PRACE INSTYTUTU GEODEZJI I KARTOGRAFII
Tom XIV, Zeszyt 3(33), 1967

MACIEJ MOSKWIŃSKI 528.283:528.13

Sposób ułożenia programu obserwacyjnego do zmodyfikowanej metody prof. J. Radeckiego wyznaczania azymutu

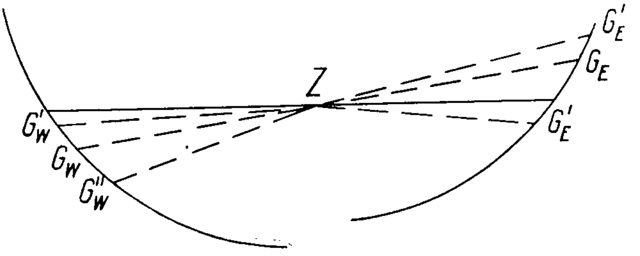
Dla każdej z licznych metod wyznaczania współrzędnych geograficznych i azymutu określa się, na podstawie analizy odpowiednich wzorów różniczkowych i doświadczeń praktycznych, najkorzystniejsze warunki wyznaczenia. Warunki te powinien zapewnić, w sposób możliwie najpełniejszy, odpowiedni dla danej metody program obserwacyjny. Wychodząc z tego założenia, przed przystąpieniem do układania programu dla zmodyfikowanej metody prof. J. Radeckiego wyznaczania azymutu, sprecyzować należy najkorzystniejsze dla niej warunki wyznaczenia.

W swej zmodyfikowanej wersji [2] metoda prof. J. Radeckiego wymaga zaobserwowania dwu gwiazd na tej samej wysokości po obu stronach zenitu i we wspólnym wertykale, przy czym w odróżnieniu od wersji oryginalnej [1] wertykał ten nie musi pokrywać się z wertykałem celu ziemskiego.

Na wstępie zajmiemy się szerzej odstępem czasu między obserwacjami gwiazd pary i zbadamy z jaką dokładnością należy przestrzegać warunku wspólnego wertykału obserwacji.

W optymalnym wypadku odstęp czasu między obserwacjami gwiazd w parze winien być jednakowy dla wszystkich par, a jego wielkość możliwie mała ale wystarczająca dla należytego przygotowania się obserwatora do obserwacji drugiej gwiazdy. Dla określonego stanowiska obserwacyjnego i przy zachowaniu warunku wspólnego wertykału obserwacji gwiazd pary odstęp ten jest funkcją współrzędnych obu gwiazd, w ogólności przyjmującą różne wartości dla każdej z par. Jego wielkości, przy przestrzeganiu warunku wspólnego wertykału, nie można zmienić. W zmodyfikowanej wersji metody nie jesteśmy ograniczeni stosunkowo niewielkim zakresem mikrometru. Wydawałoby się więc, że możemy zrezygnować z przestrzegania tego warunku i przez odpowiednie skręcenie wertykałów obserwacji gwiazd, tak dobrać momenty obserwacji każdej z nich by odstęp czasu między nimi był optymalny.

Na rysunku 1 G_W i G_E oznaczają położenia gwiazd w momentach ich przejścia przez wspólny wertykał zrównania wysokości. Skręcając wertykał obserwacji dla każdej gwiazdy w kierunku południowej lub północnej strony południka, czyli do położeń ZG''_W i ZG''_E lub ZG'_W i ZG'_E można w zależności od potrzeby uzyskać zmniejszenie lub zwiększenie niekorzystnej wartości interwału jaki otrzymano dla obserwacji gwiazd we wspólnym wertykale.



Rys. 1

Możliwości zmiany interwału czasu przedstawionym sposobem są, jak to się zaraz okaże, ograniczone. Ograniczenie to wynika z ciekawej właściwości omawianej metody wyznaczania azymutu. Jak wykazał prof. J. Radecki [3], bezpośrednio wyznaczony na podstawie obserwacji tą metodą azymut geodezyjny wolny jest od wpływu odchylenia pionu. Stwierdzenie to jest ścisłe tylko wtedy, gdy obserwację gwiazd pary wykonano dokładnie we wspólnym wertykale, czyli gdy został spełniony warunek:

$$a_E - a_W = \Delta a = 180°; \tag{1}$$

gdzie a_E i a_W oznaczają odpowiednio azymut wschodniej i zachodniej gwiazdy w momencie przejścia przez ten sam almukantarat.

Równania pozwalające otrzymać bezpośrednio azymut geodezyjny mają odpowiednio dla obu gwiazd postać [4]:

$$\begin{aligned} A_E &= a_E^{BL} + (\xi \sin a_E - \eta \cos a_E) \operatorname{ctg} z_E^* + Q_E; \\ A_W &= a_W^{BL} + (\xi \sin a_W - \eta \cos a_W) \operatorname{ctg} z_W^* + Q_W; \end{aligned} \tag{2}$$

gdzie: A — azymut geodezyjny celu ziemskiego liczony od północy,
a^{BL} — azymut gwiazdy wyliczony za pomocą współrzędnych geodezyjnych tj. geodezyjny azymut gwiazdy,
$\xi \cdot \eta$ — składowe odchylenia pionu w południku i pierwszym wertykale,
z^* — odległość zenitalna gwiazdy,
Q — pomierzony kąt między wertykałami gwiazdy i celu ziemskiego.

Z uwagi na to, że zgodnie z teorią metody $\overset{*}{z}_E = \overset{*}{z}_W = z^*$, wyrażenie na średni azymut wyznaczony z obserwacji pary możemy zapisać w postaci:

$$A = \frac{A_E + A_W}{2} = \frac{a_E^{BL} + a_W^{BL}}{2} +$$

$$+ \frac{\xi(\sin a_E + \sin a_W) - \eta(\cos a_E + \cos a_W)}{2} \operatorname{ctg} z^* + \frac{Q_E + Q_W}{2}; \tag{3}$$

Dla pary spełniającej warunek wyrażony wzorem (1) mamy:

$$\sin a_E = -\sin a_W;$$

$$\cos a_E = -\cos a_W;$$

i wyrażenie (3) upraszcza się wtedy do postaci:

$$A = \frac{a_E^{BL} + a_W^{BL}}{2} + \frac{Q_E + Q_W}{2}. \tag{4}$$

Azymut geodezyjny A jest więc wówczas całkowicie wolny od wpływu odchylenia pionu.

Zbadajmy teraz z jaką dokładnością należy przestrzegać warunku (1), by wpływ odchylenia pionu na wyznaczany azymut można uznać praktycznie za zaniedbywalny.

W tym celu należy określić wielkość

$$\varepsilon = a_E - a_W - 180°;$$

dla której wyrażenie

$$[\xi(\sin a_E + \sin a_W) - \eta(\cos a_E + \cos a_W)] \frac{\operatorname{ctg} z^*}{2};$$

występujące we wzorze (3) można, przy założeniu określonej dokładności rachunku, pominąć.

Oznaczając zaniedbywalną wielkość przez ω oraz biorąc pod uwagę, że $a_E = 180° + a_W + \varepsilon$ otrzymujemy do rozwiązania następującą nierówność:

$$\left| \{\xi[\sin a_W - \sin(a_W + \varepsilon)] - \eta[\cos a_W - \cos(a_W + \varepsilon)]\} \frac{\operatorname{ctg} z^*}{2} \right| < \omega;$$

która po przekształceniu przyjmie postać

$$\left| \left[-\xi \cos\left(a_W + \frac{\varepsilon}{2}\right) \sin\frac{\varepsilon}{2} - \eta \sin\left(a_W + \frac{\varepsilon}{2}\right) \sin\frac{\varepsilon}{2} \right] \operatorname{ctg} z^* \right| < \omega.$$

Ponieważ w naszym przypadku, jak okaże się później, wartość a_W odbiega maksymalnie od 90° o 7° możemy, popełniając w najgorszym wypadku przy wyznaczaniu wielkości ε błąd rzędu $\frac{\varepsilon}{10}$, określić ją z nierówności

$$\left|\eta \operatorname{ctg} z^* \frac{\varepsilon}{2}\right| < \omega :$$

skąd

$$|\varepsilon| < \left|\frac{2\,\omega \operatorname{tg} z^*}{\eta}\right|.$$

Przyjmując $\omega = 0{,}01''$, $z^* = 60°$, $\eta = 15''$ otrzymamy po wykonaniu rachunków

$$\varepsilon < 8'.$$

Zmianę interwału czasu między obserwacjami gwiazd pary o wielkość ΔT, wynikłą z możliwości odejścia od wspólnego wertykału o wielkość $\varepsilon = 8'$ obliczymy z wzoru:

$$\Delta T = \frac{dt}{da}\,\varepsilon.$$

Dla $a = 90°$ i $\varphi = 52°$ otrzymamy $\Delta T = 0{,}7^m$.

Jak widzimy zmiana ta, przy założeniu, że wyznaczony azymut geodezyjny ma być praktycznie wolny od wpływu odchylenia pionu, jest mniejsza niż 1^m. Biorąc pod uwagę niewielką wartość ΔT zrezygnowano z możliwości zmiany interwału czasu między obserwacjami gwiazd w parze przez skręcenie wertykałów obserwacji. Przedstawiony niżej sposób łączenia gwiazd w pary i obliczania przybliżonych momentów obserwacji oraz efemeryd opracowano przy założeniu wspólnego wertykału obserwacji.

Sformułujemy teraz dalsze warunki, które winny spełniać gwiazdy pary:

a. Wspólna dla obu gwiazd odległość zenitalna winna mieścić się w przedziale $50° < z < 75°$ przy czym pierwszeństwo należy dać parom dla których odległość ta bliższa jest górnej granicy przedziału. Pozwoli to zmniejszyć maksymalnie wpływ nachylenia osi poziomej, nieregularności czopów, kolimacji i bocznego gięcia lunety na wyniki pomiaru.

b. Wertykał obserwacji winien być bliski pierwszego wertykału wtedy bowiem, jak wynika z analizy wzoru różniczkowego metody [1] wpływ błędów szerokości geograficznej, średniej wartości deklinacji gwiazd pary, niespełnienia warunku równej wysokości oraz pomiaru różnicy azymutów gwiazd na wyznaczany azymut jest najmniejszy. Poza tym w pobliżu pierwszego wertykału kąt paralaktyczny gwiazd bliski jest wartości maksymalnej, co stwarza korzystne warunki dla oceny pozycji azymutalnej momentów przejść gwiazd przez nitki poziome.

c. Różnica czasów między obserwacjami gwiazd winna mieścić się w przedziale $4^m < \delta T < 15^m$ przy czym tworząc pary należy tak dobierać gwiazdy by różnica ta była możliwie bliska dolnej granicy przedziału. Osiągniemy wtedy większą stabilność instrumentu w obrębie obserwacji pary.

d. Dla zapewnienia dobrej widoczności gwiazd w polu widzenia nie należy włączać do programu gwiazd o jasności przekraczającej $6{,}0^m$.

Z założonych warunków wyniknął niżej przedstawiony sposób postępowania przy układaniu programu.

Podstawiając do wzoru

$$\sin\delta = \cos z \sin\varphi;$$

słusznego dla pierwszego wertykału, graniczne wartości na z, otrzymuje się orientacyjną wielkość przedziału deklinacji. Z katalogu wybrać należy gwiazdy, których deklinacje zawierają się w tym przedziale. Dla każdej gwiazdy należy teraz dobrać drugą o takich współrzędnych, by różnica czasów przejścia przez wertykał zrównania wysokości mieściła się w przyjętych granicach i jednocześnie by wertykał ten był bliski pierwszego wertykału.

Wstępne rozeznanie pozwoliło stwierdzić, że różnica deklinacji gwiazd w tworzonych parach nie będzie większa niż kilka stopni. Wynikłe stąd oddalenie wertykału obserwacyjnego od pierwszego wertykału jest tego samego rzędu co wielkość różnicy.

Sposób zestawienia gwiazd w pary i obliczenia przybliżonych momentów obserwacji wynika z przyjęcia upraszczającego założenia, że dla kilkustopniowego oddalenia wertykału obserwacji od pierwszego wertykału możemy, jak to się okaże, przy rachunkach z dokładnością 1^m ogólne wyrażenia na pochodne

$$\frac{da}{dt} = \sin\varphi + \cos\varphi \operatorname{ctg} z \cos a; \qquad \frac{dz}{dt} = \cos\varphi \sin a;$$

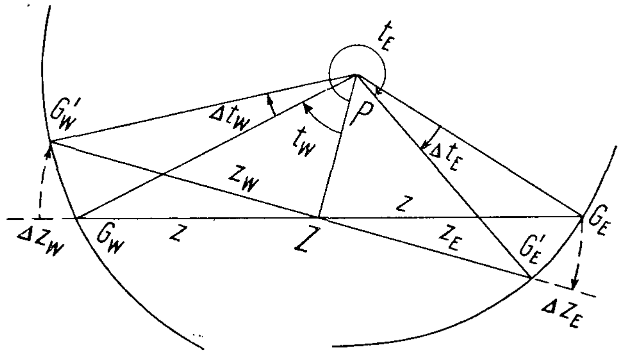
zastąpić wyrażeniami

$$\frac{da}{dt} = \sin\varphi; \qquad \frac{dz}{dt} = \cos\varphi; \tag{5}$$

ścisłymi jedynie dla pierwszego wertykału.

Zbadajmy teraz wynikłe z przyjętego założenia zależności.

Na rysunku 2 G'_W i G'_E oznaczają położenia gwiazd pary w momencie przejścia przez pierwszy wertykał. Wielkości z_W, z_E i t_W, t_E to odpowiednio odległości zenitalne i kąty godzinne w tymże momencie. G_W i G_E oznaczają położenia gwiazd w wertykale zrównania wysokości, z — wspólną odległość zenitalną a Δt_W i Δt_E, Δz_W i Δz_E, Δa_W i Δa_E, przyrosty kątów godzinnych, odległości zenitalnych i azymutów od momentów Θ' przejścia przez pierwszy wertykał do momentu Θ zrównania wysokości.



Rys. 2

Oznaczając przez $\delta T'$ odstęp czasu między momentami przejścia gwiazd przez pierwszy wertykał a przez δT odstęp między momentami przejścia przez wertykał zrównania wysokości, mamy:

$$\delta T' = \Theta_E' - \Theta_W' = (\alpha_E + t_E) - (\alpha_W + t_W); \tag{6}$$

$$\begin{aligned} \delta T = \Theta_E - \Theta_W &= (\alpha_E + t_E + \Delta t_E) - (\alpha_W + t_W + \Delta t_W) = \\ &= (\alpha_E + t_E) - (\alpha_W + t_W) + (\Delta t_E - \Delta t_W); \end{aligned} \tag{6'}$$

Przy założeniu, że obowiązują wzory (5) możemy napisać:

$$\frac{\Delta a_E}{\Delta t_E} = \sin\varphi; \qquad \frac{\Delta a_W}{\Delta t_W} = \sin\varphi; \tag{7}$$

a ponieważ z warunku wspólnego wertykału obserwacji wynika

$$\Delta a_E = \Delta a_W = \Delta a;$$

więc tym samym na podstawie (7)

$$\Delta t_E = \Delta t_W = \Delta t. \tag{8}$$

Z ostatniej równości i drugiego z worów (5) wynika również

$$\Delta z_E = \Delta z_W = \Delta z. \tag{9}$$

Równość (8) pociąga za sobą, ze względu na zniknięcie ostatniego składnika we wzorze (6), równość

$$\delta T' = \delta T. \tag{10}$$

Pozwala ona w prosty sposób łączyć gwiazdy w pary jak również określać przybliżone momenty obserwacji. Wystarczy dla wszystkich wybranych gwiazd wyznaczyć czas gwiazdowy przejścia przez zachodnią i wschodnią stronę pierwszego wertykału a następnie tworzyć pary z gwiazd o możliwie bliskich deklinacjach, dla których różnica czasów przejścia przez przeciwne strony pierwszego wertykału spełnia wyżej przyjęty warunek $4^m < \delta T < 15^m$.

Czas ten łatwo obliczyć z wzoru:

$$\Theta' = \alpha \pm t_E^W \tag{11}$$

gdzie

$$t = \arccos\left(\frac{\operatorname{tg}\delta}{\operatorname{tg}\varphi}\right). \tag{11'}$$

Dla ułatwienia rachunków, na podstawie wzoru (11′) sporządzić można wykres, z którego dla odpowiednich wartości odczytuje się wartości t z dokładnością $0{,}5^m$.

Aby ułożyć program z otrzymanego w ten sposób zbioru par należy określić przybliżone (z dokładnością 1^m) momenty obserwacji każdej gwiazdy pary. W tym celu wystarczy dla każdej pary obliczyć wartość Δt i dodać ją z odpowiednim znakiem do obliczonych uprzednio momentów przejścia gwiazd przez pierwszy wertykał.

Wielkość Δt, jak to wynika z (5), wyraża wzór

$$\Delta t = \frac{\Delta z}{\cos\varphi}. \tag{12}$$

Jeśli różnicę odległości zenitalnych gwiazd pary w pierwszym wertykale oznaczymy przez Δz_I, to wartość Δz będzie równa

$$\Delta z = \frac{\Delta z_E}{2}. \tag{13}$$

Biorąc pod uwagę, że

$$\frac{\Delta z_I}{\Delta\delta}\ \frac{1}{\sin\varphi\,\sin t}; \quad \text{gdzie } \Delta\delta = \delta_E - \delta_W; \quad t = \arccos\left(\frac{\operatorname{tg}\frac{\delta_E+\delta_W}{2}}{\operatorname{tg}\varphi}\right); \tag{14}$$

otrzymujemy ostatecznie z (12), (13) i (14)

$$\Delta t = \frac{\Delta\delta}{2\sin\varphi\,\cos\varphi\,\sin t};$$

lub zapisując w prostszej postaci

$$\Delta t = \frac{\Delta\delta}{\sin 2\varphi\,\sin t}. \tag{15}$$

Dla wartości wyrażenia $\dfrac{1}{\sin 2\varphi\,\sin t}$ sporządzić można wykres zależności od argumentu $\dfrac{\delta_E+\delta_W}{2}$. Mnożąc wartość $\Delta\delta$ przez odczytaną z wykresu wielkość w prosty sposób otrzymujemy poszukiwaną wartość Δt, którą z uwagi na przybliżony charakter rachunku wystarczy wyznaczać z dokładnością $0{,}5^m$.

Ze zbioru par z wyznaczonymi przybliżonymi momentami obserwacji układamy program obserwacyjny.

Dla par programu wyznaczamy efemerydy robocze. Azymut a i odległość zenitalną z obliczamy za pomocą wynikłych z teorii metody wzorów

$$\cos z = \operatorname{cosec} \varphi \sin \delta \cos \frac{\Delta\delta}{2};$$

$$a = a_0 \mp 90°{}^W_E; \tag{16}$$

$$\sin a_0 = \sec \varphi \cos \delta \sin \frac{\Delta\delta}{2} \operatorname{cosec} z:$$

a czas gwiazdowy obserwacji z wzorów:

$$\Theta = \alpha + t; \tag{17}$$

$$\sin t = \sin a \sin z \sec \delta.$$

Opierając się na roczniku miejsc widomych „Apparent Places of Fundamental Stars" sporządzono według wyżej przedstawionego sposobu program obserwacyjny dla $\varphi = 52°23'$.

Charakteryzują go następujące cechy:

a. Czas obserwacji sześciu par wynosi przeciętnie dwie godziny.

b. Odstęp czasu między gwiazdami pary mieści się w granicach $3{,}5^m \div 11{,}0^m$.

c. Odstęp czasu między parami mieści się w przedziale $8^m \div 25^m$.

d. Maksymalna odległość wertykału obserwacji od pierwszego wertykału równa jest $7°$ a dla przeważającej większości par nie przekracza $3°$.

e. Odległość zenitalna dla przeważającej większości par zawiera się w przedziale $45° < z < 75°$.

f. Wielkość pozorna gwiazd nie przekracza $6{,}0^m$ i tylko dla kilku gwiazd jest nieco większa.

Z porównania wyliczonych ściśle za pomocą wzorów (16) i (17) momentów obserwacji z wynikami otrzymanymi przybliżonym rachunkiem wynika, że dla najniekorzystniejszej pary ($\Delta a = 7°$) różnica nie przekracza $1{,}5^m$ a dla większości par jest ona znacznie mniejsza niż $1{,}0^m$.

Chcąc ulepszyć program, zarówno pod względem zagęszczenia par, jak i zmniejszenia maksymalnego odstępu między obserwacjami gwiazd w parze należałoby łączyć w pary gwiazdy o znaczniejszych różnicach deklinacji. W tym wypadku wzrosłaby jednak również odległość wertykału obserwacji od pierwszego wertykału i błędy określenia przybliżonych momentów obserwacji tą metodą byłyby zbyt duże by można je zaniedbać. Przyjęta metoda układania programu wymagałaby wtedy modyfikacji.

LITERATURA

[1] *Radecki J.*: Wyznaczenie azymutu z obserwacji par gwiazd na tej samej wysokości w wertykale przedmiotu leżącego w pobliżu I wertykału. Warszawa 1951.

[2] *Radecki J.*: O możliwości podniesienia dokładności wyznaczenia azymutu Laplace'a. Warszawa 1965. Maszynopis.

[3] *Radecki J.*: Program wyznaczania azymutu metodami Kępińskiego i Radeckiego. Warszawa 1965. Maszynopis.

[4] *Starostin A.M.*: Opriedielenije geodieziczeskogo azimuta iz nabliudienii prochożdienija zwiezd w meridianie. Trudy CNIIGAiK, wyp. 147, Moskwa 1962.

Recenzował: Prof. dr Julian Radecki

Rękopis złożono w Redakcji w maju 1967 r.

МАЦЕЙ МОСКВИНЬСКИ

СПОСОБ ОБРАБОТКИ ПРОГРАММЫ НАБЛЮДЕНИЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ АЗИМУТА ДЛЯ МОДИФИЦИРОВАННОГО МЕТОДА ПРОФ. Ю. РАДЕЦКОГО

Резюме

Способ позволяет разработать программу наблюдения для определения пар звёзд на одной и той же высоте по обеим сторонам зенита на общей вертикали, исходя из предпосылкс, что угловое расстояние между первой вертикалью и вертикалью наблюдения обеих звёзд, составляющих пару, не превышает 7 дуговых градусов.

Указаны границы, в которых метод Радецкого даёт результаты, свободные от влияния отклонения вертикали. А именно, если угол между вертикалями обеих звёзд пары не отличается от 180 градусов больше чем на 8 дуговых градусов, то для составляющей относительного отклонения вертикали в первой вертикали равней 15″ и зенитном расстоянии, равном 60°, влияние отклонений вертикали на непосредственно определённый геодезический азимут достигает только 0,01″.

MACIEJ MOSKWIŃSKI

THE WAY OF COMPOSITION OF AN OBSERVATION PROGRAMME TO THE MODIFIED METHOD OF AZIMUTH DEFINITION BY PROF. J. RADECKI

Summary

There is presented a composition of an observation programme for the definition of azimuth from the observations of a pair of stars on the same height on both sides of zenith, in a common vertical, by the assumption, that the angular distance between the first vertical and the vertical of observation of both stars of a pair does not exceed 7 degrees of arc.

There are shown limits, for which the method of prof. Radecki gives the results free of the influence of the deflection of vertical. When the angle between the verticals of both stars of a pair does not differ from 180° more than 8′ of arc; then for the component of relative deflection of the vertical in the first vertical equal to 15″ and zenital distance of 60° the influence of the deflection of vertical upon a direct determined geodetic azimuth arrives at 0,01″.