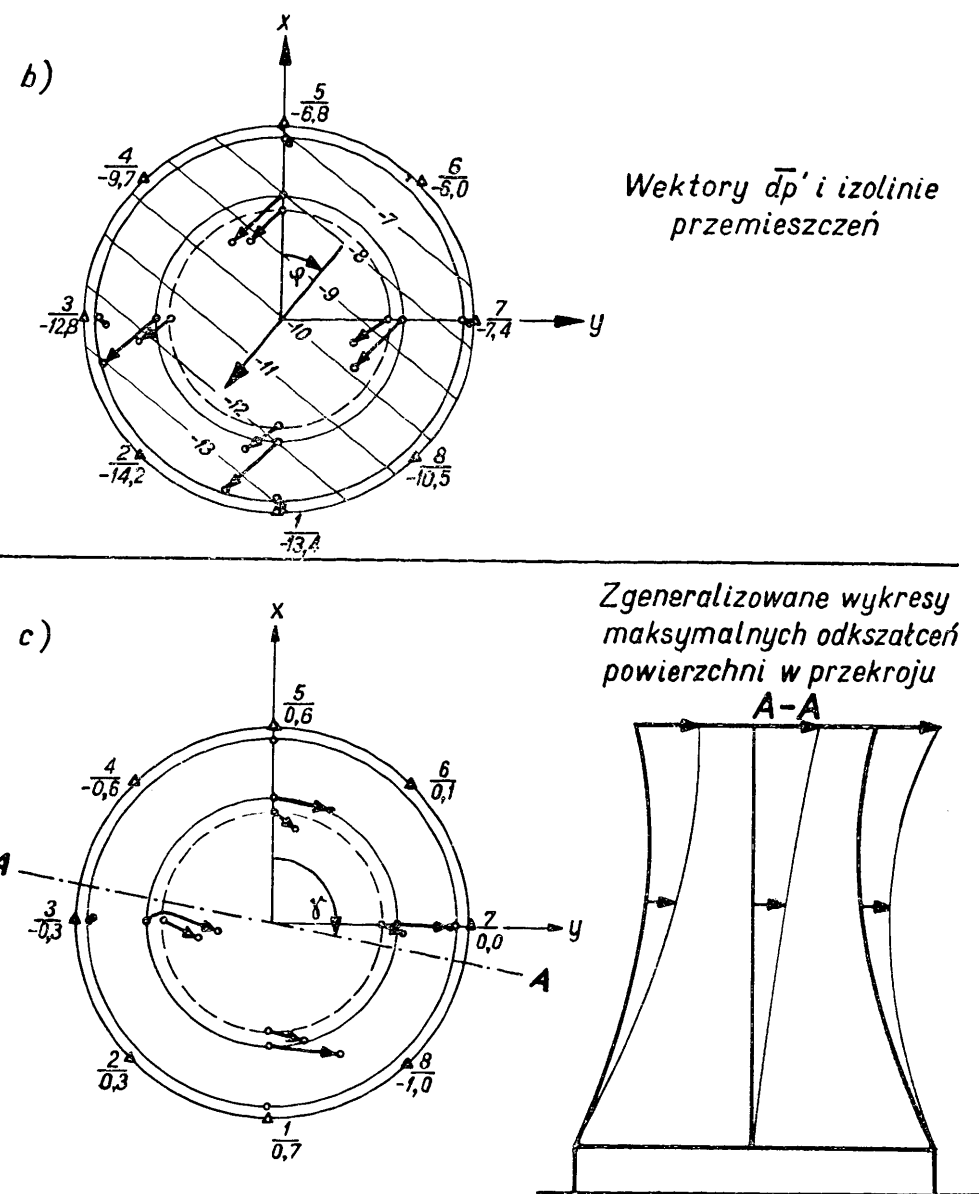
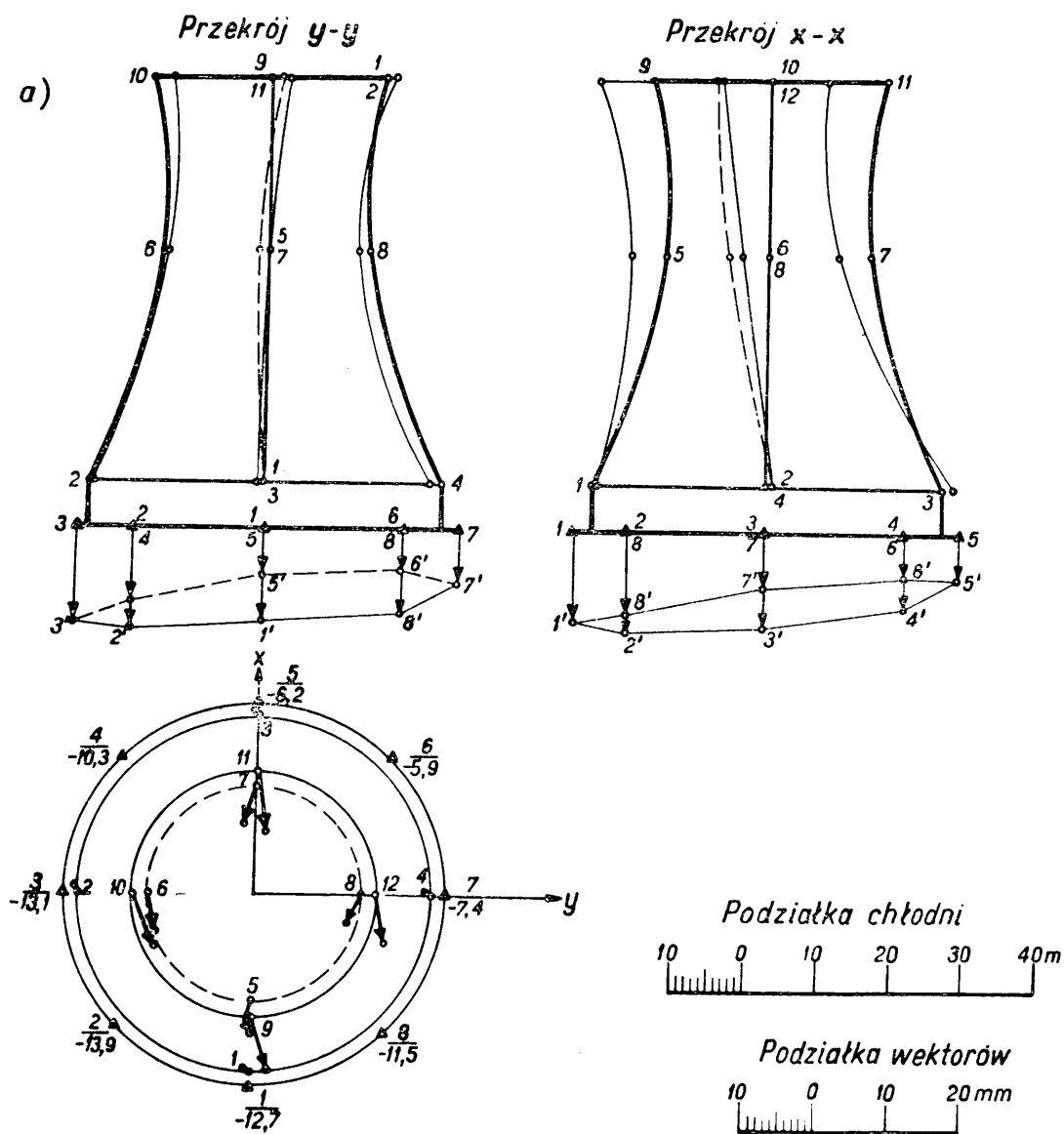
aniżeli współczynniki przy dx'_c , dy'_c , dz'_c , które są wszystkie równe 1, wyrażono współrzędne punktów w hektometrach. Wskutek tego niewiadome U , V , ε_2 uzyskane z rozwiązania układu równań odkształceń wyrażone zostały w $\frac{\text{mm}}{\text{hm}}$.

W wielu przypadkach dokonywanie generalizacji złożonej przy narzuceniu warunku (12) lub (14) na wszystkie wyznaczone składowe wekto-

rów odkształceń $\overline{v_{dp}}$ byłoby niesłuszne i prowadziłyby do zniekształcenia rezultatów utrudniających analizę branżową. Wyobraźmy sobie, że przedmiotem wyznaczeń są składowe przemieszczenia punktów rozmieszczonych na powierzchni obiektu, którego poszczególne fragmenty mogą podlegać zróżnicowanym wpływom powodującym przemieszczenia i poważne co do wielkości odkształcenia. Na przykład wysoki komin, wieża, powłoka żelbetowa chłodni kominowej, konstrukcja i płaszcz stalowy zbiornika gazu mogą podlegać przemieszczeniom spowodowanym przez przemieszczenia fundamentu oraz znacznym co do wielkości odkształceniom wywołanym przez parcie wiatru, jednostronne nagrzewanie itp. Dla określenia najbardziej prawdopodobnych wartości przemieszczeń takich obiektów bardziej właściwe jest obliczanie parametrów przemieszczeń na podstawie rozwiązania metodą najmniejszych kwadratów układu równań odkształceń zestawionych tylko dla punktów, które znajdują się na fundamentach i na konstrukcji w strefie bezpośrednio graniczącej z fundamentami. Ponieważ jednak obliczone w taki sposób parametry przemieszczeń powinny być wykorzystane dla określenia składowych przemieszczeń obiektu w dowolnym punkcie jego powierzchni niezbędne jest zestawienie również równań odkształceń dla składowych przemieszczeń punktów, które znajdują się w znacznej odległości od fundamentów. Parametry przemieszczeń obliczone na podstawie rozwiązania układu równań odkształceń, obejmującego składowe przemieszczenia punktów na fundamencie i w jego pobliżu na konstrukcji, należy następnie podstawić do wszystkich zestawionych równań odkształceń w celu obliczenia składowych wektorów odkształceń. Zalecane wyżej postępowanie zilustruję w kolejnym przykładzie liczbowym.

Przykład 4 generalizacji złożonej wyznaczonych przemieszczeń

Przykład niniejszy dotyczy generalizacji pionowych przemieszczeń reperów 1÷8 zastabilizowanych na fundamencie chłodni kominowej oraz poziomych przemieszczeń celowników 1÷12 zastabilizowanych na powierzchni żelbetowej powłoki chłodni. Rozmieszczenie badanych punktów wskazane jest na rysunku 6. Repery 1÷8 i celowniki 1÷4 możemy potraktować w praktyce jako punkty, których przemieszczenia są spowodowane w głównej mierze przez przemieszczenia fundamentu chłodni. Celowniki 5÷12 znajdujące się na powłoce mogą ulegać przemieszczeniom wywołanym zarówno przez przemieszczenia fundamentu, jak i przez znaczne co do wartości odkształcenia cienkościennej powłoki pod wpływem parcia wiatru, nierównomiernego nagrzewania, zalodzenia w okresie zimowym itp.



Rys. 6

W górnej części tablicy 4 został zestawiony i rozwiązany układ równań odkształceń dotyczących pionowych przemieszczeń reperów 1÷8 i poziomych przemieszczeń celowników 1÷4. W dolnej części tablicy 4 zestawiono równania odkształceń dotyczące składowych poziomych przemieszczeń celowników 5÷12. Po podstawieniu obliczonych wartości parametrów przemieszczeń do wszystkich zestawionych równań odkształceń obliczono składowe wektorów $\overline{v_{dp}}$, $\overline{dp'}$.

Ze względów związanych z techniką rachunku, przy układaniu równań odkształceń wyrażono współrzędne punktów w dziesiątkach metrów. W przykładzie niniejszym przyjęto ponadto dla uproszczenia, że wszystkie wyznaczone składowe przemieszczeń punktów posiadają jednakową dokładność, co pozwoliło na rozwiązanie układu równań bez jego równoważenia.

W wyniku rozwiązania układu równań odkształceń otrzymano następujące wartości parametrów przemieszczeń: $dx_c' = 1,6 \text{ mm}$, $dy_c' = -0,2 \text{ mm}$, $dz_c' = -10,1 \text{ mm}$, $\varepsilon_1 = 0,32 \frac{\text{mm}}{\text{m}}$, $\varphi = 39^\circ$, $\varepsilon_2 = 0,02 \frac{\text{mm}}{\text{m}}$.

Na rysunku 6a pokazano składowe przemieszczeń punktów wyznaczone z pomiaru. W dolnej części tego rysunku pokazano wektory poziomych przemieszczeń celowników na tle rzutu poziomego chłodni oraz wykazano w formie liczbowej wielkości osiadań reperów (w mm). W górnej części rysunku 6a pokazano wyznaczone przemieszczenia punktów w rzutach pionowych na płaszczyznę przekrojów środkowych chłodni.

Rysunek 6b ilustruje obliczone składowe wektorów przemieszczeń $\overline{dp'}$. Na rysunku tym pokazano również izolinie pionowych przemieszczeń fundamentu oraz wskazano kierunek zmiany jego pochylenia. Należy zauważyć, że kierunki wektorów przemieszczeń poziomych są na tym rysunku zbliżone do kierunku zmiany pochylenia fundamentu. Brak pełnej zgodności tych kierunków spowodowany został przez wystąpienie obrotu poziomego ε_2 oraz drobnych przemieszczeń poziomych dx_c' , dy_c' .

Zauważmy, że kierunki wektorów przemieszczeń poziomych według rysunków 6a i 6b różnią się między sobą w zasadniczy sposób. Świadczy to o tym, że wektory poziomych przemieszczeń celowników 5÷12 pokazane na rysunku 6a stanowią wynik przemieszczenia fundamentu i znacznych co do wielkości, wyraźnie systematycznych odkształceń powłoki żelbetowej. Ilustrację wpływu odkształceń powłoki na poziome przemieszczenia celowników 5÷12 zawiera rysunek 6c. Wektory odkształceń powłoki w miejscach poszczególnych celowników mają na tym rysunku w przybliżeniu jeden kierunek, zbliżony do kierunku śladu poziomego przekroju AA. Obliczenie kierunku przekroju AA, w którym na-

Tablica 4

Nr skład.	dx'_c	dy'_c	dz'_c	U	V	ε_2	$\overline{dp}$	S	$\overline{v_{dp}}$	$\overline{dp'}$
dz	1		1,0	-1,3			-12,7	-13,0	-0,7	-13,4
	2		1,0	-0,9	-0,9		-13,9	-14,7	-0,3	-14,2
	3		1,0		-1,3		-13,1	-13,4	0,3	-12,8
	4		1,0	0,9	-0,9		-10,3	-9,3	0,6	-9,7
	5		1,0	1,3			-6,2	-3,9	-0,6	-6,8
	6		1,0	0,9	0,9		-5,9	-3,1	-0,1	-6,0
	7		1,0		1,3		-7,4	-5,1	0,0	-7,4
	8		1,0	-0,9	0,9		-11,5	-10,5	1,0	-10,5
dx	1	1,0		-0,3			0,4	1,1	0,5	0,9
	2	1,0		-0,3		1,2	0,8	2,7	0,3	1,1
	3	1,0		-0,3			1,6	2,3	-0,7	0,9
	4	1,0		-0,3		-1,2	0,7	0,2	-0,1	0,6
dy	1		1,0		-0,3	-1,2	-1,2	-1,7	0,1	-1,1
	2		1,0		-0,3		-0,5	0,2	-0,3	-0,8
	3		1,0		-0,3	1,2	-0,3	1,6	-0,3	-0,6
	4		1,0		-0,3		-1,4	-0,7	0,5	-0,9
	4,00	4,00	8,00	-1,20			3,50	6,30	5 0 79 8 3 0	
				-1,20		-3,40	-0,60			
				6,98		-81,00	-73,00			
				6,98		15,68	21,46			
				5,76		14,55	20,33			
	2,00	2,00	2,83	-0,60			1,75	3,15		
				-0,60		-1,70	-0,30			
				2,57		-28,62	-25,80			
				2,57		6,51	9,09			
				2,40		5,26	7,84			
1,63	-0,24	-10,11	2,53	2,05	0,21	Niewiadome				
Nr skład.	dx'_c	dy'_c	dz'_c	U	V	ε_2	$\overline{dp}$	$\overline{v_{dp}}$	$\overline{dp'}$	
dx	5	1,0		-1,9			-4,5	1,3	-3,2	
	6	1,0		-1,9		0,7	-5,1	2,1	-3,0	
	7	1,0		-1,9			-4,7	1,5	-3,2	
	8	1,0		-1,9		-0,7	-3,7	0,4	-3,3	
	9	1,0		-3,1			-7,4	1,2	-6,2	
	10	1,0		-3,1		0,8	-7,0	1,0	-6,0	
	11	1,0		-3,1			-8,0	1,8	-6,2	
	12	1,0		-3,1		-0,8	-6,5	0,1	-6,4	
dy	5		1,0		-1,9	-0,7	0,1	-4,4	-4,3	
	6		1,0		-1,9		0,5	-4,6	-4,1	
	7		1,0		-1,9	0,7	-1,2	-2,8	-4,0	
	8		1,0		-1,9		-1,5	-2,6	-4,1	
	9		1,0		-3,1	-0,8	2,6	-9,4	-6,8	
	10		1,0		-3,1		2,8	-9,4	-6,6	
	11		1,0		-3,1	0,8	1,5	-7,9	-6,4	
	12		1,0		-3,1		1,0	-7,6	-6,6	

stępuje maksymalne odkształcenie powłoki, dokonane zostało według wzoru

$$\gamma = \arctg \frac{[v_{dy}]}{[v_{dx}]} = 101^\circ.$$

Na tle przekroju AA pokazano linie odkształceń konturu i środkowego przekroju powłoki, określone za pomocą średnich składowych odkształceń, które obliczono na poszczególnych poziomach w oparciu o grupy wektorów odkształceń powłoki w punktach 1÷4, 5÷8, 9÷12.

4. Analiza dokładności wyników generalizacji złożonej wyznaczonych przemieszczeń punktów, warunki wyznaczalności przemieszczeń bryły

Na dokładność wyznaczenia parametrów przemieszczeń oraz składowych wektorów $\overline{dp'}$, $\overline{v_{dp}}$ mają wpływ następujące czynniki:

- 1) wielkości parametrów przemieszczeń,
- 2) dokładność wyznaczenia składowych wektorów $\overline{dp}$ przemieszczeń poszczególnych punktów,
- 3) rozmieszczenie punktów kontrolowanych, których wyznaczone składowe przemieszczenia wykorzystano do obliczenia parametrów przemieszczeń,
- 4) wielkości składowych wektorów $\overline{v_{dp}}$ odkształceń w miejscach punktów kontrolowanych, których składowe przemieszczenia wykorzystano do obliczenia parametrów przemieszczeń.

Wielkości parametrów przemieszczeń mają wpływ na dokładność ich wyznaczenia ze względu na uproszczenia, jakie zostały zastosowane przy wyprowadzaniu wzorów (11) określających liniową postać równań odkształceń. Uproszczenia te wynikały z założeń, że kąty ε_1 , ε_2 są bliskie 0 i sprowadzały się do przyjęcia, że cosinusy tych kątów są równe 1. Maksymalne różnice między składowymi wektorów $\overline{dp'}$ określonymi z rozwiązania układu równań (11), a składowymi jakie otrzymalibyśmy bez wspomnianych założeń upraszczających możemy oszacować w oparciu o przybliżone wzory:

$$\begin{aligned}\Delta dx' &= x \{ (1 - \cos \varepsilon_1) + (1 - \cos \varepsilon_2) \}; \\ \Delta dy' &= y \{ (1 - \cos \varepsilon_1) + (1 - \cos \varepsilon_2) \}; \\ \Delta dz' &= z (1 - \cos \varepsilon_1) + \sqrt{x^2 + y^2} \cdot \varepsilon_1 \varepsilon_2.\end{aligned}\quad (17)$$

Dla praktycznego korzystania z tych wzorów przy ocenie wielkości błędów, jakie możemy popełnić stosując wzory (11) posługujemy się tabelicą 5, zawierającą zestawienie wielkości $1 - \cos \varepsilon$, ε^2 .

Tablica 5

ϵ		$1 - \cos \epsilon$	ϵ^2
,	$\frac{\text{mm}}{\text{m}}$	10^{-8} .	10^{-8} .
1	0,29	4	8
2	0,58	8	34
3	0,87	19	76
4	1,17	34	135
5	1,46	53	211
6	1,75	76	304
7	2,04	104	414
8	2,33	135	541
9	2,62	171	685
10	2,92	211	846
15	4,36	476	1904
20	5,82	846	3385
25	7,27	1322	5288
30	8,73	1904	7615

Wpływ kolejno wymienionych czynników na dokładność określenia parametrów przemieszczeń możemy ocenić przy wykorzystaniu ogólnego wzoru na błąd funkcji wyrównanych spostrzeżeń, który w formie krakowianowej przyjmuje znaną, prostą postać

$$m_F = M \sqrt{\mathbf{f} \cdot (\mathbf{a}^2)^{-1} \cdot \mathbf{f}}. \quad (18)$$

Zauważmy, że prawa strona wzoru (18) składa się z dwu zasadniczych czynników:

1) czynnika pod pierwiastkiem, którego wielkość zależy od struktury układu (rozmieszczenia punktów kontrolowanych, których składowe przemieszczeń wykorzystano do obliczenia parametrów przemieszczeń bryły) oraz od dokładności wyznaczenia tych składowych, ustalonej a priori przy równoważeniu układu,

2) czynnika poza pierwiastkiem, którego wielkość zależy od faktycznej dokładności wyznaczenia składowych przemieszczeń $\overline{dp}$ i od wielkości składowych odkształceń $\overline{v_{dp}}$ punktów wykorzystanych do obliczenia parametrów przemieszczeń.

Przy określonym rozmieszczeniu kontrolowanych punktów i określonej dokładności wyznaczenia ich przemieszczeń możemy oczekiwać, że najmniejsze wielkości błędów funkcji osiągniemy przy braku odkształceń bryły w miejscach punktów wykorzystanych do obliczenia parametrów przemieszczeń, to jest przy wartości M zbliżonej do jedności.

Wielkości błędów średnich parametrów przemieszczeń obliczanych bezpośrednio z rozwiązania układu równań odkształceń, to jest:

$m_{dx'_c}$, $m_{dy'_c}$, $m_{dz'_c}$, m_U , m_V , m_{ε_2} możemy obliczyć z wzoru:

$$m_i = \sqrt{Q_{ii}} \cdot M \quad (19)$$

gdzie: Q_{ii} — element krakowianu $(\mathbf{a}^2)^{-1}$ znajdujący się na przecięciu kolumny i wiersza o numerach i ,

i — numer obliczanego parametru.

Dla obliczenia błędu średniego m_{ε_1} korzystamy z wzoru ogólnego (18), w którym krakowian kolumnowy $\mathbf{f}_{\varepsilon}$ posiada postać:

$$\mathbf{f}_{\varepsilon} = \left\{ \begin{array}{c} \frac{U}{\sqrt{U^2 + V^2}} \\ V \\ \frac{V}{\sqrt{U^2 + V^2}} \end{array} \right\}. \quad (20)$$

Dla obliczenia błędu średniego m_{φ} korzystamy z wzoru ogólnego (18), w którym krakowian kolumnowy $\mathbf{f}_{\varphi}$ posiada postać:

$$\mathbf{f}_{\varphi} = \left\{ \begin{array}{c} \frac{-V}{U^2 + V^2} \\ U \\ \frac{U}{U^2 + V^2} \end{array} \right\}. \quad (21)$$

Do zilustrowania sposobu obliczania błędów średnich parametrów przemieszczeń służy przykład zawarty w tablicy 6. W tablicy tej podane jest obliczenie krakowianu $(\mathbf{a}^2)^{-1}$ stanowiącego odwrotność krakowianu współczynnikowego równań normalnych $\mathbf{a}^2$, zaczerpniętego z tablicy 3.

Z lewej strony w dolnej części tablicy 6 podano wielkości parametrów przemieszczeń obliczone w tablicy 3 oraz wielkości błędów średnich tych parametrów. Po prawej stronie w dolnej części tablicy 6 podano obliczenie błędów m_{ε_1} , m_{φ} według wzoru (18) z uwzględnieniem postaci krakowianów $\mathbf{f}_{\varepsilon}$, $\mathbf{f}_{\varphi}$ określonych wzorami (20), (21).

Należy tu zwrócić uwagę, że błędy średnie parametrów obliczone w tablicy 6 wyrażone są w takich samych jednostkach, jak parametry obliczone w tablicy 3. Wynik obliczenia m_{φ} jest nie mianowany i wymaga pomnożenia przez odpowiednie ϱ dla wyrażenia go w stopniach lub minutach (wyrażenie w stopniach jest bardziej przydatne ze względu na stosunkowo dużą wartość tego błędu).

Zilustrowaną wyżej analizę dokładności wykonujemy w celu zbadania, czy wyznaczone wielkości parametrów przemieszczeń można uznać za miarodajne dla stwierdzenia, że rzeczywiście nastąpiły przemieszczenia rozpatrywanej bryły. Na przykład w wyniku obliczeń dokonanych w tablicy 6 dowiadujemy się, że wyznaczona wielkość $\varepsilon_2 = 0,023 \frac{\text{mm}}{\text{m}}$ nie

Tablica 6

dx'_c	dy'_c	dz'_c	U	V	ε_2	dx'_c	dy'_c	dz'_c	U	V	ε_1
6,5437	35,7558	60,3556	-9,5538 57,9028 72,2506	-50,0574 67,4570 64,7202 148,3076	-7,1843 28,3740 10,4965 -40,1150 30,8228	4,207 -1,797 -0,966 0,522 0,414 2,997	-1,797 1,703 -0,303 0,004 0,266 -1,642	-0,966 -0,303 0,859 -0,348 -0,453 -0,417	0,522 0,004 -0,348 0,364 -0,002 -0,008 0,379 2,739	0,414 0,266 -0,453 -0,002 0,405 0,379 0,379	2,997 -1,642 -0,417 -0,008 0,379 2,739
2,5581	5,9796	7,7689	-3,7347 7,4532 1,6590	-8,3714 8,6830 0,0024 1,6831	-2,8085 4,7451 0,0046 -0,2328 0,6041	0,391 0,000 0,000 0,880 -0,001 1,811	0,167 0,000 0,000 0,831 -0,992	0,129 -0,580 -0,665 -0,252	0,603 -0,001 -0,005	0,594 0,229	1,655
-29,70	-10,00	19,53	-21,76	-6,20	2,29	2,05 6,4	1,30 4,0	0,93 2,9	0,60 1,9	0,64 2,0	1,66 5,1 $\sqrt{Q_{ii}}$ m
$dx'_c = (-29,70 \pm 6,4) \text{ mm}$	$dy'_c = (-10,00 \pm 4,0) \text{ mm}$	$dz'_c = (19,53 \pm 2,9) \text{ mm}$	$U = (-0,218 \pm 0,019) \frac{\text{mm}}{\text{m}}$	$V = (-0,062 \pm 0,020) \frac{\text{mm}}{\text{m}}$	$\varepsilon_2 = (0,023 \pm 0,051) \frac{\text{mm}}{\text{m}}$	$dx'_c = (0,225 \pm 0,018) \frac{\text{mm}}{\text{m}}$	$dy'_c = (0,002 \pm 0,002) \frac{\text{mm}}{\text{m}}$	$dz'_c = (-0,002 \pm 0,002) \frac{\text{mm}}{\text{m}}$	$U = (0,364 - 0,002) \frac{\text{mm}}{\text{m}}$	$V = (-0,002 \pm 0,002) \frac{\text{mm}}{\text{m}}$	$\varepsilon_1 = (0,0121 \pm 0,0121) \frac{\text{mm}}{\text{m}}$
						$m_{\varepsilon_1} = 3,1$	$m_{\varepsilon_2} = 3,1$	$m_{\varepsilon_3} = 3,1$	$m_{\varepsilon_4} = 3,1$	$m_{\varepsilon_5} = 3,1$	$m_{\varepsilon_6} = 3,1$

świadczy o stwierdzeniu, że nastąpił poziomy obrót bryły, bowiem błąd średni $m_{\varepsilon_2} = 0,051 \frac{\text{mm}}{\text{m}}$ jest od tej wielkości ponad dwukrotnie większy.

Niezależnie od analizy dokładności wyznaczonych parametrów przemieszczeń celowe wydaje się dokonywanie wstępnych rachunków dokładnościowych w fazie projektowania rozmieszczenia punktów kontrolowanych.

Niezależnie od dokonywania analizy dokładności wyznaczenia parametrów przemieszczeń trzeba przy projektowaniu rozmieszczenia punktów kontrolowanych zdawać sobie sprawę z tego, czy zadanie obliczenia parametrów przemieszczeń będzie wyznaczalne. Jak wiadomo, usytuowanie bryły w przestrzeni określone jest wówczas, gdy znamy usytuowanie co najmniej trzech jej punktów nie leżących na jednej prostej (to jest gdy znamy 9 współrzędnych tych punktów np. w prostokątnym układzie współrzędnych). Przemieszczenie bryły określone jest wówczas gdy potrafimy określić całkowite przemieszczenie jednego z tych punktów (A), składowe przemieszczenia drugiego punktu (B) w płaszczyźnie prostopadłej do kierunku AB oraz składowe przemieszczenia trzeciego punktu (C) wzdłuż kierunku prostopadłego do płaszczyzny zawierającej punkty ABC . Tak więc zgodnie z uprzednio wyprowadzonymi wzorami (10), jeśli znamy pozycje trzech punktów bryły, to dla wyznaczenia przemieszczenia bryły konieczna jest znajomość co najmniej 6 składowych przemieszczeń tych punktów, pozwalająca na wyznaczenie 6 parametrów przemieszczeń bryły.

Jak już uprzednio wspomniałem, w praktyce wyznaczamy poziome składowe przemieszczeń niektórych punktów i pionowe składowe przemieszczeń innych punktów obiektu. W związku z tym powyższe kryterium wyznaczalności przemieszczeń musimy zastąpić innym kryterium, dostosowanym do praktycznych możliwości a jednocześnie gwarantującym wyznaczalność parametrów przemieszczeń. Pamiętając, że przedmiotem wyznaczenia są niewielkie przemieszczenia bryły możemy posługiwać się następującymi kryteriami wyznaczalności tych przemieszczeń:

- 1) składowe przemieszczeń wzdłuż jednej osi prostokątnego układu współrzędnych trzeba wyznaczyć co najmniej na trzech punktach nie leżących na jednej prostej i nie leżących w płaszczyźnie równoległej do tej osi,

- 2) składowe przemieszczeń wzdłuż drugiej osi prostokątnego układu współrzędnych trzeba wyznaczyć co najmniej na dwu punktach nie leżących w płaszczyźnie równoległej do tej osi,

- 3) składowe przemieszczeń wzdłuż trzeciej osi prostokątnego układu współrzędnych trzeba wyznaczyć na jednym, dowolnie położonym punkcie.

O wysokiej dokładności wyznaczenia parametrów przemieszczeń bryły decyduje takie rozmieszczenie punktów, przy którym uzyskuje się najkorzystniejsze spełnienie powyższych kryteriów. Tak więc np. przy wyborze trzech punktów, na których wyznacza się składowe przemieszczeń wzdłuż jednej osi układu (pierwsze kryterium wyznaczalności) należy dążyć do umieszczenia ich w płaszczyźnie prostopadłej do tej osi. Podobnie wybór dwu punktów, na których wyznacza się składowe przemieszczeń wzdłuż drugiej osi powinien być taki, aby punkty te leżały w miarę możliwości na prostej równoległej do osi wymienionej w trzecim kryterium wyznaczalności.

Trzeba dodać, że na te zagadnienia nie zwracano dotychczas dostatecznej uwagi, co w wielu przypadkach decydowało o tym, że w wyniku pomiarów nie można było uzyskać takiego zespołu przemieszczeń punktów, który pozwalałby na wyznaczenie parametrów przemieszczeń badanego obiektu. W rezultacie uzyskiwano jedynie dane pozwalające na bardzo przybliżoną ocenę przemieszczeń obiektu.

5. Obliczanie odchyłek usytuowania punktów

Na podstawie wymiarów projektowych możemy określić współrzędne projektowe X, Y, Z wszystkich charakterystycznych punktów obiektu, wyrażając je w prostokątnym układzie współrzędnych $OXYZ$ o osiach skierowanych równoległe do osi siatki modularnej projektu. W celu określenia odchyłek usytuowania punktów charakterystycznych realizowanego obiektu wykonujemy takie pomiary i obliczenia, które pozwalają na wyznaczenie współrzędnych x, y, z tych punktów w lokalnym układzie współrzędnych prostokątnych $oxyz$. Układy projektowy i lokalny posiadają osie OZ i oz skierowane pionowo, natomiast poziome osie obu układów są od siebie odchylone odpowiednio o kąt poziomy ε . Ponadto początek układu lokalnego nie pokrywa się z początkiem układu projektowego i posiada w nim współrzędne X_o, Y_o, Z_o .

Przy określaniu odchyłek usytuowania punktów charakterystycznych zadanie polega na przeliczeniu wyznaczonych współrzędnych x, y, z zespołu punktów do układu projektowego w taki sposób, aby uzyskane współrzędne X', Y', Z' można było wykorzystać do obliczenia składowych odchyłek usytuowania punktów z wzorów:

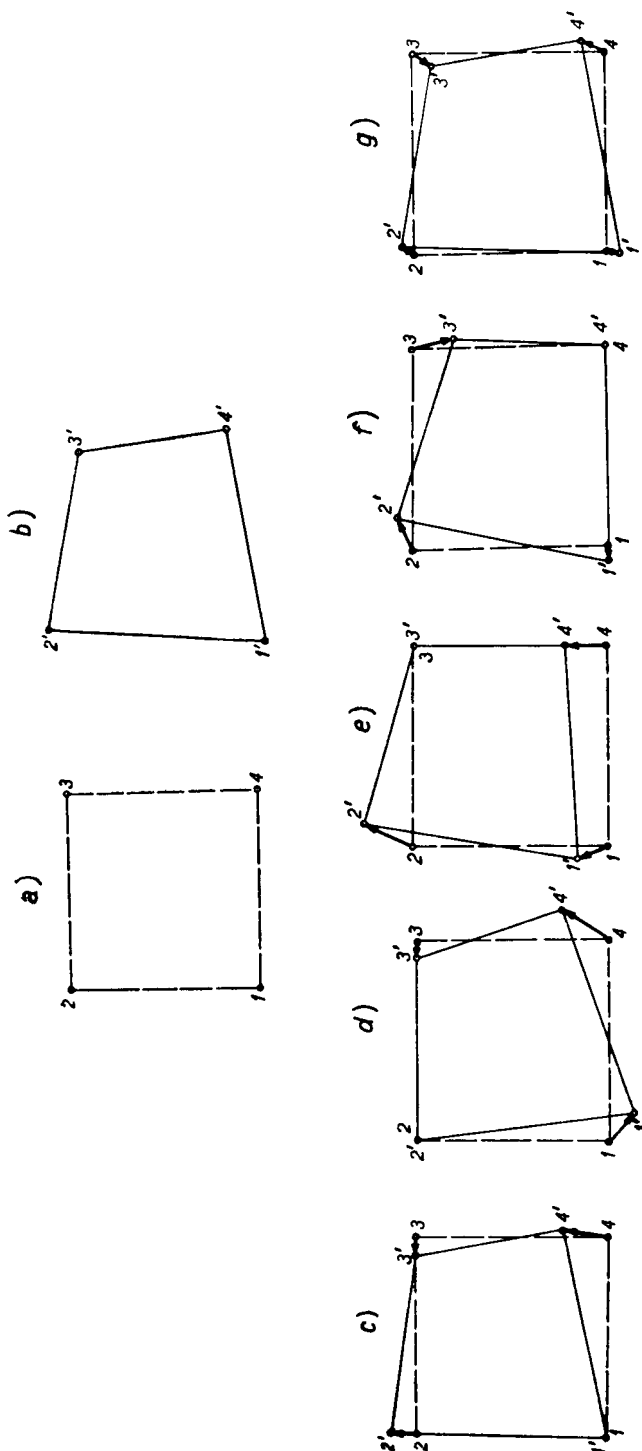
$$\begin{aligned} dX_i &= X'_i - X_i; \\ dY_i &= Y'_i - Y_i; \\ dZ_i &= Z'_i - Z_i, \end{aligned} \tag{22}$$

gdzie: i — numer rozpatrywanego punktu.

Transformacja zespołu współrzędnych x, y, z na współrzędne X', Y', Z' wykonywana bywa przy różnych, mniej lub bardziej prawidłowych i jednoznacznych założeniach. W zależności od przyjętych założeń otrzymujemy później rozmaite rozkłady odchyłek współrzędnych.

Różnice między efektami transformacji dokonanych przy różnych założeniach zilustruję na prostym przykładzie. Przyjmiemy, że wg projektu rzut poziomy fundamentu ma posiadać kształt kwadratu pokazanego na rysunku 7a. W wyniku pomiaru fundamentu stwierdzono, że jego rzut poziomy posiada kształt wskazany na rysunku 7b. Na rysunkach 7c, d, e, f, pokazano wzajemne usytuowanie figur z rysunków 7a i 7b dopasowanych wzajemnie przy kolejnym zakładaniu, że punkty 1, 2, 3, 4 i kierunki krawędzi 1—2, 2—3, 3—4, 4—1 obydwu figur pokrywają się. Na rysunkach tych oznaczono strzałkami wektory odchyłek usytuowania naroży fundamentu, które mają świadczyć o dokładności jego zrealizowania. Zauważmy, że zilustrowane sposoby dostosowania powodują różnorodne kształtowanie się odchyłek, utrudniające prawidłową ocenę dokładności zrealizowania rzutu poziomego fundamentu ze względu na przyjęcie, że niektóre punkty i kierunki nie posiadają odchyłek. Powoduje to gromadzenie się nadmiernych odchyłek na pozostałych punktach, wywołujące wrażenie mniejszej niż rzeczywista dokładności wykonania fundamentu.

Na rysunku 7g pokazano wzajemne położenie figur, przy którym poszczególne wektory odchyłek uzyskały znacznie mniejsze wartości. Nastąpiło to na skutek przyjęcia, że dopasowanie powinno być dokonane tak, aby rozkład odchyłek był bardziej równomierny. Wzajemne usytuowanie figur na rysunku 7g uzyskano na drodze graficznego ich dopasowania (figurę wg rysunku 7b narysowano na kalce, którą przesuwano po arkuszu z narysowaną figurą 7a aż do uzyskania wzajemnej pozycji dającej wrażenie równomierności rozkładu odchyłek). W tej pozycji figurę z kalki przekłuto na arkusz. Oczywiście postępowanie takie jest subiektywne i niejednoznaczne a ponadto możliwe do zastosowania jedynie w tych przypadkach, gdy operujemy małym zespołem punktów o wyznaczonych odchyłkach usytuowania i gdy wielkości odchyłek są duże w stosunku do wymiarów figury. Dlatego dopasowanie figury określonej ze współrzędnych x, y do figury projektowanej, określonej przez współrzędne X, Y lepiej jest wykonać przy wykorzystaniu metod analitycznych, posługując się zbiorami współrzędnych wyznaczonych i projektowanych zespołu punktów. Najbardziej poprawne byłoby dokonanie jednoczesnego przeliczenia całego zbioru współrzędnych x, y, z bez zniekształceń wewnętrznych na zbiór współrzędnych X', Y', Z' spełniający określone warunki w stosunku do zbioru współrzędnych projektowych X, Y, Z . Warunki te powinny powodować możliwie równomierny



Rys. 7

rozkład wartościowy i sytuacyjny zespołu odchylek współrzędnych, co możemy wyrazić w formie

$$[dX^2 + dY^2 + dZ^2] = \min. \quad (23)$$

Dopasowanie bryły określonej przez wyznaczone z pomiaru współrzędne x, y, z do bryły określonej przez współrzędne X, Y, Z na podstawie wszystkich punktów charakterystycznych obiektu jest uciążliwe i zazwyczaj niepotrzebne. W większości przypadków warunek (23) winien być spełniony dla punktów znajdujących się na podstawie montażowej rozpatrywanego obiektu, przy czym realizowany jest oddzielnie dla składowych poziomych dX, dY i dla składowych pionowych dZ . Tak więc warunek (23) zostaje zastąpiony przez dwa warunki

$$[dX^2 + dY^2] = \min, \quad (24)$$

$$[dZ^2] = \min. \quad (25)$$

Przeliczenie zbioru współrzędnych x, y dokonuje się przy wykorzystaniu wzorów na transformację, które możemy wyrazić w postaci równań poprawek:

$$\begin{aligned} X'_0 + xq \cos \varepsilon - yq \sin \varepsilon &= X + dX' = X'', \\ Y'_0 + yq \cos \varepsilon + xq \sin \varepsilon &= Y + dY' = Y'', \end{aligned} \quad (26)$$

gdzie: $X'_0, Y'_0, q \cos \varepsilon, q \sin \varepsilon$ — niewiadome,

x, y — wyrazy wolne,

dX', dY' — poprawki wyrównawcze.

Jednak rozwiązanie układu równań poprawek typu (26) prowadzi do obliczenia składowych odchylek dX', dY' , które są obciążone wpływem zmiany skali figury utworzonej przez współrzędne x, y .

Aby przy rozwiązywaniu tego układu uzyskać składowe dX, dY wolne od wpływu zniekształceń skali, trzeba narzucić na niewiadome dodatkowy warunek $q = 1$, co będzie równoznaczne z rozwiązaniem układu równań poprawek o postaci:

$$\begin{aligned} X_0 + x \cos \varepsilon - y \sin \varepsilon &= X + dX = X'; \\ Y_0 + y \cos \varepsilon + x \sin \varepsilon &= Y + dY = Y'. \end{aligned} \quad (27)$$

Zauważmy, że tabele współczynnikowe układów równań typu (26) i (27) są jednakowe i posiadają postać:

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 0 & x_i & -y_i \\ 0 & 1 & y_i & x_i \\ 1 & 0 & x_j & -y_j \\ 0 & 1 & y_j & x_j \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \quad (28)$$

W celu obliczenia niewiadomych X_o , Y_o , $\cos \epsilon$, $\sin \epsilon$ należy rozwiązać układ równań poprawek typu (26) przy zachowaniu warunku $[dX'^2 + dY'^2] = \min$, obliczając niewiadome $q \cos \epsilon$, $q \sin \epsilon$, które następnie wykorzystujemy do obliczenia funkcji $\cos \epsilon$, $\sin \epsilon$ opierając się na zależnościach:

$$\begin{aligned}\sin \epsilon &= \frac{q \sin \epsilon}{\sqrt{(q \sin \epsilon)^2 + (q \cos \epsilon)^2}}; \\ \cos \epsilon &= \frac{q \cos \epsilon}{\sqrt{(q \sin \epsilon)^2 + (q \cos \epsilon)^2}}.\end{aligned}\quad (29)$$

Obliczone wartości funkcji $\cos \epsilon$, $\sin \epsilon$ podstawiamy następnie do pierwiastka krakowianowego zamiast wartości $q \cos \epsilon$, $q \sin \epsilon$ w celu obliczenia niewiadomych X_o , Y_o zamiast niewiadomych X'_o , Y'_o .

Omówiony sposób rozwiązania układu równań poprawek z narzuceniem warunków na niewiadome zilustruję na przykładzie liczbowym zawartym w tablicy 7.

Przeliczenie zbioru współrzędnych wysokościowych z dokonuje się przy wykorzystaniu prostego wzoru:

$$z_i - \frac{[z - Z]}{n} = Z_i + dZ_i = Z'_i, \quad (30)$$

gdzie: $[z - Z]$ — suma różnic współrzędnych punktów dostosowania,
 n — liczba punktów dostosowania.

Przykład obliczenia poziomych składowych odchyłek usytuowania punktów

Przy pomiarze kontrolnym wyznaczono współrzędne x , y wielu charakterystycznych punktów budynku. Współrzędne te przeliczono na współrzędne X' , Y' przy dostosowaniu do punktów 1—4 stanowiących narożniki fundamentu budynku. W tablicy 7 pokazany jest tok obliczeń związanych z transformacją współrzędnych i obliczeniem składowych odchyłek usytuowania punktów. W dolnej części tablicy 7 pokazano przykładowo obliczenie składowych odchyłek dwu punktów na konstrukcji budynku, które nie były wykorzystane do obliczenia parametrów transformacyjnych X_o , Y_o , $\cos \epsilon$, $\sin \epsilon$. Pokazane przykładowo obliczenie polega na podstawieniu wartości parametrów transformacyjnych określonych na podstawie punktów dostosowania, do równań poprawek typu (27) zestawionych dla wszystkich punktów o wyznaczonych współrzędnych x , y .

Tablica 7

X_0	Y_0	$\cos \epsilon$	$\sin \epsilon$	l	S	Odchyłka	Nr odch.
1,000		11,545	-11,559	0,000	0,986	-0,003	dX_1
1,000		27,129	-11,666	15,580	32,043	0,002	dX_2
1,000		10,961	-97,960	0,000	-85,999	-0,023	dX_3
1,000		26,588	-98,066	15,580	-54,898	0,024	dX_4
	1,000	11,559	11,545	0,150	24,254	0,006	dY_1
	1,000	11,666	27,129	0,150	39,945	0,012	dY_2
	1,000	97,960	10,961	86,570	196,491	-0,011	dY_3
	1,000	98,066	26,588	86,570	212,224	-0,007	dY_4
4,000	4,000	76,223 219,251 21179,143	-219,251 76,223 0,000 21179,143	31,160 173,440 17810,365 1546,793	-107,868 472,914 39284,982 22582,908	8	Równanie normalne
2,000	2,000	38,112 109,626 87,800	-109,626 38,112 0,000 87,800	15,580 86,720 87,811 -0,573	-53,934 236,457 175,611 87,226		Rozwiązanie równań normalnych
		$q \cos \epsilon$ 1,000125	$q \sin \epsilon$ -0,006526	Niewiadome $q = 1,000146$ $\operatorname{tg} \epsilon = -0,006525$			
X_0 -11,623	Y_0 -11,327	$\cos \epsilon$ 0,999979	$\sin \epsilon$ -0,006525				
1,000	1,000	11,269 54,938	-54,938 11,269	0,000 43,520		0,004 0,016	dX_7 dY_7
1,000	1,000	11,241 60,164	-60,164 11,241	0,000 48,770		0,010 -0,008	dX_8 dY_8
.	.	.	.	.		.	.
.	.	.	.	.		.	.

6. Obliczenie odchyłek usytuowania powierzchni krzywoliniowych

W praktyce występuje często zagadnienie określenia odchyłek usytuowania powierzchni, które nie posiadają charakterystycznych punktów, dających się łatwo zidentyfikować w projekcie. Jako przykład mogą służyć powierzchnie żelbetowych chłodni kominowych o kształcie hiperboloidy obrotowej, powierzchnie zbiorników paliw płynnych o kształcie kuli lub elipsoidy, nakrycia dachowe o kształcie paraboloid eliptycznych,

klatki schodowe o kształcie powierzchni śrubowej itp. Zazwyczaj jesteśmy w stanie wyróżnić charakterystyczne punkty jedynie na fundamentach konstrukcji o krzywoliniowym kształcie powierzchni, natomiast punkty na powierzchni podporządkowują się warunkom określanym przez równania. Dotychczas w technice przyjęło się stosowanie konstrukcji, których powierzchnie dają się wyrazić za pomocą równania 2 stopnia o ogólnej postaci

$$AX^2 + BY^2 + CZ^2 + DXY + EXZ + FYZ + GX + HY + IZ + J = 0. \quad (31)$$

Zagadnienie wyznaczania odchyłek projektowych takich powierzchni często bywa mylone z odrębnym zagadnieniem aproksymacji wyznaczonego zbioru współrzędnych x, y, z punktów oznaczonych na rzeczywistej powierzchni konstrukcji. Zagadnienie aproksymacji występuje wówczas, gdy nie posiadamy żadnych innych danych o badanej powierzchni poza tym, że jest to zapewne powierzchnia drugiego stopnia, określona równaniem (31). Sposób aproksymacji zbioru wyznaczonych współrzędnych punktów oznaczonych na rzeczywistej powierzchni przez równanie powierzchni 2 stopnia omówiony jest szczegółowo w pracy [4].

W większości przypadków, poza faktem, że rozpatrywana powierzchnia wyraża się równaniem 2 stopnia, projekt konstrukcji pozwala na bliższe sprecyzowanie postaci tego równania i wartości jego parametrów. Tak więc, ze względu na projektowe warunki usytuowania konstrukcji możemy zazwyczaj operować równaniem powierzchni o postaci uproszczonej, odpowiadającej pokrywaniu się płaszczyzn rzutów układu projektowego $OXYZ$ z płaszczyznami symetrii powierzchni

$$AX^2 + BY^2 + CZ^2 + K = 0. \quad (32)$$

Ponieważ projekt określa szczegółowo jaka to jest powierzchnia i jakie są wartości jej parametrów możemy traktować współczynniki A, B, C, K równania (32) jako wielkości znane.

Jeśli współrzędne projektowe punktów charakterystycznych na fundamencie lub cokole konstrukcji, której powierzchnia wyrażona jest równaniem (32) o znanych parametrach, wyrazimy w układzie $OXYZ$, którego płaszczyzny rzutowe pokrywają się z płaszczyznami symetrii tej powierzchni, to możemy zbiór wyznaczonych współrzędnych x, y, z przełożyć na zbiór X', Y', Z' w dostosowaniu do tych punktów. Wówczas obliczenie składowych odchyłek punktów charakterystycznych na fundamencie odbywa się w uprzednio omówiony sposób, natomiast obliczenie odchyłek punktów wyznaczonych na rzeczywistej powierzchni obiektu, której powierzchnia projektowa określona jest równaniem (32) wymaga odmiennego podejścia. Obliczenie składowych odchyłek usytuowania tych punktów względem powierzchni projektowej sprowadza się do obliczenia

składowych odległości punktów od tej powierzchni. Przy obliczaniu tych składowych możemy posługiwać się wyprowadzonymi dalej wzorami.

Wyprowadzenie wzorów na składowe odległości punktu P o współrzędnych X', Y', Z' od powierzchni 2 stopnia określonej równaniem $AX^2 + BY^2 + CZ^2 + K = 0$, przy założeniu, że odległość ta jest niewielka

Równanie prostej prostopadłej do powierzchni drugiego stopnia danej równaniem (32), wystawionej z punktu powierzchni o współrzędnych X, Y, Z posiada postać

$$\frac{x-X}{AX} = \frac{y-Y}{BY} = \frac{z-Z}{CZ} \quad (33)$$

gdzie: x, y, z — współrzędne dowolnego punktu prostej.

Podstawiając do równania (33) zamiast x, y, z współrzędne punktu P otrzymamy

$$\frac{X'-X}{AX} = \frac{Y'-Y}{BY} = \frac{Z'-Z}{CZ}. \quad (34)$$

Przy małej odległości punktu P od powierzchni możemy napisać równanie (34) w formie uproszczonej

$$\frac{X'-X}{AX'} = \frac{Y'-Y}{BY'} = \frac{Z'-Z}{CZ'} \quad (35)$$

skąd otrzymamy:

$$\begin{aligned} Y &= Y' - \frac{BY'}{AX'}(X' - X); \\ Z &= Z' - \frac{CZ'}{AX'}(X' - X). \end{aligned} \quad (36)$$

Podstawiając wartości Y, Z wyrażone równaniami (36) do równania powierzchni (32) otrzymamy po przekształceniach i uporządkowaniu czynników równanie 2 stopnia z niewiadomą X :

$$\begin{aligned} &(A^3X'^2 + B^3Y'^2 + C^3Z'^2)X^2 + \\ &+ 2\{B^2(A-B)Y'^2X' + C^2(A-C)Z'^2X'\}X + \\ &+ B(A-B)^2Y'^2X'^2 + C(A-C)^2Z'^2X'^2 + A^2KX'^2 = 0. \end{aligned} \quad (37)$$

Równanie (37) wyrazimy w znanej postaci

$$aX^2 + bX + c = 0. \quad (38)$$

Współczynniki a, b, c równania (38) możemy obliczyć zgodnie z równaniem (37) z zależności wyrażonych w formie krakowianowej:

$$\left\{ \begin{matrix} A^3 \\ B^3 \\ C^3 \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} X'^2 \\ Y'^2 \\ Z'^2 \end{matrix} \right\} = a, \quad \left\{ \begin{matrix} 2B^2(A-B) \\ 2C^2(A-C) \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} Y'^2X' \\ Z'^2X' \end{matrix} \right\} = b, \quad \left\{ \begin{matrix} B(A-B)^2 \\ C(A-C)^2 \\ A^2K \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} Y'^2X'^2 \\ Z'^2X'^2 \\ X'^2 \end{matrix} \right\} = c. \quad (39)$$

Obliczenie współrzędnej spodka prostopadłej do powierzchni wykonuje się przy wykorzystaniu znanego wzoru

$$X_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}. \quad (40)$$

Przy wykorzystaniu wzoru (40) obliczamy współrzędną X nieznacznie różniącą się od współrzędnej X' punktu P znajdującego się w pobliżu rozpatrywanej powierzchni 2 stopnia.

Przez analogię możemy napisać równanie

$$aY^2 + b_1Y + c_1 = 0, \quad (41)$$

którego współczynniki b_1, c_1 wyrażają się w formie krakowianowej wzorami:

$$\left\{ \begin{matrix} 2A^2(B-A) \\ 2C^2(B-C) \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} X'^2Y' \\ Z'^2Y' \end{matrix} \right\} = b_1, \quad \left\{ \begin{matrix} A(B-A)^2 \\ C(B-C)^2 \\ B^2K \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} X'^2Y'^2 \\ Z'^2Y'^2 \\ Y'^2 \end{matrix} \right\} = c_1. \quad (42)$$

skąd możemy obliczyć współrzędną Y spodka prostopadłej do powierzchni

$$Y_{1,2} = \frac{-b_1 \pm \sqrt{b_1^2 - 4ac_1}}{2a}. \quad (43)$$

Podobnie napiszemy równanie

$$aZ^2 + b_2Z + c_2 = 0, \quad (44)$$

którego współczynniki b_2, c_2 wyrażają się w formie krakowianowej wzorami:

$$\left\{ \begin{matrix} 2A^2(C-A) \\ 2B^2(C-B) \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} X'^2Z' \\ Y'^2Z' \end{matrix} \right\} = b_2, \quad \left\{ \begin{matrix} A(C-A)^2 \\ B(C-B)^2 \\ C^2K \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} X'^2Z'^2 \\ Y'^2Z'^2 \\ Z'^2 \end{matrix} \right\} = c_2, \quad (45)$$

skąd możemy obliczyć współrzędną Z spodka prostopadłej do powierzchni

$$Z_{1,2} = \frac{-b_2 \pm \sqrt{b_2^2 - 4ac_2}}{2a}. \quad (46)$$

Zespół wyżej podanych wzorów pozwala na obliczenie dla każdego punktu o wyznaczonych i przetransformowanych współrzędnych X', Y', Z' współrzędnych X, Y, Z punktu na powierzchni 2 stopnia, znajdującego się na prostej prostopadłej do tej powierzchni, poprowadzonej przez punkt o współrzędnych X', Y', Z' . W rezultacie możemy obliczyć składowe odległości punktu $P(X', Y', Z')$ od powierzchni z wzorów (22) i potraktować je jako składowe odchyłki powierzchni.

Wzory (39), (42), (45) wyrażone są w formie umożliwiającej łatwe obliczanie współrzędnych X, Y, Z spodka prostopadłej dzięki temu, że współczynniki A, B, C, K równania powierzchni służą do obliczenia czynników krakowianów niezmiennych dla rozpatrywanej powierzchni, natomiast czynniki zależne od osiągniętych wartości współrzędnych X', Y', Z' wcho-

dążą do oddzielnych krakowianów. W rezultacie, jeśli posiadamy duży zbiór współrzędnych punktów wyznaczonych na rzeczywistej powierzchni konstrukcji, to w celu obliczenia odchyłek posługujemy się stale jednakowymi krakowianami kolumnowymi, zależnymi od wartości współczynników A, B, C, K oraz krakowianami, których czynniki zależą od wartości zbioru współrzędnych X', Y', Z' .

Zastosowanie wyprowadzonych wzorów zilustruję w następującym przykładzie liczbowym.

Przykład obliczenia odchyłek powierzchni krzywoliniowej

W tablicy 8 pokazany jest przykładowo przebieg obliczeń związanych z wyznaczeniem odchyłek projektowych usytuowania rzeczywistej powierzchni powłoki chłodni kominowej pokazanej na rysunku 8. Na fundamencie chłodni zidentyfikowano 4 charakterystyczne punkty nr nr 1, 2, 3, 4 o znanych współrzędnych projektowych X, Y, Z i wyznaczono ich współrzędne x, y, z w lokalnym układzie współrzędnych. Na zewnętrznej powierzchni powłoki chłodni oznaczono szereg punktów o numerach 5, 6, 7, 8, 9 ... i również wyznaczono ich współrzędne x, y, z w tym samym lokalnym układzie współrzędnych. Na podstawie danych projektowych ustalono, że projektowane współrzędne punktów na powierzchni powłoki chłodni podporządkowują się równaniu tej powierzchni o postaci

$$X^2 + Y^2 - 0,25 Z^2 - 100 = 0.$$

Wykonano przeliczenie wszystkich wyznaczonych współrzędnych x, y, z na współrzędne X', Y', Z' przy dostosowaniu do punktów charakterystycznych nr nr 1, 2, 3, 4 w sposób omówiony w 5 części pracy. W rezultacie otrzymano wartości współrzędnych X', Y', Z' podane w tablicy 8. Składowe odchyłek usytuowania punktów nr nr 1, 2, 3, 4, obliczono wprost jako różnice wg wzoru (22). Dla pozostałych punktów obliczono współrzędne X, Y, Z spodków prostopadłych do powierzchni określonej równaniem $X^2 + Y^2 - 0,25 Z^2 - 100 = 0$ i dopiero w stosunku do tak otrzymanych współrzędnych obliczono odchyłki składowych usytuowania punktów.

W dolnej części tablicy 8 pokazano przykładowo tok obliczeń współrzędnych X kilku punktów. Zauważmy, że zamiast obliczać oddzielnie dla każdego punktu współczynniki a, b, c zastosowano obliczenie zespołów tych współczynników dla kolejnych punktów, podając obliczone wielkości jako kolejne elementy krakowianów kolumnowych $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$. Elementy te użyto następnie do obliczenia współrzędnych X kolejnych punktów przy wykorzystaniu wzoru (40). W podobny sposób zostały obliczone współrzędne Y, Z spodków prostopadłych (obliczeń tych nie zamieszczono już w tablicy 8).

Tablica 8

Nr pktu	X'	Y'	Z'	X	Y	Z	Obliczone współrzędne spodków prostopadłych			dX	dY	dZ
							X	Y	Z			
1	-0,013	15,592	-23,991	0,000	15,600	-24,000				-0,013	-0,008	0,009
2	-15,584	0,015	-24,033	-15,600	0,000	-24,000				0,016	0,015	-0,033
3	-0,038	-15,618	-24,007	0,000	-15,600	-24,000				-0,038	-0,018	-0,007
4	15,634	0,011	-23,969	15,600	0,000	-24,000				0,034	0,011	0,031
5	10,382	-0,012	6,073				10,449	-0,012	6,063	-0,067	0,000	0,010
6	0,070	-10,390	6,076				0,071	-10,450	6,068	-0,001	0,060	0,008
7	-10,376	0,043	6,052				-10,446	0,043	6,042	0,070	0,000	0,010
8	-0,003	10,401	6,066	$X^2 + Y^2 - 0,25Z^2 - 100 = 0$			-0,003	10,449	6,059	0,009	-0,048	0,007
9	10,188	0,020	-3,983				10,196	0,020	-3,982	-0,008	0,000	-0,001
.	.	.	.				.	.	.	.	.	.
.	.	.	.				.	.	.	.	.	.

Obliczenie współrzędnych X spodków prostopadłych

$$\begin{Bmatrix} 1,0000 \\ 1,0000 \\ -0,0156 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 107,786 & 0,005 & 107,661 & 0,000 \\ 0,000 & 107,952 & 0,002 & 108,181 \\ 36,881 & 36,918 & 36,627 & 36,796 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 107,211 \\ 107,381 \\ 107,092 \end{Bmatrix} = a$$

$$\begin{Bmatrix} 0,0000 \\ 0,1562 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 382,899 & 2,584 - 380,042 & -0,110 & 161,622 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 59,809 \\ 0,404 \\ -59,363 \\ -0,017 \end{Bmatrix} = b$$

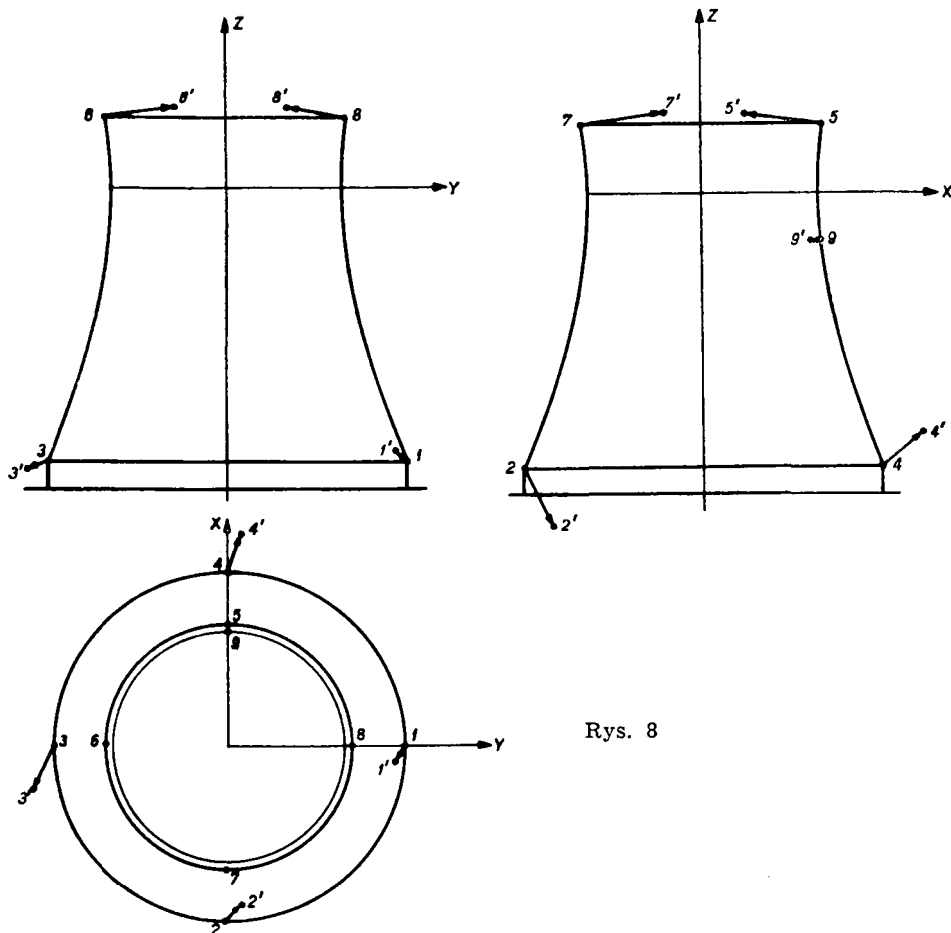
$$\begin{Bmatrix} 0,0000 \\ -0,3906 \\ -100,0000 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 3975,255 & 0,185 & 3943,299 & 0,00030 & 1646,604 \\ 107,786 & 0,005 & 107,661 & 0,00001 & 103,795 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -12331,335 \\ -0,572 \\ -12306,353 \\ -0,001 \\ -11022,664 \end{Bmatrix} = c$$

$$\begin{matrix} X_5 & X_6 & X_7 & X_8 & X_9 \\ 10,449 & 0,071 & -10,446 & -0,003 & 10,196 \end{matrix}$$

Ponieważ wzory (40), (43), (46) pozwalają na obliczenie współrzędnych dwu punktów przebicia powierzchni 2 stopnia przez prostą prostopadłą do powierzchni wystawioną z punktu o wyznaczonych współrzędnych X' , Y' , Z' należy przy obliczaniu rozstrzygnąć, które z tych współrzędnych dotyczą punktu stanowiącego spodek prostopadłej. Rozstrzygnięcie to opieramy na fakcie, że rozpatrywany punkt o współrzędnych X' , Y' , Z' znajduje się blisko powierzchni w związku z czym spodek prostopadłej powinien posiadać współrzędne X , Y , Z bliskie wartościom współrzędnych X' , Y' , Z' .

Zauważmy, że obliczenie współrzędnych X , Y , Z oraz odchyłek dX , dY , dZ możemy łatwo skontrolować, dzięki temu, że powinny one podporządkować się równaniu (34), które wyrazimy tu w formie

$$\frac{dX}{AX} = \frac{dY}{BY} = \frac{dZ}{CZ}.$$



Rys. 8

7. Generalizacja wyznaczonych odchyłek usytuowania punktów

Generalizacja odchyłek usytuowania punktów ma na celu odróżnienie odchyłek usytuowania od odchyłek kształtu kontrolowanego obiektu lub jego fragmentu oraz wyrażenie odchyłek usytuowania za pomocą minimalnej ilości parametrów.

Przy generalizacji odchyłek możemy posługiwać się zależnościami (10) podstawiając w miejsce składowych wektora przemieszczeń $\overline{dp'}$ składowe wektora odchyłek $\overline{dP'}$ a w miejsce współrzędnych x, y, z współrzędne projektowe X, Y, Z . Otrzymujemy w rezultacie:

$$\begin{aligned} dX'_c - ZU - Y\varepsilon_2 &= dX + v_{dX} = dX'; \\ dY'_c - ZV + X\varepsilon_2 &= dY + v_{dY} = dY'; \\ dZ'_c + XU + YV &= dZ + v_{dZ} = dZ'. \end{aligned} \quad (47)$$

Parametry dX'_c , dY'_c , dZ'_c , U , V , ε_2 wyznaczamy z rozwiązania układu równań typu (47) zestawionych dla wszystkich wyznaczonych składowych odchyłek usytuowania punktów. Następnie obliczamy wielkości dX' , dY' , dZ' , które są składowymi odchyłek usytuowania punktów, wywołanymi wyłącznie przez odchyłki usytuowania obiektu lub jego fragmentu. Wielkości v_{dX} , v_{dY} , v_{dZ} są składowymi odchyłek usytuowania punktów, wywołanymi wyłącznie przez odchyłki kształtu obiektu lub jego fragmentu. Rozwiązanie układu równań odchyłek typu (47) następuje przy zachowaniu warunku minimum sumy kwadratów składowych odchyłek kształtu lub przy zachowaniu warunku minimum sumy kwadratów stosunków tych odchyłek do błędów średnich wyznaczenia składowych dX , dY , dZ .

Zastosowanie praktyczne wyżej podanych równań odchyłek lub ich kombinacji wyjaśnię w dalej podanych przykładach liczbowych. W szczególności pragnę wyjaśnić stosowanie kombinacji równań odchyłek przy generalizacji prowadzonej dla dwu różnych celów:

1) w celu określenia charakterystycznych tendencji w kształtowaniu się odchyłek fragmentów obiektu podczas montażu, pozwalających na wprowadzanie korekt przy montowaniu kolejnych fragmentów obiektu (kontrola międzyoperacyjna),

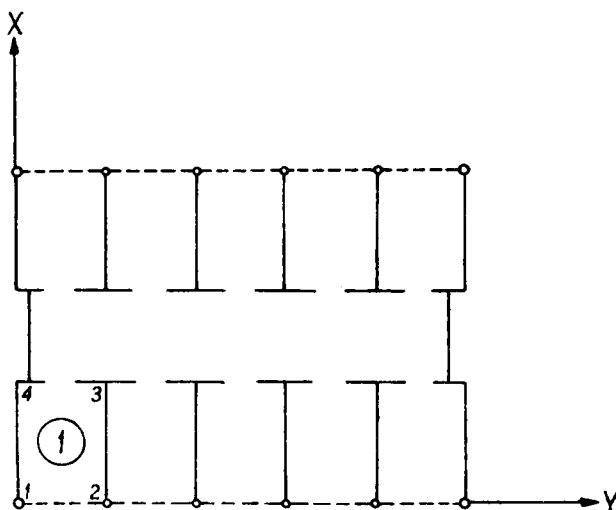
2) w celu określenia charakterystycznych tendencji w kształtowaniu się odchyłek zmontowanego obiektu, pozwalających na dokonanie ogólnej oceny prawidłowości montażu (kontrola przy odbiorze technicznym obiektu).

Podstawę do przykładów generalizacji odchyłek stanowi zestawienie składowych odchyłek usytuowania punktów wyznaczonych przy badaniu budynku monolitycznego, zawarte w tablicy 9.

Tablica 9

Punkt Po- ziom	1			2			3			4			Rzędne proj. Z
	dX	dY	dZ	dX	dY	dZ	dX	dY	dZ	dX	dY	dZ	
I	-30	-25	-80	-3	-41	-53	-23	-81	-29	-40	-71	-32	2 700
II	-35	-54	-24	-5	-80	-29	-8	-68	-25	-25	-75	-7	10 800
III	-38	-39	-37	-18	-63	-37	-5	-37	-29	-43	-56	-31	18 900
IV	-56	-52	-19	-38	-50	-17	-29	-51	-15	-33	-66	-14	27 000
V	-71	-72	-71	-64	-83	-76	-59	-70	-67	-54	-100	-67	35 100
VI	-108	-74	-48	-96	-69	-53	-90	-55	-51	-82	-94	-55	43 200
Współ- rzedne proj.	100	320		100	5180		7690	5180		7690	320		

W tablicy 9 zestawione zostały składowe odchyłki usytuowania punktów 1—4 stanowiących narożniki pomieszczenia nr 1 na 6 kondygnacjach budynku, którego rzut poziomy pokazany jest na rysunku 9.



Rys. 9

Przykład 1 generalizacji odchyłki usytuowania punktów

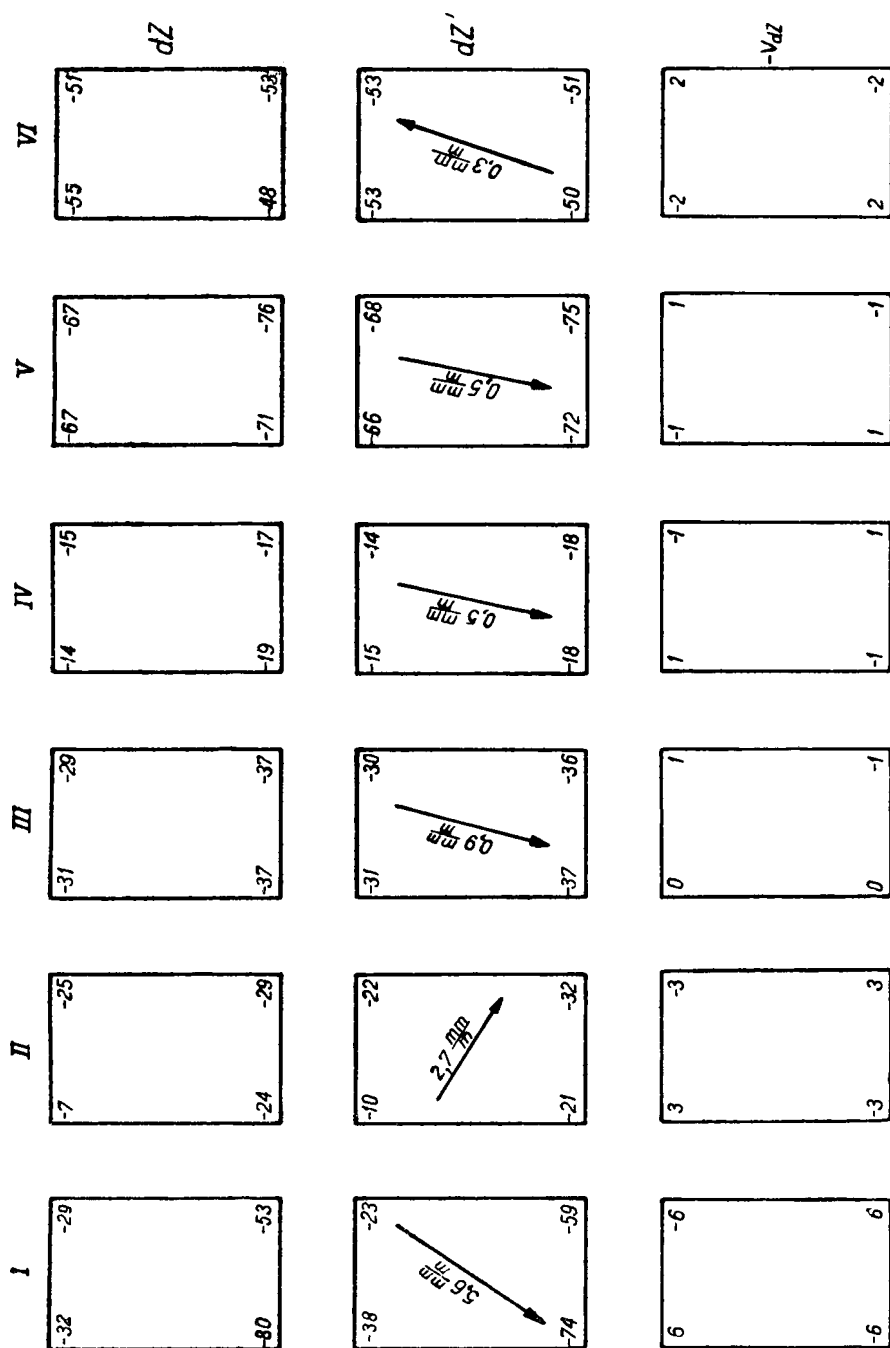
Na podstawie wyznaczonych składowych dZ odchyłki wysokościowego usytuowania punktów (oznaczonych na stropach w pobliżu naroży pomieszczeń) obliczono w tablicy 10 zgeneralizowane wielkości dZ'_c , U , V dla poszczególnych kondygnacji. W tym celu dla wyznaczonych na każdej

kondygnacji odchyłek dZ czterech punktów zestawiono równania odchyłek typu $dZ'_c + XU + YV = dZ + v_{dZ} = dZ'$.

W równaniach tych odchyłki wyrażono w mm natomiast współrzędne punktów w metrach. W wyniku rozwiązania sześciu układów takich równań otrzymano dla każdej kondygnacji wartości parametrów odchyłek usytuowania dZ' , U , V oraz wartości parametrów φ , ε_1 obliczone na pod-

Tablica 10

	dZ_c'	U	V	dZ	v_{dZ}	dZ'	φ	$\varepsilon_1 \frac{\text{mm}}{\text{m}}$
I. 1	1,0	0,1	0,3	-80	6	-74	33°	5,6
2	1,0	0,1	5,2	-53	-6	-59		
3	1,0	7,7	5,2	-29	6	-23		
4	1,0	7,7	0,3	-32	-6	-38		
	-75,4	4,7	3,1	Niewiadome				
II. 1	1,0	0,1	0,3	-24	3	-21	301°	2,7
2	1,0	0,1	5,2	-29	-3	-32		
3	1,0	7,7	5,2	-25	3	-22		
4	1,0	7,7	0,3	-7	-3	-10		
	-20,4	1,4	-2,3	Niewiadome				
III. 1	1,0	0,1	0,3	-37	0	-37	12°	0,9
2	1,0	0,1	5,2	-37	1	-36		
3	1,0	7,7	5,2	-29	-1	-30		
4	1,0	7,7	0,3	-31	0	-31		
	-37,6	0,9	0,2	Niewiadome				
IV. 1	1,0	0,1	0,3	-19	1	-18	11°	0,5
2	1,0	0,1	5,2	-17	-1	-18		
3	1,0	7,7	5,2	-15	1	-14		
4	1,0	7,7	0,3	-14	-1	-15		
	-18,5	0,5	0,1	Niewiadome				
V. 1	1,0	0,1	0,3	-71	-1	-72	331°	1,0
2	1,0	0,1	5,2	-76	1	-75		
3	1,0	7,7	5,2	-67	-1	-68		
4	1,0	7,7	0,3	-67	1	-66		
	-72,4	0,9	-0,5	Niewiadome				
VI. 1	1,0	0,1	0,3	-48	-2	-50	198°	0,3
2	1,0	0,1	5,2	-53	2	-51		
3	1,0	7,7	5,2	-51	-2	-53		
4	1,0	7,7	0,3	-55	2	-53		
	-50,3	-0,3	-0,1	Niewiadome				



Rys. 10

stawie U, V zgodnie z wzorami (13). Dla poszczególnych punktów otrzymano też wartości v_{dz}, dZ' wynikające z podstawienia obliczonych parametrów odchyłek do odpowiednich równań.

Należy tu podkreślić, że wyznaczone wielkości składowych dZ odchyłek usytuowania punktów są zależne zarówno od odchyłek wykonania elementów stropowych (odchyłek tych elementów od płaskości), jak też od odchyłek wysokości i pochylenia powierzchni podparcia elementów stropowych. Obliczone wielkości dZ' możemy praktycznie uważać za najbardziej prawdopodobne składowe odchyłek wysokości podparcia płyty w jej narożnych punktach, natomiast wielkości $-v_{dz}$ są odchyłkami płyt stropowych od płaskości. Tak więc w wyniku dokonanej generalizacji odróżniliśmy wielkości składowych odchyłek spowodowane przez błędy montażu (dZ') i przez błędy wykonania płyt stropowych ($-v_{dz}$). Wyniki generalizacji dokonanej w tablicy 10 wskazują wyraźnie, że błędy montażu osiągnęły znacznie większe wartości od błędów wykonania płyt stropowych. Osiągnięte wyniki generalizacji odchyłek dZ przedstawiono na rysunku 10.

Przykład 2 generalizacji odchyłek usytuowania punktów

Na podstawie wyznaczonych składowych dX, dY odchyłek usytuowania punktów na poszczególnych kondygnacjach obliczono w tablicy 11 zgeneralizowane wielkości parametrów odchyłek usytuowania $dX'_c, dY'_c, \varepsilon_2$. Charakteryzują one poziome odchyłki usytuowania kwater na poszczególnych poziomach budynku. Ponieważ na poziome odchyłki usytuowania ścian nie miały wpływu odchyłki wysokościowe stropów, trzeba tu było zastosować równania odchyłek typu:

$$dX'_c - Y_{\varepsilon_2} = dX + v_{dX} = dX';$$

$$dY'_c + X_{\varepsilon_2} = dY + v_{dY} = dY'.$$

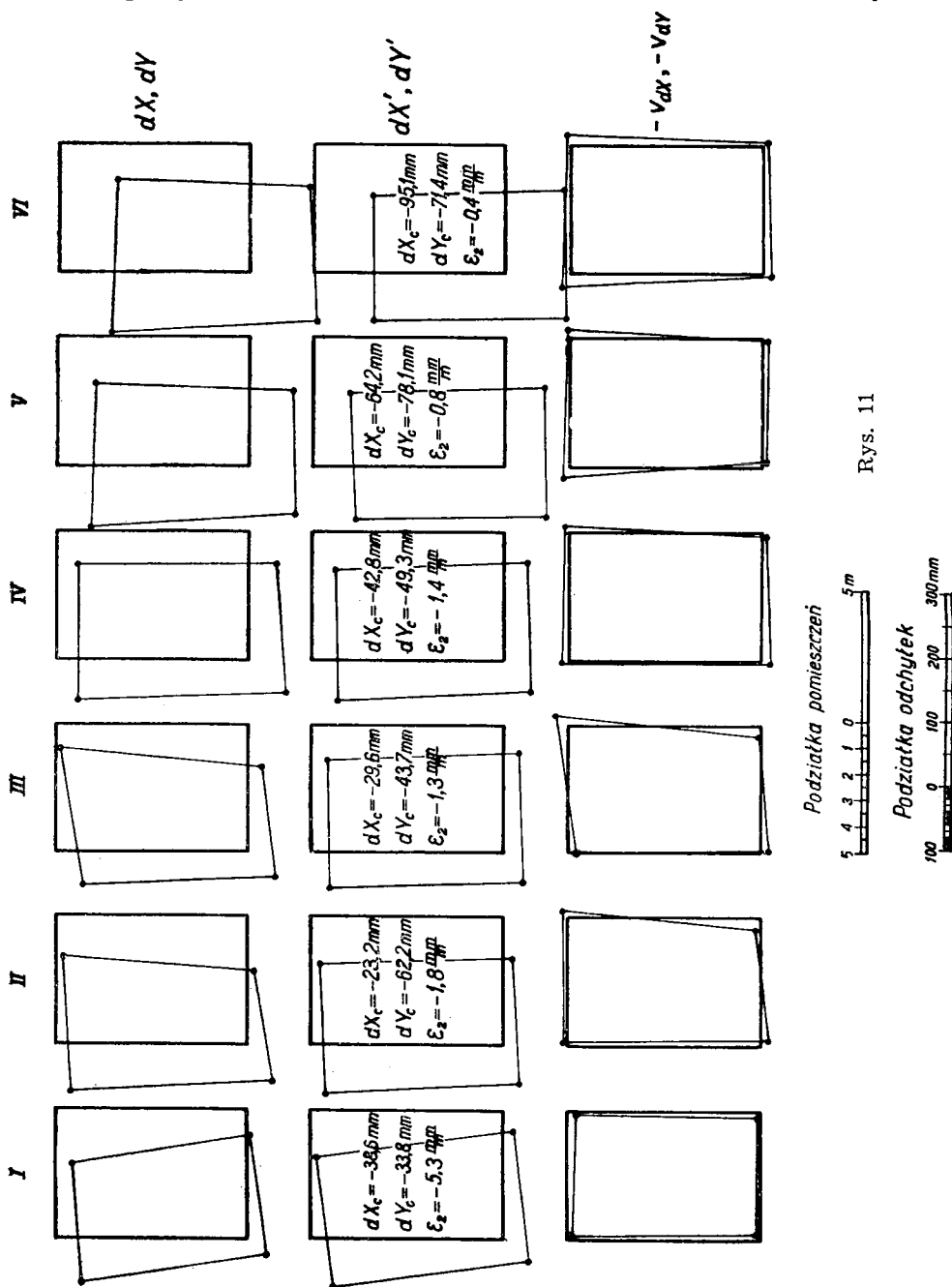
W równaniach tych odchyłki wyrażono w mm a współrzędne w metrach. W wyniku rozwiązania sześciu układów równań zawierających po osiem równań obliczono dla każdej kondygnacji wartości parametrów $dX'_c, dY'_c, \varepsilon_2$. Dla poszczególnych punktów otrzymano też wartości v_{dX}, v_{dY}, dX', dY' wynikające z podstawienia obliczonych wartości parametrów odchyłek do odpowiednich równań.

Uzyskane wyniki obliczeń pozwalają zauważyć charakterystyczną tendencję polegającą na tym, że składowe odchyłek v_{dX}, v_{dY} osiągnęły na wszystkich kondygnacjach zbliżone do siebie, nieduże wartości, natomiast składowe odchyłek dX', dY' wzrastają stopniowo w miarę wysokości budynku. W tym miejscu wyjaśnię, że rozpatrywany budynek był wykonywany metodą monolityczną w szalunkach ślizgowych zawieszonych na

Tablica 11

	dX'_c	dY'_c	ε_2	dX (dY)	V	dX' (dY')
I. 1	1,0		-0,3	-30	-7	-37
2	1,0		-5,2	-3	-8	-11
3	1,0		-5,2	-23	12	-11
4	1,0		-0,3	-40	3	-37
1		1,0	0,1	-25	-9	-34
2		1,0	0,1	-41	7	-34
3		1,0	7,7	-81	6	-75
4		1,0	7,7	-71	-4	-75
	-38,6	-33,8	-5,3	Niewiadome		
II. 1	1,0		-0,3	-35	12	-23
2	1,0		-5,2	-5	-9	-14
3	1,0		-5,2	-8	-6	-14
4	1,0		-0,3	-25	2	-23
1		1,0	0,1	-54	-8	-62
2		1,0	0,1	-80	18	-62
3		1,0	7,7	-68	-8	-76
4		1,0	7,7	-75	-1	-76
	-23,2	-62,2	-1,8	Niewiadome		
III. 1	1,0		-0,3	-38	9	-29
2	1,0		-5,2	-18	-5	-23
3	1,0		-5,2	-5	-18	-23
4	1,0		-0,3	-43	14	-29
1		1,0	0,1	-39	-5	-44
2		1,0	0,1	-63	19	-44
3		1,0	7,7	-37	-17	-54
4		1,0	7,7	-56	2	-54
	-29,6	-43,7	-1,3	Niewiadome		
IV. 1	1,0		-0,3	-56	14	-42
2	1,0		-5,2	-38	2	-36
3	1,0		-5,2	-29	-7	-36
4	1,0		-0,3	-33	-9	-42
1		1,0	0,1	-52	3	-49
2		1,0	0,1	-50	1	-49
3		1,0	7,7	-51	-9	-60
4		1,0	7,7	-66	6	-60
	-42,8	-49,3	-1,4	Niewiadome		
V. 1	1,0		-0,3	-71	7	-64
2	1,0		-5,2	-64	4	-60
3	1,0		-5,2	-59	-1	-60
4	1,0		-0,3	-54	-10	-64
1		1,0	0,1	-72	-6	-78
2		1,0	0,1	-83	5	-78
3		1,0	7,7	-70	-14	-84
4		1,0	7,7	-100	16	-84
	-64,2	-78,1	-0,8	Niewiadome		
VI. 1	1,0		-0,3	-108	13	-95
2	1,0		-5,2	-96	3	-93
3	1,0		-5,2	-90	-3	-93
4	1,0		-0,3	-82	-13	-95
1		1,0	0,1	-74	3	-71
2		1,0	0,1	-69	-2	-71
3		1,0	7,7	-55	-19	-74
4		1,0	7,7	-94	20	-74
	-95,1	-71,4	-0,4	Niewiadome		

platformie montażowej obejmującej cały rzut poziomy budynku. Wyniki generalizacji wskazują, że szalunki ślizgowe służące do wykonywania ścian rozpatrywanego pionowego ciągu pomieszczeń nr 1 nie ulegały du-



Rys. 11

zym zniekształceniom, natomiast w miarę wznoszenia budynku następowało duże poziome przemieszczanie się pomostu montażowego. Osiągnięte wyniki generalizacji odchyłek poziomych dX , dY przedstawiono na rysunku 11.

Gdyby omówione w powyższych przykładach generalizowanie odchyłek odbywało się stopniowo, w miarę montażu budynku, to wyznaczone wartości parametrów odchyłek usytuowania mogłyby wprost posłużyć do wprowadzania korekt usytuowania pomostu montażowego. Korekty wzajemnego usytuowania szalunków dla poszczególnych ścian i stropów należałoby wprowadzać wówczas w oparciu o wyznaczone składowe v_{dX} , v_{dY} , dZ' .

Przykład 3 generalizacji odchyłek usytuowania punktów

W tablicy 12 zawarty jest przykład generalizacji wszystkich wyznaczonych składowych poziomego usytuowania punktów dX , dY . Generalizacja odbywa się tu w oparciu o równania odchyłek w postaci:

$$dX'_c - ZU - Y_{\varepsilon_2} = dX + v_{dX} = dX';$$

$$dY'_c - ZV + X_{\varepsilon_2} = dY + v_{dY} = dY'.$$

W wyniku rozwiązania układu 48 równań odchyłek obliczono w tablicy 12 wartości parametrów dX'_c , dY'_c , U , V , ε_2 . W obliczeniu tym nie uwzględniono równań odchyłek wysokościowych dZ jako nie posiadających w danym wypadku wpływu na kształtowanie się odchyłek poziomych (stropy na poszczególnych kondygnacjach były układane na specjalnych wspornikach zastabilizowanych w ścianach już po wykonaniu ścian).

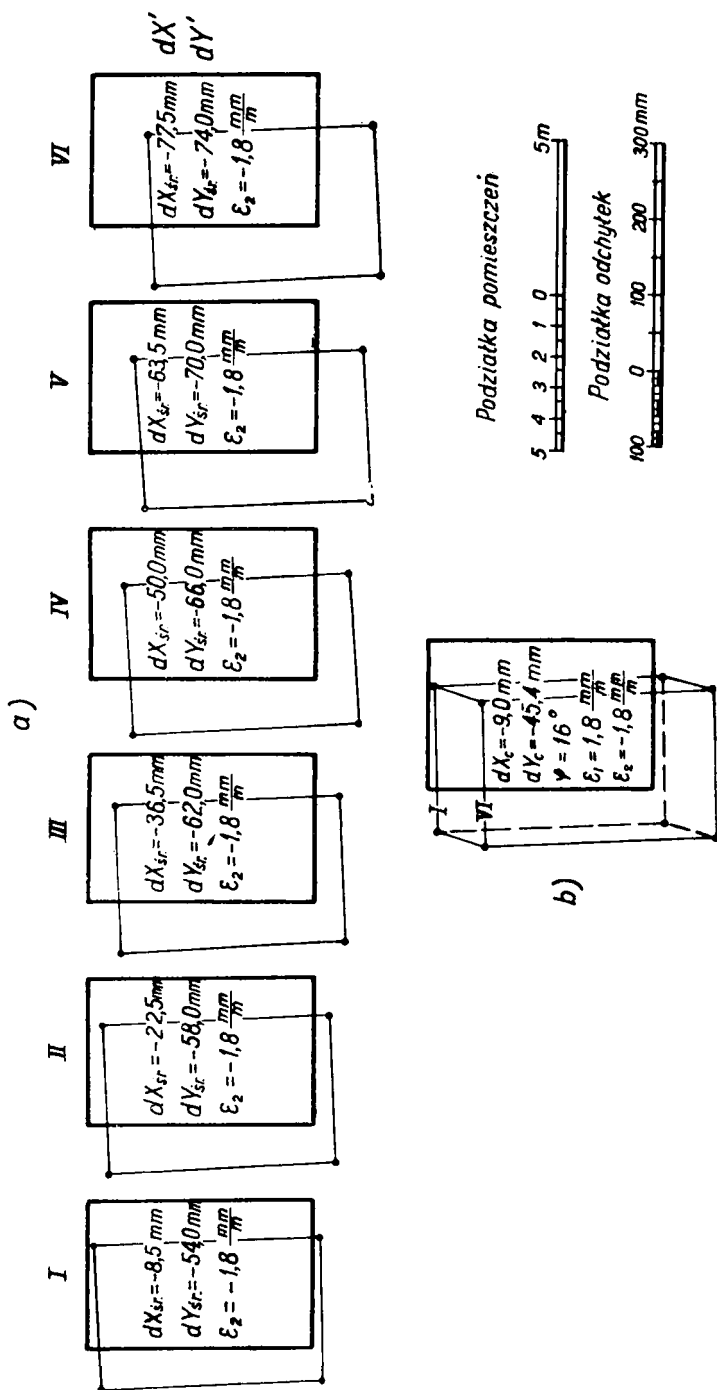
Wyniki generalizacji dokonanej w tablicy 12 potwierdzają uprzednio zauważoną tendencję do systematycznego przemieszczania się pomostu montażowego, co wyraziło się tu w wyznaczonej wielkości odchylenia ciągu pomieszczeń nr 1 od pionu o $\varepsilon_1 = 1,8 \frac{\text{mm}}{\text{m}}$.

Wyznaczone wartości dX'_c , dY'_c , ε_2 charakteryzują najbardziej prawdopodobne odchyłki usytuowania pomieszczenia nr 1 na poziomie $Z = 0$. Rezultaty generalizacji odchyłek dokonanej w tablicy 12 przedstawione zostały na rysunku 12.

Na rysunku 12a wyraźnie widoczne jest stopniowe powiększanie się poziomych odchyłek usytuowania kolejnych kondygnacji, proporcjonalnie do wysokości. Świadczy to o odchyleniu ciągu pomieszczeń od pionu, co wyraźniej jeszcze uwydatnione zostało na rysunku 12b. Na rysunku tym pokazano graniastosłup pochylony, którego dolną podstawą jest rzut pomieszczenia na poziomie I, a górną podstawę tworzy rzut pomieszczenia na poziomie VI.

Tablica 12

Nr p.	dX'_c	dY'_c	U	V	ε_z	dX (dY)	S	v	dX' (dY')
I. 1	1,0		-2,7		-0,3	-30	-32,0	17	-13
2	1,0		-2,7		-5,2	-3	-9,9	-1	-4
3	1,0		-2,7		-5,2	-23	-29,9	19	-4
4	1,0		-2,7		-0,3	-40	-42,0	27	-13
II. 1	1,0		-10,8		-0,3	-35	-45,1	8	-27
2	1,0		-10,8		-5,2	-5	-20,0	-13	-18
3	1,0		-10,8		-5,2	-8	-23,0	-10	-18
4	1,0		-10,8		-0,3	-25	-35,1	-2	-27
III. 1	1,0		-18,9		-0,3	-38	-56,2	-3	-41
2	1,0		-18,9		-5,2	-18	-41,1	-14	-32
3	1,0		-18,9		-5,2	-5	-28,1	-27	-32
4	1,0		-18,9		-0,3	-43	-61,2	2	-41
IV. 1	1,0		-27,0		-0,3	-56	-82,3	2	-54
2	1,0		-27,0		-5,2	-38	-69,2	-8	-46
3	1,0		-27,0		-5,2	-29	-60,2	-17	-46
4	1,0		-27,0		-0,3	-33	-59,3	-21	-54
V. 1	1,0		-35,1		-0,3	-71	-105,4	3	-68
2	1,0		-35,1		-5,2	-64	-103,3	5	-59
3	1,0		-35,1		-5,2	-59	-98,3	0	-59
4	1,0		-35,1		-0,3	-54	-88,4	-14	-68
VI. 1	1,0		-43,2		-0,3	-108	-150,5	26	-82
2	1,0		-43,2		-5,2	-96	-143,4	23	-73
3	1,0		-43,2		-5,2	-90	-137,4	17	-73
4	1,0		-43,2		-0,3	-82	-124,5	0	-82
I. 1		1,0		-2,7	0,1	-25	-26,6	-22	-47
2		1,0		-2,7	0,1	-41	-42,6	-6	-47
3		1,0		-2,7	7,7	-81	-75,0	20	-61
4		1,0		-2,7	7,7	-71	-65,0	10	-61
II. 1		1,0		-10,8	0,1	-54	-63,7	3	-51
2		1,0		-10,8	0,1	-80	-89,7	29	-51
3		1,0		-10,8	7,7	-68	-70,1	3	-65
4		1,0		-10,8	7,7	-75	-77,1	10	-65
III. 1		1,0		-18,9	0,1	-39	-56,8	-16	-55
2		1,0		-18,9	0,1	-63	-80,8	8	-55
3		1,0		-18,9	7,7	-37	-47,2	-32	-69
4		1,0		-18,9	7,7	-56	-66,2	-13	-69
IV. 1		1,0		-27,0	0,1	-52	-77,9	-7	-59
2		1,0		-27,0	0,1	-50	-75,9	-9	-59
3		1,0		-27,0	7,7	-51	-69,3	-22	-73
4		1,0		-27,0	7,7	-66	-84,3	-7	-73
V. 1		1,0		-35,1	0,1	-72	-106,0	9	-63
2		1,0		-35,1	0,1	-83	-117,0	20	-63
3		1,0		-35,1	7,7	-70	-96,4	-7	-77
4		1,0		-35,1	7,7	-100	-126,4	23	-77
VI. 1		1,0		-43,2	0,1	-74	-116,1	7	-67
2		1,0		-43,2	0,1	-69	-111,1	2	-67
3		1,0		-43,2	7,7	-55	-89,5	-26	-81
4		1,0		-43,2	7,7	-94	-128,5	13	-81
	24,00		-550,80		-66,00	-1053,00	-1645,80	$\frac{V}{U} = 0,28$ $\varphi = 16^\circ$	
		24,00	-17233,56	-550,80	93,60	-1525,00	-1959,20		
				-17233,56	1514,70	32173,20	50370,66		
					-2148,12	37200,60	51735,24		
					1037,16	-3952,90	-3521,56	$\varepsilon_i = 1,8 \frac{\text{mm}}{\text{m}}$	
	4,90		-112,41		-13,47	-214,90	-335,88		
		4,90	67,81	-112,41	19,10	-311,43	-399,84		
				67,81	0,01	118,22	186,03		
					-0,02	32,34	100,12		
					22,16	-40,61	-18,45		
	-8,97	-45,41	1,74	0,48	-1 83	Niewiadome			



Rys. 12

8. Związki między przemieszczeniami a odchyłkami usytuowania punktów

W literaturze i instrukcjach technicznych często spotykamy się z pomieszaniem pojęć: przemieszczeń, odkształceń, odchyłek usytuowania i odchyłek kształtu. W świetle podanych na wstępie definicji i omówień zawartych w niniejszej pracy jasne stają się różnice między tymi pojęciami. Z podanych definicji wynika, że istnieją związki między przemieszczeniami i odchyłkami usytuowania punktów polegające na tym, że wielkości odchyłek usytuowania punktów mogą powstawać w wyniku błędów trasowania, wykonania elementów i ich montażu oraz odkształceń i przemieszczeń obiektu. Nadmierne przemieszczenia i odkształcenia mogą być w wielu przypadkach przyczyną powstawania odchyłek o niedopuszczalnych wielkościach. Ponieważ często zapomina się o wpływie odkształceń i przemieszczeń na wielkości odchyłek, powstaje wówczas kontrowersja między przedstawicielami nadzoru budowlanego, którzy upatrują przyczynę nadmiernych odchyłek w pomyłkach tyczenia, a pracownikami obsługi geodezyjnej, którzy są skłonni upatrywać przyczynę nadmiernych odchyłek w pomyłkach montażu. Aby uniknąć tego rodzaju nieporozumień należy obejmować kontrolą geodezyjną zarówno odchyłki, jak i przemieszczenia obsługiwanych obiektów. Niezbędna przy tym jest umiejętność przeliczania uzyskiwanych rezultatów, pozwalająca na określenie składowych przemieszczeń dowolnych punktów obiektu na podstawie zaobserwowanych składowych przemieszczeń punktów zastabilizowanych w innych miejscach. Do takich celów możemy posługiwać się wyprowadzonymi tu wzorami, służącymi do generalizacji. Omawiane zagadnienie zilustruję na prostym przykładzie liczbowym.

Przykład określenia przemieszczenia dowolnego punktu obiektu

Przy montażu budynku stwierdzono między innymi, że punkt i o współrzędnych projektowych $X_i = 15\ 000$, $Y_i = 5000$, $Z_i = 47\ 000$ (w mm) wykazuje nadmierną odchyłkę usytuowania, której składowe wyniosły $dX = 37$, $dY = -42$, $dZ = -24$. Niezależnie od wyznaczania odchyłek prowadzono od momentu rozpoczęcia montażu ścian budynku kontrolę osiadań czterech reperów zastabilizowanych na fundamencie na poziomie $Z = -0,5$ m przy jego narożach o współrzędnych $X_1 = 0$, $Y_1 = 0$, $X_2 = 15\ 000$, $Y_2 = 0$, $X_3 = 0$, $Y_3 = 26\ 000$, $X_4 = 15\ 000$, $Y_4 = 26\ 000$. W wyniku pomiaru stwierdzono, że do momentu wystąpienia nadmiernej odchyłki usytuowania punktu i nastąpiły osiadania reperów na fundamencie o wielkościach $dz_1 = -25$, $dz_2 = -36$, $dz_3 = -2$, $dz_4 = -10$. Korzystając z równań odkształceń typu $dz'_c + xU + yV = dz + v_{dz}$, w których współrzędne x , y utożsamiono ze współrzędnymi projektowymi narożni-

ków fundamentu, obliczone zostały w tablicy 13 wartości parametrów przemieszczeń dz'_c , U , V . Korzystając z obliczonych wartości parametrów przemieszczeń obliczono składowe przemieszczenia punktu i spowodowane nierównomiernym osiadaniem budynku. Do tego celu posłużono się wzorami: $dx_i = -Z_i U$, $dy_i = -Z_i V$, $dz_i = dz_c + X_i U + Y_i V$ (jako Z_i przyjęto różnicę wysokości punktu i w stosunku do poziomu reperów). Otrzymane wartości składowych przemieszczeń punktu i $dx_i = 30$, $dy_i = -45$, $dz_i = -30$ okazały się bliskie wartości składowych odchyłek usytuowania tego punktu, co wyraźnie wskazuje na to, że przyczyną nadmiernych odchyłek usytuowania punktu były jego przemieszczenia wynikłe pod wpływem pochylenia i osiadania.

Posługiwanie się zademonstrowaną przykładowo metodą obliczania wpływu przemieszczeń na odchyłki usytuowania może posiadać duże znaczenie praktyczne znacznie ułatwiając zadania nadzoru budowlanego i pogłębiając znajomość zależności odchyłek od przemieszczeń.

Tablica 13

dz'_c	U	V	dz	S	V_{dz}
1,0			-25,0	-24,0	-0,7
1,0	15,0		-36,0	-20,0	0,7
1,0		26,0	-2,0	25,0	0,8
1,0	15,0	26,0	-10,0	32,0	-0,8
4,0	30,00	52,00	-73,00	13,00	
	450,00	390,00	-690,00	180,00	
		1352,00	-312,00	1482,00	
2,0	15,0	26,0	-36,5	6,5	
	15,0	0,0	-9,5	5,5	
		26,0	24,5	50,5	
-25,67	-0,64	0,94	Niewiadome		
	-47,5		$30 = dx_i$		
		-47,5	$-45 = dy_i$		
1,0	15,0	5,0	$-30 = dz_i$		

LITERATURA

- [1] Hausbrandt St.: Rachunki geodezyjne. PPWK, Warszawa 1953
- [2] Janusz W.: Wstęp do generalizacji wyników pomiarów odchyłek projektowych i odkształceń urządzeń technicznych. Prace IGiK Tom XV Zeszyt 2(35) 1968
- [3] Lazzarini T.: Geodezyjne pomiary odkształceń i ich zastosowanie w budownictwie. PPWK, Warszawa 1955

- [4] Powroźnik T.: Geodezyjne metody badań odkształceń budowli i konstrukcji powłokowych. Mat. IV krajowej konferencji katedr geodezji wydziałów niegeodezyjnych. 1965

Recenzował Prof. dr Tadeusz Lazzarini

Rękopis złożono w Redakcji w maju 1968 r.

ВОЙЦЕХ ЯНУШ

МЕТОДА СЛОЖНОГО ОБОБЩЕНИЯ РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ И ОТКЛОНЕНИЙ ПОЛОЖЕНИЯ ТОЧЕК

Резюме

Работа содержит вывод формул позволяющих на производство сложного обобщения результатов измерений перемещений и отклонений положения точек находящихся на поверхности рассматриваемого тела.

В качестве введения к рассматриваемому здесь вопросу следует считать статью „Введение к обобщению результатов измерений проектных отклонений и деформаций технических устройств” (Труды ИГиК, том XV, № 2 (35), 1968).

Сложное обобщение перемещений точек сводится к установлению параметров перемещений тела на основе вычисленных векторов $d\bar{p}$ множества точек находящихся на поверхности тела.

В результате этого обобщения получается 6 параметров определяющих перемещение тела, а именно: dx'_c , dy'_c , dz'_c — слагаемые параллельного перемещения тела, ϵ_1 — угол изменения уклона, φ — направление изменения уклона, ϵ_2 — поворот тела в уровне. Вычисление этих параметров осуществляется путем решения системы уравнений деформации. Вид уравнений деформации характеризуют формулы:

$$\begin{aligned} dx'_c - z \cdot U - y \cdot \epsilon_2 &= dx + v_{dx} = dx', \\ dy'_c - z \cdot V + x \cdot \epsilon_2 &= dy + v_{dy} = dy', \\ dz'_c + x \cdot U + y \cdot V &= dz + v_{dz} = dz', \end{aligned}$$

в которых:

x, y, z — приближенное значение координат точек, для которых установлено слагаемые перемещений,

dx, dy, dz — определенные слагаемые перемещения точек (свободные члены уравнений деформации),

dx', dy', dz' — слагаемые перемещения точек вызванного исключительно влиянием перемещения тела,

v_{dx}, v_{dy}, v_{dz} — слагаемые перемещения точек исключительно под влиянием деформации тела,

$dx'_c, dy'_c, dz'_c, U, V, \epsilon_2$ — определенные параметры перемещения тела.

Параметры ϵ_1, φ вычисляются на основе полученных параметров U, V с помощью следующих формул:

$$\varphi = \arctg \frac{V}{U}, \quad \epsilon_1 = \sqrt{U^2 + V^2}.$$

Решение системы уравнений деформации реализуется при условии

$$[v_{dx}^2 + v_{dy}^2 + v_{dz}^2] = \min.$$

В случае если слагаемые dx , dy , dz перемещений точек получается с разными средними ошибками m_{dx} , m_{dy} , m_{dz} , тогда систему уравнений деформации следует уравновесить по точности, путём разделения каждого уравнения на среднюю ошибку определения соответствующего слагаемого. Тогда решение уравновешенной системы уравнений деформации производится при условии

$$\left[\left(\frac{v_{dx}}{m_{dx}} \right)^2 + \left(\frac{v_{dy}}{m_{dy}} \right)^2 + \left(\frac{v_{dz}}{m_{dz}} \right)^2 \right] = \min.$$

Решение уравновешенной точности системы уравнений деформации ведет к добавочной оценке выступления или невыступления деформации тела которого перемещения подлежат определению. В случае когда в результате обобщения получается столь малые слагаемые деформации v_{dx} , v_{dy} , v_{dz} что выполняется неравенство

$$\sqrt{\frac{\left[\left(\frac{v_{dx}}{m_{dx}} \right)^2 + \left(\frac{v_{dy}}{m_{dy}} \right)^2 + \left(\frac{v_{dz}}{m_{dz}} \right)^2 \right]}{n_n}} < 1 + \frac{1}{\sqrt{2n_n}},$$

в котором n_n обозначает количество излишних наблюдений, тогда можно судить, что деформации тела фактически не наблюдается, полученные же их величины являются вызванными исключительно ошибками определения слагаемых перемещений.

В работе даются условия определяемости перемещений, которые зависят от расположения точек для которых определяются слагаемые перемещений dx , dy , dz . С целью определения перемещений тела является необходимым определение полного перемещения по крайней мере одной точки (А), перемещение второй точки (В) в плоскости перпендикулярной к направлению АВ, а также перемещение третьей точки (С) вдоль направления перпендикулярного к плоскости совмещающей точки А, В, С. На практике в отдельных точках не определяется всех трех слагаемых перемещений dx , dy , dz вдоль трёх осей прямоугольной системы координат $Oxyz$. Поэтому сформулированные условия определяемости заменяется в работе условиями гарантирующими определяемость перемещений тела при ограниченных и дифференцированных определениях слагаемых перемещений отдельных точек. Независимо от условий определяемости в работе описывается способ выполнения анализа точности определения параметров перемещения тела.

В дальнейшей части работы описываются способы использования зависимостей выведенных для сложного обобщения отклонений положения точек находящихся на поверхности исследуемого объекта.

Отклонения положения точек определенные с помощью слагаемых dX , dY , dZ , являющиеся разностью координат X' , Y' , Z' полученных в результате измерений и выраженных в проектной системе и проектных координат X , Y , Z тех же точек. Обобщение отклонений сводится к решению системы уравнений отклонений вида:

$$dX'_c - Z \cdot U - Y \cdot \epsilon_2 = dX + v_{dx} = dX',$$

$$dY'_c - Z \cdot V + X \cdot \epsilon_2 = dY + v_{dy} = dY',$$

$$dZ'_c + X \cdot U + Y \cdot V = dZ + v_{dz} = dZ',$$

в которых

X, Y, Z — это приближённые значения проектных координат точек, для которых определено слагаемые отклонений,

dX, dY, dZ — определенные слагаемые отклонений положения точек,

dX', dY', dZ' — слагаемые отклонения положения точек исключительно под влиянием отклонения локализации объекта,

$v_{dx} \ v_{dy} \ v_{dz}$ — слагаемые отклонения положения точек исключительно под влиянием изменений формы объекта,

$dX'_c, dY'_c, dZ'_c \ U, V, \epsilon_2$ — параметры определяющие отклонение локализации объекта.

Параметры φ, ϵ_1 вычисляются на основе параметров U, V способом приведенным выше.

Решение системы уравнений отклонений должно быть выполнено при условии минимум суммы квадратов отклонений от формы объекта.

В работе приводится ряд примеров употребления рассматриваемого метода обобщения, иллюстрирующих способ действий и практические эффекты возникающие из возможности установления различий между перемещением тела и его деформацией, а также между отклонениями локализации и изменений формы. В частности в примерах обращается внимание на те случаи, когда деформация не имеет случайного характера, дающего возможность применения условий минимума сумм квадратов применительно ко всем определяемым слагаемым.

WOJCIECH JANUSZ

METHOD OF COMPLEX GENERALIZATION OF RESULTS OF SURVEYS OF DISPLACEMENTS AND DEVIATIONS OF CONTROL POINTS

Summary

The author presents formulae by means of which a complex generalization can be made of the results of surveys of displacements and deviations of control points stabilized on the surface of an investigated object. A prelude to this problem was an article: „Introduction into generalization of results of surveys of deviations from plans and of deformations of technical equipment” (Prace IGiK Vol. XV Fasc. 2(35), 1968).

A complex generalization of displacements of control points involves the determination of parameters of the object's displacement, using as basis determined vectors of the displacements $\overline{dp}$ of the set of control points established on the surface of the object. As the result of this generalization one establishes six parameters which denote the displacement of the object; these parameters are: dx'_c, dy'_c, dz'_c , i.e. the components of a parallel displacement of the object, ϵ_1 — the angle of the change in tilt, — the direction of the change in tilt, and ϵ_2 — the twist in the position of the object. The calculation of these parameters is performed by solving the system of deformation equations. The forms of the deformation equations are defined by the following formulae:

$$dx'_c - z \cdot U - y \cdot \epsilon_2 = dx + v_{dx} = dx',$$

$$dy'_c - z \cdot V + x \cdot \epsilon_2 = dy + v_{dy} = dy',$$

$$dz'_c + x \cdot U + v \cdot V = dz + v_{dz} = dz',$$

where: x, y, z — the approximate values of the coordinates of those control points whose coordinates changes (displacements) have been determined,
 dx, dy, dz — the determined values of the displacement of the control points (the unencumbered expression in the deformation equations),
 dx', dy', dz' — the components of the displacements of the control points, exclusively due to displacements of the object,
 v_{dx}, v_{dy}, v_{dz} — the components of the displacements of the control points, exclusively due to deformations of the object,
 $dx'_c, dy'_c, dz'_c, U, V, \varepsilon_2$ — the calculated parameters of the displacements of the object.

The values of parameters ε_1, φ are obtained from the calculated parameters of U, V on the basis of the formulae.

$$\varphi = \arctg \frac{V}{U},$$

$$\varepsilon_1 = \sqrt{U^2 + V^2}.$$

The solution of the system of deformation equations is obtained when maintaining the condition that $[v_{dx}^2 + v_{dy}^2 + v_{dz}^2] = \min$. In case that the components dy, dz of the displacements of the control points have been determined with various mean errors m_{dx}, m_{dy}, m_{dz} , it is necessary to compensate as to its accuracy the system of the deformation equations before solving it; this is done by dividing each equation by the mean error in the determination of its respective component. In this way the solution of the compensated system of the deformation equations is obtained when maintaining the condition that

$$\left[\left(\frac{v_{dx}}{m_{dx}} \right)^2 + \left(\frac{v_{dy}}{m_{dy}} \right)^2 + \left(\frac{v_{dz}}{m_{dz}} \right)^2 \right] = \min.$$

Any time that a system of deformation equations compensated as to accuracy is solved, this gives an additional estimation whether there has taken place, or not, a deformation of the object for which any displacements are to be determined. Should the above generalization yield such small components of deformations v_{dx}, v_{dy}, v_{dz} that the following inequality is satisfied:

$$\sqrt{\frac{\left[\left(\frac{v_{dx}}{m_{dx}} \right)^2 + \left(\frac{v_{dy}}{m_{dy}} \right)^2 + \left(\frac{v_{dz}}{m_{dz}} \right)^2 \right]}{n_n}} < 1 + \frac{1}{\sqrt{2n_n}},$$

(where n_n — the number of superabundant observations) we may assume that in fact no deformations of the object have taken place and that the values ascribed to such deformations are exclusively the result of errors in the determination of the components of the imagined displacements.

The author presents in his paper the conditions under which it is possible to determine displacements of the object — conditions which depend on the distribution of the control points with their determined components of displacement dx, dy, dz . Indispensable for determining displacements of the object is to establish first the full displacement of at least one control point (A), the displacement of a second control point (B) in a plane perpendicular to direction AB, and the displacement of a third control point (C) along the direction perpendicular to the plane containing the three points A, B, C. In practice, usually the determination of indi-

vidual control points does not involve all three components of displacement dx , dy , dz along the three axes of an orthogonal system of the coordinates $Oxyz$. For this reason, in field practice the above presuppositions have been replaced by conditions under which the possibility of determining displacements of the object is warranted by the application of limited and diversified determinations of the components of displacements of the individual control points; and independently of the conditions for determinations as stated above, the author describes his method of analyzing the accuracy of the determination of the parameters of how the object has been displaced.

In the further part of his paper the author discusses how to make use of the determined dependences in order to carry out the complex generalization of the deviations in the position of the control points marked on the surface of the investigated object.

The deviations in the position of the control points are defined by the components dX , dY , dZ which indicate the differences between what the survey shows and what is marked in the planned system of coordinates by X' , Y' , Z' , and the truly intended coordinates X , Y , Z for the same three control points. The generalization of these deviations is based on the solution of the set of deviation equations expressed by:

$$dX'_c - Z \cdot U - Y \cdot \varepsilon_2 = dX + v_{dX} = dX',$$

$$dY'_c - Z \cdot V + Y \cdot \varepsilon_2 = dY + v_{dY} = dY',$$

$$dZ'_c + X \cdot U + Y \cdot V = dZ + v_{dZ} = dZ',$$

where: X , Y , Z — the approximate values of the planned coordinates of the control points for which the components of their deviations have been determined,

dX , dY , dZ — the determined components of the deviations of the position of the points,

dX' , dY' , dZ' — the components of the deviations of the position of the points caused exclusively by deviations of the position of the object,

v_{dX} , v_{dY} , v_{dZ} — the components of the deviations of the position of the points caused exclusively by deviations in the shape of the object,

dX'_c , dY'_c , dZ'_c , U , V , ε_2 — the parameters indicating deviations in the position of the object.

The parameters φ_1, ε_1 are calculated from parameters U , V in the manner previously discussed.

The solution of the set of equations of deviations should be obtained, while satisfying the condition that the sum of the squares of the deviations of the form of the object is a minimum.

In his paper the author adds a number of examples how to apply the discussed method of generalization, illustrating the procedure and the practical effect resulting from the possibility of distinguishing displacements of the object from its deformations, and deviations in position from deviations in shape. In these examples he calls particular attention to instances when deformations do not bear an accidental character, which would allow to apply the condition of a minimum in the sum of the squares in relation to all the determined components.