PRACE INSTYTUTU GEODEZJI I KARTOGRAFII

Tom XV, Zeszyt 3/36, 1968

JERZY GAZDZICKI

ALEKSANDER SKÓRCZYŃSKI

528.11

Błędy średnie funkcji obserwacji wyrównanych

Zagadnienie wyznaczania błędów średnich funkcji obserwacji wyrównanych należy do trudniejszych w rachunku wyrównawczym zarówno pod względem pojęciowym, jak i dydaktycznym. W pracy niniejszej przedstawia się oryginalne wyprowadzenie wzorów określających te błędy w symbolice krakowianowej, macierzowej i wyznacznikowej. Dowody przeprowadzane są przy wykorzystaniu interesujących, choć mało znanych zależności istniejących pomiędzy metodami spostrzeżeń pośrednich i zawarunkowanych. Na uwagę zasługują w szczególności przejrzyste i proste w formie wzory wyznacznikowe. Wzór (33) dotyczący metody spostrzeżeń pośrednich jest wzorem nowym, zaś dowód słuszności analogicznego wzoru (42) dla metody spostrzeżeń zawarunkowanych wyróżnia się zwięzłością.

1. Twierdzenia pomocnicze

Niech będzie dana funkcja obserwacji wyrównanych

$$F = f\left(l_1^{\text{wyr.}}, l_2^{\text{wyr.}}, \ldots, l_n^{\text{wyr.}}\right), \tag{1}$$

której błąd średni m_F chcemy obliczyć na podstawie znanego błędu średniego obserwacji m_0. Będziemy rozważali dwie metody wyrównania:

a) metodę spostrzeżeń pośrednich, w której rozwiązuje się układ równań poprawek

$$\mathbf{v} = \mathbf{x} \cdot \tau\mathbf{a} + \mathbf{l}, \tag{2}$$

b) metodę spostrzeżeń zawarunkowanych, w której rozwiązuje się układ równań warunkowych

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{b} = \underline{\omega} \tag{3}$$

gdzie **a**, **b** są krakowianami współczynników w układach równań poprawek i równań warunkowych

$$\mathbf{a} = \begin{Bmatrix} a_1 & b_1 & \dots & q_1 \\ a_2 & b_2 & \dots & q_2 \\ \dots & \dots & & \\ a_n & b_n & \dots & q_n \end{Bmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{Bmatrix} a_1 & b_1 & \dots & w_1 \\ a_2 & b_2 & \dots & w_2 \\ \dots & \dots & & \\ a_n & b_n & \dots & w_n \end{Bmatrix},$$

zaś **v**, **x**, **l**, $\underline{\omega}$ — krakowianami poprawek, niewiadomych i wyrazów wolnych

$$\mathbf{v} = \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \dots \\ v_n \end{Bmatrix}, \qquad \mathbf{x} = \begin{Bmatrix} x_a \\ x_b \\ \dots \\ x_q \end{Bmatrix}, \qquad \mathbf{l} = \begin{Bmatrix} l_1 \\ l_2 \\ \dots \\ l_n \end{Bmatrix}, \qquad \underline{\omega} = \begin{Bmatrix} \omega_a \\ \omega_b \\ \dots \\ \omega_w \end{Bmatrix}.$$

Elementy krakowianów **a**, **b** zgodnie z obowiązującą tradycją oznaczono w ten sam sposób: a_i, b_i, ..., choć przedstawiają one pochodne cząstkowe różnych funkcji.

Twierdzenie 1. Krakowian wyrazów wolnych $\underline{\omega}$ układu równań warunkowych równa się krakowianowi wyrazów wolnych **l** układu równań poprawek pomnożonemu przez krakowian współczynników **b** układu równań warunkowych, czyli

$$\underline{\omega} = \mathbf{l} \cdot \mathbf{b}. \tag{4}$$

Zakłada się tu, oczywiście, że równania warunkowe odpowiadają temu samemu układowi obserwacji co i równania poprawek.

Dowód. Rozważajmy układ równań warunkowych

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{b} = \underline{\omega} \tag{5}$$

Niech

$$\mathbf{l} \cdot \mathbf{b} = \Delta. \tag{6}$$

Oznaczając przez $\mathbf{l}^{\text{obs.}}$, $\mathbf{l}^{\text{wyr.}}$, $\mathbf{l}^{\text{przybl.}}$ odpowiednio krakowiany wartości zaobserwowanych, wyrównanych i przybliżonych możemy przedstawić układ równań warunkowych w postaci

$$(\mathbf{l}^{\text{wyr.}} - \mathbf{l}^{\text{obs.}}) \cdot \mathbf{b} = \underline{\omega} \tag{7}$$

Podobnie podstawiając $\mathbf{l} = \mathbf{l}^{\text{przybl.}} - \mathbf{l}^{\text{obs.}}$ do (6) otrzymamy

$$(\mathbf{l}^{\text{przybl.}} - \mathbf{l}^{\text{obs.}}) \cdot \mathbf{b} = \Delta. \tag{8}$$

Odejmując (8) od (7) uzyskamy układ

$$(\mathbf{l}^{\text{wyr.}} - \mathbf{l}^{\text{przybl.}}) \cdot \mathbf{b} = \underline{\omega} - \Delta, \tag{9}$$

który może być traktowany jako układ równań warunkowych, gdzie wartości zaobserwowane równają się wartościom przybliżonym. W tym przypadku wyrazy wolne są równe zeru

$$\underline{\omega} - \Delta = \mathbf{0}, \tag{10}$$

ponieważ przybliżone wartości obserwacji, obliczone w sposób jednoznaczny na podstawie przybliżonych wartości niewiadomych, spełniają równania warunkowe (np. suma trzech kątów trójkąta obliczonych ze współrzędnych x, y równa się 180°).

Mamy zatem

$$\underline{\omega} = \Delta. \tag{11}$$

czyli rzeczywiście

$$\mathbf{l} \cdot \mathbf{b} = \underline{\omega}.$$

Dowód tej zależności podany jest również w [3].

Twierdzenie 2. Krakowiany współczynników układu równań poprawek **a** i współczynników układu równań warunkowych **b** spełniają następujący związek

$$\tau\mathbf{a} \cdot (\mathbf{a}^2)^{-1} \cdot \tau\mathbf{a} = \tau - \tau\mathbf{b} \cdot (\mathbf{b}^2)^{-1} \cdot \tau\mathbf{b}. \tag{12}$$

Dowód. Wyprowadzimy krakowiany $\mathbf{t}_{l/v}$ transformujące obserwacje na poprawki dla metody spostrzeżeń pośrednich i zawarunkowanej

I. Metoda spostrzeżeń pośrednich. Układowi równań poprawek (2) odpowiada układ równań normalnych

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{a}^2 + \mathbf{l} \cdot \mathbf{a} = 0, \tag{13}$$

z którego wynika, że

$$\mathbf{x} = -\mathbf{l}\,[(\mathbf{a}^2)^{-1} \cdot \tau\mathbf{a}]. \tag{14}$$

Podstawiając **x** do układu równań poprawek otrzymamy

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \mathbf{l} - \mathbf{l}\,[(\mathbf{a}^2)^{-1} \cdot \tau\mathbf{a}] \cdot \tau\mathbf{a} = \\ &= \mathbf{l} - \mathbf{l}\,\{\tau\mathbf{a} \cdot [\tau\mathbf{a} \cdot (\mathbf{a}^2)^{-1}]\} = \\ &= \mathbf{l} - \mathbf{l}\,\{\tau\mathbf{a} \cdot (\mathbf{a}^2)^{-1} \cdot \tau\mathbf{a}\} = \\ &= \mathbf{l}\,\{\underline{\tau} - \tau\mathbf{a} \cdot (\mathbf{a}^2)^{-1} \cdot \tau\mathbf{a}\} \end{aligned}$$

Mamy więc

$$\mathbf{t}_{l/v} = \underline{\tau} - \tau\mathbf{a} \cdot (\mathbf{a}^2)^{-1} \cdot \tau\mathbf{a}. \tag{15}$$

II. Metoda spostrzeżeń zawarunkowanych

Rozwiązanie układu równań warunkowych (3) wyraża się wzorem

$$\mathbf{v} = \underline{\omega}\,[\tau\mathbf{b}\,(\mathbf{b}^2)^{-1}], \tag{16}$$

łatwym do wyprowadzenia na podstawie równań $\mathbf{v} = \mathbf{k} \cdot \tau\mathbf{b}$, $\mathbf{k} \cdot \mathbf{b}^2 = \underline{\omega}$.

Uwzględniając twierdzenie 1 napiszemy

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \mathbf{l} \cdot \mathbf{b}\,[\tau\mathbf{b}\,(\mathbf{b}^2)^{-1}] = \\ &= \mathbf{l}\,[\tau\mathbf{b} \cdot (\mathbf{b}^2)^{-1}]\,\tau\mathbf{b}, \end{aligned}$$

Skąd wynika, że

$$\mathbf{t}_{l/v} = \tau\mathbf{b}\,(\mathbf{b}^2)^{-1} \cdot \tau\mathbf{b}. \tag{17}$$

Porównując wyrażenia (15) i (17) przedstawiające krakowian transformujący $\mathbf{t}_{l/v}$ otrzymamy

$$\underline{\tau} - \tau\mathbf{a}\,(\mathbf{a}^2)^{-1} \cdot \tau\mathbf{a} = \tau\mathbf{b}\,(\mathbf{b}^2)^{-1} \cdot \tau\mathbf{b}$$

czyli

$$\tau\mathbf{a} \cdot (\mathbf{a}^2)^{-1} \cdot \tau\mathbf{a} = \underline{\tau} - \tau\mathbf{b}\,(\mathbf{b}^2)^{-1} \cdot \tau\mathbf{b}$$

c.b.d.o

Funkcja (1) wyrównanych obserwacji

$$F = f\left(l_1^{\text{wyr.}}, l_2^{\text{wyr.}}, \ldots, l_n^{\text{wyr.}}\right)$$

może być przedstawiona również w postaci

$$F = g\left(X_a^{\text{wyr.}}, X_b^{\text{wyr.}}, \ldots, X_q^{\text{wyr.}}\right) \tag{18}$$

gdzie $X_a^{\text{wyr.}}$, $X_b^{\text{wyr.}}, \ldots,$ $X_q^{\text{wyr.}}$ są wyrównanymi wartościami niewiadomych pośredniczących.

Załóżmy, że przyrosty wielkości F przy przejściu od wartości przybliżonych do wyrównanych mogą być zastąpione różniczkami zupełnymi

$$dF = \frac{\partial F}{\partial l_1} dl_1 + \frac{\partial F}{\partial l_2} dl_2 + \ldots + \frac{\partial F}{\partial l_n} dl_n = \mathbf{dl} \cdot \mathbf{f}_l\,, \tag{19}$$

$$dF = \frac{\partial F}{\partial X_a} x_a + \frac{\partial F}{\partial X_b} x_b + \ldots + \frac{\partial F}{\partial X_q} x_q = \mathbf{x} \cdot \mathbf{f}_x\,, \tag{20}$$

gdzie $\mathbf{dl} = \mathbf{l}^{\text{wyr.}} - \mathbf{l}^{\text{przybl.}}$, $\mathbf{x} = \mathbf{X}^{\text{wyr.}} - \mathbf{X}^{\text{przybl.}}$, zaś

$$\mathbf{f}_l = \left\{ \begin{matrix} \dfrac{\partial F}{\partial l_1} \\ \dfrac{\partial F}{\partial l_2} \\ \cdots \\ \dfrac{\partial F}{\partial l_n} \end{matrix} \right\}, \qquad \mathbf{f}_x = \left\{ \begin{matrix} \dfrac{\partial F}{\partial X_a} \\ \dfrac{\partial F}{\partial X_b} \\ \cdots \\ \dfrac{\partial F}{\partial X_q} \end{matrix} \right\}.$$

Udowodnimy teraz twierdzenie o krakowianach pochodnych cząstkowych $\mathbf{f}_l$, $\mathbf{f}_x$.

Twierdzenie 3. Krakowiany pochodnych cząstkowych $\mathbf{f}_l$, $\mathbf{f}_x$ spełniają związek

$$\mathbf{f}_x = \mathbf{f}_l \cdot \mathbf{a}, \tag{21}$$

gdzie $\mathbf{a}$ jest krakowianem współczynników układu równań poprawek.

Dowód. Z układu równań poprawek (2) wynika, że

$$\mathbf{v} - \mathbf{l} = \mathbf{x} \cdot \tau\mathbf{a} \tag{22}$$

Ponieważ $\mathbf{v} - \mathbf{l} = \mathbf{l}^{\text{wyr.}} - \mathbf{l}^{\text{obs.}} - \mathbf{l}^{\text{przybl.}} + \mathbf{l}^{\text{obs.}} = \mathbf{l}^{\text{wyr.}} - \mathbf{l}^{\text{przybl.}} = \mathbf{dl}$, więc

$$\mathbf{dl} = \mathbf{x} \cdot \tau\mathbf{a}. \tag{23}$$

Podstawiając (23) do (19) otrzymamy

$$\begin{aligned} dF &= \mathbf{x} \cdot \tau\mathbf{a} \cdot \mathbf{f}_l = \\ &= \mathbf{x}\,(\mathbf{f}_l \cdot \mathbf{a}). \end{aligned} \tag{24}$$

Z drugiej strony mamy

$$dF = \mathbf{x} \cdot \mathbf{f}_x;$$

czyli $\mathbf{f}_x = \mathbf{f}_l \cdot \mathbf{a}$ c.b.d.o.

2. Błąd średni funkcji obserwacji wyrównanych metodą spostrzeżeń pośrednich

Na podstawie wzoru (14) łatwo udowodnić [2]—[3], że błąd średni funkcji niewiadomych wyraża się dobrze znanym wzorem

$$m_F = m_0 \sqrt{\mathbf{f}_x\,(\mathbf{a}^2)^{-1}\,\mathbf{f}_x}. \tag{25}$$

Korzystając z twierdzenia (3) otrzymamy natychmiast wzór wyrażający błąd średni funkcji wyrównanych obserwacji dla metody spostrzeżeń pośrednich

$$m_F = m_0 \sqrt{(\mathbf{f}_l \cdot \mathbf{a})\,(\mathbf{a}^2)^{-1}\,(\mathbf{f}_l\mathbf{a})}\,. \tag{26}$$

Wzór ten przekształcimy pisząc

$$\begin{aligned} m_F &= m_0 \sqrt{(\mathbf{f}_l\mathbf{a})\,(\mathbf{a}^2)^{-1} \cdot \tau\mathbf{a}\mathbf{f}_l} = \\ &= m_0 \sqrt{\mathbf{f}_l[(\mathbf{a}^2)^{-1}\,\tau\mathbf{a}] \cdot \tau\,\mathbf{a}\mathbf{f}_l} = \\ &= m_0 \sqrt{\mathbf{f}_l\{\tau\mathbf{a}[\tau\mathbf{a} \cdot (\mathbf{a}^2)^{-1}]\}\,\mathbf{f}_l} = \\ &= m_0 \sqrt{\mathbf{f}_l\,\{\tau\mathbf{a}\,(\mathbf{a}^2)^{-1}\,\tau\mathbf{a}\}\,\mathbf{f}_l}\,. \end{aligned} \tag{27}$$

W ten sposób uzasadniliśmy tożsamość

$$(\mathbf{f}_l\mathbf{a})\,(\mathbf{a}^2)^{-1}\,(\mathbf{f}_l\mathbf{a}) = \mathbf{f}_l\,\{\tau\mathbf{a}\,(\mathbf{a}^2)^{-1}\,\tau\mathbf{a}\}\,\mathbf{f}_l \tag{28}$$

która okaże się jeszcze przydatna.

Weźmy teraz pod uwagę krakowian blokowy

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{a}^2 & \mathbf{f}_l\mathbf{a} \\ \mathbf{a}\mathbf{f}_l & 0 \end{Bmatrix}, \tag{29}$$

Pierwiastek z tego krakowianu oznaczymy następująco

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{a}^2 & \mathbf{f}_l\mathbf{a} \\ \mathbf{a}\mathbf{f}_l & 0 \end{Bmatrix}^{\frac{1}{2}} = \begin{Bmatrix} \mathbf{R} & \varphi \\ & \Phi \end{Bmatrix}, \tag{30}$$

gdzie Φ jest ostatnim elementem głównej przekątnej pierwiastka.

Wykażemy, że

$$m_F = m_0 \sqrt{-\Phi^2}, \tag{31}$$

tzn., że

$$-\Phi^2 = (\mathbf{f}_l\mathbf{a})\,(\mathbf{a}^2)^{-1}\,(\mathbf{f}_l\mathbf{a}). \tag{32}$$

Mamy rzeczywiście

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{R} & \underline{\varphi} \\ & \Phi \end{Bmatrix}^2 = \begin{Bmatrix} \mathbf{R}^2 & \underline{\varphi}\mathbf{R} \\ \mathbf{R}\varphi & \Phi^2 + \underline{\varphi}^2 \end{Bmatrix},$$

czyli $\mathbf{R} = \sqrt{\mathbf{a}^2}$, $\underline{\varphi}\mathbf{R} = \mathbf{f}_l\mathbf{a}$, zaś

$$\begin{aligned} -\Phi^2 &= \underline{\varphi}^2 = [(\mathbf{f}_l\mathbf{a}) \cdot \tau\mathbf{R}^{-1}]^2 = \\ &= (\mathbf{f}_l\mathbf{a})\,(\mathbf{R}^{-1})^2\,(\mathbf{f}_l\mathbf{a}) = \\ &= (\mathbf{f}_l\mathbf{a})\,(\mathbf{a}^2)^{-1}\,(\mathbf{f}_l\mathbf{a}). \end{aligned}$$

Wzór (31) jest użyteczny praktycznie przy stosowaniu algorytmu pierwiastka krakowianowego.

Wykażemy z kolei słuszność następującego wzoru wyznacznikowego.

$$m_F = m_0 \sqrt{-\frac{\begin{vmatrix} [aa] & [ab] & \dots & [aq] & [af] \\ [ab] & [bb] & \dots & [bq] & [bf] \\ \dots & & \dots & & \dots \\ [aq] & [bq] & \dots & [qq] & [qf] \\ [af] & [bf] & \dots & [qf] & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} [aa] & [ab] & \dots & [aq] \\ [ab] & [bb] & \dots & [bq] \\ \dots & & \dots & \\ [aq] & [bq] & \dots & [qq] \end{vmatrix}}}, \tag{33}$$

W liczniku ułamka występującego pod pierwiastkiem znajduje się wyznacznik utworzony ze współczynników układu równań normalnych i elementów $[af]$, $[bf]$, ..., $[qf]$ obliczonych na podstawie znanych krakowianów $\mathbf{a}$ i $\mathbf{f}_l$. Jest to wyznacznik o tabeli krakowianu (29). Wartość tego wyznacznika D_L równa się iloczynowi kwadratów elementów przekątnych piarwiastka krakowianowego (30):

$$D_L = R^2_{1.1} \cdot R^2_{2.2} \dots R^2_{q \cdot q}\, \Phi^2 \tag{34}$$

Natomiast w mianowniku występuje wyznacznik główny układu równań normalnych o wartości

$$D_M = R^2_{1.1} \cdot R^2_{2.2} \dots R^2_{q \cdot q}\,. \tag{35}$$

Możemy zatem stwierdzić, że rzeczywiście

$$m_F = m_0 \sqrt{-\frac{D_L}{D_M}}$$

ponieważ

$$\frac{D_L}{D_M} = \frac{R^2_{11} \cdot R^2_{22} \dots R^2_{qq}\, \Phi^2}{R^2_{11} \cdot R^2_{22} \dots R^2_{qq}} = \Phi^2. \tag{36}$$

Przy okazji warto zauważyć, że błąd średni funkcji niewiadomych może być wyrażony wzorem

$$m_F = m_0 \sqrt{\frac{\begin{vmatrix} [aa] & [ab] & \ldots & [aq] & f_a \\ [ab] & [bb] & \ldots & [bq] & f_b \\ \ldots & \ldots & & \ldots & \\ [aq] & [bq] & \ldots & [qq] & f_q \\ f_a & f_b & \ldots & f_q & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} [aa] & [ab] & \ldots & [aq] \\ [ab] & [bb] & \ldots & [bq] \\ \ldots & \ldots & & \ldots \\ [aq] & [bq] & \ldots & [qq] \end{vmatrix}}} \tag{37}$$

gdzie $f_a, f_b, \ldots f_q$ są elementami krakowianu f_x:

$$f_a = \frac{\partial F}{\partial X_a}, \quad f_b = \frac{\partial F}{\partial X_b}, \quad \ldots, \quad f_q = \frac{\partial F}{\partial X_q}.$$

Słuszność tego wzoru wynika bezpośrednio z twierdzenia 3.

3. Błąd średni funkcji obserwacji wyrównanych metodą spostrzeżeń zawarunkowanych

Wyprowadziliśmy uprzednio wzór (27) dotyczący metody spostrzeżeń pośrednich

$$m_F = m_0 \sqrt{\mathbf{f}_l \{\tau\mathbf{a}(\mathbf{a}^2)^{-1}\cdot\tau\mathbf{a}\}\cdot\mathbf{f}_l}\,.$$

Stosując twierdzenie 2 otrzymamy natychmiast odpowiedni wzór dla metody spostrzeżeń zawarunkowanych

$$m_F = m_0 \sqrt{\mathbf{f}_l \{\tau - \tau\mathbf{b}(\mathbf{b}^2)^{-1}\cdot\tau\mathbf{b}\}\mathbf{f}_l} = m_0 \sqrt{\mathbf{f}_l^2 - \mathbf{f}_l\{\tau\mathbf{b}(\mathbf{b}^2)^{-1}\tau\mathbf{b}\}\mathbf{f}_l}\,, \tag{38}$$

który przekształcimy dalej korzystając z tożsamości (28)

$$m_F = m_0 \sqrt{\mathbf{f}_l^2 \quad (\mathbf{f}_l\mathbf{b})(\mathbf{b}^2)^{-1}(\mathbf{f}_l\mathbf{b})}\,. \tag{39}$$

Dogodniejszy praktycznie jest wzór wiążący się ze stosowaniem algorytmu pierwiastka krakowianowego.

$$m_F = m_0 \cdot \Phi, \tag{40}$$

gdzie Φ jest ostatnim elementem przekątnym pierwiastka

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{R} & \varphi \\ & \Phi \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{b}^2 & \mathbf{f}_l\mathbf{b} \\ \mathbf{b}\mathbf{f}_l & \mathbf{f}_l^2 \end{Bmatrix}^{\frac{1}{2}}. \tag{41}$$

Mamy tu

$$\mathbf{R} = \sqrt{\mathbf{b}^2}, \qquad \varphi \cdot \mathbf{R} = \mathbf{f}_l \cdot \mathbf{b}$$

oraz

$$\underline{\varphi}^2 + \Phi^2 = \mathbf{f}_l^2,$$

a więc

$$\Phi^2 = \mathbf{f}_l^2 - \underline{\varphi}^2 = \mathbf{f}_l^2 - \left|(\mathbf{f}_l\mathbf{b}) \cdot \tau\mathbf{R}^{-1}\right|^2 = \mathbf{f}_l^2 - (\mathbf{f}_l\mathbf{b})(\mathbf{R}^{-1})^2(\mathbf{f}_l\mathbf{b}).$$

Ponieważ $(\mathbf{R}^{-1})^2 = (\mathbf{b}^2)^{-1}$,to

$$\Phi = \sqrt{\mathbf{f}_l^2 - (\mathbf{f}_l\mathbf{b})(\mathbf{b}^2)^{-1}(\mathbf{f}_l\mathbf{b})},$$

co uzasadnia słuszność wzoru (40).

Postać wyznacznikowa wzoru na błąd średni funkcji wyrównanych obserwacji w przypadku metody spostrzeżeń zawarunkowanych przedstawia się jak następuje [3]

$$m_F = m_0 \sqrt{\frac{\begin{vmatrix} [aa] & [ab] & \dots & [aw] & [af] \\ [ab] & [bb] & \dots & [bw] & [bf] \\ \dots & \dots & & \dots & \\ [aw] & [bw] & \dots & [ww] & [wf] \\ [af] & [bf] & \dots & [wf] & [ff] \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} [aa] & [ab] & \dots & [aw] \\ [ab] & [bb] & \dots & [bw] \\ \dots & \dots & & \dots \\ [aw] & [bw] & \dots & [ww] \end{vmatrix}}} \tag{42}$$

Wyznacznik znajdujący się w liczniku ma tabelę identyczną z tabelą krakowianu pierwiastkowanego (41). Zatem wartość tego wyznacznika D_L równa się iloczynowi kwadratów elementów przekątnych pierwiastka, czyli

$$D_L = R_{11}^2 \cdot R_{22}^2 \dots R_{ww}^2 \, \Phi^2. \tag{43}$$

W mianowniku występuje wyznacznik główny układu równań normalnych korelat o wartości

$$D_M = R_{11}^2 \cdot R_{22}^2 \dots R_{ww}^2. \tag{44}$$

Mamy zatem

$$D_L = \frac{R_{11}^2 \cdot R_{22}^2 \dots R_{ww}^2 \, \Phi^2}{R_{11}^2 \cdot R_{22}^2 \dots R_{ww}^2} = \Phi^2, \tag{45}$$

a więc rzeczywiście

$$m_F = m_0 \sqrt{\frac{D_L}{D_M}}.$$

4. Macierzowe ujęcie wyprowadzonych zależności oraz wzorów na błędy średnie funkcji obserwacji wyrównanych

Podamy obecnie w ujęciu macierzowym zależności (4), (12), (21) oraz wzory (31) i (40).

Rozpatrzymy w tym celu metodę spostrzeżeń pośrednich o równaniach poprawek.

$$V = AX + L, \tag{46}$$

oraz metodę spostrzeżeń zawarunkowanych o równaniach warunkowych

$$B^*V = \Omega \tag{47}$$

gdzie A, B są macierzami współczynników w układach równań poprawek i równań warunkowych

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & \dots & q_1 \\ a_2 & b_2 & \dots & q_2 \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ a_n & b_n & \dots & q_n \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & \dots & w_1 \\ a_2 & b_2 & \dots & w_2 \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ a_n & b_n & \dots & w_n \end{bmatrix}. \tag{48}$$

natomiast V, X, L, Ω — jednokolumnowymi macierzami poprawek, niewiadomych i wyrazów wolnych

$$V = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ v_n \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_a \\ x_b \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_q \end{bmatrix}, \quad L = \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ l_n \end{bmatrix}, \quad \Omega = \begin{bmatrix} \omega_a \\ \omega_b \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \omega_w \end{bmatrix}. \tag{49}$$

Macierze pochodnych cząstkowych oznaczymy następująco:

$$F_l = \begin{bmatrix} \frac{\partial F}{\partial l_1} \\ \frac{\partial F}{\partial l_2} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \frac{\partial F}{\partial l_n} \end{bmatrix} \qquad F_x = \begin{bmatrix} \frac{\partial F}{\partial X_a} \\ \frac{\partial F}{\partial X_b} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \frac{\partial F}{\partial X_q} \end{bmatrix}. \tag{50}$$

Łatwo zauważyć, że przyjęte oznaczenia pozwalają przedstawić krakowianowe wzory (4), (12), (21) w postaci następującej

$$\Omega = B^*L \tag{51}$$

$$A\,(A^*A)^{-1}\cdot A^* = E-B\,(B^*B)^{-1}\cdot B^*, \tag{52}$$

$$F_x = A^*\cdot F_l. \tag{53}$$

Analogicznie zapiszemy wzory (31) i (40) otrzymując:
a) dla metody spostrzeżeń pośrednich

$$m_F = m_0\sqrt{-\Phi^2}$$

gdzie

$$-\Phi^2 = (A^*F_l)^*\,(A^*A)^{-1}\,(A^*F_l), \tag{54}$$

b) dla metody spostrzeżeń zawarunkowanych

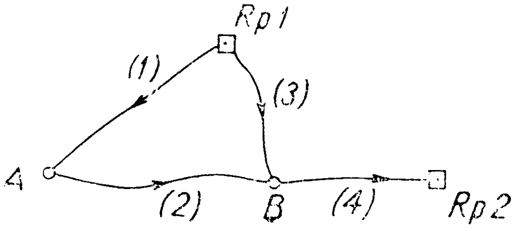
$$m_F = m_0\Phi$$

gdzie

$$\Phi = \sqrt{F^*_lF_l-(B^*F_l)^*\,(B^*B)^{-1}\,(B^*F_l)}\,. \tag{55}$$

Porównując powyższe wzory macierzowe z analogicznymi wzorami krakowianowymi nietrudno stwierdzić, że zapis krakowianowy jest w danym przypadku prostszy i bardziej przejrzysty.

Przykład.



Mamy sieć niwelacyjną przedstawioną na szkicu. Obliczymy błąd średni różnicy wysokości między punktami A i B przyjmując błąd średni obserwacji równy m_0.

Mamy tu następujące krakowiany współczynników.

$$\mathbf{a} = \begin{Bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{Bmatrix},\qquad \mathbf{b} = \begin{Bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{Bmatrix},\qquad \mathbf{f}_l = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

skąd

$$\mathbf{f}_x = \mathbf{f}_l\cdot\mathbf{a} = \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix}.$$

1. Obliczymy błąd średni różnicy wysokości $z_B - z_A$ operując metodą spostrzeżeń pośrednich.

Z wzoru (37) mamy

$$m_F = m_0\sqrt{-\frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}}} = m_0\sqrt{\frac{3}{5}}\,.$$

Zastosowanie algorytmu pierwiastka krakowianowego przy realizacji wzoru (31) — daje

$$\left\{\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \\ \hline -1 & 1 & 0 \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{cc} \mathbf{a}^2 & \mathbf{f}_l\mathbf{a} \\ \mathbf{af}_l & 0 \end{array}\right\}$$

$$\left\{\begin{array}{cc|c} \sqrt{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ & \sqrt{\frac{5}{2}} & \sqrt{\frac{1}{10}} \\ \hline & & \sqrt{-\frac{3}{5}} \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{cc} \mathbf{R} & \varphi \\ & \Phi \end{array}\right\}$$

Mamy więc:

$$-\Phi^2 = \frac{3}{5}$$

skąd ostatecznie

$$m_F = m_0 \sqrt{\frac{3}{5}}.$$

2. Przy rozwiązaniu układu metodą warunkową obliczymy błąd funkcji korzystając z wzoru (42). W tym celu zestawimy krakowian blokowy

$$\{\mathbf{bf}_l\} = \left\{\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right\},$$

na podstawie którego łatwo uzyskamy

$$m_F = m_0 \sqrt{\frac{\left|\begin{array}{ccc} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{array}\right|}{\left|\begin{array}{cc} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{array}\right|}} = m_0 \sqrt{\frac{3}{5}}$$

Stosując natomiast algorytm pierwiastka krakowianowego do obliczenia błędu funkcji wzorem (40) otrzymamy

$$\left\{\begin{array}{cc:c} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ \hdashline 1 & 0 & 1 \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{cc} \mathbf{b}^2 & \mathbf{f}_l\mathbf{b} \\ \mathbf{b}\mathbf{f}_l & \mathbf{f}_l^2 \end{array}\right\}$$

$$\left\{\begin{array}{cc:c} \sqrt{3} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ & \sqrt{\frac{5}{3}} & \sqrt{\frac{1}{15}} \\ \hdashline & & \sqrt{\frac{3}{5}} \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{cc} \mathbf{R} & \varphi \\ & \Phi \end{array}\right\}$$

i ostatecznie

$$m_F = m_0 \sqrt{\frac{3}{5}}.$$

LITERATURA

[1] *Banachiewicz T.*: Rachunek krakowianowy. PWN. W-wa. 1959.

[2] *Hausbrandt S.*: Rachunki geodezyjne. PPWK. W-wa. 1953.

[3] *Hausbrandt S.*: Rachunek wyrównawczy i obliczenia geodezyjne. PPWK (w druku).

[4] *Gaździcki J.*: Nowe algorytmy wyrównania metodą najmniejszych kwadratów.

Prace IGiK. Tom XIII. zeszyt 2 (29), 1966.

Rękopis złożono w Redakcji w czerwcu 1968 r.

ЕЖИ ГАЗДЗИЦКИ

АЛЕКСАНДЕР СКУРЧИНСКИ

СРЕДНИЕ КВАДРАТИЧЕСКИЕ ОШИБКИ ФУНКЦИЙ УРАВНЕННЫХ НАБЛЮДЕНИЙ

Резюме

В работе дается вывод формул для получения средней квадратической ошибки функции наблюдений уравниваемых по методу посредственных и условных наблюдений. Доказательство проводится с использованием некоторых зависимостей существующих между этими методами. В матричной символике записи, этих зависимости в обозначениях (48) — (50) выражаются так:

$$\Omega = B^*L,$$

$$A\,(A^*A)^{-1}\ A^* = E - B\,(B^*B)^{-1}\,B^*,$$

$$F_x = A^*F_l$$

В краковянной же записи упомянутые зависимости имеют вид:

$$\omega = \mathbf{l} \cdot \mathbf{b},$$

$$\tau\mathbf{a}\,(\mathbf{a}^2)^{-1} \cdot \tau\mathbf{a} = \underline{\tau} - \tau\mathbf{b}\,(\mathbf{b}^2)^{-1} \cdot \tau\mathbf{b},$$

$$\mathbf{f}_x = \mathbf{f}_l \cdot \mathbf{a}.$$

Они позволяют, путем несложенных преобразований, получить простые формулы вычисления средней квадратической ошибки функции уравненных наблюдений в виде определителей. Для метода посредственных наблюдений имеется

$$m_F = m_0 \sqrt{-\frac{\begin{vmatrix} [aa] & [ab] & \dots & [aq] & [af] \\ [ab] & [bb] & \dots & [bq] & [bf] \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ [aq] & [bq] & \dots & [qq] & [qf] \\ [af] & [bf] & \dots & [qf] & [0] \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} [aa] & [ab] & \dots & [aq] \\ [ab] & [bb] & \dots & [bq] \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ [aq] & [bq] & \dots & [qq] \end{vmatrix}}}$$

Для метода условных наблюдений имеем:

$$m_F = m_0 \sqrt{\frac{\begin{vmatrix} [aa] & [ab] & \dots & [aw] & [af] \\ [ab] & [bb] & \dots & [bw] & [bf] \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ [aw] & [bw] & \dots & [ww] & [wf] \\ [af] & [bf] & \dots & [wf] & [ff] \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} [aa] & [ab] & \dots & [aw] \\ [ab] & [bb] & \dots & [bw] \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ [aw] & [bw] & \dots & [ww] \end{vmatrix}}}$$

Кроме того дополнительно даются формулы, которые находят практическое применение в случае вычислений с применением алгорифма краковянного корня. Согласно матричной и краковянной записи для метода посредственных наблюдений имеется

$$m_F = m_0 \sqrt{-\Phi^2}$$

при чем

$$-\Phi^2 = (A^* F_l)^* \, (A^* A)^{-1} \, (A^* F_l) =$$

$$= (\mathbf{f}_l \mathbf{a}) \, (\mathbf{a}^2)^{-1} \, (\mathbf{f}_l \mathbf{a}),$$

и аналогично для метода условных наблюдений имеется формула

$$m_F = m_0 \Phi,$$

в которой

$$\Phi = \sqrt{(F_l^* F_l) - (B^* F_l)^* \, (B^* B)^{-1} \, (B^* F_l)} =$$

$$= \sqrt{\mathbf{f}_l^2 - (\mathbf{f}_l \mathbf{b}) \, (\mathbf{b}^2)^{-1} \, (\mathbf{f}_l \mathbf{b})}.$$

JERZY GAŻDZICKI
ALEKSANDER SKÓRCZYŃSKI

MEAN SQUARE ERRORS OF FUNCTION OF ADJUSTED OBSERVATIONS

Summary

The paper gives the formulae for mean square errors of function of observations adjusted by the method of parameters (indirect observations method) and by the method of correlates (conditioned observations method). The demonstration was made using some dependences between these methods. These dependences expressed in the matrix symbols with the designations (48)—(50) are as follows:

$$\Omega = B^* L,$$

$$A\,(A^* A)^{-1} \cdot A^* = E - B\,(B^* B)^{-1} B^*,$$

$$F_x = A^* F_l.$$

Using cracovian method, these dependences can be expressed thus:

$$\underline{\omega} = \mathbf{l} \cdot \mathbf{b}$$

$$\tau\mathbf{a}\ (\mathbf{a}^2)^{-1} \tau\mathbf{a} = \underline{\tau} - \tau\mathbf{b}\ (\mathbf{b}^2)^{-1} \tau\mathbf{b},$$

$$\mathbf{f}_x = \mathbf{f}_l \cdot \mathbf{a}.$$

This enables by simple transformations to get clear determinant formulae by which the mean square error of function of adjusted observations can be computed. For the indirect observations method it is

$$m_F \quad m_0 \sqrt{-\frac{\begin{vmatrix} [aa] & [ab] & \dots & [aq] & [af] \\ [ab] & [bb] & \dots & [bq] & [bf] \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ [aq] & [bq] & \dots & [qq] & [qf] \\ [af] & [bf] & \dots & [qf] & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} [aa] & [ab] & \dots & [aq] \\ [ab] & [bb] & \dots & [bq] \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ [aq] & [bq] & \dots & [qq] \end{vmatrix}}}$$

For the method of conditioned observations however it is:

$$m_F = m_0 \sqrt{\frac{\begin{vmatrix} [aa] & [ab] & \dots & [aw] & [af] \\ [ab] & [bb] & \dots & [bw] & [bf] \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ [aw] & [bw] & \dots & [ww] & [wf] \\ [af] & [bf] & \dots & [wf] & [ff] \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} [aa] & [ab] & \dots & [aw] \\ [ab] & [bb] & \dots & [bw] \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ [aw] & [bw] & \dots & [ww] \end{vmatrix}}}$$

Besides the formulae are given, which can be applied in the practice when the algorithm of cracovian root is used; they are expressed in matrix and cracovian notation and for the method of indirect observations are:

$$m_F = m_0 \sqrt{-\Phi^2}$$

where

$$-\Phi^2 = (A^*F_l)^* (A^*A)^{-1} (A^*F_l) = (\mathbf{f}_l a) (\mathbf{a}^2)^{-1} (\mathbf{f}_l a),$$

и аналогично для метода условных наблюдений имеется формула

$$m_F = m_0 \Phi,$$

and

$$\Phi = \sqrt{F_l^* F_l - (B^*F_l)^* (B^*B)^{-1} (B^*F_l)} = \sqrt{\mathbf{f}_l^2 - (\mathbf{f}_l \mathbf{b}) (\mathbf{b}^2)^{-1} (\mathbf{f}_l \mathbf{b})}\ .$$