PRACE INSTYTUTU GEODEZJI I KARTOGRAFII

Tom XV, Zeszyt 2/35, 1968

JERZY GAŻDZICKI

528.59:65.011.56:513.10

Algorytm aproksymacyjnego kreślenia linii prostych koordynatografem automatycznym

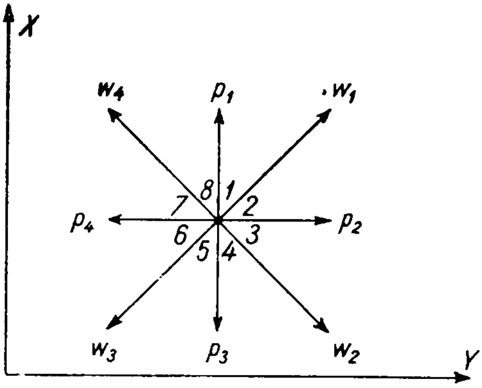
W wielu rodzajach zastosowań elektronicznych maszyn cyfrowych zachodzi potrzeba przedstawienia wyników obliczeń w postaci graficznej, niejednokrotnie bardziej przejrzystej i łatwiejszej do interpretacji od postaci cyfrowej. Tak jest między innymi i w geodezji, gdzie końcowym efektem procesu produkcyjnego jest z reguły mapa. Do sporządzania różnorodnych rysunków na podstawie cyfrowych wyników obliczeń służą urządzenia automatycznie kreślące, zwane dość często koordynatografami automatycznymi. Są one sterowane programowo przez elektroniczną maszynę cyfrową lub przez własne, specjalistyczne układy licząco-sterujące.

Przy konstruowaniu koordynatografów automatycznych, a także przy ich praktycznym stosowaniu, niezbędna jest znajomość zwięzłych i skutecznych algorytmów umożliwiających wykreślanie z założoną dokładnością linii — w szczególności linii prostych. W pracy niniejszej przedstawia się algorytm kreślenia linii aproksymującej odcinek prostej łączący dwa punkty o danych współrzędnych ortogonalnych. Cechą charakterystyczną, a jednocześnie zaletą tego algorytmu jest to, że w trakcie jego realizacji nie są wykonywane działania mnożenia i dzielenia. Przed opracowaniem algorytmu założono, że pisak koordynatografu kreśląc wykonuje jednostkowe przesunięcia, przedstawione na rysunku 1 w postaci 8 wektorów. Cztery z tych wektorów — p_1, p_2, p_3, p_4, nazwiemy wektorami p o d s t a w o w y m i .Są one równoległe do osi układu współrzędnych, a ich długość d, wyrażająca się w praktyce dziesiątymi lub setnymi częściami milimetra, określa dokładność kreślenia.

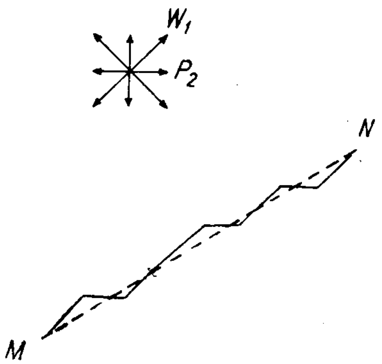
Pozostałe cztery wektory w y p a d k o w e w_1, w_2, w_3, w_4, są sumami wektorów podstawowych. Długość każdego z wektorów wypadkowych wynosi $d\sqrt{2}$.

Przedstawione założenie odpowiada typowej konstrukcji koordynatografu, posiadającego dla obydwóch osi niezależne układy napędowe uruchamiane silnikami krokowymi. Wykonanie pojedynczego kroku przez jeden z dwóch silników krokowych powoduje przesunięcie pisaka określone jednym z wektorów podstawowych. Natomiast przy równoczesnym uruchomieniu obydwóch silników pisak przesuwa się wzdłuż jednego z wektorów wypadkowych. Na rysunku 2 pokazano wykreśloną w ten sposób linię łamaną aproksymującą odcinek prostej MN.

Nietrudno zauważyć, że dla aproksymacji dowolnej prostej należy wykonywać jednostkowe przesunięcia wzdłuż co najwyżej dwóch różnych wektorów: jednego podstawowego i jednego wypadkowego. Np. przy



Rys. 1



Rys. 2

kreśleniu linii tworzącej z osią X kąt mniejszy od 45°, a więc położonej w sektorze 1 (rys. 1) należy wykonywać przesunięcia p_1 i w_1; wykonanie innych przesunięć spowoduje zwiększenie błędów aproksymacji. Linia łamana MN na rysunku 2 wykreślona została z tych względów przesunięciami p_2, w_1.

Przypuśćmy, że pisak koordynatografu znajduje się w punkcie $M(X_M, Y_M)$ oraz że należy połączyć ten punkt z punktem $N(X_N, Y_N)$ linią aproksymującą odcinek MN. Przyjmiemy, że współrzędne obydwóch punktów są całkowitymi wielokrotnościami długości wektorów podstawowych d. Przyrosty współrzędnych odcinka MN oznaczymy przez x, y:

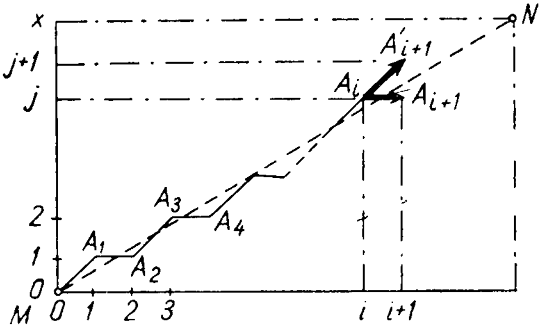
$$x = X_N - X_M,$$
$$y = Y_N - Y_M.$$

Dla skupienia uwagi założymy jeszcze dodatkowo, że kreślona linia znajduje się w sektorze 2, co oznacza, że

$$y \geqslant x \geqslant 0.$$

Wynika stąd dalej, że ogólna liczba jednostkowych przesunięć wynosi y, przy czym $y - x$ spośród nich są to przesunięcia p_2, zaś pozostałe w liczbie x — przesunięcia w_1. Konstruując linię łamaną aproksymującą odcinek prostej MN postawimy warunek, aby bezwzględna wartość różnicy odciętych dowolnego punktu linii łamanej i punktu odcinka MN o tej samej rzędnej nie przekraczała $\frac{d}{2}$. Jest rzeczą oczywistą, że wystarczy tu analizować położenie kolejnych punktów załamania linii aproksymującej.

Wprowadzimy nowy układ współrzędnych o osiach równoległych do osi układu pierwotnego i początku położonym w punkcie M. Współrzędne punktu załamania linii A_i określające położenie pisaka po i przesunięciach oznaczymy przez j, i zgodnie z rysunkiem 3. Przed wykreśleniem następnego odcinka linii łamanej należy zbadać, przy którym z dwóch możliwych przesunięć w_1, p_2 uzyskamy lepszą aproksymację.



Rys. 3

W punkcie odcinka MN o rzędnej $i+1$ odcięta wynosi

$$\frac{x}{y}(i+1).$$

Wobec tego wykonując przesunięcie p_2 dojdziemy do punktu A_{i+1} i otrzymamy różnicę odciętych równą

$$\frac{x}{y}(i+1)-j.$$

Natomiast wykonując przesunięcie w_1 osiągniemy punkt A_{i+1} charakteryzujący się różnicą odciętych

$$j+1-\frac{x}{y}(i+1).$$

Przesunięcie p_2 należy zatem wykonać wtedy, gdy spełniona jest nierówność

$$\frac{x}{y}(i+1)-j < j+1-\frac{x}{y}(i+1).$$

W przeciwnym przypadku należy wykonać przesunięcie w_1.

Analizując ten proces nietrudno zauważyć, że różnica odciętych punktu załamania kreślonej linii osiągniętego po $i+1$ przesunięciach oraz punktu odcinka MN o tej samej rzędnej wynosi

$$f_{i+1} = f_i - \frac{x}{y} d + k,$$

gdzie f_i jest analogiczną różnicą odpowiadającą punktowi A_i, zaś $k = 0$ lub d, zależnie od wyniku badania nierówności.

Ponieważ $f_0 = 0$ oraz $\frac{x}{y} d \leqslant d$, wobec tego

$$|f_i| \leqslant \frac{d}{2} \quad (i = 1,2 \ldots y)$$

zgodnie z postawionym warunkiem. Mamy przy tym oczywiście $f_y = 0$.

Otrzymaną nierówność przekształcimy, wymnażając ją obustronnie przez y

$$x(i+1) - y \cdot j < y(j+1) - x(i+1)$$

i zapisując w postaci

$$2x + 2x \cdot i < y + 2y \cdot j .$$

Analogiczne nierówności mogą być również wyprowadzone dla pozostałych siedmiu sektorów. Można też posługiwać się jedną nierównością ogólną

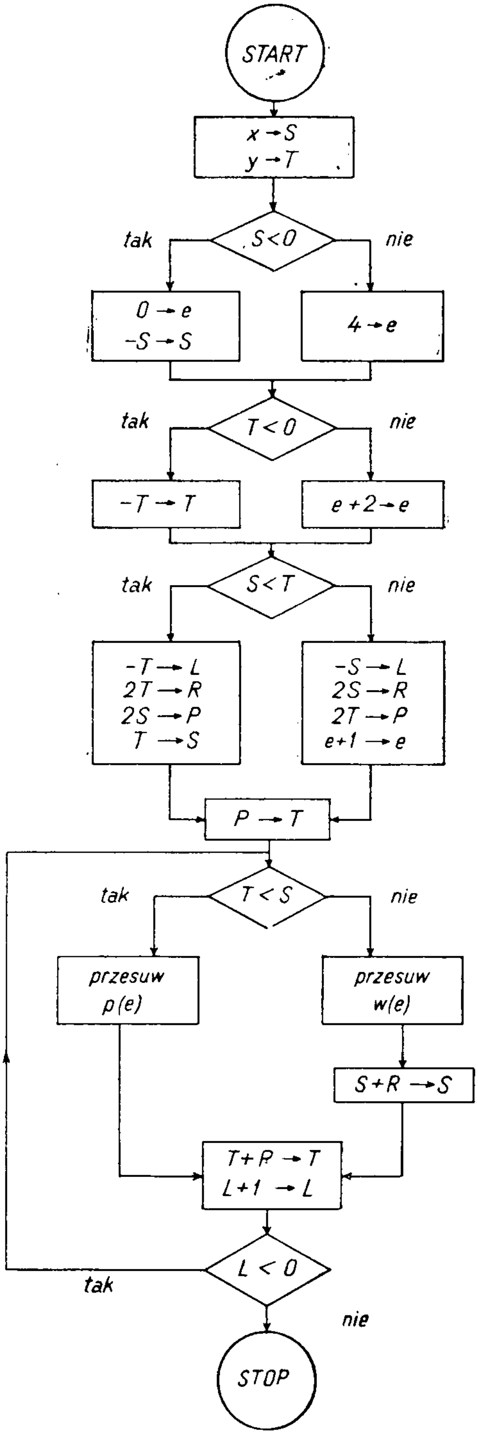
$$2a + 2a \cdot i < b + 2b \cdot j ,$$

jeśli będziemy posługiwali się bezwzględnymi wartościami przyrostów współrzędnych odcinka MN i przyjmiemy, że b jest większą (dokładniej: nie mniejszą) z tych bezwzględnych wartości, zaś a drugą z nich. Gdy nierówność ta jest spełniona, wówczas wykonywane jest przesunięcie określone odpowiednim wektorem podstawowym, gdy nie — wykonuje się przesunięcie określone wektorem wypadkowym.

Na rysunku 4 przedstawiony został schemat blokowy algorytmu umożliwiającego kreślenie linii dowolnie zorientowanych względem osi układu współrzędnych. Danymi początkowymi są przyrosty współrzędnych $x = X_N - X_M$, $y = Y_N - Y_M$, z których przynajmniej jeden jest różny od zera.

Zależnie od wielkości przyrostów ustalana jest wartość parametru e określającego sektor, w którym znajduje się kreślona linia oraz odpowiadający temu sektorowi wektor podstawowy $p(e)$ i wypadkowy $w(e)$.

Pierwsza część schematu obejmuje operacje wstępne: badanie wielkości przyrostów, utworzenie ich wartości bezwzględnych i ustalenie wartości parametru e. W drugiej części przedstawiono właściwy proces

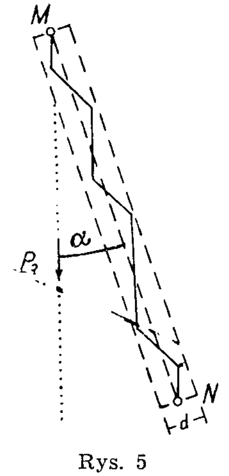

START
x → S
y → T
S<0
tak
nie
0 → e
-S → S
4 → e
T<0
tak
nie
-T → T
e+2 → e
S<T
tak
nie
-T → L
2T → R
2S → P
T → S
-S → L
2S → R
2T → P
e+1 → e
P → T
T<S
tak
nie
przesuw
p(e)
przesuw
w(e)
S+R → S
T+P → T
L+1 → L
L<0
tak
nie
STOP

Rys. 4

kreślenia, polegający na wykonywaniu przesuwów pisaka $p(e)$ lub $w(e)$ zależnie od wyników badania ostatniej z podanych nierówności. Występujące w schemacie blokowym symbole L, P, R, S, T mogą być utożsamione ze zmieniającymi się w procesie realizacji algorytmu zawartościami 5 rejestrów lub komórek pamięci.

e	sektor	$p(e)$	$w(e)$
0	6	p_4	w_3
1	5	p_3	w_3
2	3	p_2	w_2
3	4	p_3	w_2
4	7	p_4	w_4
5	8	p_1	w_4
6	2	p_2	w_1
7	1	p_1	w_1

Na zakończenie zauważmy, że odległości punktów załamania kreślonej linii od aproksymowanej prostej nie przekraczają $\frac{d}{2}\cos\alpha$, gdzie α jest kątem jaki tworzy ta prosta z odpowiednim wektorem podstawowym.



Rys. 5

W związku z tym każda z wykreślonych linii mieści się w pasie o szerokości nie przekraczającej d (rys. 5).

Recenzował: Prof dr Stefan Hausbrandt

Rękopis złożono w Redakcji w listopadzie 1967 r

ЕЖИ ГАЗДЗИЦКИ

АЛГОРИФМ ЧЕРЧЕНИЯ АППРОКСИМИРУЮЩЕГО ПРЯМЫЕ ЛИНИИ С ПОМОЩЬЮ АВТОМАТИЧЕСКОГО КООРДИНАТОГРАФА

Резюме

В работе дается алгорифм черчения линии аппроксимирующей отрезок прямой соединяющий две точки с известными ортогональными координатами. В процессе исполнения черчения не производится действий умножения и деления.

Алгорифм предназначается для управления координатографами, которые способны выполнять автоматически восемь единичных передвижений представленных на чертеже 1 в виде векторов.

JERZY GAŻDZICKI

THE ALGORISM OF APPROXIMATE TRACING OF STRAIGHT LINES BY THE USE OF THE AUTOMATIC COORDINATOGRAPH

Summary

The author presents the algorism of tracing a line which approximates a section of a straight line joining two points for which the orthogonal coordinates are given. No multiplication nor division is involved in this operation.

This algorism is meant to be applied in the operation of coordinatographs which can automatically perform the eight unit movements shown in Fig. 1 in the form of vectors.