

MARIA KRYSTYNA SZACHERSKA

528.11:528.335

Analiza rozkładu błędów zamknięć trójkątów sieci wypełniającej

Analiza rozkładu błędów w sieci wypełniającej stanowi kontynuację opartych na teorii błędów i statystyce matematycznej badań polskich sieci triangulacyjnych. Nie będziemy tu omawiali zastosowanych metod, których rekapitulacji, na podstawie bogatej literatury przedmiotu [1] [5] [7] [9] [10] [19], dokonano już w artykule [18] poświęconym sieci astronomiczno-geodezyjnej. Metody te zastosujemy również do badania sieci wypełniającej, uwzględniając jednak wnioski wyłonione w toku analizy sieci astronomiczno-geodezyjnej i najnowsze publikacje z tego zakresu [8] [2] [3] [16]. Rozkład błędów w sieci porównywać będziemy z rozkładem dwumianowym, który zgodnie z założeniami S. Hausbrandta [7] potwierdzonymi raz jeszcze przez wyniki uzyskane dla sieci astronomiczno-geodezyjnej, dobrze odpowiada rzeczywistemu rozkładowi błędów pomiarów geodezyjnych.

Rozkład błędów zamknięć trójkątów

Z obszernego materiału liczbowego, którym dysponujemy dla sieci wypełniającej, wybraliśmy przykładowo dane odnoszące się do 11 grup sieci w fragmentach Poznań, Śląsk, Kraków i Zakopane. Wybór ten nie jest przypadkowy. Sieci Poznań (949 trójkątów) i Śląsk (392 trójkąty) przez swą wielkość są szczególnie dogodne dla analizy statystycznej. Stanowią ponadto interesujący materiał, gdyż obok nowych obserwacji sieci wypełniającej włączono do nich niektóre wyniki dawnych pomiarów i adaptowano sieci lokalne. Sieci Kraków i Zakopane tworzą natomiast jednolite zbiory nowych obserwacji, przy czym grupa Zakopane (89 trójkątów) jest jednym z mniejszych fragmentów sieci wypełniającej.

Analizę rozkładu błędów zamknięć trójkątów przeprowadziliśmy dla wymienionych 11 grup sieci oraz dla składających się z kilku grup sieci

Poznań i Śląsk traktowanych jako całość. W badanych zbiorach obliczyliśmy błędy średnie za pomocą klasycznego wzoru

$$m = \pm \sqrt{\frac{[\omega\omega]}{N}} \quad (1)$$

gdzie: ω — błąd prawdziwy zamknięcia trójkąta,
 N — ilość trójkątów.

Tablica I. Zestawienie błędów średnich i maksymalnych błędów zamknięć trójkątów

Grupa	N	m	$ w_{\max} $	I	J
		cc	cc		
Poznań	949	$\pm 3,96$	12,21	42	—
I	132	4,01	9,57	6	—
II	159	3,64	11,10	4	1
III	162	3,60	10,55	4	1
IV	177	4,40	12,21	14	1
V	147	4,02	11,09	7	1
VI	172	4,00	11,86	7	—
Śląsk	392	4,34	13,21	25	—
I	139	4,74	12,84	13	—
II	128	4,24	11,22	7	—
III	125	3,95	13,21	5	1
Kraków	125	4,17	9,64	5	—
Zakopane	89	4,02	8,71	3	—

I — liczba błędów większych od przyjętej w instrukcji wartości dopuszczalnej $w_{\text{dop}} = 8^{\text{cc}}$.
 J — liczba błędów w przedziałach, dla których częstości określone rozkładem dwumianowym równe są praktycznie zero ($C_D < 0,5$).

Wyniki obliczeń podane są w tablicy I. Częstości rzeczywiste C_R występowania błędów w przedziałach ograniczonych wielokrotnościami 0,5 porównaliśmy z teoretycznymi częstościami w rozkładzie dwumianowym o $n = 16$ obliczonymi wzorem

$$C_D = NP(x), \quad (2)$$

w którym $P(x)$ oznacza przyjęte dla tego rozkładu prawdopodobieństwo wystąpienia błędu określonej wielkości. Przykład obliczeń C_R , C_D i różnic

$$\Delta C = C_R - C_D \quad (3)$$

dla sieci Poznań zawiera tablica II, a rezultaty wszystkich analiz ilustrują wykresy 1÷13. Częstość występowania błędów zamknięć trójkątów w przyjętych przedziałach wielkości przedstawiono na wykresach w postaci schodkowej linii ciągłej, a częstość ich występowania przewidzianą rozkładem dwumianowym oznaczono liniami pionowymi.

Tablica II. Badanie zbioru błędów zamknięć trójkątów sieci wypełniającej
P O Z N A Ń

Rozkład dwumianowy ($n = 16$)			I			II		
$\frac{x}{m}$	$P(x)$	$C_D = NP(x)$	x	C_R	ΔC	x	C_H	ΔC
			cc			cc		
-4,0	0,0000		15,84			16,40		
3,5	0,0002	0,2	13,86	0	-0,2	14,35	0	-0,2
3,0	0,0018	1,7	11,88	3	+1,3	12,30	2	+0,3
2,5	0,0086	8,2	9,90	10	+1,8	10,25	10	+1,8
2,0	0,0278	26,4	7,92	28	+1,6	8,20	25	-1,4
1,5	0,0666	63,2	5,94	69	+5,8	6,15	66	+2,8
1,0	0,1222	116,0	3,96	114	-2,0	4,10	113	-3,0
-0,5	0,1746	165,7	1,98	163	-2,7	2,05	165	-0,7
0	0,1964	186,4	0	182	-4,4	0	190	+3,6
+0,5	0,1746	165,7	1,98	150	-15,7	2,05	157	-8,7
1,0	0,1222	116,0	3,96	145	+29,0	4,10	144	+28,0
1,5	0,0666	63,2	5,94	56	-7,2	6,15	54	-9,2
2,0	0,0278	26,4	7,92	20	-6,4	8,20	17	-9,4
2,5	0,0086	8,2	9,90	7	-1,2	10,25	5	-3,2
3,0	0,0018	1,7	11,88	2	+0,3	12,30	1	-0,7
3,5	0,0002	0,2	13,86	0	-0,2	14,35	0	-0,2
+4,0	0,0000		15,84			16,40		
		949,2		949	-0,2		949	-0,2

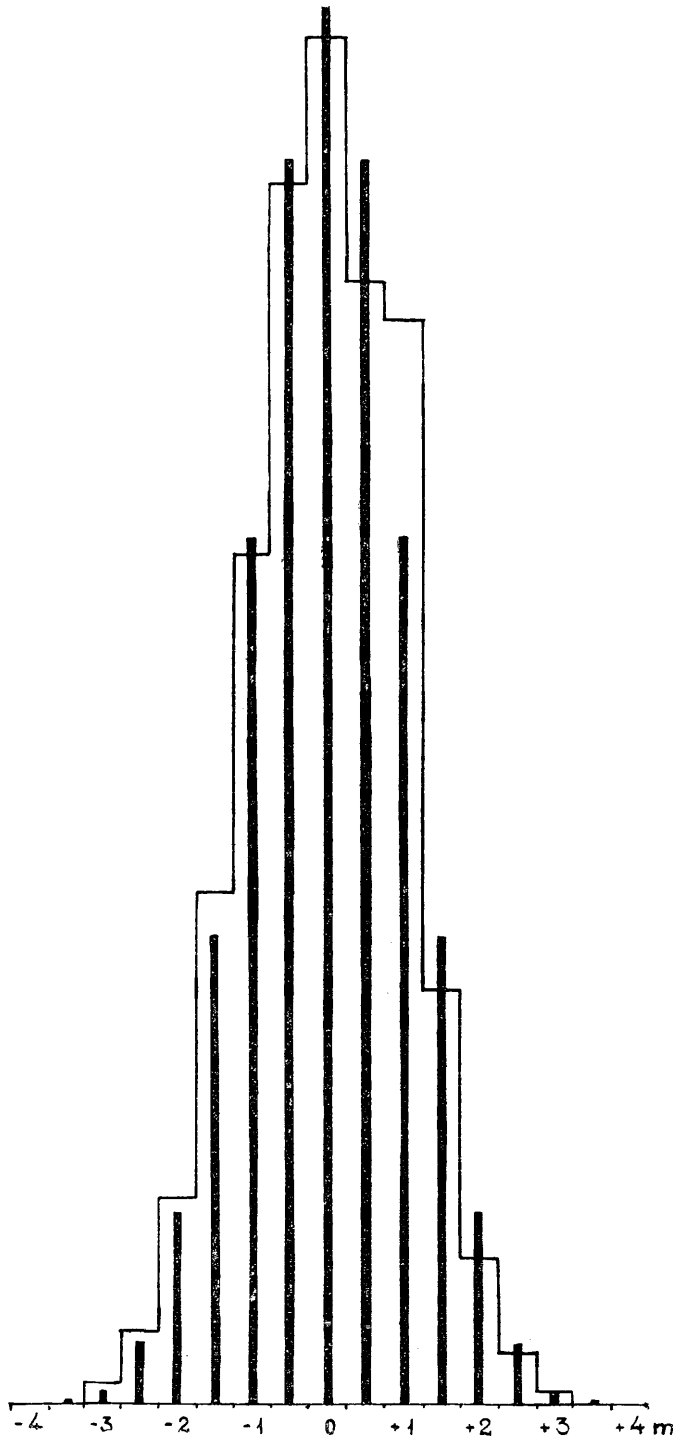
I Rozkład zbioru błędów zamknięć trójkątów, w którym średnie wartości błędów w przedziałach określono dla błędu średniego obliczonego metodą klasyczną

$$m = \pm 3,96$$

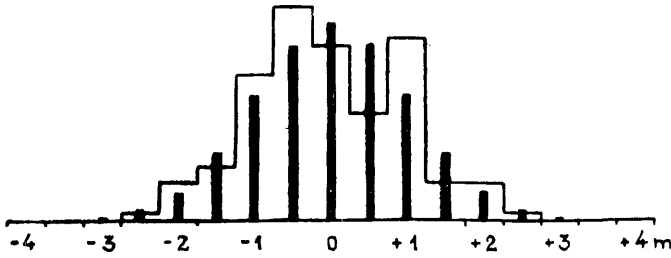
II Rozkład zbioru błędów zamknięć trójkątów, w którym średnie wartości błędów w przedziałach określono dla błędu średniego obliczonego metodą Hausbrandta

$$m_{II} = \pm 4,10$$

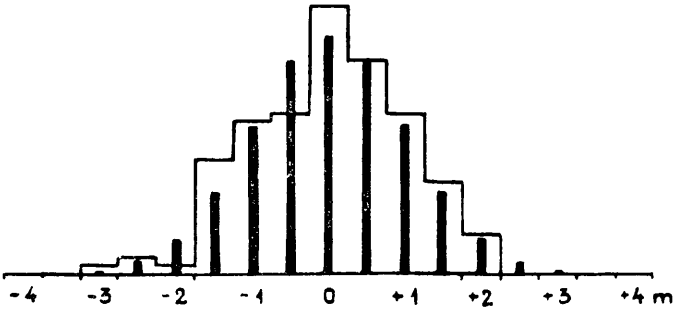
Przegląd uzyskanych wyników pozwala zauważyć, że niektóre zbiory błędów, zwłaszcza dla grup Śląsk I (wykres 9) i Śląsk II (wykres 10) oraz Poznań II (wykres 3) i Poznań V (wykres 6) charakteryzuje rozkład asymetryczny wynikający prawdopodobnie z połączenia w wymienionych grupach niejednorodnych materiałów obserwacyjnych. Przypuszczać można, że nieznaczne anomalie rozkładu występujące nawet w dużych zbiorach błędów sieci Śląsk i Poznań mają to samo uzasadnienie. Zbiór jednorodnych obserwacji włączonych do sieci Kraków obrazuje natomiast symetryczny rozkład błędów.



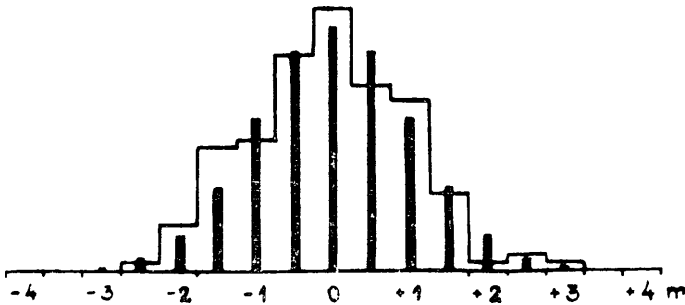
Wykres 1. Rozkład zbioru błędów zamknięć trójkątów sieci wypełniającej Poznań
 $m = \pm 3,696$ $N = 949$



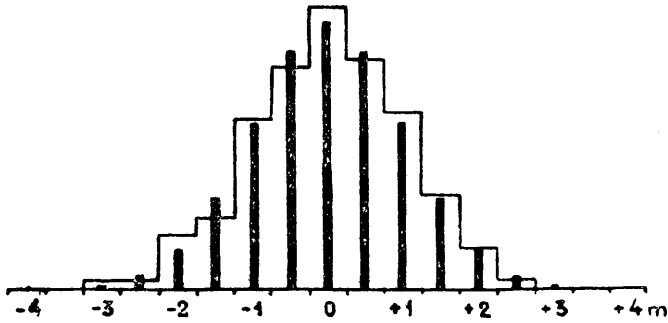
Wykres 2. Rozkład zbioru błędów zamknięć trójkątów grupy Poznań I
 $m = \pm 4,001$ $N = 132$



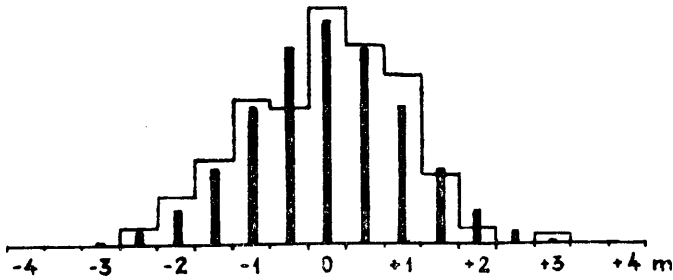
Wykres 3. Rozkład zbioru błędów zamknięć trójkątów grupy Poznań II
 $m = \pm 3,064$ $N = 159$



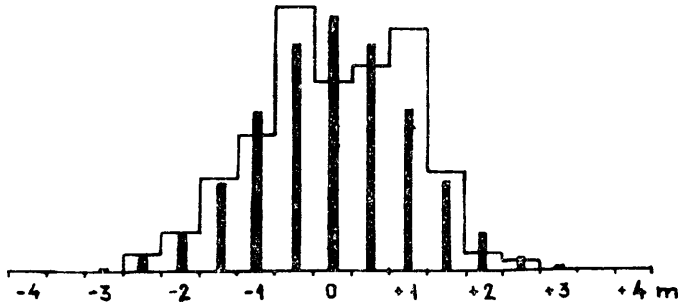
Wykres 4. Rozkład zbioru błędów zamknięć trójkątów grupy Poznań III
 $m = \pm 3,060$ $N = 162$



Wykres 5. Rozkład zbioru błędów zamknięć trójkątów grupy Poznań IV
 $m = \pm 4,0040$ $N = 177$



Wykres 6. Rozkład zbioru błędów zamknięć trójkątów grupy Poznań V
 $m = \pm 4,0002$ $N = 147$



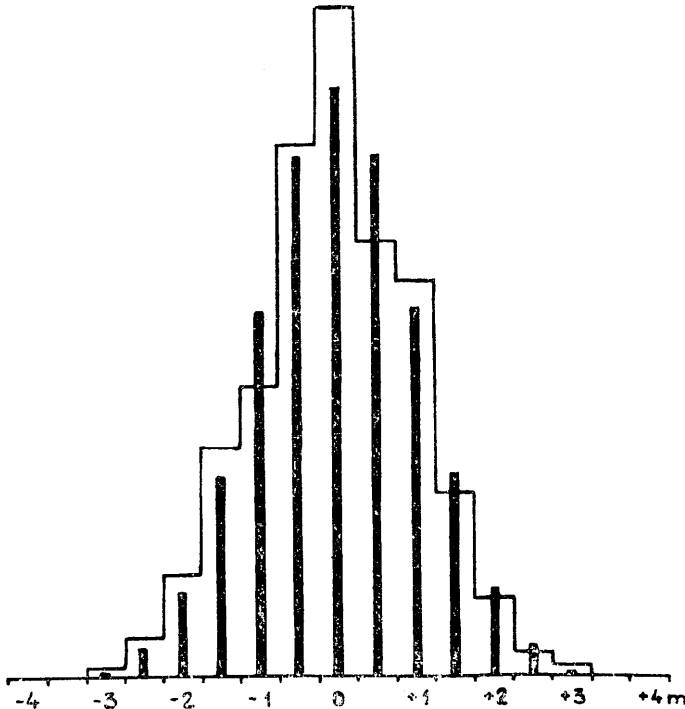
Wykres 7. Rozkład zbioru błędów zamknięć trójkątów grupy Poznań VI
 $m = \pm 4,0000$ $N = 172$

W tabelicy I obok błędów średnich zestawiono dla poszczególnych fragmentów sieci ilości błędów maksymalnych, przekraczających określoną w instrukcji [21] dopuszczalną wartość błędu zamknięcia

$$\omega_{\text{top}} = \pm 8^{\text{cc}}$$

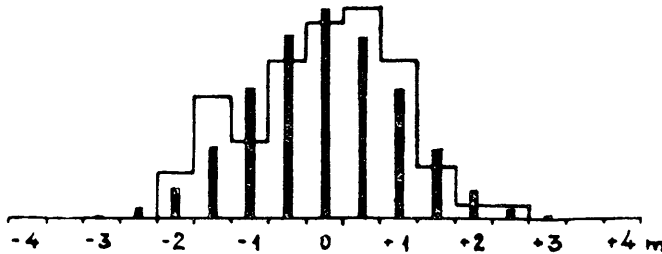
oraz dużych błędów, których występowanie nie jest uzasadnione w rozkładzie dwumianowym. Zwraca uwagę, że w badanych zbiorach występuje około 5% błędów przekraczających w myśl instrukcji dopuszczalną wartość błędu zamknięcia trójkąta, a tylko jedna z tych wartości (Śląsk III) przekracza granice określone rozkładem dwumianowym. Pozostawienie w zbiorze i włączenie do wyrównania obserwacji, dla których błąd zamknięcia trójkąta jest większy od 8^{cc} , można więc uznać za teoretycznie uzasadnione. Wydaje się, że przy ustalaniu w instrukcji dopuszczalnych wartości błędów i ocenie dokładności wykonanych obserwacji należy większą uwagę zwracać na wynikające z teorii zasady rozkładu błędów.

W kilku badanych zbiorach (Zakopane, Poznań I, Poznań VI) daje się zauważyć sygnalizowana przez S. Hausbranda [8] prawidłowość, polegająca na mniejszej niż to przewiduje rozkład teoretyczny częstości

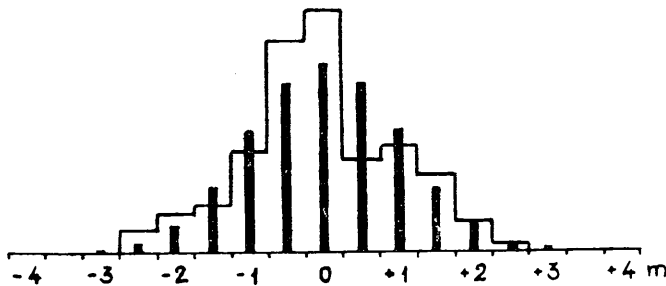


Wykres 8. Rozkład zbioru błędów zamknięć trójkątów sieci wypełniającej Śląsk
 $m = \pm 4, \text{cc}34$ $N = 392$

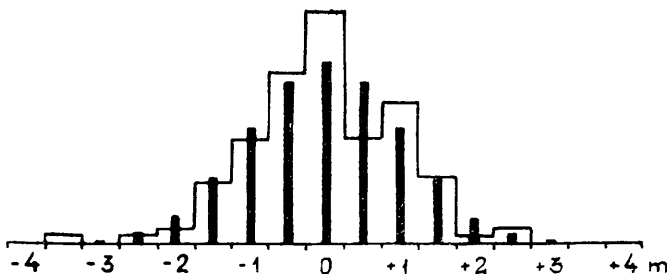
występowania dużych błędów, przekraczających 2 m. W badanych sieciach średni błąd zamknięcia trójkąta jest rzędu 4^{cc} , a tym samym $2\text{ m} \approx 8^{\text{cc}}$. Anomalia rozkładu może więc wynikać z określonych w instrukcji granic dokładności pomiarów.



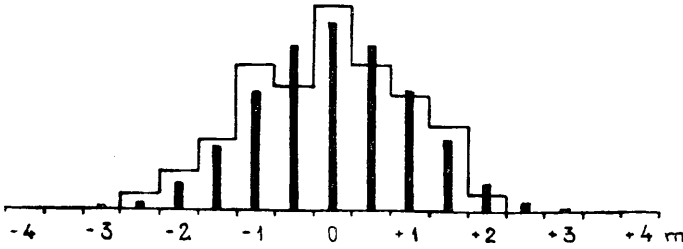
Wykres 9. Rozkład zbioru błędów zamknięć trójkątów grupy Śląsk I
 $m = \pm 4, \text{cc}74$ $N = 139$



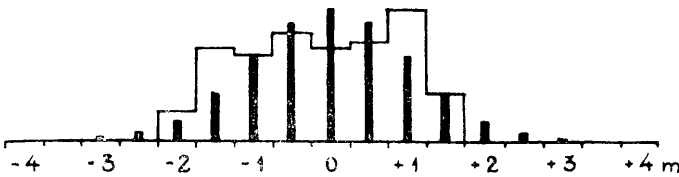
Wykres 10. Rozkład zbioru błędów zamknięć trójkątów grupy Śląsk II
 $m = \pm 4, \text{cc}24$ $N = 128$



Wykres 11. Rozkład zbioru błędów zamknięć trójkątów grupy Śląsk III
 $m = \pm 3, \text{cc}95$ $N = 125$



Wykres 12. Rozkład zbioru błędów zamknięć trójkątów sieci wypełniającej Kraków
 $m = \pm 4,0017$ $N = 125$



Wykres 13. Rozkład zbioru błędów zamknięć trójkątów sieci wypełniającej Zakopane
 $m = \pm 4,0002$ $N = 89$

Błąd średni jako parametr rozkładu zbioru błędów

Wynikająca ze sposobu jego określenia wielkość błędu średniego, który przyjmujemy jako podstawę do ustalenia granic przedziałów, ma istotny wpływ na ocenę rozkładu zbioru błędów i jego zgodność z przyjętym rozkładem teoretycznym. W przedstawionej wyżej analizie posłużyliśmy się błędem średnim obliczonym wzorem klasycznym. S. H a u s b r a n d t [8] zwrócił jednak uwagę na małą dokładność tak obliczonego błędu średniego i podał metody dokładniejszego wyznaczenia jego wartości, oparte na założeniu normalności rozkładu. Sposób *Bw* i krakowiany *F* zastosowaliśmy do ponownego obliczenia błędów średnich w rozpatrywanych zbiorach. Wyznaczone wartości m_H , zestawione w tablicy III, posłużyły do ustalenia nowych granic przedziałów, w których określiliśmy częstości rzeczywiste C_H występowania błędów i różnice ΔC w stosunku do ich wartości teoretycznych w rozkładzie dwumianowym.

Porównanie uzyskanych rezultatów z wynikami opracowania, oparte na błędzie średnim obliczonym metodą klasyczną, przeprowadziliśmy za pomocą wyznaczonych zgodnie z kryterium P e a r s o n a wartości

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^r \frac{\Delta C_i^2}{C_{D_i}} \tag{4}$$

określonych dla zbiorów podzielonych na $r = 11$ przedziałów. Słuszność stosowania tego właśnie kryterium dla oceny zgodności rozkładu zbioru rzeczywistego z teoretycznym rozkładem błędów może być wprawdzie w danym przypadku kwestionowana. Wydaje się jednak, że obliczenie χ^2 i ustalenie prawdopodobieństwa [17] zgodności z rozkładem teoretycznym rzeczywistego rozkładu tych samych, a jedynie odmiennie opracowanych zbiorów jest dobrą podstawą do porównania zastosowanych metod. Zestawienie takie wykonaliśmy w toku badania sieci astronomiczno-geodezyjnej [18], a M. Romanowski [16] zastosował kryterium Pearsona dla porównania zgodności rozkładu zbioru zamknięć trójkątów z rozkładem normalnym, „lineo-normalnym” i „radiko-normalnym”.

Tablica III. Zestawienie błędów średnich liczonych wzorem klasycznym i metodą S. Hausbrandta

Grupa	N	Błąd średni liczony wzorem klasycznym			Błąd średni liczony metodą Hausbrandta		
		m	χ^2	P	m_H	χ^2	P
		cc			cc		
Poznań I	132	$\pm 4,01$	11,39	0,25	$\pm 4,27$	8,88	0,45
Poznań II	159	3,64	5,01	0,83	3,84	4,11	0,91
Poznań III	162	3,60	4,98	0,83	3,73	5,65	0,77
Poznań IV	177	4,40	1,87	0,99	4,34	2,56	0,87
Poznań V	147	4,02	5,78	0,76	4,14	5,12	0,82
Poznań VI	172	4,00	11,72	0,23	4,31	8,44	0,49
Śląsk I	139	4,74	10,90	0,28	4,85	10,78	0,29
Śląsk II	128	4,24	11,79	0,23	4,05	16,90	0,05
Śląsk III	125	3,95	6,46	0,69	3,89	6,34	0,71
Kraków	125	4,17	6,64	0,68	4,31	5,36	0,79
Zakopane	89	4,02	15,16	0,08	4,40	6,28	0,70

W tablicy III podaliśmy wyniki obliczeń przeprowadzonych dla 11 grup sieci wypełniającej. W 8 zbiorach uzyskaliśmy wyższą zgodność rzeczywistego rozkładu błędów z rozkładem dwumianowym, dla opracowania, w którym zastosowano błędy średnie wyznaczone metodą S. Hausbrandta. Jedynie w grupie Śląsk II obliczenie błędu średniego metodą klasyczną doprowadziło do ustalenia granic przedziałów, w których częstość występowania błędów jest bliższa częstości teoretycznej. Rozkład tego zbioru odbiega zresztą znacznie od rozkładu dwumianowego. W zbiorach o wysokiej zgodności rozkładu z rozkładem dwumianowym różnice wynikające z odmiennych sposobów obliczenia błędów średnich są niewielkie (Kraków, Poznań IV). Przewaga wyników uzyskanych przez obliczenie błędów średnich metodą S. Hausbrandta daje się zauważyć zwłaszcza dla zbiorów, w których występuje mniejsza, niż to przewiduje

rozkład dwumianowy, liczba małych i dużych błędów (Poznań I, Poznań VI, Zakopane). Zbiory takie, jak zresztą pokazuje również przedstawiona analiza sieci wypełniającej, bardzo często występują w geodezji.

Wnioski

Analiza błędów zamknięć trójkątów sieci wypełniającej przeprowadzona dla fragmentów, w których ze względu na różnorodność przyjętych obserwacji można było spodziewać się większych anomalii rozkładu błędów, pozwala na pozytywną ocenę wykonanych obserwacji kątowych. W zbiorach tych, do których włączono również wyniki dawnych pomiarów, dają się wprawdzie zauważyć nieznaczne różnice rozkładu w stosunku do rozkładu teoretycznego, które nie występują jednak w zbiorach błędów uzyskanych dla jednorodnych obserwacji sieci wypełniającej. Należy podkreślić, że wystąpienie 5% błędów zamknięć trójkątów, przekraczających przyjętą w instrukcji wartość dopuszczalną, jest całkowicie uzasadnione przez teorię rozkładu błędów.

Średni błąd zamknięć trójkątów w badanych fragmentach sieci jest rzędu 4^{cc}, a obliczony wzorem *F e r r e r o*, błąd kąta

$$m_F = \pm \sqrt{\frac{[\omega\omega]}{3N}} = \pm 2,5^{cc}$$

Praktyka pomiarów geodezyjnych [8] i konieczność uzyskania możliwie wysokiej dokładności obserwacji wyjaśnia występowanie w niektórych zbiorach mniejszej, niż to przewiduje statystyka, liczby dużych błędów. Badanie tych właśnie zbiorów błędów szczególnie wyraźnie ukazuje niedokładność klasycznego sposobu obliczania błędu średniego i celowość wyznaczania jego wartości metodą *S. Hausbranda* [8] opartą na założeniu normalności rozkładu. Analiza sieci, w której za podstawę dalszych obliczeń przyjęto błąd średni określony tą metodą, wykazała w większości przypadków wyższą zgodność rozkładu zbiorów błędów zamknięć trójkątów z rozkładem dwumianowym, niż podobne badania oparte na klasycznym błędzie średnim.

LITERATURA

- [1] *Böhm J.*: Statistische Prüfung von Messergebnissen auf Normalverteilung, Zeitschrift für Vermessungswesen 1965/3.
- [2] *Böhm J.*: Wahrscheinlichkeitsrechnung und mathematische Statistik in der Geodäsie, Vermessungstechnik 1967/7—11, 1968/1—4.

- [3] *Fondelli M. Micheli P.*: Analisi statistica degli errori di chiusura nei triangoli della rete geodetica italiana, Bolletino di Geodesia e Scienze Affini 1967/4.
- [4] *Hallert B.*: Einige Sätze und Verfahren der mathematischen Statistik von besonderer Bedeutung in der Vermessungstechnik, Zeitschrift für Vermessungswesen 1964/5.
- [5] *Hausbrandt S.*: Rachunki geodezyjne, Warszawa 1953.
- [6] *Hausbrandt S.*: Parę uwag w sprawie możliwości wykorzystania zdobyczy statystyki matematycznej do oszacowania dokładności pomiarów inżynierskich. Geodezja i Kartografia, t. IX z. 1, Warszawa 1960.
- [7] *Hausbrandt S.*: Teoria błędów pomiarów inżynierskich, Warszawa 1963.
- [8] *Hausbrandt S.*: Wyznaczanie wielkości błędu średniego z zespołu błędów prawdziwych w oparciu o założenie normalności rozkładu, Prace IGiK 1967/1 31.
- [9] *Helmert F.R.*: Die Ausgleichsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate, 3 Aufl., Leipzig-Berlin 1934.
- [10] *Jordan W., Eggert O.*: Handbuch der Vermessungskunde, t. I, Stuttgart 1935.
- [11] *Kemnic J.W.*: Teoria oszibok izmierienii, Moskwa 1961.
- [12] *Radouch V.*: Statistický rozbor trojuhelníkových uzáveru ceskoslovenske základni trigonometrické site, Geodetický a Kartografický Sborník 1960/6.
- [13] *Romanowski M.*: On the normal law of errors, Bulletin Géodésique 1964/73.
- [14] *Romanowski M., Green E.*: Practical application of the modified normal distribution, Bulletin Géodésique 1965/76.
- [15] *Romanowski M.*: Fourier series applied to histograms of the modified normal type, Ottawa 1967.
- [16] *Romanowski M., Green E.*: Statistical analysis of closure errors in the primary triangulation of Central Europe, Zeitschrift für Vermessungswesen 1967/11.
- [17] *Romanowski W.I.*: Primienienie matematycznej statistiki w opytnom diele, Moskwa 1947.
- [18] *Szacherska M.K.*: Analiza rozkładu błędów w polskiej sieci astronomiczno-geodezyjnej, Prace IGiK 1967/1 31.
- [19] *van der Waerden B.L.*: Mathematische Statistik, Berlin-Göttingen-Heidelberg 1957.
- [20] *Wolf H.*: Zur Anwendung von Verfahren der mathematischen Statistik in der Vermessungstechnik, Zeitschrift für Vermessungswesen 1964/11.
- [21] Instrukcja o wykonywaniu pomiarów triangulacji wypełniającej i zagęszczającej, GUGiK, Warszawa 1959.

Recenzował: doc. dr Jerzy Gaździcki

Rękopis złożono w Redakcji w czerwcu 1968 r.

МАРИЯ КРИСТИНА ШАХЕРСКА

АНАЛИЗ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ОШИБОК НЕВЯЗОК ТРЕУГОЛЬНИКОВ ВЫПОЛНЯЮЩЕЙ СЕТИ

Резюме

Анализ распределения ошибок невязок треугольников выполняющей сети проведено для 11 выбранных совокупностей наблюдений сетей Познань, Силезия, Краков и Закопане. Результаты исследований представленные на графиках 1÷13 показывают, как правило, хорошее соответствие распределения ошибок невязок треугольников закону биномиального распределения ($n = 16$). Средняя квадратическая ошибка невязки треугольника равняется, в среднем около 4^{cc} (таблица 1). Во всех совокупностях имеется лишь около 5% ошибок больше принятого в инструкции допустимого значения $\omega_{\text{дон}} = 8^{\text{cc}}$. Однако появление таких ошибок оправдывается законом биномиального распределения. Исследования позволяют положительно оценить проведенные наблюдения углов выполняющей сети.

Средние квадратические ошибки определялись по классической формуле

$$m = \pm \sqrt{\frac{[\omega\omega]}{N}},$$

и по методу С. Хаусбрандта [8], использующем закономерности нормального распределения. Высшего порядка соответствие распределения ошибок невязок треугольников закону биномиального распределения получено при вычислении, в котором принимались средние квадратические ошибки определенные по методу Хаусбрандта.

MARIA KRYSZYNA SZACHERSKA

ANALYSIS OF THE DISTRIBUTION OF TRIANGLE-CLOSURE ERRORS IN THE FILLING NETWORK

In this article the distribution of triangle-closure errors in the filling network is analysed for 11 groups of observations in the nets Poznań, Śląsk, Kraków and Zakopane. Fig. 1÷13 represent the results of the investigations. They generally show a satisfactory conformity of the distribution of triangle-closure errors with the binominal distribution ($n = 16$). The mean square triangle-closure error amounts on average to 4^{cc} (table I). The collections contain generally about 5% of errors larger than the value admitted by the instruction $\omega_{\text{dop}} = 8^{\text{cc}}$. These errors in the binominal distribution are however explicable. The present investigations permit a positive appreciation of angle observations in the filling network.

The mean square errors are calculated by means of the classical formula

$$m = \pm \sqrt{\frac{[\omega\omega]}{N}}$$

and the method established by S. Hausbrandt [8], which is based on the assumption of a normal distribution. A closer conformity of the distribution of triangle-closure errors with the binominal distribution has been obtained when adopting mean square errors determined after the method of S. Hausbrandt.