

WOJCIECH BYCHAWSKI  
ANDRZEJ NOWOSIELSKI

528.738:528.063.1

## **Obliczanie współrzędnych terenowych punktów wyznaczanych metodą fotogrametrii naziemnej z wykorzystaniem punktów o znanych współrzędnych geodezyjnych**

### **Wstęp**

Metody fotogrametrii naziemnej z łatwością radzą sobie z zadaniem określania współrzędnych terenowych na podstawie pomierzonych na zdjęciach współrzędnych tłowych oraz przy znajomości elementów orientacji zewnętrznej i wewnętrznej zdjęć tworzących stereogram.

Sprzęt do wykonywania zdjęć naziemnych pozwala na określanie elementów orientacji kamer pomiarowych względem siebie oraz względem sytuacji terenowej, znajomość zaś elementów orientacji wewnętrznej wynika z konstrukcji kamer.

W zasadzie więc, fotogrametria naziemna nie powinna borykać się z trudnościami typowymi dla fotogrametrii lotniczej wynikającymi z nieznaności elementów orientacji zewnętrznej. Sprawa ma się jednak podobnie gdy w grę wchodzi opracowania metodami numerycznymi a także wtedy, gdy potrzebna dokładność wyniku ma być wyższa od graficznej (co wystarcza przy opracowaniach autogrametrycznych).

W przypadku stosowania metod numerycznych znajomość elementów orientacji zewnętrznej uzyskana z bezpośredniego pomiaru, znajomość elementów orientacji wewnętrznej jak również nominalne dokładności obserwacji współrzędnych tłowych, nie mogą być niezmiennikiem operacji rachunkowych. Dane te przydatne są jedynie do otrzymywania wyników przybliżonych.

W omawianym przypadku zadaniem fotogrametrii jest dostarczenie współrzędnych punktów z określoną dokładnością, z określonym błędem wyznaczenia. Błąd wyznaczenia współrzędnych musi mieć kryterium porównawcze, musi być określony w stosunku do „czegoś”. Tym „czymś”

w praktyce przyjmowana bywa sieć geodezyjna (triangulacyjna, poligonomowa), która stanowi podstawę prac na danym obiekcie.

Dlatego właśnie autorzy wielu publikacji podkreślają konieczność posiadania w zasięgu stereogramu szeregu punktów o znanych współrzędnych dla skontrolowania ich zgodności z wyznaczanymi fotogrametrycznie.

Zagadnienie sprowadza się więc do następującego, ogólniejszego, sformułowania: Rachunek współrzędnych należy prowadzić tak, aby otrzymany wynik korespondował z siecią punktów, które na tym obszarze stanowią podstawę do porównań dokładnościowych. Ponieważ elementy orientacji jako niezależne od sieci mogą nie prowadzić do zamierzonej zgodności, nie należy ich traktować jako wielkości niezmiennicze. Podstawą rachunku muszą być więc informacje liczbowe otrzymane z różnic współrzędnych na punktach danych.

W tym ujęciu, proces obliczania współrzędnych wyznaczanych metodą fotogrametrii naziemnej dzieli się na następujące etapy:

1. Obliczenie współrzędnych przybliżonych.
2. Wpasowanie współrzędnych przybliżonych w sieć geodezyjną.
3. Obliczenie współrzędnych ostatecznych.

### 1. Obliczenie współrzędnych przybliżonych

Zakładając, że z punktów  $O_1$  i  $O_2$  (rys. 1), odległych od siebie o wielkość  $B$ , zostały wykonane fototeodolitem zdjęcia fotograficzne w taki sposób, że osie kamer fototeodolitów są poziome i zgodnie do siebie równoległe oraz zwrócone w stosunku do prostej  $O_1O_2$  o kąt  $(\varphi + \frac{\pi}{2})$ , otrzymuje się zależności (1), jakie zachodzą między prostokątnymi współrzędnymi terenowymi a prostokątnymi współrzędnymi tłowymi dowolnego punktu ( $P'_F$ ) odwzorowanego na obu zdjęciach.

$$\begin{aligned} Y'_F &= \frac{B}{p} (f \cos \varphi + x'' \sin \varphi); \\ X'_F &= Y'_F \frac{x'}{f}; \\ Z'_F &= Y'_F \frac{z'}{f}; \end{aligned} \quad (1)$$

gdzie

$Y'_F, X'_F, Z'_F$  — prostokątne współrzędne terenowe dowolnego punktu odfotografowanego na obu zdjęciach,

$B$  — odległość między środkami rzutów kamer pomiarowych (fototeodolitu) — długość bazy,

$x'$  — odcięta tłowa mierzona na lewym zdjęciu,

- $x''$  — odcięta tłowa mierzona na prawym zdjęciu,  
 $p = x' - x''$  — paralaksa podłużna punktu,  
 $z'$  — rzędna tłowa mierzona na lewym zdjęciu,  
 $f$  — odległość obrazu kamery pomiarowej fototeodolitu,  
 $\varphi$  — kąt zwrotu osi komer w stosunku do linii bazy,  
 (znak + dla zdjęć zwróconych w lewo).

Układ współrzędnych terenowych ( $Y'_F O_1 Y'_F$ ), zwany dalej w skrócie „układem fotogrametrycznym” lub „układem bazy”, jest zdefiniowany w przestrzeni położeniem osi kamery pomiarowej umiejscowionej w punkcie  $O_1$  (środek rzutów lewego zdjęcia). Początkiem układu jest punkt  $O_1$ . Oś  $Y'_F$  jest wyprowadzona z punktu  $O_1$  i dodatni jej kierunek określony jest wektorem  $\overline{O_1 O_2}$ . Pozostałe osie są do niej prostopadłe tworząc trójścian prawoskrętnie zorientowany.

Szczególnym przypadkiem jest para zdjęć wykonanych kamerami, których osie, w chwili fotografowania, są zwrócone do kierunku bazy o kąt  $\varphi = 0$ . Zdjęcia takie określa się mianem zdjęć normalnych i interpretacja geometryczna zobrazowana na rysunku 1 oraz zależności podane we wzorach (1) przyjmą postać pokazaną na rysunku 1a i we wzorach (1a).

$$\begin{aligned}
 Y'_F &= \frac{Bf}{p}; \\
 X'_F &= Y'_F \frac{x'}{f}; \\
 Z'_F &= Y'_F \frac{z'}{f}.
 \end{aligned}
 \tag{1a}$$

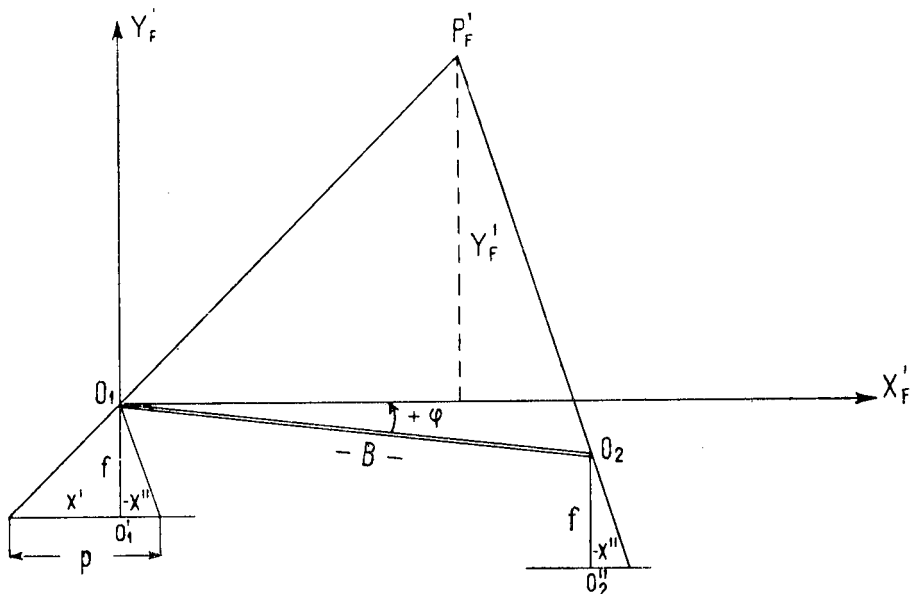
Oznaczenia jak dla wzorów (1).

Ponieważ w praktyce znajomość elementów określających współrzędne (1) dana jest zawsze z pewnym przybliżeniem, zatem i wartości stąd obliczonych współrzędnych będą odbiegały od rzeczywistych (teoretycznych). W dalszym ciągu rozważań współrzędne obliczone z (1) lub (1a) traktować się będzie jako **współrzędne przybliżone**.

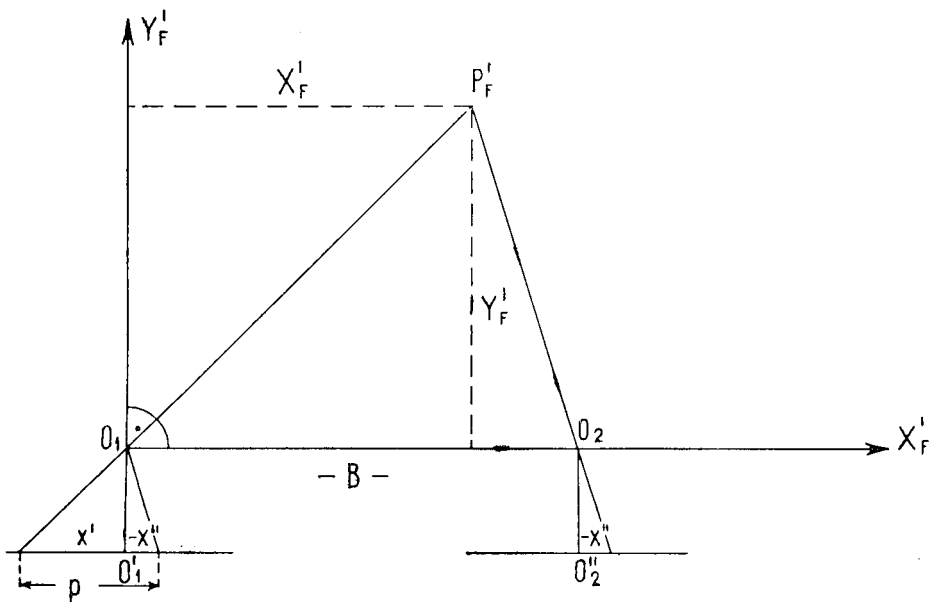
## 2. Wpasowanie współrzędnych przybliżonych w sieć geodezyjną

Współrzędne obliczone według wzorów podanych w rozdziale 1 nazwano „przybliżonymi” dlatego, iż uważa się, że poszczególne elementy występujące we wzorach dane były jedynie w pewnym przybliżeniu i co najważniejsze, ich wyznaczenie (szczególnie długości bazy i wielkości kąta zwrotu) nie jest powiązane z systemem elementów określających sieć geodezyjną.

Ogólnie można powiedzieć, że aby otrzymać współrzędne wpasowane w sieć punktów danych, należy przyporządkować pewną poprawkę współrzędnym przybliżonym.



Rys. 1



Rys. 1a

Czyli:

$$\begin{aligned} Y_F &= Y'_F + dY; \\ X_F &= X'_F + dX; \\ Z_F &= Z'_F + dZ; \end{aligned} \quad (2)$$

gdzie:  $Y_F, X_F, Z_F$  — współrzędne w układzie fotogrametrycznym wolne od wpływów niezachowania obowiązujących dla (1) warunków geometrycznych,

$Y'_F, X'_F, Z'_F$  — współrzędne w układzie fotogrametrycznym obliczone z wzorów (1) po podstawieniu tam znanych jedynie z pewnym przybliżeniem wielkości zmiennych niezależnych — współrzędne przybliżone,

$dY, dX, dZ$  — poprawki wynikające z tytułu rozbieżności między właściwymi a przyjętymi do opracowania wielkościami zmiennych.

Wzory (2) słuszne są również dla zdjęć normalnych.

Zagadnienie sprowadza się do znalezienia wielkości poprawek  $dY, dX$ , i  $dZ$ .

Jak wiadomo, poprawki te mają wpasować współrzędne fotogrametryczne w sieć geodezyjną.

Traktując, iż poprawki  $dY, dX$  i  $dZ$  są odpowiednio przyporządkowanymi przyrostami funkcji wyrażonych wzorami (1), można, z wystarczającym przybliżeniem, utożsamiać te przyrosty z różniczkami zupełnymi tych funkcji. Różniczkując funkcje (1) względem wszystkich występujących tam zmiennych, po odpowiednim uporządkowaniu otrzymuje się:

$$\left. \begin{aligned} dY &= \frac{Y'_F}{B} dB - \frac{B}{p^2} (f \cos \varphi + x' \sin \varphi) dp + \frac{B}{\rho} \left( \frac{x'}{p} \cos \varphi - \frac{f}{p} \sin \varphi - \cos \varphi \right) d\varphi + \\ &\quad + \frac{B}{p} \sin \varphi dx' + \frac{B}{p} \cos \varphi df \\ dX &= \frac{x'}{f} dY + \frac{Y'_F}{f} dx' - \frac{Y'_F}{f^2} x' df \\ dZ &= \frac{z'}{f} dY + \frac{Y'_F}{f} dz' - \frac{Y'_F}{f^2} z' df \end{aligned} \right\} (3)$$

gdzie:

$dB, dp, d\varphi, dx', dz', df$  — przyrosty zmiennych niezależnych pozostałe oznaczenia jak dla wzorów (1) i (2).

Jeżeli poprawki  $dY, dX$  i  $dZ$  utożsamiono z przyrostami funkcji, to przyrosty zmiennych niezależnych można utożsamiać z poprawkami do tych zmiennych.

W takiej interpretacji wzory (3) stanowią układ równań liniowych wyrażający zależność między poprawkami do współrzędnych i poprawkami do poszczególnych parametrów określających te współrzędne. Znając wielkości  $dB$ ,  $dp$ ,  $d\varphi$ ,  $dx'$ ,  $dz'$ ,  $df$  można dowolnemu punktowi na stereogramie przyporządkować jednoznacznie określone poprawki współrzędnych (3) i po zrealizowaniu wzorów (2) otrzymać współrzędne wpasowane. Obliczone z wzorów (2) współrzędne stanowiłyby gotowy produkt w układzie fotogrametrycznym lub też stanowiłyby punkt wyjścia dla przeliczenia na inny, pożądaný układ współrzędnych.

Wobec powyższego, zagadnienie sprowadza się teraz do znalezienia poprawek  $dB$ ,  $dp$ ,  $d\varphi$ ,  $dx'$ ,  $dz'$ ,  $df$ .

Mając do dyspozycji leżący na stereogramie punkt, którego współrzędne wyznaczono niezależnie, raz z wzorów (1) drugi raz innymi metodami (np. geodezyjnymi) w t y m s a m y m układzie współrzędnych można na podstawie (2) obliczyć:

$$\begin{aligned} dY &= Y_F - Y'_F; \\ dX &= X_F - X'_F; \\ dZ &= Z_F - Z'_F; \end{aligned} \quad (4)$$

gdzie:  $Y_F, X_F, Z_F$  — współrzędne požądane, utożsamione ze współrzędnymi wyznaczonymi np. metodami geodezyjnymi z dostateczną dokładnością, dane w układzie fotogrametrycznym,

$Y'_F, X'_F, Z'_F$  — współrzędne przybliżone, obliczone z (1) po podstawieniu nominalnych wielkości występujących tam zmiennych.

Każdy punkt mający współrzędne wyznaczone obydwoma metodami, zwany dalej w skrócie „punktem wpasowania” lub „fotopunktem” (w literaturze nazywany jest często punktem kontrolnym), pozwala zestawić układ trzech równań (3) z sześcioma niewiadomymi. Wystarczają zatem dwa takie punkty aby otrzymać układ sześciu równań z sześcioma niewiadomymi, a więc jednoznacznie określić niewiadome.

Blizsze przyjrzenie się współczynnikom występującym przy niewiadomych we wzorach (3) sugeruje odstąpienie od takiego sposobu postępowania. Stosunek wielkości poszczególnych współczynników przy niewiadomych sprawia, że niewiadome  $d\varphi$ ,  $dx'$ ,  $dz'$ ,  $df$  są wyznaczane w układzie równań (3) z kilkudziesięciokrotnie mniejszą dokładnością od niewiadomych  $dB$  i  $dp$ . Są to więc równania bardzo bliskie zależności liniowej między sobą. Aby tak słabo wyznaczane niewiadome określić z porównywalną do pozostałych dokładnością, należałoby w bardzo poważnym stopniu zwiększyć liczbę równań (3), a to wymaga posiadania dużej liczby fotopunktów.

W związku z powyższym, wzorom (3) można nadać następującą postać:

$$dY = \frac{Y'_F}{B} dB - \frac{B}{p^2} (f \cos \varphi + x' \sin \varphi) dp; \quad (5.1.)$$

$$dX = dY \frac{x'}{f}; \quad (5.2)$$

$$dZ = dY \frac{z'}{f}. \quad (5.3.)$$

Oznaczenia jak we wzorach (3).

Ponieważ wartości  $dX$  i  $dZ$  we wzorach (5) są kombinacją liniową równania określającego  $dY$  (5.1.), równań (5) w przeciwieństwie do (3) nie można traktować jako układu równań.

W szczególnym przypadku, dla zdjęć normalnych, wzór (5.1.) przyjmie postać

$$dY = \frac{Y'_F}{B} dB - \frac{Bf}{p^2} dp. \quad (5a)$$

Wzór ten jest przytaczany w literaturze.

Wzory (5.1.), (5.2.), (5.3.), (5a) określają zależności funkcyjne jakie zachodzą między poprawkami do współrzędnych przybliżonych a poprawkami do zmiennych niezależnych  $dB$  i  $dp$ . Rozumowanie zatem należy prowadzić dwutorowo, a mianowicie:

- a) Znaleźć poprawki  $dB$  i  $dp$ , które są wielkościami stałymi dla danego stereogramu.
- b) Znając  $dB$  i  $dp$  obliczyć dla każdego punktu wyznaczanego poprawki do współrzędnych przybliżonych, które pozwolą uzyskać współrzędne wpasowane w sieć punktów danych.

### 2.1. Znalezienie poprawek $dB$ i $dp$

Zależności podane we wzorach (5.1.) i (5a) słuszne są dla wszystkich punktów stereogramu a więc słuszne są również dla odfotografowanych punktów o znanych współrzędnych geodezyjnych (fotopunktów). Zatem, poszukiwane poprawki  $dB$  i  $dp$  muszą przyjąć takie wielkości, aby obliczone na ich podstawie poprawki  $dX$ ,  $dY$  i  $dZ$  wszystkich fotopunktów doprowadziły ich współrzędne przybliżone do zgodności ze współrzędnymi geodezyjnymi. W praktyce pod pojęciem „zgodności” rozumie się sytuację, w której suma kwadratów odchyłek na fotopunktach po wpasowaniu będzie stanowiła minimum. Jeżeli znajdzie się poprawki  $dB$  i  $dp$  według przytoczonych założeń, będzie można stwierdzić, iż jeżeli doprowadzają one do zgodności współrzędne fotogrametryczne fotopunktów, będą również czynić to w stosunku do współrzędnych wszystkich punktów stereo-

gramu a więc również punktów wyznaczanych, co jest celem niniejszych zabiegów.

Poszukując możliwości znalezienia poprawek  $dB$  i  $dp$  prowadzi się następujące rozumowanie:

Każdy punkt wpasowania, który ma wyznaczone metodami geodezyjnymi współrzędne w układzie fotogrametrycznym, tzn. w tym samym układzie, w którym otrzymuje się współrzędne przybliżone (1), dostarcza jednego równania (5.1.), w którym wolnym wyrazem jest wyrażenie  $dY = Y_F - Y'_F$  (patrz wzory 4). Dwa takie punkty tworzą układ dwóch równań z dwoma niewiadomymi ( $dB$  i  $dp$ ), który po rozwiązaniu dostarcza wielkości tych niewiadomych.

Podany wyżej tryb znajdowania poprawek  $dB$  i  $dp$  znajduje się w literaturze. W praktyce metod numerycznych sposób ten zatracza cechy użyteczności z następujących względów:

1. Aby punkt wpasowania dostarczył równaniu (5.1.) wolnego wyrazu  $dY$ , współrzędne geodezyjne muszą być dane w układzie fotogrametrycznym. Teoretycznie może to nastąpić tylko w przypadku opracowywania zdjęć normalnych, dla których założono specjalną osnowę geodezyjną w układzie bazy tego stereogramu. Praktycznie jednak nawet w tym przypadku oraz we wszystkich innych, należy mieć na uwadze następujące fakty:

1.1. Współrzędne geodezyjne odnoszą się zawsze do zmaterializowanego w terenie punktu przebiecia poziomej płaszczyzny odniesienia przez oś obrotu instrumentu (np. teodolitu) natomiast:

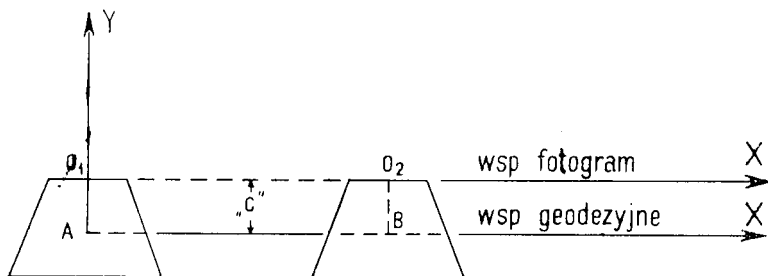
1.2. Początek układu współrzędnych fotogrametrycznych znajduje się w środku rzutów lewego zdjęcia. Wobec tego nawet wtedy, gdy przyjęty układ geodezyjny będzie miał swój początek w punkcie będącym zmaterializowanym w terenie lewym stanowiskiem fototeodolitu i kierunek osi  $X$  tego układu będzie zgodny z kierunkiem bazy, nie będzie on identyczny z układem bazy zdjęć normalnych. Wystąpi przesunięcie układów o wartość „ $c$ ”, która np. dla fototeodolitu Zeiss 19/1318 wynosi około 11 centymetrów (rys. 2).

2. W przypadku ogólnym punkty wpasowania mają współrzędne geodezyjne wyznaczone w układzie przesuniętym, skręconym i najczęściej odwrotnie skrętnym w stosunku do układu fotogrametrycznego. Aby układy te sprowadzić do kolinearności osi należy wykonać transformację układów. Po wykonaniu transformacji współrzędne geodezyjne fotopunktów i ich współrzędne fotogrametryczne są już we wspólnym układzie, ale różnice między nimi z założenia (z istoty transformacji) są równe zero. Ponieważ punktami łącznymi takiej transformacji muszą być punkty wpasowania, więc po transformacji każdy punkt daje jedno równanie (5.1.), w którym wolny wyraz jest równy zero. Układ takich równań ma



zawsze tylko jedno rozwiązanie  $dB = dp = 0$ , bez względu na ich faktyczne wielkości.

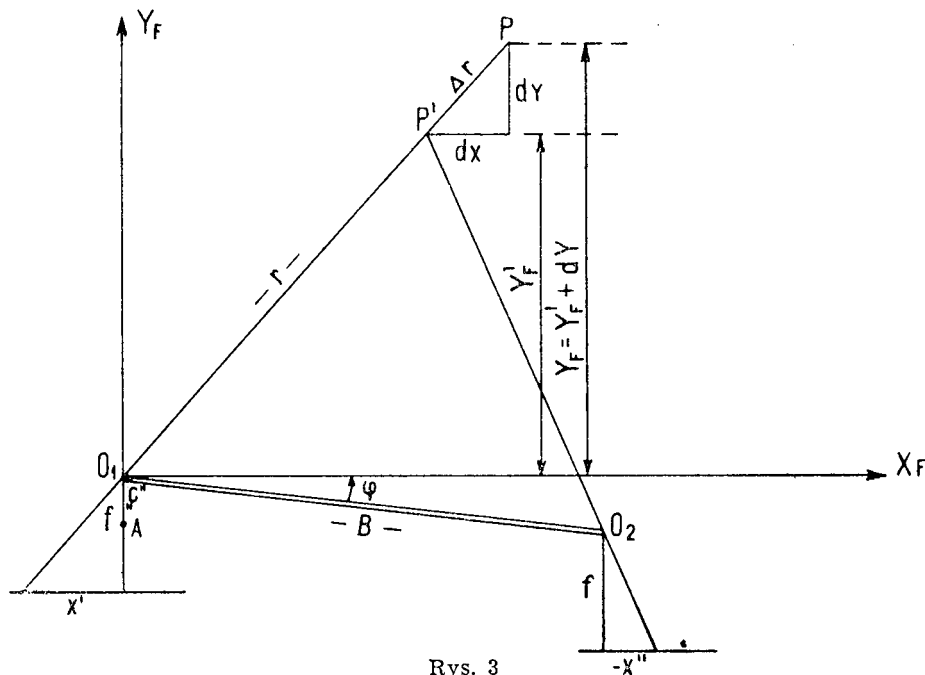
Autorzy sugerujący wykorzystywanie wzoru (5a) dla znajdowania  $dB$  i  $dp$  zdają się podkreślać teoretyczny charakter tych sugestii przez zaniechanie przytaczania przykładów praktycznych zastosowań.



Rys. 2

Wobec tego proponuje się tok postępowania oparty na następującym rozumowaniu:

Respektując słuszność założeń przyjętych przy wyprowadzaniu wzorów (5) zauważa się, że wektor przesunięcia punktu z tytułu nadania jego współrzędnych poprawek  $dY$  i  $dX$  jest kolinearny z wektorem promienia wodzącego „ $r$ ” punktu  $P'$  (rys. 3).



Rys. 3

Z rysunku 3 widać, że  $dX = dY \frac{x'}{f}$  co zostało podane w (5.2).

Słuszna jest również proporcja  $\Delta r: dY = r: Y'_F$  skąd

$$\Delta r = r \frac{dY}{Y'_F} \quad (6)$$

gdzie:  $r = \sqrt{(Y'_F)^2 + (X'_F)^2}$  — długość promienia wodzącego punktu  $P'$  w układzie fotogrametrycznym, czyli odległość punktu  $P'$  od początku układu współrzędnych fotogrametrycznych.

Jeżeli badany punkt przesunięty zostanie z położenia  $P'$  do położenia  $P$ , tj. do położenia pożądanego, jego odległość od początku układu ulegnie zmianie i będzie wynosić:

$$R = r + \Delta r; \quad (7)$$

skąd

$$\Delta r = R - r. \quad (8)$$

Mając dane (w dowolnym układzie współrzędnych prostokątnych) współrzędne lewego stanowiska fototeodolitu ( $X_A, Y_A$ ), oraz współrzędne punktu odfotografowanego na obu zdjęciach np.  $F_1 (X_1, Y_1, Z_1)$ , można obliczyć odległość między tymi punktami.

Jeżeli współrzędne te będą współrzędnymi, do których się dąży, to odległość będzie tą wielkością, którą chce się uzyskać z poprawionych o  $dY$  i  $dX$  współrzędnych fotogrametrycznych, a więc np.

$$R_1 = \sqrt{(Y_1 - Y_A)^2 + (X_1 - X_A)^2}. \quad (9)$$

Ponieważ poczyniono założenie, że punkt  $F_1$  jest punktem stereogramu ma on więc również współrzędne przybliżone (1) czyli można dla niego obliczyć

$$r_1 = \sqrt{(X'_F)^2 + (Y'_F)^2}. \quad (10)$$

Z powyższego widać, że dla każdego punktu mającego dwie pary współrzędnych płaskich niezależnie od tego, jak mają się do siebie układy współrzędnych, można obliczyć wielkość  $\Delta r_i = R_i - r_i$ .

Tak obliczona wielkość  $\Delta r$  składa się z sumy błędów przypadkowych powstałych w procesie pomiaru parametrów równań (1), z błędów systematycznych wynikających z niezachowania warunków geometrycznych obowiązujących przy określaniu podstawowych związków fotogrametrii naziemnej oraz zawiera w sobie rzut mimośrodu „c” (rys. 2) na kierunek promienia wodzącego.

Wzór (6) określa związek jaki zachodzi między przyrostem długości promienia wodzącego a poprawką  $dY$ , która z założenia określana jest poprawkami do zmiennych niezależnych występujących we wzorach (1).

Zatem dla każdego punktu wpasowania obowiązuje równość (6), gdzie wolnym wyrazem jest różnica wielkości  $(R-r)$  obliczona z (9) i (10). Każdy punkt wpasowania, przy znajomości współrzędnych lewego stanowiska fototeodolitu w układzie geodezyjnym pozwala na ułożenie jednego równania (6) gdzie napisano

$$\Delta r = \frac{r}{Y_F} dY.$$

Wstawiając tu wartość  $dY$  z równania (5.1.), po uporządkowaniu i uwzględnieniu (1) otrzymuje się

$$\Delta r = \frac{r}{B} dB - \frac{r}{p} \frac{(f \cos \varphi + x' \sin \varphi)}{(f \cos \varphi + x'' \sin \varphi)} dp. \quad (11)$$

Dla zdjęć normalnych wzór (11) przyjmie postać

$$\Delta r = \frac{r}{B} dB - \frac{r}{p} dp. \quad (11a)$$

We wzorach (11) i (11a) zachowano uprzednio przyjęte i zdefiniowane oznaczenia.

Dwa punkty wpasowania oraz znajomość współrzędnych geodezyjnych lewego stanowiska fototeodolitu pozwalają określić jednoznacznie niewiadome  $dB$  i  $dp$ . Większa liczba punktów wpasowania pozwala zestawić układ nadwyznaczony, który po rozwiązaniu jakąkolwiek znaną metodą daje najprawdopodobniejsze wielkości  $dB$  i  $dp$  oraz błąd ich określenia.

Proponowany wyżej sposób znajdowania poprawek  $dB$  i  $dp$ , jak to już zostało kilkakrotnie w tekście wspomniane, nie stawia żadnych ograniczeń co do wzajemnego usytuowania układów geodezyjnego i fotogrametrycznego dlatego, że opiera się na porównywaniu długości a nie współrzędnych. Radzi sobie również z wystarczającym przybliżeniem z mimośrodowym umieszczeniem w fototeodolicie punktu głównego obiektywu w stosunku do osi obrotu instrumentu.

## 2.2. Obliczanie poprawek $dY$ , $dX$ i $dZ$ do współrzędnych przybliżonych punktów wyznaczanych

Dzięki operacjom prowadzonym zgodnie z rozumowaniem podanym w 2.1. uzyskuje się wielkości poprawek  $dB$  i  $dp$  słusznych dla wszystkich punktów stereogramu a więc i dla punktów wyznaczanych.

Każdemu punktowi wyznaczanemu można przyporządkować trójkę współrzędnych przybliżonych obliczonych z wzorów (1) lub (1a). Trzeba pamiętać, że współrzędne te wyrażone są w układzie fotogrametrycznym.

Wzory (5) i (6) wyrażają zależności jakie zachodzą między poprawkami

do współrzędnych w układzie fotogrametrycznym a poprawkami  $dB$  i  $dp$ , które już zostały znalezione. Aby zatem znaleźć poprawki do współrzędnych przybliżonych należy dla każdego punktu wyznaczanego realizować wzory (5), w których teraz prawe strony równań stanowią wielkości znane.

Po dodaniu (algebraicznym) obliczonych z (5) poprawek do współrzędnych przybliżonych (realizacja wzorów 2) otrzymuje się współrzędne w układzie fotogrametrycznym wpasowane w sieć geodezyjną.

W ten sposób zakończony zostaje proces rachunkowy mający na celu uzyskanie na drodze fotogrametrycznej współrzędnych terenowych zespołu punktów, których wzajemne usytuowanie względem siebie jest porównywalne z wzajemnym usytuowaniem punktów sieci geodezyjnej w wybranym jej fragmencie.

Interpretacja geometryczna procesu wpasowania polega na usunięciu pewnych deformacji modelu stereoskopowego, z którego wywodzą się współrzędne przybliżone (1). Deformacja ta jest wynikiem wielu czynników przede wszystkim zaś przybliżeniami z jakimi wykonano rachunek współrzędnych przybliżonych. Usuwanie tego typu deformacji modelu może postępować różnymi drogami w zależności od nakładanych warunków. W opisywanym przypadku warunkiem głównym jest nadanie modelowi takiej charakterystyki, aby oparty na jego cechach rachunek dawał w konsekwencji możliwie największe zbliżenie do wymagań sieci geodezyjnej wiążącej opracowywany teren. Jasne jest więc, że stopień usunięcia deformacji jest w ścisłym związku z mocą sieci geodezyjnej i ewentualne jej wady będą wpływały na ostateczny kształt modelu. Ogólne zasady rachunku wyrównania dają jednak każdorazowo pojęcie o wzajemnym przystosowaniu się godzonych ze sobą sieci.

### 3. Obliczanie współrzędnych ostatecznych

W wyniku operacji rachunkowych opisanych w rozdziale 2 otrzymano współrzędne fotopunktów oraz wszystkich punktów wyznaczanych w układzie fotogrametrycznym.

Ponieważ celem niniejszego opracowania jest uzyskanie współrzędnych respektujących wymagania obowiązującej sieci geodezyjnej, należy uważać jako ostateczne współrzędne punktów wyrażone w układzie geodezyjnym.

Układ geodezyjny definiują współrzędne fotopunktów. Wobec tego współrzędne ostateczne otrzymać można w drodze transformacji układu fotogrametrycznego na układ geodezyjny.

Transformację taką dogodnie jest wykonać w dwóch etapach:

1. Transformacja współrzędnych płaskich  $Y, X$ .
2. Transformacja wysokości  $Z$ .

Ad. 1.

Dla przetransformowania współrzędnych płaskich należy posługiwać się punktami o znanych współrzędnych w obu układach. Takimi punktami są fotopunkty. Mają one współrzędne w układzie geodezyjnym a w procesie opisanego wyżej rachunku otrzymały wpasowane współrzędne fotogrametryczne. Należy więc znaleźć, dowolną, znaną metodą, współczynniki transformacji aby następnie z ich pomocą przeliczyć współrzędne wszystkich punktów wyznaczanych z układu fotogrametrycznego na układ geodezyjny. Odchyłki na punktach łącznych są miarą wpasowania się układów i stanowią o ostatecznym błędzie wyznaczanych współrzędnych w stosunku do sieci geodezyjnej.

Przy prowadzeniu rachunku należy zwrócić uwagę na fakt, iż układ fotogrametryczny jest układem prawoskrętnym zaś najczęściej używane układy geodezyjne są układami lewoskrętnymi. Ważne jest to o tyle, że wzory transformacyjne przystosowane są zwykle do układów zgodnie skrętnych.

Ad. 2.

Transformacja wysokości sprowadza się do przesunięcia poziomu odniesienia układu fotogrametrycznego w stosunku do układu geodezyjnego. Najprościej dokonać tego można przez obliczenie średniej wartości poziomu odniesienia

$$\Delta Z_{\text{śr}} = \frac{1}{n} \sum_1^n (Z - Z_F);$$

gdzie:

$n$  — ilość fotopunktów,

$Z$  — wysokość fotopunktu w układzie geodezyjnym,

$Z_F$  — wysokość fotopunktu w układzie fotogrametrycznym

(po wpasowaniu).

Mając  $\Delta Z_{\text{śr}}$  oblicza się ostateczne wysokości punktów wyznaczanych jako

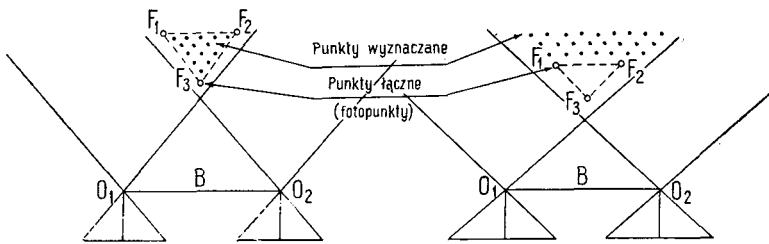
$$Z = Z_F + \Delta Z_{\text{śr}}.$$

### Uwagi końcowe

Całe rozumowanie dotyczyło stereogramu, w którego przestrzeni dysponowano przynajmniej dwoma punktami wpasowania. Wspomniano również, iż geometryczną interpretacją zjawiska, które każe analitycznie

respektować wymagania sieci geodezyjnej jest deformacja modelu stereoskopowego wywołana przybliżoną informacją o wielkościach elementów orientacji zdjęć. Twierdzi się również, iż po przeprowadzeniu wpasowania otrzymane wyniki są możliwie zbliżone do takich, jakie uzyskałoby się operując modelem stereoskopowym bez deformacji.

Jasne jest, że uproszczenia przyjęte przy przejściu z wzorów (3) do wzorów (5), które ostatecznie uznano za użytkowe, ograniczają zdolność całego rachunku do uwzględnienia wszystkich czynników deformujących model. Jednakże, co potwierdza praktyka Zakładu Fotogrametrii IGiK błędy wyznaczenia współrzędnych obliczonych proponowaną metodą nie



Rys. 4

Rys. 5

przekraczają  $1 : 1000$  wielkości  $Y_F$  (odległość fotografowania) nawet wtedy, gdy rachunek współrzędnych bez uwzględniania poprawek daje błędy wyznaczenia rzędu  $1 : 500 Y_F$ .

Istotną cechą proponowanego sposobu jest niewielka utrata dokładności wyznaczania punktów leżących poza obwiednią punktów wpasowania (rys. 4 i 5).

Wynika to przede wszystkim z faktu, że poprawki do współrzędnych przybliżonych liczone są dla wszystkich punktów wyznaczanych każdorazowo z wzorów (5) a nie, jak można byłoby czynić, z wzorów (1) po wprowadzeniu tam zamiast  $B$  wielkości  $(B + dB)$  i zamiast  $p$  wielkości  $(p + dp)$ , jako że  $dB$  i  $dp$  są wielkościami stałymi dla całego stereogramu. Dzięki temu w stosunku do każdego punktu respektuje się inny w swej istocie wpływ wielkości  $dB$  i  $dp$  na poprawki  $dY$ ,  $dX$  i  $dZ$  (patrz współczynniki przy  $dB$  i  $dp$  we wzorach 5). Zyskuje się dość dużą swobodę w rozmieszczaniu fotopunktów na stereogramie, co ma istotne znaczenie w wielu sytuacjach terenowych oraz swobodę przy łączeniu stereogramów, gdzie do dyspozycji jest tylko wąski pas potrójnego pokrycia zdjęć.

W Zakładzie Fotogrametrii IGiK wyznaczano punkty leżące w odległości dwukrotnie większej od najdalszego od bazy fotopunktu stwierdzając poprawienie dokładności wyznaczenia do granic  $1 : 1000 Y_F$ .

**Zestawienie czynności potrzebnych do obliczenia współrzędnych terenowych wyznaczanych metodą fotogrametrii naziemnej z uwzględnieniem punktów danych**

1. Zebrać dane:
  - 1.1. Zaobserwowane na stereokomparatorze współrzędne tłowe  $x'$ ,  $z'$  oraz paralaksę podłużną „ $p$ ” wszystkich punktów wpasowania i wszystkich punktów wyznaczanych.
  - 1.2. Długość bazy  $B$ , odległość obrazu  $f$  oraz wielkość kąta zwrotu  $\varphi$ .
  - 1.3. Współrzędne geodezyjne wszystkich punktów wpasowania oraz lewego punktu bazowego ( $A$ ).

2. Jeżeli  $\varphi \neq 0$ , dla wszystkich punktów obserwowanych na stereokomparatorze obliczyć  $x'' = x' - p$ .
3. Dla wszystkich punktów obserwowanych na stereokomparatorze obliczyć:

$$k_1 = f \cos \varphi + x'' \sin \varphi;$$

$$k_2 = f \cos \varphi + x' \sin \varphi.$$

Uwaga: Dla zdjęć normalnych  $k_1 = k_2 = f$ .

4. Dla wszystkich punktów obserwowanych na stereokomparatorze obliczyć:

$$Y'_F = \frac{B}{p} k_1, \quad X'_F = Y'_F \frac{x'}{f}, \quad Z'_F = Y'_F \frac{z'}{f}.$$

Uwaga: Dla zdjęć normalnych wygodniej jest używać wzorów:

$$w = \frac{B}{p}, \quad Y'_F = w f, \quad X'_F = w x' \quad Z'_F = w z'.$$

5. Dla wszystkich punktów wpasowania (fotopunktów) obliczyć:

$$R = \sqrt{(Y - Y_A)^2 + (X - X_A)^2};$$

$$r = \sqrt{(Y'_F)^2 + (X'_F)^2};$$

$$\Delta r = R - r;$$

gdzie:  $Y, X$  — współrzędne geodezyjne punktu wpasowania,  
 $Y_A, X_A$  — współrzędne geodezyjne lewego stanowiska fototeodolitu,

$Y'_F, X'_F$  — współrzędne fotopunktu obliczone w p. 4.

6. Dla wszystkich punktów wpasowania obliczyć:

$k = k_2 : k_1$  gdzie  $k_1$  i  $k_2$  obliczone w p. 3.

$$a = r : B, \quad b = \frac{r}{p} k.$$

7. Zestawić układ równań według wzoru:

$$a dB - b dp = \Delta r.$$

Równań tych będzie tyle, ile jest punktów wpasowania.

8. Układ równań, o którym mowa w p. 7, rozwiązać względem  $dB$  i  $dp$ .

Jeżeli punktów wpasowania będzie więcej niż dwa, powstanie układ nadwyznaczony, który należy rozwiązać poprzez równania normalne.

9. Dla wszystkich punktów obserwowanych na stereokomparatorze obliczyć:

$$m = k_1 : p; \quad n = \frac{B}{p^2} k_2;$$

$$\text{oraz: } dY = m dB - n dp;$$

$$dX = dY \frac{x'}{f};$$

$$dZ = dY \frac{z'}{f}.$$

10. Dla wszystkich punktów obserwowanych na stereokomparatorze obliczyć poprawione (wpasowane) współrzędne fotogrametryczne

$$Y_F = Y'_F + dY;$$

$$X_F = X'_F + dX;$$

$$Z_F = Z'_F + dZ.$$

11. Wykonać transformację układu fotogrametrycznego ( $Y_F, X_F, Z_F$ ) na układ geodezyjny ( $X, Y, Z$ ). Jako punkty łączne przyjąć punkty wpasowania. Transformować w dwóch częściach.

11.1. Transformacja współrzędnych płaskich ( $Y_F, X_F$ ) na układ ( $X, Y$ ) dowolnie wybraną metodą mając na uwadze prawoskrętność układu fotogrametrycznego. Obliczony błąd po transformacji jest miarą dokładności punktów wyznaczanych.

11.2. Transformacja rzędnych ( $Z_F$ ) polegająca na przesunięciu poziomu odniesienia o średnią wartość różnic ( $Z - Z_F$ ) na punktach łącznych. Z różnic wielkości ( $Z - Z_F$ ) obliczonych z poszczególnych fotopunktów obliczyć należy błąd wyznaczanych wysokości.

#### PRZYKŁAD

Przytoczony przykład obliczenia współrzędnych według wskazówek zawartych w niniejszym opracowaniu oparto na materiale zdjęciowym z „Pola doświadczalnego — Bielany”.

Zdjęcia wykonano niebadanym fototeodolitem Zeiss 19/1318 Nr fabr. 221 795. Obliczenia wykonano przy założeniu nominalnej odległości obrazu  $f = 194,23$  mm oraz położenia punktu głównego w przecięciu osi tłowych.



Współrzędne tło we i paralaksę pomierzono na negatywach zdjęć stereo-komparatorem Zeiss 1818 Nr fabr. 221 492 bez uwzględniania błędów instrumentu.

Punktami obliczanymi są obrazy tarcz sygnalizacyjnych, których współrzędne geodezyjne wyznaczono każdorazowo z dwóch zależnych wcięć wprzód teodolitem Zeiss Theo 30 z bazy o długości 63,20 m. Różnice pomiędzy dwukrotnym wyznaczeniem punktu nie przekraczają wielkości 3,5 cm. Współrzędne z wcięć, zwane dalej w skrócie współrzędnymi geodezyjnymi obliczono w układzie lokalnym, w którym oś  $X$  pokrywa się z kierunkiem bazy, początek układu na lewym stanowisku fototeodolitu. Skrętność przyjętego układu zgodna jest ze skrętnością układu fotogrametrycznego.

W przykładzie podano obliczenia na podstawie zdjęć zwróconych w lewo o kąt  $35^\circ$ . Zatem układy — fotogrametryczny i geodezyjny — skrócone są w stosunku do siebie o  $35^\circ$ . Przesunięcie układów pokazano na rysunku 2.

W zasięgu stereogramu znalazło się 11 sygnalizowanych punktów o znanych współrzędnych geodezyjnych. Rozmieszczenie punktów pokazano na tablicy 1. Jako punkty wpasowania przyjęto F-2, F-11, F-6, F-3 i F-9. Na szkicu (tabl. 1) wkreślono zasięg stereogramu zdefiniowany po bokach kątem rozwarcia obiektywu fototeodolitu. Jako początek przyjęto linię prostą określoną równaniem  $Y_F = 4 B = 64$  m, koniec zaś zdefiniowano linią prostą  $Y_F = 20 B = 320$  m.

Zwraca się uwagę, że rachunek zobrazowany w przykładzie jest dość pracochłonny. Przytacza się go dla poparcia wywodów teoretycznych. W praktyce Zakładu Fotogrametrii IGiK rachunek prowadzony jest za pomocą maszyny UMC-1 w oparciu o program ułożony przez mgr inż. Witolda Mizerskiego.

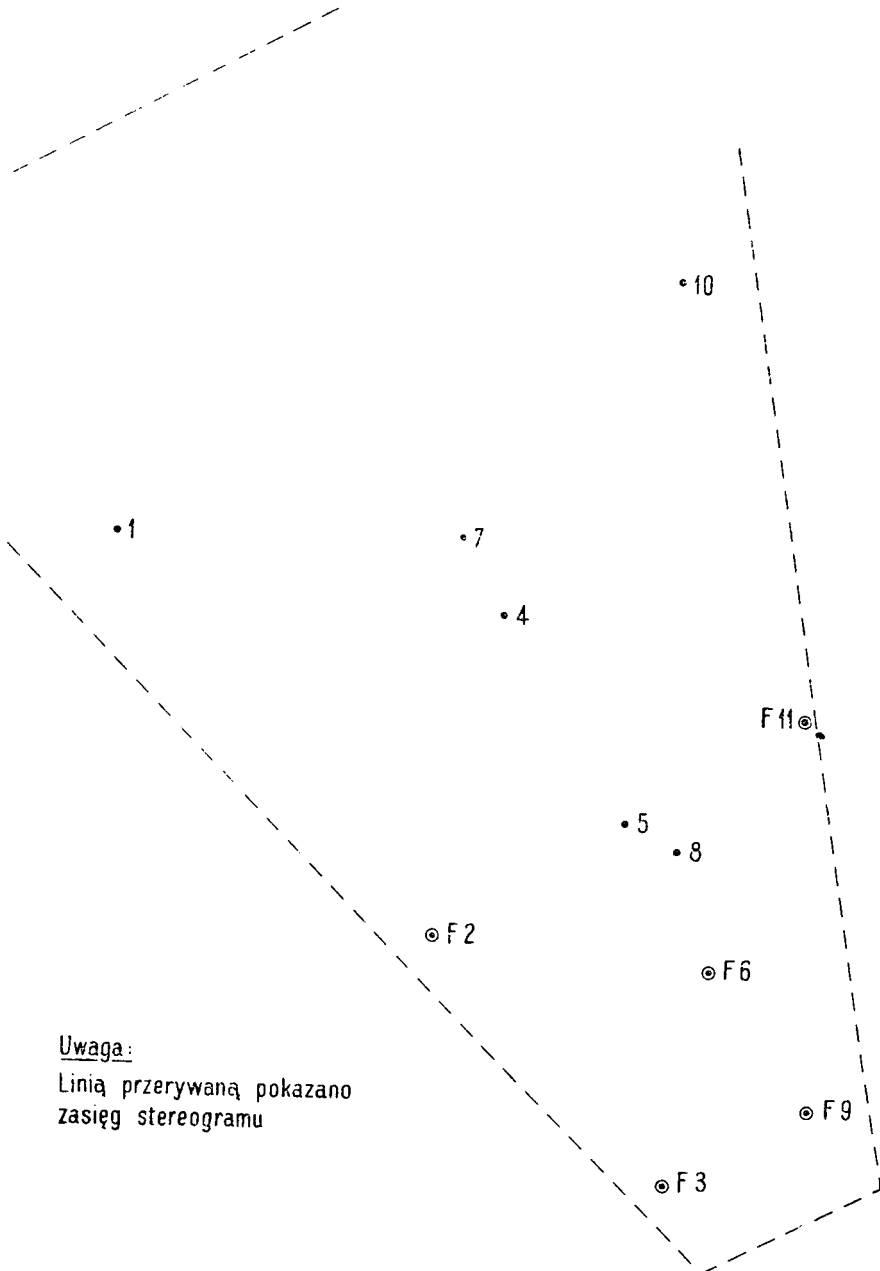
#### L I T E R A T U R A

- [1] Bohonos B.: Fotogrametria cz. I. Wojskowa Akademia Techniczna Warszawa 1963 r.
- [2] Gál P.: Fotogrametria. Slovenské Vydavateľstvo Technickej Literatúry Bratislava 1965 r.
- [3] Petrás J.: Problematika pozemnej fotogrametrie v aplikácii na zamerivanie tazzoných lokalit. Bratislava 1962 r.
- [4] Piasecki M. B.: Fotogrametria lotnicza i naziemna. Warszawa 1958 PPWK.
- [5] Weibrecht O.: Punktweise Auswertung von terrestrischphotogrammetrischen Aufnahmen an Hand von Stereokomparatordaten. Vermessungs-Informationen Photogrammetrie. Heft 6.

Recenzował: Mgr inż. Wacław Sztompke

TABLICA 1

## SZKIC ROZMIESZCZENIA PUNKTÓW

Uwaga:

Linia przerywaną pokazano  
zasięg stereogramu

Obliczenie fotogrametrycznych współrzędnych terenowych

Stereogram 12/6  
Stereokomparator Zeiss 221492

$f = 194,23 \text{ mm}$   
 $B = 16,28 \text{ m}$   
 $\varphi = +35^\circ$

Punkty wpasowania F-2, F-11, F-6, F-3, F-9

Numer punktu	Dane zaobserwowane na stereokomparat.			$x'' = x' - p$	$k_1 = f \cos \varphi + x'' \sin \varphi$	$k_2 = f \cos \varphi + x'' \sin \varphi$	Współrzędne przybliżone			$R = \sqrt{(Y - Y_A)^2 + (X - X_A)^2}$	$r = \sqrt{(Y_F')^2 + (X_F')^2}$	$k = \frac{k_2}{k_1}$	Współczynniki równań $a \cdot dB - bdp = \Delta r$			$m = \frac{k_1}{p}$	$n = \frac{-B}{p^2}$	Poprawki			Współrzędne dostosowane			Numer punktu	
	$x'$	$z'$	$p$				$Y_F' = \frac{B}{p} k_1$	$X_F' = \frac{x'}{f} Y_F'$	$Z_F' = \frac{z'}{f} Y_F'$				$a = \frac{r}{B}$	$-b = \frac{r}{p} k$	$\Delta r = R - r$			$dY = mdB + ndp$	$dX = \frac{x'}{f} dY$	$dZ = \frac{z'}{f} dY$	$Y_F = Y_F' + dY$	$X_F = X_F' + dX$	$Z_F = Z_F' + dZ$		
Punkty dane	2	-39,934	3,932	15,975	-55,909	136,3955	144,7425	138,99	-28,58	2,81	142,829	141,898	1,061197	8,716093	-9,426087	0,931	8,538060	-9,233551	+0,85	-0,17	+0,02	139,84	-28,75	+2,83	2
	11	77,873	2,092	22,633	55,240	194,4709	206,2966	139,88	56,08	1,51	151,264	150,703	1,060810	9,256941	-7,063458	0,561	8,592361	-6,556352	+0,65	+0,26	+0,01	140,53	56,34	+1,52	11
	6	17,269	2,646	25,101	-7,832	161,5158	174,6310	104,76	9,31	1,43	105,654	105,171	1,081201	6,460258	-4,530224	0,481	6,434636	-4,512256	+0,46	+0,04	+0,01	105,22	9,35	+1,44	6
	3	-37,788	2,644	29,918	-67,706	130,2316	145,8638	70,87	-13,79	0,96	72,576	72,199	1,120034	4,434828	-2,702899	0,377	4,352931	-2,652997	+0,28	-0,05	0	71,15	-13,84	+0,96	3
	9	44,696	1,759	40,368	1,328	167,8694	188,9617	67,70	15,58	0,61	69,766	69,470	1,125647	4,267199	-1,937146	0,296	4,158477	-1,887790	+0,22	+0,05	0	67,92	15,64	+0,61	9
Punkty wyznaczone	4	11,889	6,576	14,253	-2,364	164,3728	171,8200	187,74	11,49	6,36	X						11,532506	-13,769417	+1,25	+0,08	+0,04	188,99	11,57	+6,40	4
	5	13,836	3,402	19,091	-5,255	162,8623	172,8373	138,88	9,89	2,43	X						8,530842	-7,720306	+0,74	+0,05	+0,01	139,62	9,94	+2,44	5
	8	24,400	2,854	21,371	3,029	167,1906	178,3570	127,37	16,00	1,87	X						7,823247	-6,357624	+0,63	+0,08	+0,01	128,00	16,08	+1,88	8
	7	12,673	10,254	13,093	-0,420	165,3886	172,2296	205,65	13,42	11,86	X						12,631834	-16,356254	+1,48	+0,10	+0,08	207,13	13,52	+10,94	7
	10	66,898	10,629	13,962	52,936	193,2671	200,5622	225,35	77,62	12,33	X						13,842365	-16,749746	+1,52	+0,52	+0,08	226,87	78,14	+12,41	10

$[aa] = +241,272854$	$[ab] = -197,064160$	$[a\Delta r] = +19,350232$
$[ab]$	$[bb] = +170,324682$	$[b\Delta r] = -16,509713$

$$dB = \frac{[a\Delta r][bb] - [b\Delta r][ab]}{[aa][bb] - [ab][ab]} = +0,0187 \text{ m}$$

$$dp = \frac{[b\Delta r][aa] - [a\Delta r][ab]}{[aa][bb] - [ab][ab]} = -0,0753 \text{ mm}$$

I. Obliczenie współczynników  
Układ lokalny

TABLICA 3

A		I. Obliczenie współczynników Układ lokalny											
Lp.	Nazwa punktu	Sieć zasadnicza: geodezyjna						Sieć obca: fotogrametryczna					
		x			y			x'			y'		
1	2	3		4		5		6					
1	F-2	-	97	60	+	104	28	-	28	75	+	139	84
2	F-11	-	25	38	+	149	12	+	56	34	+	140	53
3	F-6	-	47	01	+	94	62	+	9	35	+	105	22
4	F-3	-	49	02	+	53	52	-	13	84	+	71	15
5	F-9	-	22	20	+	66	14	+	15	63	+	67	92
Σ =													
Średnie:		-	48	242	+	93	536	+	7	749	+	104	932

B		I. Obliczenie współczynników Układ lokalny														
L.p.	$\Delta x = x - x_{sr}$		$\Delta y = y - y_{sr}$		$\Delta x' = x' - x'_{sr}$		$\Delta y' = y' - y'_{sr}$		$\xi = \Delta x - \Delta x'$		$\zeta = \Delta y - \Delta y'$					
	1	2		3		4		5		6		7				
1	-	49	358	+	10	744	-	36	496	+	34	908	-	12,862	-	24,164
2	+	22	862	+	55	584	+	48	594	+	35	598	-	25,732	+	19,986
3	+	1	232	+	1	084	+	1	604	+	0	288	-	0,372	+	0,796
4	-	0	778	-	40	016	-	21	586	-	33	782	+	20,808	-	6,234
5	+	26	042	-	27	396	+	7	884	-	37	012	+	18,158	+	9,616
Σ		0	000	0	000	0	000	0	000	0	000	0,000	0,000			

C						
$[\Delta x'^2]$	+	4224,02052	$[\Delta y'^2]$	+	4996,98068	$\tau = \frac{d\tau}{p} = \frac{[\Delta x'\zeta] - [\Delta y'\xi]}{[\Delta x'^2] + [\Delta y'^2]} = \frac{+4804,8468}{9221,0012}$
$[\Delta x'\zeta]$	+	2064 74548	$[\Delta y'\xi]$	-	2740,10132	
$[\Delta x'\xi]$	-	1087,60976	$[\Delta y'\zeta]$	-	277,13644	$Z = \frac{ds}{s} = \frac{[\Delta x'\xi] + [\Delta y'\zeta]}{[\Delta x'^2] + [\Delta y'^2]} = \frac{-1364,7462}{9221,0012}$
						Zniekształcenie: $Z = -0,1480041$

## Przesunięcie

D							
$x_o = x_{sr} - x'_{sr} + y'_{sr}\tau - x'_{sr}Z$				$y_o = y_{sr} - y'_{sr} - x'_{sr}\tau - y'_{sr}Z$			
$x_{sr}$	-	48	242	$y_{sr}$	+	93	536
$x'_{sr}$	-	7	746	$y'_{sr}$	-	104	932
$y_{sr}\tau$	+	54	678	$x'_{sr}\tau$	-	4	036
$x_{sr}Z$	+	1	146	$y'_{sr}Z$	+	15	530
$x_o$	-	0	164	$y_o$	+	0	098

## II. Obliczenie odchyłek i współrzędnych punktów wyznaczanych

$$\tau = +0,5210765 \quad Z = -0,480041 \quad x_o = -0,16$$

E						
Nr p-k-ł-u	$x'$	$-y'\tau$	$x'Z$	$\bar{x}$	$x$	$\Delta = x - \bar{x}$
1	2	3	4	5	6	7
2	- 28 75	- 72,87	+ 4,26	- 97 60	- 97 52	+ 0,08
11	+ 56 34	- 73,23	- 8,34	- 25 38	- 25 39	- 0,01
6	+ 9 35	- 54,83	- 1,38	- 47 01	- 47 02	- 0,01
3	- 13 84	- 37,07	+ 2,05	- 49 02	- 49 02	0,00
9	+ 15 63	- 35,39	- 2,31	- 22 20	- 22 23	- 0,03
4	+ 11 57	- 98,48	- 1,71	- 88 78		
5	+ 9 94	- 72,75	- 1,47	- 64 44		
8	+ 16 08	- 66,70	- 2,38	- 53 16		
1	- 45 12	- 128,03	+ 6,68	- 166 63		
7	+ 13 52	- 107,93	- 2,00	- 96 57		
10	+ 78 14	- 118,22	- 11,56	- 51 80		
						$\Sigma_1 = +0,03$

Obliczane wg wzorów:  $y' + x'\tau + y'Z + y_o = y$   
 $x' - y'\tau + x'Z + x_o = x$

F		$y_0 = +0,10$													
Nr p-ktu	$y'$			$x'\tau$			$y'Z$		$\bar{y}$		$y$		$\Delta = y - \bar{y}$		
	1	2		3		4		5		6		7			
2	+	139	84	-	14,98	-	20,70	+	104	28	+	104	26	-	0,02
11	+	140	53	+	29,36	-	20,80	+	149	12	+	149	19	+	0,07
6	+	105	22	+	4,87	-	15,57	+	94	62	+	94	62		0,00
3	+	71	15	-	10,53	-	7,21	+	53	52	+	53	51	-	0,01
9	+	67	92	+	8,14	-	10,05	+	66	14	+	66	11	-	0,03
4	+	188	99	+	6,03	-	27,97	+	167	15					
5	+	139	62	+	5,18	-	20,66	+	124	24					
8	+	128	00	+	8,38	-	18,94	+	117	54					
1	+	245	71	-	23,51	-	36,37	+	185	93					
7	+	207	13	+	7,04	-	30,66	+	183	61					
10	+	226	87	+	40,72	-	33,58	+	234	11					
G		$m = \pm \sqrt{\frac{[\Delta\Delta]}{n-4}} = \pm \sqrt{\frac{0,0138}{6}} = \pm 0,05$												$\Sigma z = +0,01$	

Tablica 4

Transformacja współrzędnej  $Z_F$   
1. Obliczenie przesunięcia układu

Nr. pkt	Wysokości		$\Delta Z = Z - Z_F$	$Z = Z_F + \Delta Z_{sr}$	$v_z$
	Z	$Z_F$			
2	102,93	2,83	100,10	102,92	+0,01
11	101,61	1,52	100,09	101,61	0
6	101,47	1,44	100,03	101,53	-0,06
3	101,07	0,96	100,11	101,05	+0,02
9	100,71	0,61	100,10	100,70	+0,01
$\Delta Z_{sr} = 100,09$					

2. Obliczenie ostatecznych współrzędnych Z

Nr. pkt	$Z_F$	$Z = Z_F + \Delta Z_{sr}$
4	6,40	106,49
5	2,44	102,53
8	1,88	101,97
1	16,78	116,87
7	10,94	111,03
10	12,41	112,50

ВОЙЧЕХ БЫХАВСКИ  
АНДЖЕЙ НОВОСЕЛЬСКИ

## ВЫЧИСЛЕНИЕ КООРДИНАТ МЕСТНОСТИ ПУНКТОВ ОПРЕДЕЛЕННЫХ ПО МЕТОДУ НАЗЕМНОЙ ФОТОГРАММЕТРИИ ПРИ ИСПОЛЬЗОВАНИИ ПУНКТОВ С ИЗВЕСТНЫМИ ГЕОДЕЗИЧЕСКИМИ КООРДИНАТАМИ

### Сокращение

В настоящей работе сообщается способ вычисления координат местности пунктов, для которых были измерены на стереокомпараторе координаты точки снимка и продольный параллакс. Для исключения влияния ошибок ориентации снимков при вычислениях были использованы пункты с известными геодезическими координатами (фотопункты). Поскольку координаты фотопунктов (особенно при обработке местности, не размещающейся на одной стереопаре) обычно даются в системе прямоугольных координат, передвинутой и повернутой по отношению к системе определённой фотограмметрической стереопары, предлагается следующий порядок работ:

1. Вычислить приближённые координаты фотопунктов, а также всех пунктов, определённых по основным формулам наземной фотограмметрии, т. е.

$$Y'_F = \frac{B}{p} (f \cos \varphi + x'' \sin \varphi);$$

$$X'_F = X'_F \frac{x'}{f};$$

$$Z'_F = Y'_F \frac{z'}{f};$$

где:

$B$  — измеренная на местности длина базы,

$f$  — фокусное расстояние,

$\varphi$  — угол поворота,

$x'$  — абсцисса точки снимка на левом снимке,

$x''$  — абсцисса точки снимка на правом снимке,

$z'$  — ордината точки снимка на левом снимке,

$p = x' - x''$  — продольный параллакс.

2. Вычислить поправки приближённых координат на основании формул:

$$dY = \frac{Y_F}{B} dB - \frac{B}{p^2} (f \cos \varphi + x' \sin \varphi) dp;$$

$$dX = dY \frac{x'}{f};$$

$$dZ = dY \frac{z'}{f};$$

Обозначение как выше.

Для решения этих формул следует вычислить величины  $dB$  и  $dp$ . Для этого составляется система линейных уравнений, в которых свободный член рассчитывается на основании фотопунктов. Каждый фотопункт даёт одно уравнение типа:

$$R - r = \frac{r}{B} dB - \frac{r (f \cos \varphi + x' \sin \varphi)}{p (f \cos \varphi + x'' \sin \varphi)} dp;$$

где:

$r$  — расстояние (фотопункта) от середины проекции левого снимка, определённое на основании приблизительных координат,

$R$  — расстояние от того же фотопункта до левого базового пункта, определённое на основании геодезических координат.

После решения этой системы уравнений получают величины  $dB$  и  $dp$  и на этой основе вычисляются поправки  $dY$ ,  $dX$  и  $dZ$ . Эти величины, прибавленные к приближенным координатам, дают совмещённые фотограмметрические координаты фотопунктов и всех пунктов, изображённых в фотограмметрической системе стереопары с геодезической основой. Они являются исходными пунктами для перевычисления на произвольную систему координат.

В заключении приведён цифровой пример, а также при помощи таблиц дана иллюстрация разложения ошибок перед и после совмещения.

На практике в фотограмметрическом отделении ИГиК эти расчёты производятся при помощи вычислительной машины УМЦ-1.



WOJCIECH BYCHAWSKI  
ANDRZEJ NOWOSIELSKI

## THE COMPUTATION OF COORDINATES OF POINTS DETERMINED BY THE METHOD OF TERRESTRIAL PHOTOGRAMMETRY WITH THE USE OF POINTS WITH KNOWN GEODETIC COORDINATES

### Summary

The paper describes the computation of coordinates of points, for which the image coordinates and horizontal parallax were measured on the stereocomparator. The points with known geodetic coordinates (control points) were used in these computations for the elimination of the influence of errors of the orientation of photographs. Since the coordinates of control points, particularly when the area exceeds the area of a single photograph, are given in the system of rectangular coordinates, which is generally shifted, rotated and very often inversely rotatory towards the photogrammetric system of a given stereogram, the following procedure is proposed:

1. The computation of the approximate coordinates of control points and of all points to be determined by the fundamental formulae of terrestrial photogrammetry.

$$Y'_F = \frac{B}{p} (f \cos \varphi + x'' \sin \varphi);$$

$$X'_F = Y'_F \frac{x'}{f};$$

$$Z'_F = Y'_F \frac{z'}{f};$$

where

$B$  — is the length of basis, measured on the ground,

$f$  — is the principal distance of the phototheodolite,

$\varphi$  — is the angle of horizontal swing,

$x'$  — is the image abscissa of the left photograph,

$x''$  — is the image abscissa of the right photograph,

$z'$  — is the image coordinate of the left photograph,

$p = x' - x''$  — the horizontal parallax.

2. The computation the corrections to the approximate coordinates by the formulae.

$$dY = \frac{Y_F}{B} dB - \frac{B}{p^2} (f \cos \varphi + x' \sin \varphi) dp;$$

$$dX = dY \frac{x'}{f};$$

$$dZ = dY \frac{z'}{f};$$

The values of  $dB$  and  $dp$  shall be previously computed. To this end a system of linear equations is drawn up, in which the (free) term is computed by means of the control points. Each control point gives one following equation:

$$R - r = \frac{r}{B} dB - \frac{r(f \cos \varphi + x' \sin \varphi)}{p(f \cos \varphi + x'' \sin \varphi)} dp;$$

where  $r$  — is the length of the radius to the control point with the origin in the projection centre of the left photograph; it is computed from the approximate coordinates;

$R$  — is the distance to the same control point from the left station computed from the geodetic coordinates.

The solving of this system of equations gives the values of  $dB$  and  $dp$ , from which the corrections  $dY$ ,  $dX$  and  $dZ$  are computed. These values added to the approximate coordinates give the adjusted machine coordinates of control points and of all points to be determined in the system of photogrammetric coordinates of the stereogram. They give the starting point for the transformation to the arbitrary system of coordinates. An example of computations and the tables showing the distribution of errors before and after the adjustment are given. In the Institute of Geodesy and Cartography all computations are performed with the computer UMC-1.

## SPIS TREŚCI

JULIAN RADECKI	
Tablice do obliczania odległości zenitalnej Polaris . . . . .	3
JAN CIESIELSKI	
Generalizacja osiedli miejskich na mapach topograficznych średnio- skalowych . . . . .	11
WOJCIECH BYCHAWSKI	
ANDRZEJ NOWOSIELSKI	
Obliczanie współrzędnych terenowych punktów wyznaczanych metodą fotogrametrii naziemnej z wykorzystaniem punktów o znanych współ- rzędnych geodezyjnych . . . . .	119

## СОДЕРЖАНИЕ

ЮЛИАН РАДЕЦКИ	
Таблицы для расчёта зенитного расстояния Полярной звезды . . . . .	3
ЯН ЧЕСЕЛЬСКИ	
Генерализация населённых пунктов городского типа на среднемас- штабных топографических картах . . . . .	11
ВОЙЧЕХ БЫХАВСКИ	
АНДЖЕЙ НОВОСЕЛЬСКИ	
Вычисление координат местности пунктов, определённых по методу наземной фотограмметрии при использовании пунктов с известными геодезическими координатами . . . . .	119

## CONTENTS

JULIAN RADECKI	
Tables for computation of the zenith distance of Polaris . . . . .	3
JAN CIESIELSKI	
The Generalization of the Towns represented on middle scale topographic maps . . . . .	11
WOJCIECH BYCHAWSKI	
ANDRZEJ NOWOSIELSKI	
The computation of coordinates of points determined by the method of terrestrial photogrammetry with the aid of points with known geodetic coordinates . . . . .	119