

JERZY GAŻDZICKI

528.14

Nowe algorytmy wyrównania metodą najmniejszych kwadratów.

SPIS TREŚCI

	str.
1. Wstęp	86
2. Algorytm G	88
3. Algorytm K	90
4. Podstawowe własności algorytmu K	91
5. Zastosowanie algorytmu K w metodzie spostrzeżeń pośrednich .	94
6. Zastosowanie algorytmu K w metodzie spostrzeżeń zawa- runkowanych	109
7. Zastosowanie algorytmu K do rozwiązywania układów równań liniowych	120
8. Zapis algorytmu K w języku ALGOL	124
9. Zakończenie	125

1. Wstęp

Algorytmy stosowane w obliczeniach na maszynach elektronicznych powinny być zwarte i łatwe do zaprogramowania. Cech tych nie posiadają na ogół algorytmy opracowane pod kątem widzenia maksymalnego wykorzystania właściwości rachunku ręcznego. Z tego względu celowe jest prowadzenie badań nad nowymi algorytmami, dogodniejszymi w obliczeniach zautomatyzowanych od algorytmów stosowanych dotychczas.

W pracy niniejszej przedstawia się dwa nowe algorytmy wyrównania metodą najmniejszych kwadratów. Podstawą opracowania tych algorytmów była koncepcja kolejnej eliminacji niewiadomych z układu równań poprawek. Dla przypomnienia sobie istoty tej stosunkowo mało znanej koncepcji weźmy pod uwagę układ n równań poprawek o m niewiadomych

$$v_i = a_i x_a + b_i x_b + c_i x_c + \dots + m_i x_m + l_i, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (1.1)$$

Mając na względzie uproszczenie oznaczeń założymy, że układ ten odnosi się do obserwacji jednakowo dokładnych. Nie zmniejsza to ogólności rozważań, ponieważ układ obserwacji niejednakowo dokładnych można łatwo przekształcić na układ obserwacji jednakowo dokładnych (zrównoważyć) dzieląc współczynniki, wyrazy wolne i poprawki przez odpowiednie błędy średnie [2].

Tworząc pierwsze równanie normalne możemy wyeliminować z układu (1.1) pierwszą niewiadomą

$$x_a = \frac{1}{[aa]} (-[ab]x_b - [ac]x_c \dots - [am]x_m - [al]). \quad (1.2)$$

Uzyskamy w ten sposób układ zawierający $m-1$ niewiadomych

$$v_i = b_i^1 x_b + c_i^1 x_c + \dots + m_i^1 x_m + l_i^1 \quad (1.3)$$

gdzie

$$\begin{aligned} b_i^1 &= b_i - \frac{[ab]}{[aa]} a_i, \\ c_i^1 &= c_i - \frac{[ac]}{[aa]} a_i, \\ &\dots \dots \\ m_i^1 &= m_i - \frac{[am]}{[aa]} a_i, \\ l_i^1 &= l_i - \frac{[al]}{[aa]} a_i. \end{aligned}$$

Na podstawie układu (1.3) utworzymy powtórnie pierwsze równanie normalne, z którego wyznaczymy

$$x_b = \frac{1}{[b^1 b^1]} (-[b^1 c^1] x_c \dots - [b^1 m^1] x_m - [b^1 l^1]). \quad (1.4)$$

Po eliminacji niewiadomej x_b z układu (1.3) otrzymamy układ równań poprawek zawierający $m-2$ niewiadome

$$v_i = c_i^2 x_c + \dots + m_i^2 x_m + l_i^2, \quad (1.5)$$

gdzie

$$\begin{aligned} c_i^2 &= c_i^1 - \frac{[b^1 c^1]}{[b^1 b^1]} b_i^1, \\ &\dots \dots \dots \\ m_i^2 &= m_i^1 - \frac{[b^1 m^1]}{[b^1 b^1]} b_i^1, \\ l_i^2 &= l_i^1 - \frac{[b^1 l^1]}{[b^1 b^1]} b_i^1. \end{aligned}$$

Eliminując analogicznie dalsze niewiadome uzyskamy układ z jedną tylko, ostatnią niewiadomą

$$v_i = m_i^{m-1} x_m + l_i^{m-1} \quad (1.6)$$

Po eliminacji tej niewiadomej otrzymamy m razy zredukowane wyrazy wolne równe poszukiwanym poprawkom v_i

$$v_i = l_i^m, \quad (1.7)$$

gdzie

$$l_i^m = l_i^{m-1} - \frac{[m^{m-1} l^{m-1}]}{[m^{m-1} m^{m-1}]} m_i^{m-1}.$$

W ten sposób, stosując jednolite i proste postępowanie rachunkowe, polegające na utworzeniu ciągu układów równań poprawek

$$\begin{aligned} v_i &= a_i x_a + b_i x_b + c_i x_c + \dots + m_i x_m + l_i \\ v_i &= b_i^1 x_b + c_i^1 x_c + \dots + m_i^1 x_m + l_i^1 \\ v_i &= c_i^2 x_c + \dots + m_i^2 x_m + l_i^2 \\ &\dots \dots \dots \\ v_i &= m_i^{m-1} x_m + l_i^{m-1} \\ v_i &= l_i^m \end{aligned} \quad (1.8)$$

uzyskaliśmy możliwość bezpośredniego obliczenia poprawek v_i .

Z reguły interesują nas nie tylko wartości poprawek, ale także wartości funkcji niewiadomych

$$f_j = a_j x_a + b_j x_b + c_j x_c + \dots + m_j x_m + \varphi_j, \quad j = 1, 2 \dots p, \quad (1.9)$$

którymi mogą być w szczególnym przypadku same niewiadome, np. możemy przyjąć $f = x_a$.

Łatwo zauważyć, że opisane postępowanie daje się zastosować również do obliczenia funkcji niewiadomych. Eliminując kolejne niewiadome z układu funkcji (1.9) otrzymamy

$$\begin{aligned} f_j &= \alpha_j x_a + \beta_j x_b + \gamma_j x_c + \dots + \mu_j x_m + \varphi_j \\ f_j &= \beta_j^1 x_b + \gamma_j^1 x_c + \dots + \mu_j^1 x_m + \varphi_j^1 \\ f_j &= \gamma_j^2 x_c + \dots + \mu_j^2 x_m + \varphi_j^2 \\ &\dots \dots \dots \\ f_j &= \mu_j^{m-1} x_m + \varphi_j^{m-1} \\ f_j &= \varphi_j^m \end{aligned} \quad (1.10)$$

gdzie

$$\begin{aligned} \beta_j^1 &= \beta_j - \frac{[ab]}{[aa]} \alpha_j, \quad \dots \varphi_j^1 = \varphi_j - \frac{[al]}{[aa]} \alpha_j, \\ \gamma_j^2 &= \gamma_j^1 - \frac{[b^1 c^1]}{[b^1 b^1]} \beta_j^1, \quad \dots \varphi_j^2 = \varphi_j^1 - \frac{[b^1 l^1]}{[b^1 b^1]} \beta_j^1, \\ &\dots \dots \dots \\ \varphi_j^m &= \varphi_j^{m-1} - \frac{[m^{m-1} l^{m-1}]}{[m^{m-1} m^{m-1}]} \mu_j^{m-1}. \end{aligned}$$

Jak widać, przeprowadzenie eliminacji m niewiadomych jest tu równoznaczne z obliczeniem wartości funkcji

$$f_j = \varphi_j^m. \quad (1.11)$$

Podamy teraz wzory krakowianowe określające dwa wspomniane na początku algorytmy, które będziemy nazywali w skrócie algorytmami G i K . Algorytm G wiąże się bezpośrednio z metodą eliminacji Gaussa, natomiast algorytm K — z metodą pierwiastka krakowianowego. Obydwa algorytmy należą do grupy algorytmów ortogonalizacyjnych.

2. Algorytm G

Dany jest krakowian c o k kolumnach, składający się z dwóch bloków a oraz b

$$c = \begin{Bmatrix} a \\ b \end{Bmatrix} \quad (2.1)$$

Krakowian a ma n wierszy, zaś krakowian b — p wierszy, co zapiszemy w następujący sposób

$$\begin{matrix} a & b \\ (k, n)' & (k, p)' \end{matrix}$$

Utworzymy ciąg krakowianów

$$G^0 \mathbf{c} = \mathbf{c}, G^1 \mathbf{c}, G^2 \mathbf{c} \dots G^m \mathbf{c}, \quad m \leq k, \quad (2.2)$$

wykonując m przekształceń według podanego niżej wzoru

$$G_j^i \mathbf{c} = \begin{cases} G_j^{i-1} \mathbf{c} & j \leq i \\ G_j^{i-1} \mathbf{c} - G_i^{i-1} \mathbf{c} \frac{G_{ai}^{i-1} \mathbf{c} \cdot G_{aj}^{i-1} \mathbf{c}}{(G_{ai}^{i-1} \mathbf{c})^2} & j > i \end{cases} \quad (2.3)$$

Wskaźnik górny przy symbolu funkcyjnym G oznacza położenie krakowianu $G^i \mathbf{c}$ w ciągu (2.2) lub też, co jest równoznaczne, liczbę przekształceń dokonanych na podstawie krakowianu danego $\mathbf{c}$. Natomiast wskaźniki dolne użyte zostały do oznaczenia kolumn i bloków krakowianu $G^i \mathbf{c}$:

$G_j^i \mathbf{c}$ oznacza j -tą kolumnę krakowianu $\mathbf{c}$ po i -tym przekształceniu,

$G_a^i \mathbf{c}$ oznacza blok a krakowianu $\mathbf{c}$ po i -tym przekształceniu,

$G_{aj}^i \mathbf{c}$ oznacza j -tą kolumnę bloku a w krakowianie $\mathbf{c}$ po i -tym przekształceniu.

Krakowian $\mathbf{a}$ będziemy nazywali częścią główną, zaś krakowian $\mathbf{b}$ częścią podrzędną krakowianu $\mathbf{c}$. W przypadku szczególnym, gdy $p = 0$, krakowian $\mathbf{c}$ nie posiada części podrzędnej. Łatwo zauważyć, że

$$G_a^i \mathbf{c} = G^i \mathbf{a} \quad (2.4)$$

jednakże

$$G_b^i \mathbf{c} \neq G^i \mathbf{b}$$

Przykład 1. Dany jest krakowian

$$\mathbf{c} = \begin{Bmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 4 \\ 1 & 1 \\ -1 & -2 \\ \dots & \dots \\ -3 & 8 \end{Bmatrix}.$$

Obliczymy krakowian $G^1 \mathbf{c}$. Pamiętając o tym, że $G^0 \mathbf{c} = \mathbf{c}$ napiszemy od razu:

$$G_1^1 \mathbf{c} = G_1^0 \mathbf{c} = \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \\ \dots \\ -3 \end{Bmatrix},$$

$$G_2^1 \mathbf{c} = G_2^0 \mathbf{c} - G_1^1 \mathbf{c} \frac{G_{a1}^1 \mathbf{c} \cdot G_{a2}^1 \mathbf{c}}{(G_{a1}^1 \mathbf{c})^2} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \\ -2 \\ \dots \\ 8 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \\ \dots \\ -3 \end{Bmatrix} \frac{6}{4} = \begin{Bmatrix} 2,5 \\ 2,5 \\ -0,5 \\ -0,5 \\ \dots \\ 12,5 \end{Bmatrix}.$$

a wobec tego

$$G^1 \mathbf{c} = \begin{Bmatrix} G_a^1 \mathbf{c} \\ G_b^1 \mathbf{c} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -1 & 2,5 \\ 1 & 2,5 \\ 1 & -0,5 \\ -1 & -0,5 \\ \dots\dots\dots \\ -3 & 12,5 \end{Bmatrix}$$

3. Algorytm K

Podobnie jak uprzednio założymy, że dany jest krakowian blokowy (2.1)

$$\mathbf{c} = \begin{Bmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{Bmatrix}.$$

Utworzymy ciąg krakowianów

$$K^0 \mathbf{c} = \mathbf{c}, K^1 \mathbf{c}, K^2 \mathbf{c} \dots K^m \mathbf{c}, \quad m \leq k, \quad (3.1)$$

stosując podany niżej wzór

$$K_j^i \mathbf{c} = \begin{cases} K_j^{i-1} \mathbf{c} & j < i \\ \frac{K_j^{i-1} \mathbf{c}}{\sqrt{(K_{ai}^{i-1} \mathbf{c})^2}} & j = i \\ K_j^{i-1} \mathbf{c} - K_i^i \mathbf{c} (K_{ai}^i \mathbf{c} \cdot K_{aj}^{i-1} \mathbf{c}) & j > i \end{cases} \quad (3.2)$$

Znaczenie wskaźników jest tu analogiczne, jak dla algorytmu G.

Porównajmy wzór (2.3) z wzorem (3.2) dla przypadku $j > i$. Przekształcając wzór (3.2) otrzymamy

$$\begin{aligned} K_j^i \mathbf{c} &= K_j^{i-1} \mathbf{c} - K_i^i \mathbf{c} (K_{ai}^i \mathbf{c} \cdot K_{aj}^{i-1} \mathbf{c}) = K_j^{i-1} \mathbf{c} - \frac{K_i^{i-1} \mathbf{c}}{\sqrt{(K_{ai}^{i-1} \mathbf{c})^2}} \cdot \frac{K_{ai}^{i-1} \mathbf{c} \cdot K_{aj}^{i-1} \mathbf{c}}{\sqrt{(K_{ai}^{i-1} \mathbf{c})^2}} = \\ &= K_j^{i-1} \mathbf{c} - K_i^{i-1} \mathbf{c} \frac{K_{ai}^{i-1} \mathbf{c} \cdot K_{aj}^{i-1} \mathbf{c}}{(K_{ai}^{i-1} \mathbf{c})^2}. \end{aligned}$$

Jak widać, w przypadku $j > i$ wzory te prowadzą do identycznych wyników. Uwzględniając postać wzoru (3.2) dla $j = i$ otrzymamy następujące zależności

$$K_i^m \mathbf{c} = \begin{cases} \frac{G_i^m \mathbf{c}}{\sqrt{(G_{ai}^m \mathbf{c})^2}} & i \leq m \\ G_i^m \mathbf{c} & i > m \end{cases} \quad (3.3)$$

Aby nie rozpraszać uwagi, będziemy się w dalszej części tej pracy zajmowali wyłącznie algorytmem K, który zarówno pod względem teore-

tycznym, jak i praktycznym wydaje się mieć większe znaczenie niż algorytm G.

Przykład 2. Obliczymy krakowian K^1c przyjmując dane z przykładu 1.

$$c = \begin{Bmatrix} a \\ b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 4 \\ 1 & 1 \\ -1 & -2 \\ \dots & \dots \\ -3 & 8 \end{Bmatrix},$$

$$K_1^1 c = \frac{K_1^0 c}{\sqrt{(K_{a1}^0 c)^2}} = \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \\ \dots \\ -3 \end{Bmatrix} \frac{1}{2} = \begin{Bmatrix} -0,5 \\ 0,5 \\ 0,5 \\ -0,5 \\ \dots \\ -1,5 \end{Bmatrix},$$

$$K_2^1 c = K_2^0 c - K_1^1 c (K_{a1}^1 c \cdot K_{a2}^0 c) = \begin{Bmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \\ -2 \\ \dots \\ 8 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} -0,5 \\ 0,5 \\ 0,5 \\ -0,5 \\ \dots \\ -1,5 \end{Bmatrix} \cdot 3 = \begin{Bmatrix} 2,5 \\ 2,5 \\ -0,5 \\ -0,5 \\ \dots \\ 12,5 \end{Bmatrix},$$

$$K^1 c = \begin{Bmatrix} K_a^1 c \\ K_b^1 c \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0,5 & 2,5 \\ 0,5 & 2,5 \\ 0,5 & -0,5 \\ -0,5 & -0,5 \\ \dots & \dots \\ -1,5 & 12,5 \end{Bmatrix}$$

4. Podstawowe własności algorytmu K

Niech dany będzie krakowian c , którego część główną stanowią krakowiany

$$\begin{matrix} a & a' \\ (m,n), & (k,n), \end{matrix}$$

zaś część podrzędną krakowiany

$$\begin{matrix} b & b' \\ (m,p), & (k,p). \end{matrix}$$

Mamy więc

$$c = \begin{Bmatrix} a & a' \\ b & b' \end{Bmatrix} \quad (4.1)$$

Postaramy się wyrazić bloki krakowianu $K^m c$

$$K^m c = \begin{Bmatrix} K_a^m c & K_{a'}^m c \\ K_b^m c & K_{b'}^m c \end{Bmatrix} \quad (4.2)$$

w funkcji bloków krakowianu c .

Rozważmy najpierw krakowian

$$K_a^m c = K^m a.$$

Wykonując kolejno m przekształceń m kolumn krakowianu a będziemy otrzymywali

$$\begin{aligned} a &= K^0 a = \{K_1^0 a, K_2^0 a, K_3^0 a, \dots, K_m^0 a\}, \\ K^1 a &= \{K_1^1 a, K_2^1 a, K_3^1 a, \dots, K_m^1 a\}, \\ K^2 a &= \{K_1^2 a, K_2^2 a, K_3^2 a, \dots, K_m^2 a\}, \\ K^3 a &= \{K_1^3 a, K_2^3 a, K_3^3 a, \dots, K_m^3 a\}, \\ &\dots \dots \dots \\ K^m a &= \{K_1^m a, K_2^m a, K_3^m a, \dots, K_m^m a\}. \end{aligned}$$

Nietrudno spostrzec, że iloczyn kolumny $K_1^1 a$ oraz dowolnej następnej kolumny krakowianu $K^j a$ jest równy zero:

$$K_1^1 a \cdot K_j^j a = 0, \quad j = 2, 3 \dots m.$$

Rzeczywiście na mocy wzoru (3.2) mamy

$$K_1^1 a \cdot K_j^j a = \frac{K_1^0 a}{\sqrt{(K_1^0 a)^2}} \left(K_j^0 a - \frac{K_1^1 a}{\sqrt{(K_1^0 a)^2}} \frac{K_1^0 a \cdot K_j^0 a}{\sqrt{(K_1^0 a)^2}} \right) = \frac{K_1^0 a \cdot K_j^0 a}{\sqrt{(K_1^0 a)^2}} - \frac{K_1^0 a \cdot K_j^0 a}{\sqrt{(K_1^0 a)^2}} = 0.$$

Wynika stąd, że mnożąc kolumnę $K_1^1 a$ przez następne kolumny krakowianu $K^m a$ będziemy także otrzymywali zera:

$$K_1^1 a \cdot K_j^j a = 0,$$

ponieważ kolumny $K_2^2 a, K_3^3 a, \dots, K_m^m a$ są liniowymi kombinacjami kolumn $K_2^1 a, K_3^1 a, \dots, K_m^1 a$, a dla każdej kombinacji $x = z_2 \cdot K_2^1 a + z_3 \cdot K_3^1 a + \dots + z_m \cdot K_m^1 a$ mamy oczywiście $K_1^1 a \cdot x = 0$.

Analogicznie można pokazać, że spełnione są związki:

$$K_2^2 a \cdot K_j^j a = 0, \quad j = 3, 4 \dots m,$$

$$K_3^3 a \cdot K_j^j a = 0, \quad j = 4, 5 \dots m,$$

itd. itd. wreszcie

$$K_{m-1}^{m-1} a \cdot K_m^m a = 0.$$

Napiszemy więc ogólnie

$$K_i^i a \cdot K_j^j a = 0, \quad i \neq j,$$

uwzględniając zaś wzór (3.2) dla $i = j$ otrzymamy

$$K_i^i a \cdot K_i^i a = 1.$$

W ten sposób uzasadniliśmy słuszność następującego wzoru:

$$(K^m a)^2 = \tau \tag{4.3}$$

Zauważmy teraz, że $K_1^1 a$ jest iloczynem kolumny a_1 przez pewną stałą, $K a$ — liniową kombinacją kolumn a_1 i a_2 , $K_3^3 a$ — liniową kombinacją kolumn a_1 , a_2 i a_3 itd. Wobec tego krakowian $K^m a$ może być traktowany jako wynik mnożenia $z \cdot \tau a$:

$$K^m a = z \cdot \tau a,$$

gdzie z — krakowian trójkątny, którego elementy są współczynnikami obliczanych kombinacji liniowych:

$$z = \begin{Bmatrix} z_{1,1} & z_{2,1} \dots z_{m,1} \\ & z_{2,2} \dots z_{m,2} \\ & & \dots \dots \\ & & & z_{m,m} \end{Bmatrix}$$

Aby wyznaczyć ten krakowian posłużymy się wzorem (4.3), z którego wynika, że $(z \cdot \tau a)^2 = \tau$. Wykonując szereg prostych przekształceń otrzymamy kolejno:

$$\begin{aligned} \tau &= (z \cdot \tau a)^2 \\ \tau &= z \cdot a^2 \cdot z \\ z^{-1} &= z \cdot a^2 \\ \tau z^{-1} &= a^2 \cdot z \\ (\tau z^{-1})^2 &= a^2 \\ \tau z^{-1} &= \sqrt{a^2} \\ z^{-1} &= \tau \sqrt{a^2} \\ z &= \tau (\sqrt{a^2})^{-1} \end{aligned}$$

Możemy zatem napisać ostatecznie

$$K^m a = \tau (\sqrt{a^2})^{-1} \cdot \tau a \quad (4.4)$$

Przy okazji zauważmy, że krakowian $K^m a$ daje się obliczyć tylko wówczas, gdy kolumny krakowianu a są liniowo niezależne.

Zajmijmy się teraz krakowianem $K_b^m c$. Obliczenie tego krakowianu, podobnie jak obliczenie krakowianu $K^m a$ sprowadza się do utworzenia liniowych kombinacji kolumn. W przypadku krakowianu $K^m a$ tworzy się kombinacje kolumn a_i , zaś w przypadku krakowianu $K_b^m c$ — kolumn b_i , przy czym współczynniki kombinacji w obydwóch przypadkach są jednako-
we. Wynika stąd wzór

$$K_b^m c = \tau (\sqrt{a^2})^{-1} \cdot \tau b, \quad (4.5)$$

gdzie b jest m -kolumnowym krakowianem podrzędnej części krakowianu (4.1).

Przejdziemy do wyprowadzenia wzoru określającego wynik m przekształceń krakowianu a' . Krakowian $K_a^m c$ możemy przedstawić w postaci

$$K_a^m c = a' - y \cdot \tau K^m a, \quad (4.6)$$

ponieważ w trakcie kolejnych przekształceń $1, 2 \dots m$, od kolumn krakowianu $\mathbf{a}'$ odejmuje się kolumny $1, 2 \dots m$ krakowianu $K^m \mathbf{a}$ pomnożone przez pewne współczynniki y_{ij} tworzące krakowian $\mathbf{y}$. Dla wyznaczenia tego krakowianu zauważmy, że w ten sam sposób jak wykazaliśmy słuszność związku $K_i^i \mathbf{a} \cdot K_j^j \mathbf{a} = K_i^i \mathbf{a} \cdot K_j^j \mathbf{a} = 0$, możemy również uzasadnić związek $K_i^m \mathbf{a} \cdot K_{a'j}^m \mathbf{c} = 0$, który zapiszemy w postaci

$$K_{a'}^m \mathbf{c} \cdot K^m \mathbf{a} = 0.$$

Uwzględniając (4.6) łatwo teraz wyznaczymy krakowian $\mathbf{y}$:

$$K_{a'}^m \mathbf{c} \cdot K^m \mathbf{a} = (\mathbf{a}' - \mathbf{y} \cdot \tau K^m \mathbf{a}) \cdot K^m \mathbf{a} = 0$$

$$\mathbf{y} \cdot (K^m \mathbf{a})^2 = \mathbf{a}' \cdot K^m \mathbf{a}$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{a}' \cdot K^m \mathbf{a},$$

a stąd

$$\begin{aligned} K_{a'}^m \mathbf{c} &= \mathbf{a}' - \mathbf{a}' \cdot K^m \mathbf{a} \cdot \tau K^m \mathbf{a} = \\ &= \mathbf{a}' - \mathbf{a}' \cdot (\tau K^m \mathbf{a})^2 = \\ &= \mathbf{a}' - \mathbf{a}' \cdot [\tau \mathbf{a} \tau (\sqrt{\mathbf{a}^2})^{-1}]^2 = \\ &= \mathbf{a}' - \mathbf{a}' \cdot [\tau \mathbf{a} \cdot (\mathbf{a}^2)^{-1} \cdot \tau \mathbf{a}]. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Obliczenie krakowianu $K_b^m \mathbf{c}$ polega na odejmowaniu od kolumn krakowianu $\mathbf{b}'$ kolejnych kolumn krakowianu $K_b^m \mathbf{c}$ pomnożonych przez te same co uprzednio współczynniki, tworzące krakowian $\mathbf{y}$. Analogicznie do (4.6) mamy więc

$$K_b^m \mathbf{c} = \mathbf{b}' - \mathbf{y} \cdot \tau K_b^m \mathbf{c}.$$

Po podstawieniu krakowianu $\mathbf{y} = \mathbf{a}' \cdot K^m \mathbf{a}$ otrzymamy:

$$\begin{aligned} K_b^m \mathbf{c} &= \mathbf{b}' - \mathbf{a}' \cdot K^m \mathbf{a} \cdot \tau K_b^m \mathbf{c} = \\ &= \mathbf{b}' - \mathbf{a}' [\tau K_b^m \mathbf{c} \cdot \tau K^m \mathbf{a}] = \\ &= \mathbf{b}' - \mathbf{a}' \cdot \{ \tau \mathbf{b} \cdot \tau (\sqrt{\mathbf{a}^2})^{-1} \cdot [\tau \mathbf{a} \cdot \tau (\sqrt{\mathbf{a}^2})^{-1}] \} = \\ &= \mathbf{b}' - \mathbf{a}' \cdot [\tau \mathbf{b} \cdot (\mathbf{a}^2)^{-1} \tau \mathbf{a}]. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Reasumując widzimy, że wynik m przekształceń krakowianu $\mathbf{c}$, którego bloki $\mathbf{a}$ i $\mathbf{b}$ mają m kolumn, przedstawiają się jak następuje:

$$K^m \mathbf{c} = K^m \begin{Bmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{a}' \\ \mathbf{b} & \mathbf{b}' \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \tau (\sqrt{\mathbf{a}^2})^{-1} \cdot \tau \mathbf{a} & \mathbf{a}' - \mathbf{a}' \cdot [\tau \mathbf{a} \cdot (\mathbf{a}^2)^{-1} \cdot \tau \mathbf{a}] \\ \tau (\sqrt{\mathbf{a}^2})^{-1} \cdot \tau \mathbf{b} & \mathbf{b}' - \mathbf{a}' \cdot [\tau \mathbf{b} \cdot (\mathbf{a}^2)^{-1} \cdot \tau \mathbf{a}] \end{Bmatrix} \quad (4.9)$$

5. Zastosowanie algorytmu K w metodzie spostrzeżeń pośrednich

Zapiszemy układ równań poprawek (1.1) oraz układ funkcji niewiadomych (1.9) w postaci krakowianowej

$$\mathbf{v} = \mathbf{x} \cdot \tau \mathbf{a} + \mathbf{l} \quad (5.1)$$

$$\mathbf{f} = \mathbf{x} \cdot \tau \mathbf{b} + \varphi \quad (5.2)$$

gdzie

$$\mathbf{v} = \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{Bmatrix} x_a \\ x_b \\ \vdots \\ x_m \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{a} = \begin{Bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & \dots & m_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & \dots & m_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n & b_n & c_n & \dots & m_n \end{Bmatrix},$$

$$\mathbf{l} = \begin{Bmatrix} l_1 \\ l_2 \\ \vdots \\ l_n \end{Bmatrix}, \quad \boldsymbol{\varphi} = \begin{Bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \vdots \\ \varphi_p \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{Bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 & \dots & \mu_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 & \dots & \mu_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_p & \beta_p & \gamma_p & \dots & \mu_p \end{Bmatrix}.$$

Dla kontroli rachunku wyprowadzimy kolumny sumowe równe odpowiednio

$$\mathbf{s} = \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \dots + \mathbf{a}_m + \mathbf{l}$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2 + \dots + \mathbf{b}_m + \boldsymbol{\varphi}$$

Oprócz układu funkcji niewiadomych będziemy brali pod uwagę układ funkcji wyrównanych obserwacji

$$F_\alpha, F_\beta, \dots, F_\omega.$$

Zależnie od tego, czy wartości przybliżone tych funkcji obliczone są na podstawie wartości zaobserwowanych $L^{\text{obs.}}$, czy też na podstawie przybliżonych wartości obserwacji $L^{\text{przybl.}}$ układ ten będziemy pisali w postaci

$$\begin{aligned} F_\alpha &= \alpha'_1 v_1 + \alpha'_2 v_2 + \dots + \alpha'_n v_n + \Phi_\alpha^{\text{obs.}} \\ F_\beta &= \beta'_1 v_1 + \beta'_2 v_2 + \dots + \beta'_n v_n + \Phi_\beta^{\text{obs.}} \\ &\dots \dots \dots \\ F_\omega &= \omega'_1 v_1 + \omega'_2 v_2 + \dots + \omega'_n v_n + \Phi_\omega^{\text{obs.}} \end{aligned} \quad (5.3)$$

gdzie $\Phi_\rho^{\text{obs.}} = F_\rho(L_1^{\text{obs.}}, L_2^{\text{obs.}}, \dots, L_n^{\text{obs.}})$, $\rho = \alpha, \beta, \dots, \omega$,

lub w postaci

$$\begin{aligned} F_\alpha &= \alpha'_1 (v_1 - l_1) + \alpha'_2 (v_2 - l_2) + \dots + \alpha'_n (v_n - l_n) + \Phi_\alpha^{\text{przybl.}} \\ F_\beta &= \beta'_1 (v_1 - l_1) + \beta'_2 (v_2 - l_2) + \dots + \beta'_n (v_n - l_n) + \Phi_\beta^{\text{przybl.}} \\ &\dots \dots \dots \\ F_\omega &= \omega'_1 (v_1 - l_1) + \omega'_2 (v_2 - l_2) + \dots + \omega'_n (v_n - l_n) + \Phi_\omega^{\text{przybl.}} \end{aligned} \quad (5.4)$$

gdzie $\Phi_\rho^{\text{przybl.}} = F_\rho(L_1^{\text{przybl.}}, L_2^{\text{przybl.}}, \dots, L_n^{\text{przybl.}})$,

zaś l_i jest wyrazem wolnym: $l_i = L_i^{\text{przybl.}} - L_i^{\text{obs.}}$.

Krakowianowo układy te będziemy przedstawiali jak następuje

$$\mathbf{F} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{B} + \Phi^{\text{obs.}}, \quad (5.5)$$

$$\mathbf{F} = (\mathbf{v} - \mathbf{l}) \cdot \mathbf{B} + \Phi^{\text{przybl.}}, \quad (5.6)$$

gdzie

$$\mathbf{F} = \begin{Bmatrix} F_\alpha \\ F_\beta \\ \vdots \\ F_\omega \end{Bmatrix}, \quad \Phi^{\text{obs.}} = \begin{Bmatrix} \Phi_\alpha^{\text{obs.}} \\ \Phi_\beta^{\text{obs.}} \\ \vdots \\ \Phi_\omega^{\text{obs.}} \end{Bmatrix}, \quad \Phi^{\text{przybl.}} = \begin{Bmatrix} \Phi_\alpha^{\text{przybl.}} \\ \Phi_\beta^{\text{przybl.}} \\ \vdots \\ \Phi_\omega^{\text{przybl.}} \end{Bmatrix},$$

$$\mathbf{B} = \begin{Bmatrix} \alpha'_1 & \beta'_1 & \dots & \omega'_1 \\ \alpha'_2 & \beta'_2 & \dots & \omega'_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha'_n & \beta'_n & \dots & \omega'_n \end{Bmatrix}.$$

W przypadku, gdy obserwacje są niejednakowo dokładne układ funkcji wyrównanych obserwacji należy przekształcić, wymnażając współczynniki przy poprawkach przez odpowiednie błędy średnie.

Podamy teraz szereg podstawowych wzorów metody spostrzeżeń pośrednich w ujęciu algorytmu K.

1. Obliczenie poprawek $\mathbf{v}$

Kolumna poprawek $\mathbf{v}$ równa się kolumnie 1 krakowianu $\mathbf{P} = \{\mathbf{a} \mathbf{l}\}$ po m -tym przekształceniu:

$$\mathbf{v} = K_l^m \mathbf{P}. \quad (5.7)$$

Uzupełniając krakowian $\mathbf{P}$ kolumną sumową $\mathbf{s}$ otrzymujemy dla kontroli

$$\mathbf{v} = K_s^m \mathbf{P}, \quad (5.8)$$

gdzie $\mathbf{P} = \{\mathbf{a} \mathbf{l} \mathbf{s}\}$.

Wzory powyższe można łatwo sprawdzić posługując się wzorem ogólnym *) (4.7), bądź też uwzględniając fakt, że jedno przekształcenie krakowianu $\mathbf{P}$ odpowiada eliminacji jednej niewiadomej z układu równań poprawek, a po eliminacji m niewiadomych mamy $l_i^m = v_i$, przy czym oczywiście $l_i^m = s_i^m$.

2. Obliczenie funkcji niewiadomych $\mathbf{f}$

Kolumna funkcji niewiadomych $\mathbf{f}$ równa się kolumnie przybliżonych wartości funkcji φ krakowianu $\mathbf{P}$ po m -tym przekształceniu:

$$\mathbf{f} = K_\varphi^m \mathbf{P}, \quad (5.9)$$

gdzie

$$\mathbf{P} = \begin{Bmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{l} \\ \mathbf{b} & \varphi \end{Bmatrix}.$$

*) Mamy tu $K_l^m \mathbf{P} = \mathbf{l} - \mathbf{l} \cdot [\tau \mathbf{a} \cdot (\mathbf{a}^2)^{-1} \tau \mathbf{a}] = \mathbf{l} [\tau - \tau \mathbf{a} (\mathbf{a}^2)^{-1} \tau \mathbf{a}] = \mathbf{l} \mathbf{t}_{l/v} = \mathbf{v}$, ponieważ $\mathbf{t}_{l/v} = \tau - \tau \mathbf{a} (\mathbf{a}^2)^{-1} \tau \mathbf{a}$ jest krakowianem transformującym wyrazy wolne na poprawki.

Uzupełniając krakowian $\mathbf{P}$ kolumnami sumowymi $\mathbf{s}$ i σ :

$$\mathbf{P} = \begin{Bmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{1} & \mathbf{s} \\ \mathbf{b} & \varphi & \sigma \end{Bmatrix},$$

otrzymujemy dla kontroli

$$\mathbf{f} = K_{\varphi}^m \mathbf{P}, \quad (5.10)$$

Łatwo zauważyć, że obliczenie funkcji niewiadomych wiąże się z obliczeniem poprawek, ponieważ mamy:

$$K^m \begin{Bmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{1} & \mathbf{s} \\ \mathbf{b} & \varphi & \sigma \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \tau(\mathbf{1}'\mathbf{a}^2)^{-1} \cdot \tau\mathbf{a} & \mathbf{v} & \mathbf{v} \\ \tau(\mathbf{1}'\mathbf{a}^2)^{-1} \cdot \tau\mathbf{b} & \mathbf{f} & \mathbf{f} \end{Bmatrix} \quad (5.11)$$

Uzasadnienie podanych tu wzorów przebiega analogicznie, jak w przypadku wzorów (5.7) i (5.8). Z (4.8) wynika np. $K_{\varphi}^m \mathbf{P} = \varphi - 1 [\tau\mathbf{b}(\mathbf{a}^2)^{-1}\tau\mathbf{a}] = \mathbf{f}$.

3. Obliczenie niewiadomych $\mathbf{x}$

Obliczenie niewiadomych może być traktowane jako szczególny przypadek obliczenia funkcji niewiadomych, przy którym

$$\mathbf{b} = \tau, \varphi = 0, \quad \text{zaś} \quad \sigma = \mathbf{1} = \tau\{1 \dots 1\}.$$

Mamy zatem

$$\mathbf{x} = K_0^m \mathbf{P} \quad (5.12)$$

oraz dla kontroli

$$\mathbf{x} = K_1^m \mathbf{P} \quad (5.13)$$

gdzie

$$\mathbf{P} = \begin{Bmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{1} & \mathbf{s} \\ \tau & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{Bmatrix}.$$

4. Obliczenie krakowianu transformującego $\mathbf{t}_{l/v}$

Krakowian $\mathbf{t}_{l/v}$ transformujący wyrazy wolne na poprawki: $\mathbf{v} = \mathbf{1} \cdot \mathbf{t}_{l/v}$, wyraża się wzorem

$$\mathbf{t}_{l/v} = K_{\tau}^m \mathbf{P}, \quad (5.14)$$

gdzie

$$\mathbf{P} = \{\mathbf{a} \ \tau\}.$$

Rzeczywiście, podstawiając do układu równań poprawek (5.1) $\mathbf{x} = -\mathbf{1} [(\mathbf{a}^2)^{-1}\tau\mathbf{a}]$ otrzymamy [2]:

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \mathbf{x} \cdot \tau\mathbf{a} + \mathbf{1} = \\ &= -\mathbf{1} \cdot [(\mathbf{a}^2)^{-1} \cdot \tau\mathbf{a}] \cdot \tau\mathbf{a} + \mathbf{1} = \\ &= \mathbf{1} \{ \tau - \tau\mathbf{a} \cdot [\tau\mathbf{a} \cdot (\mathbf{a}^2)^{-1}] \} = \\ &= \mathbf{1} [\tau - \tau\mathbf{a} \cdot (\mathbf{a}^2)^{-1} \cdot \tau\mathbf{a}] = \\ &= \mathbf{1} \cdot \mathbf{t}_{l/v}, \end{aligned}$$

natomiast na podstawie (4.7) mamy

$$K_{\epsilon}^m \mathbf{P} = \tau - \tau \mathbf{a} \cdot (\mathbf{a}^2)^{-1} \cdot \tau \mathbf{a},$$

co potwierdza słuszność wzoru (5.14).

5. Obliczenie krakowianu transformującego $\mathbf{t}_{l/x}$

Krakowian $\mathbf{t}_{l/x}$ transformujący wyrazy wolne na niewiadome: $\mathbf{x} = \mathbf{l} \cdot \mathbf{t}_{l/x}$, wyraża się wzorem

$$\mathbf{t}_{l/x} = \tau K_0^m \mathbf{P} \quad (5.15)$$

gdzie

$$\mathbf{P} = \begin{Bmatrix} \mathbf{a} & \tau \\ \tau & 0 \end{Bmatrix}.$$

Mamy tu $\mathbf{t}_{l/x} = -(\mathbf{a}^2)^{-1} \cdot \tau \mathbf{a}$, zaś z wzoru (4.8) wynika, że $K_0^m \mathbf{P} = -\tau \mathbf{a} \cdot (\mathbf{a}^2)^{-1}$, a więc $\mathbf{t}_{l/x} = \tau K_0^m \mathbf{P}$.

Obliczenie krakowianu $\mathbf{t}_{l/x}$ według wzoru (5.15) wiąże się z obliczeniem krakowianu $\mathbf{t}_{l/v}$, ponieważ

$$K^m \begin{Bmatrix} \mathbf{a} & \tau \\ \tau & 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \tau(\sqrt{\mathbf{a}^2})^{-1} \cdot \tau \mathbf{a} & \mathbf{t}_{l/v} \\ \tau(\sqrt{\mathbf{a}^2})^{-1} & \tau \mathbf{t}_{l/x} \end{Bmatrix}, \quad (5.16)$$

Podana powyżej metoda obliczenia krakowianu $\mathbf{t}_{l/x}$ może się okazać niedogodna dla dużych układów równań poprawek, ze względu na znaczne zużycie miejsc pamięci. Przyjmując, że krakowian $\mathbf{a}$ ma m kolumn i n wierszy będziemy musieli zarezerwować dla kolejno przekształcanych krakowianów

$$K^i \mathbf{P} = K^i \begin{Bmatrix} \mathbf{a} & \tau \\ \tau & 0 \end{Bmatrix}, \quad i = 0, 1 \dots m,$$

ogółem $(m+n)^2$ miejsc pamięci, przy czym zakłada się, co jest oczywiste, że krakowiany $K^i \mathbf{P}$ zapisywane są na miejscach pamięci, zajętych na początku rachunku przez krakowian $\mathbf{P} = K^0 \mathbf{P}$.

Znacznie mniejszej liczby miejsc pamięci wymaga metoda przedstawiona wzorem

$$\mathbf{t}_{l/x} = -\tau K_{\epsilon}^m \mathbf{P} \cdot \tau K_a^m \mathbf{P}, \quad (5.17)$$

gdzie krakowian $\mathbf{P}$ zajmuje tylko $m(m+n)$ miejsc pamięci

$$\mathbf{P} = \begin{Bmatrix} \mathbf{a} \\ \tau \end{Bmatrix}.$$

Występujące we wzorze (5.17) mnożenie kolumnowe dwóch krakowianów stransponowanych wygodnie jest zastąpić mnożeniem wierszowym. Opierając się na definicji prof. dr T. Banachiewicza, według której iloczyn wierszowy

$$\mathbf{x} \mathbf{w} \mathbf{y} = \tau \mathbf{y} \cdot \tau \mathbf{x}, \quad (5.18)$$

możemy przedstawić w postaci wzór (5.17)

$$\mathbf{t}_{l/x} = -\mathbf{K}_a^m \mathbf{P}_w \mathbf{K}_c^m \mathbf{P}. \quad (5.19)$$

Dla wykazania słuszności wzoru (5.17) wystarczy wykonać podstawienia $\mathbf{K}_a^m \mathbf{P} = \tau(\sqrt{\mathbf{a}^2})^{-1} \tau \mathbf{a}$, $\mathbf{K}_c^m \mathbf{P} = \tau(\sqrt{\mathbf{a}^2})^{-1}$:

$$-(\sqrt{\mathbf{a}^2})^{-1} [\tau \mathbf{a} \cdot \tau(\sqrt{\mathbf{a}^2})^{-1}] = -(\mathbf{a}^2)^{-1} \tau \mathbf{a} = \mathbf{t}_{l/x}.$$

6. Obliczenie krakowianu transformującego $\mathbf{t}_{l/f}$

Wprowadzimy pojęcie krakowianu transformującego wyrazy wolne l na funkcje niewiadomych f . Krakowian ten okaże się niewątpliwie przydatny w zastosowaniach praktycznych.

Podstawiając $\mathbf{x} = -\mathbf{l} \cdot [(\mathbf{a}^2)^{-1} \cdot \tau \mathbf{a}]$ do układu funkcji (5.2) otrzymamy

$$\begin{aligned} \mathbf{f} &= \varphi - \mathbf{l} \cdot [(\mathbf{a}^2)^{-1} \cdot \tau \mathbf{a}] \tau \mathbf{b} = \\ &= \varphi - \mathbf{l} \cdot \{ \tau \mathbf{b} \cdot [\tau \mathbf{a} \cdot (\mathbf{a}^2)^{-1}] \} = \\ &= \varphi - \mathbf{l} \cdot [\tau \mathbf{b} \cdot (\mathbf{a}^2)^{-1} \cdot \tau \mathbf{a}] = \\ &= \varphi + \mathbf{l} \cdot \mathbf{t}_{l/f}, \end{aligned}$$

gdzie krakowian

$$\mathbf{t}_{l/f} = -\tau \mathbf{b} \cdot (\mathbf{a}^2)^{-1} \cdot \tau \mathbf{a} \quad (5.20)$$

będziemy nazywali krakowianem transformującym wyrazy wolne l na funkcje niewiadomych f .

Proces obliczenia krakowianu $\mathbf{t}_{l/f}$ może być ujęty łatwym do sprawdzenia wzorem

$$\mathbf{K}^m \begin{Bmatrix} \mathbf{a} & \tau \\ \mathbf{b} & 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \tau(\sqrt{\mathbf{a}^2})^{-1} \tau \mathbf{a} & \mathbf{t}_{l/v} \\ \tau(\sqrt{\mathbf{a}^2})^{-1} \tau \mathbf{b} & \mathbf{t}_{l/f} \end{Bmatrix}, \quad (5.21)$$

z którego wynika, że

$$\mathbf{t}_{l/f} = \tau \mathbf{K}_b^m \mathbf{P}, \quad (5.22)$$

gdzie

$$\mathbf{P} = \begin{Bmatrix} \mathbf{a} & \tau \\ \mathbf{b} & 0 \end{Bmatrix}.$$

W przypadkach, gdy istotne jest zmniejszenie wymiarów krakowianu przekształcanego $\mathbf{P}$, może być stosowany wzór

$$\begin{aligned} \mathbf{t}_{l/f} &= -\tau \mathbf{K}_b^m \mathbf{P} \cdot \tau \mathbf{K}_a^m \mathbf{P} = \\ &= -\mathbf{K}_a^m \mathbf{P}_w \mathbf{K}_b^m \mathbf{P}, \end{aligned} \quad (5.23)$$

gdzie

$$\mathbf{P} = \begin{Bmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{Bmatrix}.$$

Kładąc tu $K_a^m \mathbf{P} = \tau(\sqrt{a^2})^{-1} \tau \mathbf{a}$, $K_b^m \mathbf{P} = \tau(\sqrt{a^2})^{-1} \tau \mathbf{b}$ otrzymamy

$$\begin{aligned} t_{l/f} &= -\tau K_b^m \mathbf{P} \cdot \tau K_a^m \mathbf{P} = \\ &= -[\tau \mathbf{b} \cdot \tau(\sqrt{a^2})^{-1}] \cdot [\tau \mathbf{a} \cdot \tau(\sqrt{a^2})^{-1}] = \\ &= -\tau \mathbf{b} \cdot [\tau \mathbf{a} \cdot \tau(\sqrt{a^2})^{-1} \cdot (\sqrt{a^2})^{-1}] = \\ &= -\tau \mathbf{b} \cdot [\tau \mathbf{a} \cdot (a^2)^{-1}] = \\ &= -\tau \mathbf{b} \cdot (a^2)^{-1} \tau \mathbf{a}, \end{aligned}$$

a więc rzeczywiście

$$t_{l/f} = -\tau K_b^m \mathbf{P} \cdot \tau K_a^m \mathbf{P}.$$

7. Obliczenie krakowianu transformującego $t_{l/F}$

Podstawiając do układu (5.5) $\mathbf{v} = \mathbf{l} \cdot t_{l/v} = \mathbf{l} [\tau - \tau \mathbf{a} \cdot (a^2)^{-1} \cdot \tau \mathbf{a}]$ otrzymamy bezpośrednio wzór określający krakowian $t_{l/F}$ transformujący wyrazy wolne $\mathbf{l}$ na funkcje obserwacji F .

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \mathbf{l} [\tau - \tau \mathbf{a} \cdot (a^2)^{-1} \cdot \tau \mathbf{a}] \mathbf{B} + \Phi^{\text{obs.}} = \\ &= \mathbf{l} \{ \mathbf{B} - \mathbf{B} \cdot [\tau \mathbf{a} \cdot (a^2)^{-1} \cdot \tau \mathbf{a}] \} + \Phi^{\text{obs.}} = \\ &= \mathbf{l} \cdot t_{l/F} + \Phi^{\text{obs.}}, \end{aligned}$$

$$\text{gdzie} \quad t_{l/F} = \mathbf{B} - \mathbf{B} \cdot [\tau \mathbf{a} \cdot (a^2)^{-1} \cdot \tau \mathbf{a}]. \quad (5.24)$$

Weźmy teraz pod uwagę krakowian $\mathbf{P} = \{ \mathbf{a} \mathbf{B} \}$ i obliczmy $K^m \{ \mathbf{a} \mathbf{B} \}$:

$$K^m \{ \mathbf{a} \mathbf{B} \} = \{ \tau(\sqrt{a^2})^{-1} \cdot \tau \mathbf{a} \quad \mathbf{B} - \mathbf{B} \cdot [\tau \mathbf{a} \cdot (a^2)^{-1} \tau \mathbf{a}] \}.$$

Jak widać

$$t_{l/F} = K_B^m \mathbf{P}. \quad (5.25)$$

Dla układu (5.6), w którym występują wartości przybliżone funkcji $\Phi_a^{\text{przybl.}}$, $\Phi_\beta^{\text{przybl.}}$, $\Phi_\omega^{\text{przybl.}}$, obliczone na podstawie przybliżonych wartości obserwacji, krakowian transformujący przybiera nieco inną postać. Mamy wówczas:

$$\mathbf{F} = \mathbf{l} \cdot t'_{l/F} + \Phi^{\text{przybl.}} \quad (5.26)$$

gdzie

$$t'_{l/F} = -\mathbf{B} \cdot [\tau \mathbf{a} \cdot (a^2)^{-1} \tau \mathbf{a}] = K_B^m \mathbf{P} - \mathbf{B}.$$

8. Obliczenie błędów średnich funkcji niewiadomych

Błąd średni funkcji niewiadomych

$$f_j = \alpha_j x_a + \beta_j x_b + \dots + \mu_j x_m + \varphi_j, \quad j = 1, 2 \dots p,$$

możemy łatwo obliczyć na podstawie krakowianu transformującego $t_{l/f}$, mamy bowiem

$$f_j = \mathbf{l} \cdot (t_{l/f})_j + \varphi_j,$$

a z wzoru Gaussa na przenoszenie się błędów średnich wynika, że

$$m_{f_j} = m_0 \sqrt{[(t_{l/f})_j]^2} = m_0 \sqrt{(t_{l/f})_{jj}^2} \quad (5.27)$$

Opierając się na wzorze (5.23) otrzymamy

$$\begin{aligned} (t_{l/f})^2 &= (\tau K_b^m \mathbf{P} \cdot \tau K_a^m \mathbf{P})^2 = \\ &= \tau K_b^m \mathbf{P} (K_a^m \mathbf{P})^2 \tau K_b^m \mathbf{P}. \end{aligned}$$

Ponieważ $(K_a^m \mathbf{P})^2 = (K^m \mathbf{a})^2 = \tau$, to

$$(t_{l/f})^2 = (\tau K_b^m \mathbf{P})^2,$$

zaś j -ty element przekątny krakowianu $(\tau K_b^m \mathbf{P})^2$ równa się sumie kwadratów elementów j -tego wiersza krakowianu $K_b^m \mathbf{P}$. Oznaczając ten wiersz przez $K_{b(j)}^m \mathbf{P}$ mamy ostatecznie

$$m_{f_j} = m_0 \sqrt{(\tau K_{b(j)}^m \mathbf{P})^2} \quad (5.28)$$

Wzór ten możemy wyrazić słownie w następujący sposób: błąd średni j -tej funkcji niewiadomych równa się błędowi średniemu pojedynczego spostrzeżenia m_0 pomnożonemu przez pierwiastek z sumy kwadratów elementów j -tego wiersza bloku $\mathbf{b}$ w krakowianie $\mathbf{P}$ po m -tym przekształceniu, gdzie

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{bmatrix}.$$

9. Obliczenie błędów średnich niewiadomych

Kładąc we wzorze (5.28) $\mathbf{b} = \tau$ otrzymamy wzór na błąd średni k -tej niewiadomej

$$m_{x_k} = m_0 \sqrt{(\tau K_{\tau(k)}^m \mathbf{P})^2}, \quad k = 1, 2 \dots m, \quad (5.29)$$

gdzie

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{a} \\ \tau \end{bmatrix}.$$

10. Obliczenie błędów średnich wyrównanych obserwacji

Wyrównana wartość obserwacji L_i jest funkcją niewiadomych, której współczynniki tworzą i -ty wiersz krakowianu $\mathbf{a}$. Na podstawie wzoru (5.28) możemy napisać

$$m_{L_i} = m_0 \sqrt{(\tau K_{(i)}^m \mathbf{a})^2}, \quad i = 1, 2 \dots n. \quad (5.30)$$

Błąd średni wyrównanej wartości obserwacji L_i równa się zatem błędowi średniemu pojedynczego spostrzeżenia m_0 pomnożonemu przez pier-

wiastek z sumy kwadratów elementów i -tego wiersza krakowianu a po m -tym przekształceiu.

Inną postać wzoru (5.30) otrzymamy stosując pojęcie krakowianu transformującego $t_{i/v}$. Przedstawiając krakowianowo wyrównane wartości obserwacji jako funkcje niewiadomych napiszemy:

$$\mathbf{x} \cdot \tau \mathbf{a} = \mathbf{v} - \mathbf{l} = \mathbf{l} (t_{i/v} - \tau),$$

Wynika stąd, że

$$\begin{aligned} m_{L_i} &= m_0 \sqrt{[(t_{i/v} - \tau)_i]^2} = \\ &= m_0 \sqrt{[-\tau \mathbf{a} \cdot (\mathbf{a}^2)^{-1} \cdot \tau \mathbf{a}]_{ii}^2} = \\ &= m_0 \sqrt{[(\tau \mathbf{a} \cdot (\mathbf{a}^2)^{-1} \tau \mathbf{a})^2]_{ii}}. \end{aligned}$$

Ponieważ $[\tau \mathbf{a} (\mathbf{a}^2)^{-1} \tau \mathbf{a}]^2 = \tau \mathbf{a} \cdot (\mathbf{a}^2)^{-1} \cdot \tau \mathbf{a}$, to

$$m_{L_i} = m_0 \sqrt{(\tau \mathbf{a} \cdot (\mathbf{a}^2)^{-1} \tau \mathbf{a})_{ii}} = m_0 \sqrt{1 - (t_{i/v})_{ii}} \quad (5.31)$$

Powyższy wzór wskazuje na istotne znaczenie krakowianu $t_{i/v}$. Uwzględniając (5.14) otrzymamy ostatecznie

$$m_{L_i} = m_0 \sqrt{1 - K_{\tau i i}^m \mathbf{P}} \quad (5.32)$$

11. Obliczenie błędów średnich funkcji wyrównanych obserwacji

Błąd średni funkcji wyrównanych obserwacji

$$F_p = \varrho'_1 (v_1 - l_1) + \varrho'_2 (v_2 - l_2) + \dots + \varrho'_n (v_n - l_n) + \Phi_p^{\text{przyb1}}, \quad \varrho = \alpha \beta \dots \omega,$$

wyraża się wzorem

$$m_F = m_0 \sqrt{[(t'_{i/F})_p]^2} = m_0 \sqrt{(K_{B_p}^m \mathbf{P} - \mathbf{B}_p)^2}, \quad (5.33)$$

gdzie

$$\mathbf{P} = \{\mathbf{a} \mathbf{B}\}.$$

Słuszność tego wzoru nietrudno jest sprawdzić opierając się na wzorze (5.26).

Zestawimy teraz tabelę przedstawiającą w zwarty sposób podstawowe wzory metody spostrzeżeń pośrednich. Przy każdym wzorze podamy bloki części głównej $\mathbf{X}$, $\mathbf{X}'$ i części podrzędnej $\mathbf{Y}$, $\mathbf{Y}'$ krakowianu danych początkowych

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \mathbf{X} & \mathbf{X}' \\ \mathbf{Y} & \mathbf{Y}' \end{pmatrix}.$$

L.p.	Nr wzoru	Wzór	Bloki krakowianu $\mathbf{P}$			
			$\mathbf{X}$	$\mathbf{X}'$	$\mathbf{Y}$	$\mathbf{Y}'$
1	(5.7)	$\mathbf{v} = K_1^m \mathbf{P}$	$\mathbf{a}$	$\mathbf{l}$		
2	(5.8)	$\mathbf{v} = K_s^m \mathbf{P}$	$\mathbf{a}$	∞		
3	(5.9)	$\mathbf{f} = K_z^m \mathbf{P}$	$\mathbf{a}$	$\mathbf{l}$	$\mathbf{b}$	φ
4	(5.10)	$\mathbf{f} = K_z^m \mathbf{P}$	$\mathbf{a}$	$\mathbf{s}$	$\mathbf{b}$	σ
5	(5.12)	$\mathbf{x} = K_0^w \mathbf{P}$	$\mathbf{a}$	$\mathbf{l}$	τ	$\mathbf{0}$
6	(5.13)	$\mathbf{x} = K_1^m \mathbf{P}$	$\mathbf{a}$	$\mathbf{s}$	τ	$\mathbf{1}$
7	(5.14)	$\mathbf{t}_{l/v} = K_z^m \mathbf{P}$	$\mathbf{a}$	τ		
8	(5.15)	$\mathbf{t}_{l/x} = \tau K_0^m \mathbf{P}$	$\mathbf{a}$	τ	τ	$\mathbf{0}$
9	(5.19)	$\mathbf{t}_{l/x} = -K_a^m \mathbf{P}_w K_z^m \mathbf{P}$	$\mathbf{a}$		τ	
10	(5.22)	$\mathbf{t}_{l/f} = \tau K_0^m \mathbf{P}$	$\mathbf{a}$	τ	$\mathbf{b}$	$\mathbf{0}$
11	(5.23)	$\mathbf{t}_{l/f} = -K_a^m \mathbf{P}_w K_b^m \mathbf{P}$	$\mathbf{a}$		$\mathbf{b}$	
12	(5.25)	$\mathbf{t}_{l/F} = K_B^m \mathbf{P}$	$\mathbf{a}$	$\mathbf{B}$		
13	(5.28)	$m_{f_j} = m_0 \sqrt{(\tau K_{b(j)}^m \mathbf{P})^2}$	$\mathbf{a}$		$\mathbf{b}$	
14	(5.29)	$m_{x_k} = m_0 \sqrt{(\tau K_{\tau(k)}^m \mathbf{P})^2}$	$\mathbf{a}$		τ	
15	(5.30)	$m_{L_i} = m_0 \sqrt{(K_{(i)}^m \mathbf{a})^2}$	$\mathbf{a}$			
16	(5.33)	$m_{F_p} = m_0 \sqrt{(K_{B_p}^m \mathbf{P} - \mathbf{B}_p)^2}$	$\mathbf{a}$	$\mathbf{B}$		

Przykład 3. Dany jest układ równań poprawek

$$\begin{aligned}
 -x_a + x_b + x_c + 2 &= v_1, \\
 2x_a - 4 &= v_2, \\
 3x_a - 2x_b - x_c - 3 &= v_3, \\
 x_a - x_b - x_c + 4 &= v_4, \\
 x_a + x_c - 1 &= v_5, \\
 x_b + x_c &= v_6, \\
 x_b - x_c + 4 &= v_7.
 \end{aligned}$$

Należy obliczyć:

- poprawki v ,
- wartości funkcji niewiadomych:

$$\begin{aligned}
 f_1 &= x_a - 2x_b + 4x_c + 2, \\
 f_2 &= x_a, \\
 f_3 &= x_b,
 \end{aligned}$$

- błędy średnie:

$$m_{f_1}, m_{x_b}, m_{L_1},$$

- krakowian transformujący wyrazy wolne $\mathbf{l}$ na funkcje niewiadomych f_1 i f_2 .

Dla wykonania tych obliczeń zestawimy krakowian

$$\mathbf{P} = K^0 \mathbf{P} = \begin{Bmatrix} a & 1 & s \\ b & \varphi & \sigma \end{Bmatrix} = \left\{ \begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 1 & 2 & 3 & \\ 2 & 0 & 0 & -4 & -2 & \\ 3 & -2 & -1 & -3 & -3 & \\ 1 & -1 & -1 & 4 & 3 & \\ 1 & 0 & 1 & -1 & 1 & \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 & \\ 0 & 1 & -1 & 4 & 4 & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\ 1 & -2 & 4 & 2 & 5 & \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & \end{array} \right\}.$$

Stosując wzór (3.2) utworzymy kolejno krakowiany $K^1 \mathbf{P}$, $K^2 \mathbf{P}$, $K^3 \mathbf{P}$. Współczynniki $K_{ai}^i \mathbf{P} \cdot K_{aj}^{i-1} \mathbf{P}$ będziemy pisali ponad kolumnami obliczającymi $K_j^i \mathbf{P}$.

$$K^1 \mathbf{P} = \left\{ \begin{array}{ccc|cc} & -2 & -1 & -4 & -3 \\ -0,25 & 0,50 & 0,75 & 1 & 2,25 \\ 0,50 & 1 & 0,50 & -2 & -0,50 \\ 0,75 & -0,50 & -0,25 & 0 & -0,75 \\ 0,25 & -0,50 & -0,75 & 5 & 3,75 \\ 0,25 & 0,50 & 1,25 & 0 & 1,75 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 4 & 4 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0,25 & -1,50 & 4,25 & 3 & 5,75 \\ 0,25 & 0,50 & 0,25 & 1 & 1,75 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right\}$$

$$\sqrt{(K_{a2}^1 \mathbf{P})^2} = 2$$

$$K^2 \mathbf{P} = \left\{ \begin{array}{ccc|cc} & 1 & 0 & 3 \\ -0,25 & 0,25 & 0,50 & 1 & 1,50 \\ 0,50 & 0,50 & 0 & -2 & -2 \\ 0,75 & -0,25 & 0 & 0 & 0 \\ 0,25 & -0,25 & -0,50 & 5 & 4,50 \\ 0,25 & 0,25 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0,50 & 0,50 & 0 & 0,50 \\ 0 & 0,50 & -1,50 & 4 & 2,50 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0,25 & -0,75 & 5 & 3 & 8 \\ 0,25 & 0,25 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0,50 & -0,50 & 0 & -0,50 \end{array} \right\}$$

$$\sqrt{(K_{a3}^2 \mathbf{P})^2} = 2$$

$$K^3 \mathbf{P} = \left(\begin{array}{ccc|cc} & & & -4 & -2 \\ -0,25 & 0,25 & 0,25 & 2 & 2 \\ 0,50 & 0,50 & 0 & -2 & -2 \\ 0,75 & -0,25 & 0 & 0 & 0 \\ 0,25 & -0,25 & -0,25 & 4 & 4 \\ 0,25 & 0,25 & 0,50 & 2 & 2 \\ 0 & 0,50 & 0,25 & 1 & 1 \\ 0 & 0,50 & -0,75 & 1 & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0,25 & -0,75 & 2,50 & 13 & 13 \\ 0,25 & 0,25 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0,50 & -0,25 & -1 & -1 \end{array} \right)$$

W ten sposób otrzymaliśmy z kontrolą zarówno poprawki jak i funkcje niewiadomych:

$$\begin{array}{ll} v_1 = 2, & f_1 = 13, \\ v_2 = -2, & f_2 = x_a = 1, \\ v_3 = 0, & f_3 = x_b = -1. \\ v_4 = 4, \\ v_5 = 2, \\ v_6 = 1, \\ v_7 = 1, \end{array}$$

Mnożąc błąd średni pojedynczego spostrzeżenia

$$m_0 = \sqrt{\frac{[vv]}{n-m}} = \sqrt{\frac{30}{4}} = 2,7$$

przez pierwiastki z kwadratów odpowiednich wierszy obliczymy poszukiwane błędy średnie:

$$m_{f_1} = 2,7 \sqrt{(0,25)^2 + (-0,75)^2 + (2,50)^2} = 7,1,$$

$$m_{x_b} = 2,7 \sqrt{(0,50)^2 + (-0,25)^2} = 1,5,$$

$$m_{L_1} = 2,7 \sqrt{(-0,25)^2 + (0,25)^2 + (0,25)^2} = 1,2.$$

Realizując wzór (5.23) obliczymy krakowian transformujący wyrazy wolne na funkcje niewiadomych f_1 i f_2 ; i -ty wiersz tego krakowianu otrzymujemy mnożąc i -ty wiersz bloku $K_a^3 \mathbf{P}$ przez pierwsze dwa wiersze bloku $K_b^3 \mathbf{P}$.

$$t_{i/f} = \left(\begin{array}{cc} 0,375 & 0 \\ -0,250 & 0,250 \\ 0,375 & 0,125 \\ -0,375 & 0 \\ 1,125 & 0,125 \\ 0,250 & 0,125 \\ -2,250 & 0,125 \end{array} \right)$$

Dla kontroli poprawności obliczenia krakowianu $\mathbf{t}_{l/f}$ obliczymy przy jego użyciu wartości f_1 i $f_2 = x_a$, podstawiając za l wartości dane w tym zadaniu.

$$\begin{pmatrix} f_1 \\ x_a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -3 \\ 4 \\ -1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,375 & 0 \\ -0,250 & 0,250 \\ 0,375 & 0,125 \\ -0,375 & 0 \\ 1,125 & 0,125 \\ 0,250 & 0,125 \\ -2,250 & 0,125 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Przykład 4. Obliczyć krakowiany transformujące $\mathbf{t}_{l/v}$ i $\mathbf{t}_{l/x}$ na podstawie podanego poniżej krakowianu współczynników w równaniach poprawek:

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & -4 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Zestawiamy krakowian

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \mathbf{a} & \boldsymbol{\tau} \\ \boldsymbol{\tau} & \mathbf{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

i stosując wzór (5.16) przy $m = 3$ obliczamy

$$\begin{aligned} \mathbf{K}^3 \mathbf{P} &= \\ = \begin{pmatrix} \tau(\sqrt{\mathbf{a}^2})^{-1} & \boldsymbol{\tau} \mathbf{a} & \mathbf{t}_{l/v} \\ \tau(\sqrt{\mathbf{a}^2})^{-1} & \boldsymbol{\tau} \mathbf{t}_{l/x} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0,50 & 0 & 0,50 & 0,50 & 0 & 0,50 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0,50 & 0 & -0,50 & 0,50 & 0 & 0,50 & 0 & 0 \\ -0,50 & 0 & 0,50 & 0 & 0 & 0 & 0,50 & 0,50 \\ 0,50 & 0 & -0,50 & 0 & 0 & 0 & 0,50 & 0,50 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0,50 & 0,25 & 0,50 & -0,50 & -0,25 & 0,50 & 0 & 0 \\ 0 & 0,25 & 1 & -0,50 & -0,25 & 0,50 & -0,50 & 0,50 \\ 0 & 0 & 1 & -0,50 & 0 & 0,50 & -0,50 & 0,50 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Mamy zatem:

$$\mathbf{t}_{l/v} = \begin{Bmatrix} 0,50 & 0 & 0,50 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,50 & 0 & 0,50 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,50 & 0,50 \\ 0 & 0 & 0 & 0,50 & 0,50 \end{Bmatrix},$$

$$\mathbf{t}_{l/x} = \begin{Bmatrix} -0,50 & -0,50 & -0,50 \\ -0,25 & -0,25 & 0 \\ 0,50 & 0,50 & 0,50 \\ 0 & -0,50 & -0,50 \\ 0 & 0,50 & 0,50 \end{Bmatrix}.$$

Przykład 5. Dany jest układ równań poprawek v_i niejednakowo dokładnych obserwacji o błędach średnich m_i :

$$\begin{aligned} v_1 &= 0,8x - 3y - 8, & m_1 &= 1, \\ v_2 &= 1,2x - 2y - 2, & m_2 &= 2, \\ v_3 &= \sqrt{3}y, & m_3 &= 1. \end{aligned}$$

Obliczyć poprawki stosując wzory (5.7) i (5.8).

Na wstępie zrównoważymy podany układ dzieląc obustronnie równania poprawek przez błędy średnie obserwacji. Uzyskane w ten sposób współczynniki, wyrazy wolne i niezbędne dla realizacji wzoru (5.8) wyrazy sumowe są elementami krakowianu danych początkowych $\mathbf{P}$:

$$\mathbf{P} = K^0 \mathbf{P} = \{ \mathbf{a} \quad \mathbf{l} \quad \mathbf{s} \} = \left\{ \begin{array}{ccc|ccc} 0,8 & -3 & & -8 & & -10,2 \\ 0,6 & -1 & & -1 & & -1,4 \\ 0 & \sqrt{3} & & 0 & & \sqrt{3} \end{array} \right\}.$$

$$\sqrt{(K_{a1}^0 \mathbf{P})^2} = 1$$

Obliczamy kolejno:

$$K^1 \mathbf{P} = \left\{ \begin{array}{ccc|ccc} & -3 & -7 & -9 & & \\ 0,8 & -0,6 & & -2,4 & & -3 \\ 0,6 & 0,8 & & 3,2 & & 4 \\ 0 & \sqrt{3} & & 0 & & \sqrt{3} \end{array} \right\}$$

$$\sqrt{(K_{a2}^1 \mathbf{P})^2} = 2$$

$$K \mathbf{P} = \left\{ \begin{array}{ccc|ccc} & & & 2 & & 4 \\ 0,8 & -0,3 & & -1,8 & & -1,8 \\ 0,6 & 0,4 & & 2,4 & & 2,4 \\ 0 & 0,5\sqrt{3} & & -\sqrt{3} & & -\sqrt{3} \end{array} \right\}$$

Ostatnie dwie kolumny zawierają stosunki poprawek do błędów średnich $\frac{v_i}{m_i}$. Wobec tego poprawki v_i wynoszą:

$$\begin{aligned}v_1 &= -1,8 \\v_2 &= 4,8 \\v_3 &= -\sqrt{3}\end{aligned}$$

Przykład 6. Dany jest układ równań poprawek v_i niejednakowo dokładnych obserwacji o błędach średnich m_i :

$$\begin{aligned}v_1 &= 0,8x - 3y + l_1, & m_1 &= 1, \\v_2 &= 1,2x - 2y + l_2, & m_2 &= 2, \\v_3 &= \sqrt{3}y + l_3, & m_3 &= 1.\end{aligned}$$

Obliczyć błąd średni funkcji wyrównanych obserwacji

$$F = -3(v_1 - l_1) + (v_2 - l_2) + \Phi_{\text{przybl.}}$$

Zadanie to rozwiążemy dwiema metodami.

Rozwiązanie 1. Równoważąc podany układ otrzymujemy:

$$\begin{aligned}v_1 - l_1 &= 0,8x - 3y, \\ \frac{v_2 - l_2}{2} &= 0,6x - y, \\ v_3 - l_3 &= \sqrt{3}y, \\ F &= -3(v_1 - l_1) + 2\frac{v_2 - l_2}{2} + \Phi_{\text{przybl.}}\end{aligned}$$

Aby zrealizować wzór (5.31), który w naszym przypadku przybiera postać

$$m_F = m_0 \sqrt{(K_B^2 \mathbf{P} - \mathbf{B})^2}.$$

zestawimy krakowian danych początkowych

$$\mathbf{P} = \{\mathbf{a} \ \mathbf{B}\} = \left\{ \begin{array}{cc|c} 0,8 & -3 & -3 \\ 0,6 & -1 & 2 \\ 0 & \sqrt{3} & 0 \end{array} \right\},$$

i obliczymy

$$K^2 \mathbf{P} = \left\{ \begin{array}{cc|c} 0,8 - 0,3 & & -1,53 \\ 0,6 & 0,4 & 2,04 \\ 0 & 0,5\sqrt{3} & -0,85\sqrt{3} \end{array} \right\}$$

oraz

$$K_B^2 \mathbf{P} - \mathbf{B} = \left\{ \begin{array}{c} 1,47 \\ 0,04 \\ -0,85\sqrt{3} \end{array} \right\}.$$

Mamy zatem

$$m_F = m_0 \sqrt{(1,47)^2 + (0,04)^2 + (-0,85 \sqrt{3})^2} = m_0 \sqrt{4,33}.$$

Rozwiązanie 2. Podstawiając do funkcji F wyrażenia

$$\begin{aligned} v_1 - l_1 &= 0,8x - 3y, \\ v_2 - l_2 &= 1,2x - 2y, \end{aligned}$$

otrzymamy funkcję niewiadomych:

$$\begin{aligned} F &= -3(0,8x - 3y) + 1,2x - 2y + \Phi_{\text{przybl.}} = \\ &= -1,2x + 7y + \Phi_{\text{przybl.}}, \end{aligned}$$

której błąd średni możemy obliczyć na podstawie wzoru (5.28).

Utworzymy najpierw krakowian danych początkowych

$$\mathbf{P} = \begin{Bmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0,8 & -3 \\ 0,6 & -1 \\ 0 & \sqrt{3} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -1,2 & 7 \end{Bmatrix}.$$

Po wykonaniu dwukrotnego przekształcenia otrzymujemy

$$\mathbf{K}^2 \mathbf{P} = \begin{Bmatrix} 0,8 & -0,3 \\ 0,6 & 0,4 \\ 0 & 0,5\sqrt{3} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -1,2 & 1,7 \end{Bmatrix}$$

oraz

$$m_F = m_0 \sqrt{(\tau \mathbf{K}_b^2 \mathbf{P})^2} = m_0 \sqrt{(-1,2)^2 + (1,7)^2} = m_0 \sqrt{4,33}.$$

6. Zastosowanie algorytmu K w metodzie spostrzeżeń zawarunkowanych

Punktem wyjścia w metodzie spostrzeżeń zawarunkowanych są równania warunkowe. Układ tych równań może być traktowany jako układ funkcji (5.3) lub (5.4), których wartości są znane a priori. Tak więc, przez analogię do układów (5.3) i (5.4) układ równań warunkowych zapiszemy w postaci

$$\begin{aligned} a'_1 v_1 + a'_2 v_2 + \dots + a'_n v_n + \Delta_a^{\text{obs.}} &= 0, \\ b'_1 v_1 + b'_2 v_2 + \dots + b'_n v_n + \Delta_b^{\text{obs.}} &= 0, \\ \dots & \dots \dots \\ w'_1 v_1 + w'_2 v_2 + \dots + w'_n v_n + \Delta_w^{\text{obs.}} &= 0, \end{aligned} \tag{6.1}$$

gdzie $\Delta_r^{\text{obs.}}$ ($r = a, b \dots w$) jest wyrazem wolnym obliczonym na podstawie wartości zaobserwowanych, lub też w postaci

$$\begin{aligned} a'_1(v_1 - l_1) + a'_2(v_2 - l_2) + \dots + a'_n(v_n - l_n) + \Delta_a^{\text{przybl.}} &= 0, \\ b'_1(v_1 - l_1) + b'_2(v_2 - l_2) + \dots + b'_n(v_n - l_n) + \Delta_b^{\text{przybl.}} &= 0, \\ \dots &\dots \dots \\ w'_1(v_1 - l_1) + w'_2(v_2 - l_2) + \dots + w'_n(v_n - l_n) + \Delta_w^{\text{przybl.}} &= 0, \end{aligned} \quad (6.2)$$

gdzie $\Delta_r^{\text{przybl.}}$ jest wyrazem wolnym obliczonym na podstawie przybliżonych wartości obserwacji, zaś l_i — wyrazem wolnym równania poprawki i -tej obserwacji: $l_i = L_i^{\text{przybl.}} - L_i^{\text{obs.}}$. Ponieważ wartości przybliżone obserwacji są tak obliczane, że spełniają równania warunkowe, to $\Delta_r^{\text{przybl.}} = 0$, zaś układ (6.2) przybiera kształt następujący

$$\begin{aligned} a'_1(v_1 - l_1) + a'_2(v_2 - l_2) + \dots + a'_n(v_n - l_n) &= 0, \\ b'_1(v_1 - l_1) + b'_2(v_2 - l_2) + \dots + b'_n(v_n - l_n) &= 0, \\ \dots &\dots \dots \\ w'_1(v_1 - l_1) + w'_2(v_2 - l_2) + \dots + w'_n(v_n - l_n) &= 0. \end{aligned} \quad (6.3)$$

W przypadku, gdy obserwacje są niejednakowo dokładne, odpowiadający im układ równań warunkowych oraz układ funkcji obserwacji należy przekształcić, wyznaczając współczynniki przy poprawkach przez błędy średnie.

Układy (6.1), (6.3) krakowianowo będziemy przedstawiali pisząc

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{A} + \Delta = 0, \quad (6.4)$$

$$(\mathbf{v} - \mathbf{l}) \cdot \mathbf{A} = 0, \quad (6.5)$$

gdzie $\mathbf{v}$ i $\mathbf{l}$ są jednokolumnowymi krakowianami poprawek i wyrazów wolnych, zaś

$$\mathbf{A} = \begin{Bmatrix} a'_1 & b'_1 & \dots & w'_1 \\ a'_2 & b'_2 & \dots & w'_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a'_n & b'_n & \dots & w'_n \end{Bmatrix}, \quad \Delta = \begin{Bmatrix} \Delta_a^{\text{obs.}} \\ \Delta_b^{\text{obs.}} \\ \vdots \\ \Delta_w^{\text{obs.}} \end{Bmatrix}.$$

Przedstawimy teraz podstawowe wzory metody spostrzeżeń zawarunkowanych w ujęciu algorytmu K . Krakowian przekształcany będziemy tu oznaczać literą $\mathbf{Z}$, dla odróżnienia od metody spostrzeżeń pośrednich, w której analogiczny krakowian oznaczaliśmy literą $\mathbf{P}$.

1. Obliczenie poprawek v

Zestawimy krakowian $\mathbf{Z}$, którego część główną stanowi krakowian współczynników w równaniach warunkowych $\mathbf{A}$, zaś część podrzędną wiersz wyrazów wolnych tych równań $\tau\Delta$

$$\mathbf{Z} = \begin{Bmatrix} \mathbf{A} \\ \tau\Delta \end{Bmatrix}.$$

Przekształcając ten krakowian w razy (w — liczba równań warunkowych) obliczymy

$$K^w \mathbf{Z} = \begin{Bmatrix} K_A^w \mathbf{Z} \\ K_{\tau\Delta}^w \mathbf{Z} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \tau(\sqrt{\mathbf{A}^2})^{-1} \cdot \tau \mathbf{A} \\ \tau(\sqrt{\mathbf{A}^2})^{-1} \cdot \Delta \end{Bmatrix}.$$

Poprawka i -tej obserwacji v_i równa się zaopatrzonemu w znak minus iloczynowi i -tego wiersza bloku $K_A^w \mathbf{Z}$ oraz wiersza $K_{\tau\Delta}^w \mathbf{Z}$, co zapiszemy w postaci

$$\mathbf{v} = -K_A^w \mathbf{Z} w K_{\tau\Delta}^w \mathbf{Z}. \quad (6.6)$$

Rzeczywiście, opierając się na dobrze znanym z literatury wzorze [2], który przy przyjętych oznaczeniach przybiera postać

$$\mathbf{v} = -\Delta \cdot [\tau \mathbf{A} \cdot (\mathbf{A}^2)^{-1}], \quad (6.7)$$

łatwo uzyskamy:

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= -\Delta [\tau \mathbf{A} \tau (\sqrt{\mathbf{A}^2})^{-1} \cdot (\sqrt{\mathbf{A}^2})^{-1}] = \\ &= -[\Delta \tau (\sqrt{\mathbf{A}^2})^{-1}] \cdot [\tau \mathbf{A} \cdot \tau (\sqrt{\mathbf{A}^2})^{-1}] = \\ &= -\tau K_{\tau\Delta}^w \mathbf{Z} \cdot \tau K_A^w \mathbf{Z} = \\ &= -K_A^w \mathbf{Z} w K_{\tau\Delta}^w \mathbf{Z}. \end{aligned}$$

2. Obliczenie $[vv]$

Suma kwadratów poprawek obserwacyjnych równa się sumie kwadratów elementów jednowierszowego krakowianu $K_{\tau\Delta}^w \mathbf{Z}$:

$$[vv] = (\tau K_{\tau\Delta}^w \mathbf{Z})^2 \quad (6.8)$$

gdzie

$$\mathbf{Z} = \begin{Bmatrix} \mathbf{A} \\ \tau \Delta \end{Bmatrix}.$$

Wzór ten łatwo wyprowadzimy podnosząc do kwadratu krakowian $\mathbf{v}$ (6.7):

$$\begin{aligned} [vv] &= (K_A^w \mathbf{Z} w K_{\tau\Delta}^w \mathbf{Z})^2 = \\ &= (\tau K_{\tau\Delta}^w \mathbf{Z} \cdot \tau K_A^w \mathbf{Z})^2 = \\ &= \tau K_{\tau\Delta}^w \mathbf{Z} \cdot (K_A^w \mathbf{Z})^2 \cdot \tau K_{\tau\Delta}^w \mathbf{Z}. \end{aligned}$$

Pamiętając o tym, że $(K_A^w \mathbf{Z})^2 = (K^w \mathbf{A})^2 = \tau$ otrzymamy:

$$[vv] = \tau K_{\tau\Delta}^w \mathbf{Z} \cdot \tau K_{\tau\Delta}^w \mathbf{Z} = (\tau K_{\tau\Delta}^w \mathbf{Z})^2.$$

3. Obliczenie krakowianu transformującego $t_{l/v}$

Sposób obliczenia krakowianu transformującego wyrazy wolne l na poprawki v podany już został dla metody spostrzeżeń pośrednich. Obecnie wyprowadzimy analogiczne wzory dla metody spostrzeżeń zawarunkowanych.

Wychodząc z układu (6.5) możemy napisać

$$v \cdot A - l \cdot A = 0,$$

zaś uwzględniając (6.4) otrzymamy

$$\Delta = -l \cdot A.$$

Po podstawieniu Δ do wzoru (6.7) będziemy mieli:

$$\begin{aligned} v &= l \cdot A \cdot [\tau A \cdot (A^2)^{-1}] = \\ &= l \cdot [\tau A \cdot (A^2)^{-1} \cdot \tau A] = \\ &= l \cdot t_{l/v}, \end{aligned}$$

gdzie

$$t_{l/v} = \tau A \cdot (A^2)^{-1} \cdot \tau A \quad (6.9)$$

jest krakowianem transformującym wyrazy wolne na poprawki. Porównując wzór (6.9) z wzorem

$$t_{l/v} = \tau - \tau a \cdot (a^2)^{-1} \cdot \tau a$$

wyprowadzonym uprzednio dla metody spostrzeżeń pośrednich otrzymamy ciekawy związek *) pomiędzy krakowianami współczynników a i A tego samego układu obserwacyjnego:

$$\tau A \cdot (A^2)^{-1} \cdot \tau A + \tau a \cdot (a^2)^{-1} \cdot \tau a = \tau, \quad (6.10)$$

*) Związek ten nie jest zresztą jedyny. Najprostszy, a przy tym nie pozbawiony wartości praktycznych (np. w obliczeniach kontrolnych) jest związek podany przez prof. dra St. Hausbrandta:

$$A \cdot a = 0,$$

który łatwo wyprowadzimy, mnożąc obustronnie układ równań poprawek

$$v = x \tau a + l$$

przez krakowian A :

$$\begin{aligned} v \cdot A &= x \cdot \tau a \cdot A + l \cdot A = \\ &= x \cdot (A \cdot a) + l \cdot A. \end{aligned}$$

Po przekształceniu otrzymujemy

$$(v - l) \cdot A = x \cdot (A \cdot a).$$

Z drugiej strony, uwzględniając zapis (6.5) układu równań warunkowych mamy

$$(v - l) \cdot A = 0.$$

Widać stąd, że dla dowolnych x ma być $x \cdot (A \cdot a) = 0$, co może zachodzić tylko wówczas, gdy $A \cdot a = 0$.

gdzie

$\mathbf{a}$ — krakowian współczynników w równaniach poprawek,
 $\mathbf{A}$ — krakowian współczynników w równaniach warunkowych.

Łatwo sprawdzić, że

$$\mathbf{t}_{l/v} = \tau - K_{\tau}^w \mathbf{Z}, \quad (6.11)$$

gdzie $\mathbf{Z} = \{\mathbf{A} \ \tau\}$.

Mamy tu bowiem

$$K_{\tau}^w \mathbf{Z} = \tau - \tau \mathbf{A} \cdot (\mathbf{A}^2)^{-1} \cdot \tau \mathbf{A},$$

skąd wynika, że

$$\mathbf{t}_{l/v} = \tau \mathbf{A} \cdot (\mathbf{A}^2)^{-1} \cdot \tau \mathbf{A} = \tau - K_{\tau}^w \mathbf{Z}.$$

Podamy jeszcze jeden wzór na obliczenie krakowianu $\mathbf{t}_{l/v}$:

$$\mathbf{t}_{l/v} = \tau \mathbf{A} \cdot (\mathbf{A}^2)^{-1} \cdot \tau \mathbf{A} = [\tau \mathbf{A} \cdot \tau (\sqrt{\mathbf{A}^2})^{-1}]^2 = [\tau K^w \mathbf{A}]^2. \quad (6.12)$$

4. Obliczenie krakowianu transformującego $\mathbf{t}_{l/F}$

Podstawiając do układu funkcji wyrównanych obserwacji (5.5) $\mathbf{v} = \mathbf{l} \cdot \mathbf{t}_{l/v}$ otrzymamy:

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \mathbf{v} \cdot \mathbf{B} + \Phi^{\text{obs.}} = \\ &= \mathbf{l} \cdot \mathbf{t}_{l/v} \cdot \mathbf{B} + \Phi^{\text{obs.}} = \\ &= \mathbf{l} (\mathbf{B} \cdot \tau \mathbf{t}_{l/v}) + \Phi^{\text{obs.}} = \\ &= \mathbf{l} \{ \mathbf{B} \cdot [\tau \mathbf{A} \cdot (\mathbf{A}^2)^{-1} \cdot \tau \mathbf{A}] \} + \Phi^{\text{obs.}} = \\ &= \mathbf{l} \cdot \mathbf{t}_{l/F} + \Phi^{\text{obs.}}, \end{aligned}$$

gdzie

$$\mathbf{t}_{l/F} = \mathbf{B} \cdot [\tau \mathbf{A} \cdot (\mathbf{A}^2)^{-1} \cdot \tau \mathbf{A}] \quad (6.13)$$

jest krakowianem transformującym wyrazy wolne $\mathbf{l}$ na funkcje wyrównanych obserwacji $\mathbf{F}$, przy założeniu, że wartości przybliżone funkcji $\Phi^{\text{obs.}}$ obliczone są na podstawie wartości obserwowanych.

Opierając się na wzorze (4.7) możemy przedstawić krakowian $\mathbf{t}_{l/F}$ w następujący sposób:

$$\mathbf{t}_{l/F} = \mathbf{B} - K_{\mathbf{B}}^w \mathbf{Z}. \quad (6.14)$$

gdzie $\mathbf{Z} = \{\mathbf{A} \ \mathbf{B}\}$.

W przypadku, gdy dane są wartości przybliżone funkcji $\Phi^{\text{przybl.}}$ (5.6) wzory powyższe przybierają odpowiednio postać:

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \mathbf{l} \cdot \mathbf{t}'_{l/F} + \Phi^{\text{przybl.}}, \\ \mathbf{t}'_{l/F} &= \mathbf{B} \cdot [\tau \mathbf{A} \cdot (\mathbf{A}^2)^{-1} \cdot \tau \mathbf{A}] - \mathbf{B} = \\ &= -K_{\mathbf{B}}^w \mathbf{Z}. \end{aligned} \quad (6.15)$$

5. Obliczenie krakowianu transformującego $t_{\Delta/F}$

Krakowian $t_{\Delta/F}$ transformujący wyrazy wolne równań warunkowych Δ na funkcje wyrównanych obserwacji

$$\mathbf{F} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{B} + \Phi^{\text{obs.}}$$

łatwo można wyznaczyć podstawiając do układu tych funkcji

$$\mathbf{v} = -\Delta \cdot [\tau \mathbf{A} \cdot (\mathbf{A}^2)^{-1}].$$

Otrzymamy wówczas:

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= -\Delta \cdot [\tau \mathbf{A} \cdot (\mathbf{A}^2)^{-1}] \cdot \mathbf{B} + \Phi^{\text{obs.}} = \\ &= -\Delta \cdot \{ \mathbf{B} \cdot [(\mathbf{A}^2)^{-1} \cdot \tau \mathbf{A}] \} + \Phi^{\text{obs.}} = \\ &= \Delta \cdot t_{\Delta/F} + \Phi^{\text{obs.}}, \end{aligned}$$

gdzie

$$t_{\Delta/F} = -\mathbf{B} \cdot [(\mathbf{A}^2)^{-1} \cdot \tau \mathbf{A}]. \quad (6.16)$$

Krakowian transformujący $t_{\Delta/F}$ może być przedstawiony wzorem

$$t_{\Delta/F} = K_0^w \mathbf{Z}, \quad (6.17)$$

gdzie

$$\mathbf{Z} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \tau & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

Obliczenie krakowianu $t_{\Delta/F}$ według powyższego wzoru wiąże się z obliczeniem krakowianu $t_{l/F}$, ponieważ mamy tu

$$K^w \mathbf{Z} = \begin{pmatrix} \tau(\sqrt{\mathbf{A}^2})^{-1} \cdot \tau \mathbf{A} & \mathbf{B} - t_{l/F} \\ \tau(\sqrt{\mathbf{A}^2})^{-1} & t_{\Delta/F} \end{pmatrix} \quad (6.18)$$

6. Obliczenie krakowianu transformującego $t_{\Delta/v}$

Występujący we wzorze (6.7) krakowian $-\tau \mathbf{A}(\mathbf{A}^2)^{-1}$ jest krakowianem $t_{\Delta/v}$ transformującym wyrazy wolne Δ na poprawki $\mathbf{v}$. Krakowian ten można łatwo obliczyć realizując wzór

$$t_{\Delta/v} = -K_\tau^w \mathbf{Z}_w K_A^w \mathbf{Z}, \quad (6.19)$$

gdzie

$$\mathbf{Z} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} \\ \tau \end{pmatrix}.$$

Aby sprawdzić słuszność tego wzoru podstawimy $K_\tau^w \mathbf{Z} = \tau(\sqrt{\mathbf{A}^2})^{-1}$ oraz $K_A^w \mathbf{Z} = \tau(\sqrt{\mathbf{A}^2})^{-1} \cdot \tau \mathbf{A}$:

$$\begin{aligned} t_{\Delta/v} &= -K_\tau^w \mathbf{Z}_w K_A^w \mathbf{Z} = -\tau K_A^w \mathbf{Z} \cdot \tau K_\tau^w \mathbf{Z} = \\ &= -\tau \mathbf{A} \cdot \tau(\sqrt{\mathbf{A}^2})^{-1} \cdot (\sqrt{\mathbf{A}^2})^{-1} = -\tau \mathbf{A} \cdot (\mathbf{A}^2)^{-1}. \end{aligned}$$

7. Obliczenie funkcji wyrównanych obserwacji

Zgodnie z wzorem (6.16) możemy napisać

$$\begin{aligned}\tau \mathbf{F} &= \tau \Phi^{\text{obs.}} - \{\mathbf{B} \cdot [(\mathbf{A}^2)^{-1} \cdot \tau \mathbf{A}]\} \Delta = \\ &= \tau \Phi^{\text{obs.}} - \mathbf{B} \cdot \{\Delta \cdot [\tau \mathbf{A} \cdot (\mathbf{A}^2)^{-1}]\} = \\ &= \tau \Phi^{\text{obs.}} - \mathbf{B} \cdot \{\Delta \cdot (\mathbf{A}^2)^{-1} \cdot \tau \mathbf{A}\}.\end{aligned}$$

Porównując postać tego wzoru z wzorem ogólnym (4.8) nietrudno zauważyć, że

$$\mathbf{F} = \tau K_{\tau \Phi^{\text{obs.}}}^w \mathbf{Z}, \quad (6.20)$$

gdzie

$$\mathbf{Z} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \tau \Delta & \tau \Phi^{\text{obs.}} \end{pmatrix}.$$

W trakcie przekształcenia krakowianu $\mathbf{Z}$ obliczany jest tu również krakowian transformujący $\mathbf{t}'_{l/F}$, ponieważ

$$K^w \mathbf{Z} = \begin{pmatrix} \tau (\sqrt{\mathbf{A}^2})^{-1} \cdot \tau \mathbf{A} & -\mathbf{t}'_{l/F} \\ \tau (\sqrt{\mathbf{A}^2})^{-1} \Delta & \tau \mathbf{F} \end{pmatrix}.$$

Różnica krakowianów $\mathbf{F}$ oraz $\Phi^{\text{obs.}}$ może być uzyskana prócz tego na podstawie wzoru

$$\mathbf{F} - \Phi^{\text{obs.}} = -K_{\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}}^w \mathbf{Z}_w K_{\tau \Delta}^w \mathbf{Z}, \quad (6.21)$$

gdzie $\mathbf{Z}$ jest krakowianem o części podrzędnej utworzonej przez wiersz $\tau \Delta$ oraz blok $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$, część główną stanowi krakowian $\mathbf{A}$:

$$\mathbf{Z} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} \\ \dots \\ \tau \Delta \\ \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \end{pmatrix}.$$

Rzeczywiście, mamy tu

$$\begin{aligned}-K_{\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}}^w \mathbf{Z}_w K_{\tau \Delta}^w \mathbf{Z} &= \\ &= -\tau K_{\tau \Delta}^w \mathbf{Z} \cdot \tau K_{\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}}^w \mathbf{Z} = \\ &= -[\Delta \cdot \tau (\sqrt{\mathbf{A}^2})^{-1}] \cdot [\mathbf{B} \cdot \mathbf{A} \cdot \tau (\sqrt{\mathbf{A}^2})^{-1}] = \\ &= -\Delta \cdot [\mathbf{B} \cdot \mathbf{A} \cdot \tau (\sqrt{\mathbf{A}^2})^{-1} \cdot (\sqrt{\mathbf{A}^2})^{-1}] = \\ &= -\Delta \cdot [\mathbf{B} \cdot \mathbf{A} \cdot (\mathbf{A}^2)^{-1}] = \\ &= -\Delta \cdot \{\mathbf{B} \cdot [(\mathbf{A}^2)^{-1} \cdot \tau \mathbf{A}]\}.\end{aligned}$$

8. Obliczenie błędów średnich funkcji wyrównanych obserwacji

Błąd średni funkcji wyrównanych obserwacji F_0 równa się błędowi średniemu pojedynczego spostrzeżenia m_0 pomnożonemu przez pierwia-

stek z sumy kwadratów elementów q -tej kolumny bloku **B** w krakowianie **Z** po w -tym przekształceniu, gdzie

$$\mathbf{Z} = \{\mathbf{A}\mathbf{B}\}.$$

Mamy zatem wzór

$$m_{F_p} = m_0 \sqrt{(K_{B_p}^w \mathbf{Z})^2}, \quad (6.22)$$

którego słuszność wynika bezpośrednio z wzoru (6.15).

W pewnych przypadkach wskazane może być użycie wzoru

$$m_{F_p} = m_0 \sqrt{(\mathbf{B}_p)^2 - (\tau K_{(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})_{(p)}}^w \mathbf{Z})^2}. \quad (6.23)$$

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \end{bmatrix}.$$

Występujące pod pierwiastkiem wyrażenie jest w tym wzorze różnicą sumy kwadratów elementów q -tej kolumny krakowianu **B** i sumy kwadratów elementów q -tego wiersza iloczynu $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ po w -tym przekształceniu.

Wzór (6.23) nietrudno jest uzasadnić, opierając się na znanym w literaturze wzorze

$$m_F = m_0 \sqrt{\mathbf{f}^2 - \varphi^2},$$

który przy stosowanych w niniejszej pracy oznaczeniach może być zapisany w następującej postaci

$$m_{F_p} = m_0 \sqrt{(\mathbf{B}_p)^2 - [\mathbf{B}_p \cdot \mathbf{A} \cdot \tau (\sqrt{\mathbf{A}^2})^{-1}]^2}. \quad (6.24)$$

9. Obliczenie błędów średnich wyrównanych obserwacji

Kładąc we wzorze (6.24) $\mathbf{B} = \tau$ będziemy mogli wyprowadzić wzór na błąd średni wyrównanej obserwacji

$$\begin{aligned} m_{L_i} &= m_0 \sqrt{(\tau_i)^2 - [\tau_i \cdot \mathbf{A} \cdot \tau (\sqrt{\mathbf{A}^2})^{-1}]^2} = \\ &= m_0 \sqrt{1 - \{\tau_i \cdot [\tau (\sqrt{\mathbf{A}^2})^{-1} \cdot \tau \mathbf{A}]\}^2} = \\ &= m_0 \sqrt{1 - \{\tau [\tau (\sqrt{\mathbf{A}^2})^{-1} \cdot \tau \mathbf{A}_{(i)}]\}^2}. \end{aligned}$$

Ponieważ $\tau (\sqrt{\mathbf{A}^2})^{-1} \tau \mathbf{A} = K^w \mathbf{A}$, to

$$m_{L_i} = m_0 \sqrt{1 - (\tau K_{(i)}^w \mathbf{A})^2} \quad (6.25)$$

Tak więc, błąd średni i -tej obserwacji po wyrównaniu równa się błędowi średniemu pojedynczego spostrzeżenia m_0 pomnożonemu przez pierwiastek z wyrażenia: jedność minus suma kwadratów elementów i -tego wiersza krakowianu **A** po w -tym przekształceniu.

Opierając się na wzorach (5.31), (6.11) podamy jeszcze jedną postać powyższego wzoru:

$$m_{L_i} = m_0 \sqrt{K_{\tau i}^w Z}, \quad (6.26)$$

gdzie $Z = \{A \tau\}$.

Na zakończenie rozdziału o zastosowaniach algorytmu K w metodzie spostrzeżeń zawarunkowanych podamy zestawienie najważniejszych wzorów odnoszących się do tej metody. Podobnie jak w metodzie spostrzeżeń pośrednich obok każdego wzoru wypiszemy bloki części głównej x, x' i części podrzędnej Y, Y' krakowianu danych początkowych

$$Z = \begin{pmatrix} X & X' \\ Y & Y' \end{pmatrix}.$$

L.p.	Nr wzoru	Wzór	Bloki krakowianu Z			
			X	X'	Y	Y'
1	(6.6)	$v = -K_A^w Z_w K_{\tau \Delta}^w Z$	A		$\tau \Delta$	
2	(6.8)	$[vv] = (\tau K_{\tau \Delta}^w Z)^2$	A		$\tau \Delta$	
3	(6.11)	$t_{l/v} = \tau - K_{\tau}^w Z$	A	τ		
4	(6.12)	$t_{l/v} = (\tau K^w A)^2$	A			
5	(6.14)	$t_{l/F} = B - K_B^w Z$	A	B		
6	(6.15)	$t'_{l/F} = -K_B^w Z$	A	B		
7	(6.17)	$t_{\Delta/F} = K_0^w Z$	A	B	τ	0
8	(6.19)	$t_{\Delta/v} = -K_{\tau}^w Z_w K_A^w Z$	A		τ	
9	(6.20)	$F = \tau K_{\tau \Phi}^w \text{obs.} Z$	A	B	$\tau \Delta$	$\tau \Phi^{\text{obs.}}$
10	(6.21)	$F - \Phi^{\text{obs.}} = -K_{A \cdot B}^w Z_w K_{\tau \Delta}^w Z$	A		$\tau \Delta$	$\{A \cdot B\}$
11	(6.22)	$m_{F_p} = m_0 \sqrt{(K_B^w Z)^2}$	A	B		
12	(6.25)	$m_{L_i} = m_0 \sqrt{1 - (\tau K_{(i)}^w A)^2}$	A			
13	(6.26)	$m_{L_i} = m_0 \sqrt{K_{\tau i}^w Z}$	A			

Przykład 7. Dany jest układ równań warunkowych:

$$v_1 + v_2 + v_3 + v_4 - 6 = 0,$$

$$v_1 + v_2 - 2 = 0,$$

$$2v_2 - v_3 + v_4 - 2 = 0.$$

Należy obliczyć

a) poprawki v ,

b) wartości funkcji wyrównanych obserwacji

$$F = -v_1 + v_2 + 2v_3 + 5,$$

c) błąd średni funkcji F ,

d) błąd średni trzeciej obserwacji wyrównanej.

Poszukiwane wielkości łatwo otrzymamy, trzykrotnie przekształcając krakowian danych początkowych

$$\mathbf{Z} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \tau\Delta & \mathbf{F} \end{pmatrix}$$

Rachunek przeprowadzimy z kontrolą, dopisując na wstępie kolumnę sumową do krakowianu $\mathbf{Z}$.

$$\mathbf{Z} = K^0 \mathbf{Z} = \left\{ \begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -6 & -2 & -2 & 5 & -5 \end{array} \right\}$$

$$\sqrt{(K_{A1}^0 \mathbf{Z})^2} = 2$$

$$K^1 \mathbf{Z} = \left\{ \begin{array}{ccc|cc} & 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0,5 & 0,5 & -0,5 & -1,5 & -1,5 \\ 0,5 & 0,5 & 1,5 & 0,5 & 2,5 \\ 0,5 & -0,5 & -1,5 & 1,5 & -0,5 \\ 0,5 & -0,5 & 0,5 & -0,5 & -0,5 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -3 & 1 & 1 & 8 & 10 \end{array} \right\}$$

$$\sqrt{(K_{A2}^1 \mathbf{Z})^2} = 1$$

$$K^2 \mathbf{Z} = \left\{ \begin{array}{ccc|cc} & 1 & -1 & 1 \\ 0,5 & 0,5 & -1 & -1 & -2 \\ 0,5 & 0,5 & 1 & 1 & 2 \\ 0,5 & -0,5 & -1 & 1 & 0 \\ 0,5 & -0,5 & 1 & -1 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -3 & 1 & 0 & 9 & 9 \end{array} \right\}$$

$$\sqrt{(K_{A3}^2 \mathbf{Z})^2} = 2$$

$$K^3 \mathbf{Z} = \left\{ \begin{array}{ccc|cc} & 0 & 2 \\ 0,5 & 0,5 & -0,5 & -1 & -1 \\ 0,5 & 0,5 & 0,5 & 1 & 1 \\ 0,5 & -0,5 & -0,5 & 1 & 1 \\ 0,5 & -0,5 & 0,5 & -1 & -1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -3 & 1 & 0 & 9 & 9 \end{array} \right\}$$

Mnożąc kolejne wiersze krakowianu

$$K_A^3 \mathbf{Z} = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 & -0,5 \\ 0,5 & 0,5 & 0,5 \\ 0,5 & -0,5 & -0,5 \\ 0,5 & -0,5 & 0,5 \end{pmatrix}$$

przez wiersz

$$-K_{\tau,1}^3 \mathbf{Z} = - \{ -3 \quad 1 \quad 0 \}$$

otrzymamy poprawki v :

$$v_1 = 1,$$

$$v_2 = 1,$$

$$v_3 = 2,$$

$$v_4 = 2.$$

Suma kwadratów poprawek wynosi:

$$[vv] = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 + v_4^2 = 10,$$

co łatwo jest sprawdzić (6.8) sumując kwadraty elementów wiersza $K_{\tau,\Delta}^3 \mathbf{Z}$:

$$[vv] = (-3)^2 + (1)^2 + (0)^2 = 10.$$

Błąd średni pojedynczego spostrzeżenia równa się zatem:

$$m_0 = \sqrt{\frac{10}{3}} = 1,8.$$

Wartość funkcji F obliczyliśmy dwukrotnie (na skutek wprowadzenia kolumny sumowej) uzyskując

$$F = 9.$$

Błąd średni tej funkcji otrzymamy (6.22) mnożąc m_0 przez pierwiastek z sumy kwadratów elementów kolumny współczynników $K_B \mathbf{Z}$:

$$m_F = 1,8 \quad \sqrt{(-1)^2 + (1)^2 + (1)^2 + (-1)^2} = 3,6,$$

natomiast mnożąc m_0 (6.25) przez pierwiastek z wyrażenia: jedność minus suma kwadratów elementów trzeciego wiersza krakowianu $K_A^3 \mathbf{Z}$ otrzymamy błąd średni trzeciej obserwacji po wyrównaniu:

$$m_{L_3} = 1,8 \quad \sqrt{1 - [(0,5)^2 + (-0,5)^2 + (-0,5)^2]} = 0,9.$$

Przykład 8. Dane jest równanie warunkowe

$$1,8v_1 - 1,2v_2 + \sqrt{3}v_3 + \Delta^{\text{obs.}} = 0,$$

odnoszące się do obserwacji o błędach średnich równych odpowiednio

$$m_1 = 1,$$

$$m_2 = 2,$$

$$m_3 = 1.$$

Obliczyć błędy średnie wyrównanych obserwacji oraz błąd średni funkcji

$$F = -3v_1 + v_2 + \Phi^{\text{obs.}}$$

Utworzymy krakowian danych początkowych

$$\mathbf{Z} = \{\mathbf{A} \ \mathbf{F}\} = \left\{ \begin{array}{c|c} 1,8 & -3 \\ -2,4 & 2 \\ \hline \sqrt{3} & 0 \end{array} \right\}.$$

zawierający wymnożone przez błędy średnie współczynniki przy poprawkach w równaniu warunkowym oraz w funkcji F . Krakowian ten przekształcimy jednokrotnie ($w = 1$) uzyskując

$$K^1 \mathbf{Z} = \left\{ \begin{array}{c|c} \frac{1,8}{\sqrt{12}} & -1,47 \\ -2,4 & -0,04 \\ \hline \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{12}} & 0,85\sqrt{3} \end{array} \right\}$$

Zgodnie z wzorem (6.22) błąd średni funkcji F wynosi:

$$\begin{aligned} m_F &= m_0 \sqrt{(-1,47)^2 + (-0,04)^2 + (0,85\sqrt{3})^2} = \\ &= m_0 \sqrt{4,33}. \end{aligned}$$

Błędy średnie wyrównanych obserwacji łatwo otrzymamy, mnożąc wartości obliczone według wzoru (6.25) przez wartości m_1 , m_2 , m_3 :

$$\begin{aligned} m_{L_1} &= m_1 m_0 \sqrt{1 - \left(\frac{1,8}{\sqrt{12}}\right)^2} = m_0 \sqrt{0,73}, \\ m_{L_2} &= m_2 m_0 \sqrt{1 - \left(\frac{2,4}{\sqrt{12}}\right)^2} = m_0 \sqrt{2,08}, \\ m_{L_3} &= m_3 m_0 \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{12}}\right)^2} = m_0 \sqrt{0,75}. \end{aligned}$$

7. Zastosowanie algorytmu K do rozwiązywania układów równań liniowych

Weźmy pod uwagę układ n równań liniowych

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \dots + a_{n1}x_n + l_1 &= 0, \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{n2}x_n + l_2 &= 0, \\ \dots & \dots \dots \\ a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + \dots + a_{nn}x_n + l_n &= 0, \end{aligned}$$

który krakowianowo zapiszemy w postaci

$$\mathbf{x} \cdot \tau \mathbf{a} + \mathbf{l} = \mathbf{0}, \quad (7.1)$$

$$\mathbf{x} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{l} = \begin{Bmatrix} l_1 \\ l_2 \\ \vdots \\ l_n \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{a} = \begin{Bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{Bmatrix}.$$

Jest rzeczą oczywistą, że wzory algorytmu K podane dla metody spostrzeżeń pośrednich mogą być stosowane również do rozwiązania układu (7.1). Tworząc ze współczynników, wyrazów wolnych i elementów sumowych krakowian

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{l} & \mathbf{s} \\ \tau & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

i obliczając $K^n \mathbf{P}$ otrzymujemy bezpośrednio:

$$\mathbf{x} = K_0^n \mathbf{P}, \quad (7.2)$$

$$\mathbf{x} = K_1^n \mathbf{P}. \quad (7.3)$$

Niewiadome $\mathbf{x}$ są tu określone w sposób jednoznaczny, a w związku z tym poprawki $\mathbf{v} = \mathbf{0}$, co dostarcza dodatkowych kontroli rachunku:

$$K_1^n \mathbf{P} = \mathbf{0}, \quad (7.4)$$

$$K_s^n \mathbf{P} = \mathbf{0}. \quad (7.5)$$

Analogicznie mogą być obliczane wartości liniowych funkcji niewiadomych $\mathbf{f} = \mathbf{x} \cdot \tau \mathbf{b} + \varphi$:

$$\mathbf{f} = K_\varphi^n \mathbf{P}, \quad (7.6)$$

$$\mathbf{f} = K_\sigma^n \mathbf{P}, \quad (7.7)$$

gdzie

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{l} & \mathbf{s} \\ \mathbf{b} & \varphi & \sigma \end{pmatrix}.$$

Jednakże przy rozwiązywaniu układów równań liniowych większe znaczenie zdaje się posiadać metoda spostrzeżeń zawarunkowanych. Układ (7.1) możemy traktować jako układ równań warunkowych

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{A} + \Delta = \mathbf{0},$$

w którym liczba poprawek n równa się liczbie równań w . Dla krakowianu $\mathbf{v}$ podaliśmy wzór (6.6)

$$\mathbf{v} = -K_A^w \mathbf{Z}_w K_{\tau \Delta}^w \mathbf{Z},$$

gdzie

$$\mathbf{Z} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} \\ \tau \Delta \end{pmatrix}.$$

Wprowadzając do tego wzoru oznaczenia użyte w zapisie układu (7.1) otrzymamy

$$\mathbf{x} = -K_{\tau a}^n \mathbf{Z} \mathbf{w} K_{\tau l}^n \mathbf{Z}, \quad (7.8)$$

gdzie

$$\mathbf{Z} = \begin{pmatrix} \tau \mathbf{a} \\ \tau \mathbf{l} \end{pmatrix}.$$

A zatem pierwiastki $\mathbf{x}$ układu (7.1) są zaopatrzonym w znak minus iloczynem wierszowym bloku $K_{\tau a}^n \mathbf{Z}$ oraz wiersza $K_{\tau l}^n \mathbf{Z}$.

Wartościową kontrolę rozwiązania układu uzyskujemy dopisując do krakowianu $\mathbf{Z}$ wiersz sumowy $\tau \mathbf{s} = \tau \mathbf{l} + (\tau \mathbf{a})_{(1)} + (\tau \mathbf{a})_{(2)} + \dots + (\tau \mathbf{a})_{(n)}$:

$$\mathbf{Z} = \begin{pmatrix} \tau \mathbf{a} \\ \tau \mathbf{l} \\ \tau \mathbf{s} \end{pmatrix}.$$

Traktując $\tau \mathbf{s}$ jako wiersz wyrazów wolnych możemy obliczyć służące do kontroli niewiadome

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - 1 \\ x_2 - 1 \\ \vdots \\ x_n - 1 \end{pmatrix}$$

zgodnie ze wzorem

$$\mathbf{x}' = -K_{\tau a}^n \mathbf{Z} \mathbf{w} K_{\tau s}^n \mathbf{Z}. \quad (7.9)$$

Przykład 9. Rozwiązać układ równań liniowych

$$8x + 6y - 54 = 0,$$

$$2x + y - 1 = 0.$$

Zastosujemy obydwie omówione metody. Pierwsza z nich wymaga zestawienia krakowianu

$$\mathbf{P} = \left(\begin{array}{cc|cc} 8 & 6 & -54 & -40 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ \hdashline & & & \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

i obliczenia

$$K^2 \mathbf{P} = \left\{ \begin{array}{cc|cc} \frac{8}{\sqrt{68}} & \frac{2}{\sqrt{68}} & 0 & 0 \\ \frac{2}{\sqrt{68}} & \frac{-8}{\sqrt{68}} & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{1}{\sqrt{68}} & \frac{-12,5}{\sqrt{68}} & -12 & -12 \\ 0 & \frac{17}{\sqrt{68}} & 25 & 25 \end{array} \right\}$$

Pierwiastki układu równają się

$$x = -12,$$

$$y = 25.$$

Zgodnie z drugą metodą zestawimy krakowian

$$\mathbf{Z} = \left\{ \begin{array}{cc} 8 & 2 \\ 6 & 1 \\ \dots & \dots \\ -54 & -1 \\ \dots & \dots \\ -40 & 2 \end{array} \right\}.$$

Po obliczeniu

$$K^2 \mathbf{Z} = \left\{ \begin{array}{cc} 0,8 & 0,6 \\ 0,6 & -0,8 \\ \dots & \dots \\ -5,4 & 27,2 \\ \dots & \dots \\ -4,0 & 27,0 \end{array} \right\}.$$

mnożymy pierwsze dwa wiersze

$$\left\{ \begin{array}{cc} 0,8 & 0,6 \\ 0,6 & -0,8 \end{array} \right\}$$

przez wiersz

$$- \left\{ \begin{array}{cc} -5,4 & 27,2 \end{array} \right\}$$

oraz wiersz

$$- \left\{ \begin{array}{cc} -4,0 & 27,0 \end{array} \right\}$$

otrzymując odpowiednio

$$x = -12,$$

$$y = 25,$$

$$x' = x - 1 = -13,$$

$$y' = y - 1 = 24.$$

8. Zapis algorytmu K w języku ALGOL

Biorąc pod uwagę znaczne już obecnie rozpowszechnienie języka ALGOL jako środka opisu algorytmów numerycznego rozwiązywania zadań matematycznych, przedstawimy algorytm K w symbolice tego języka. Przedtem jednak przekształcimy wzór (3.2) do postaci podającej w sposób wyraźny przebieg obliczeń dokonywanych na poszczególnych elementach krakowianu danego c . Wprowadzimy tu następujące wskaźniki:

i — wskaźnik kolumny,

j — wskaźnik wiersza,

h — wskaźnik określający liczbę przekształceń danego elementu.

W ten sposób przez c_{ij}^h będziemy rozumieli element położony w i -tej kolumnie i j -tym wierszu uzyskany po h -tym przekształceniu. Przyjmując, jak uprzednio, że należy dokonać m przekształceń krakowianu c o k kolumnach, którego część główna ma n wierszy, zaś część podrzędna p wierszy, ujmijmy algorytm K wzorami:

$$c_{hj}^h = \frac{c_{hj}^{h-1}}{\sqrt{\sum_{j=1}^n (c_{hj}^{h-1})^2}} \quad (8.1)$$

$$c_{ij}^h = c_{ij}^{h-1} - c_{hj}^h \cdot \sum_{j=1}^n c_{hj}^h \cdot c_{ij}^{h-1} \quad (8.2)$$

gdzie

$$j = 1, 2 \dots n, n+1 \dots n+p,$$

$$i = h+1, h+2 \dots k,$$

$$h = 1, 2 \dots m,$$

zaś

$$m \leq k.$$

Zapisując te wzory w języku ALGOL otrzymamy następujący program:

begin

comment algorytm K ;

integer $i, j, h, H, p, n, M, k, m$;

real s, t ;

$M := p + n$;

begin

 array $c [1:p, 1:M]$;

for $h := 1$ **step** 1 **until** m **do**


```

begin
  s: = 0;
  for j: = 1 step 1 until n do
    s: = s + c [h, j] × c [h, j];
    s: = 1/sqrt [s];
  for j: = 1 step 1 until M do
    c [h, j]: = c [h, j] × s;
    H: = h + 1;
  for i: = H step 1 until k do
    begin
      t: = 0;
      for j: = 1 step 1 until n do
        t: = t + c [h, j] × c [i, j];
      for j: = 1 step 1 until M do
        c [i, j]: = c [i, j] - c [h, j] × t;
      end j
    end h
  end i
end
end
end

```

9. Zakończenie

Podstawowymi zaletami algorytmu *K* są zwieżłość i prostota dogodnych w programowaniu wzorów. Niezmiernie ważna jest również uniwersalność tego algorytmu. Przy jego użyciu można rozwiązywać wszelkie zadania występujące w metodzie najmniejszych kwadratów. Stosując prosty i krótki program realizujący algorytm *K*, można obliczać poprawki, niewiadome, krakowiany transformujące, błędy średnie, a nawet rozwiązywać układy równań liniowych. Rodzaj uzyskiwanych wyników zależy tylko i wyłącznie od tabeli danych początkowych. Zmieniając kształt tej tabeli otrzymuje się znaczną liczbę różnych schematów rachunkowych, z których bez trudu można dobrać najbardziej odpowiedni dla konkretnego przypadku.

Na uwagę zasługuje także łatwość obliczania błędów średnich funkcji wyrównanych obserwacji i niewiadomych. Równie proste jest obliczanie krakowianów transformujących, dla których brak było dotychczas zwartych algorytmów.

Wymienione tu zalety wiążą się jednak z pewnymi nieuniknionymi wadami. Z uniwersalności algorytmu wynika, że niektóre zadania o charakterze specjalnym będą rozwiązywane w sposób nieoptymalny i to zarówno pod względem liczby operacji, jak i liczby zajmowanych miejsc pamięci. W szczególności algorytm *K* nie przewiduje pomijania działań

na elementach zerowych, co jest podstawową cechą algorytmów dostosowanych do wyrównania dużych sieci geodezyjnych określonego typu, np. triangulacyjnych czy niwelacyjnych.

Jednakże porównywanie algorytmu K z innymi algorytmami tylko pod względem liczby wykonywanych działań jest pozbawione sensu, ponieważ zakres informacji o wynikach wyrównania, który uzyskuje się przy użyciu algorytmu K jest z reguły znacznie szerszy.

Reasumując należy stwierdzić, że algorytm K , podobnie jak i pobieżnie opisany algorytm G , jest przeznaczony do obliczeń na maszynach elektronicznych, wyróżniając się prostotą i uniwersalnością od innych znanych algorytmów, stosowanych w metodzie najmniejszych kwadratów. Należy go szczególnie polecać w tych przypadkach, gdy istotna jest złożość programu, lub też, gdy zależy nam na otrzymaniu pełnej charakterystyki dokładnościowej wyników wyrównania. Można się spodziewać, że algorytm K znajdzie zastosowanie m. in. przy opracowywaniu stałych programów maszyn elektronicznych specjalizowanych dla potrzeb geodezji.

Praca niniejsza przedstawia podstawowe właściwości i zastosowania algorytmu K , nie wyczerpując całości związanej z tym problematyki.

L I T E R A T U R A

- [1] *Banachiewicz T.*: Rachunek krakowianowy. Warszawa, 1959.
- [2] *Hausbrandt St.*: Rachunki geodezyjne. Warszawa, 1953.
- [3] Polska Norma: Rachunki geodezyjne. Podstawy algebry krakowianowej. Warszawa, 1959.
- [4] *Gaździcki J.*: Kilka metod numerycznych związanych z wyrównaniem sieci geodezyjnych na maszynach elektronowych. Prace IGiK, zeszyt 1 (25), 1965.

Rękopis złożono w Redakcji w październiku 1965 r.

ЕЖИ ГАЗЬДИЦКИ

НОВЫЕ АЛГОРИФМЫ УРАВНИВАНИЯ ПО СПОСОБУ НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ

Резюме

В работе представляется два алгоритма для выполнения на ЭВМ вычислений выступающих в способе наименьших квадратов. Первый из них, названный алгоритмом G является близким к алгоритму Гаусса; второй, названный алгоритмом K , имеет некоторые общие черты с алгоритмом краковянового корня Банахевича.

Для объяснения сущности алгоритма K , более подробно изложенного в настоящей работе, рассмотрим краковяны c имеющий k колонок и $n+p$ строк. Сделаем последовательность краковянов

$$c^0, c^1, c^2, \dots, c^n,$$

где $c^0 = c$, а каждый последующий краковян этого ряда составляется по предыдущему согласно формулам (8.1), (8.2), в которых c_{ij}^h обозначает элемент краковяна c^h расположенный в i -той колонке и j -той строке:

$$c_{hj}^h = \frac{c_{hj}^{h-1}}{\sqrt{\sum_{j=1}^n (c_{hj}^{h-1})^2}},$$
$$c_{ij}^h = c_{ij}^{h-1} - c_{hj}^h \cdot \sum_{j=1}^n c_{hj}^h \cdot c_{ij}^{h-1},$$
$$j = 1, 2, \dots, n, n+1, \dots, n+p,$$
$$i = h+1, h+2, \dots, k,$$
$$h = 1, 2, \dots, m,$$
$$m \leq k.$$

Блок краковяна c составленный первыми n строками называется главной частью этого краковяна, блок составленный из остальных p строк — второстепенной частью.

Вычислен после m преобразований формулами алгоритма K краковян c^m принято обозначать $K^m c$, а его блоки, строки и колонки принято обозначать символами

$K_a^m c$ — блок a краковяна c после m -того преобразования;

$K_i^m c$ — i -тая колонка краковяна c после m -того преобразования;

$K_{(i)}^m c$ — i -тая строка краковяна c после m -того преобразования;

$K_{ai}^m c$ — i -тая колонка блока a краковяна c после m -того преобразования;

$K_{a(i)}^m c$ — i -тая строка блока a краковяна c после m -того преобразования.

Будем предполагать, что главную часть краковяна c составляют блоки a, a' , второстепенную — блоки b, b' .

$$c = \begin{Bmatrix} a & a' \\ b & b' \end{Bmatrix}$$

После исполнения m преобразований этого краковяна получим согласно формуле (4.9)

$$K^m c = K^m \begin{Bmatrix} a & a' \\ b & b' \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \tau(\sqrt{a^2})^{-1} \cdot \tau a & a' - a' \cdot [\tau a \cdot (a^2)^{-1} \cdot \tau a] \\ \tau(\sqrt{a^2})^{-1} \cdot \tau b & b' - a' \cdot [\tau b \cdot (a^2)^{-1} \cdot \tau a] \end{Bmatrix},$$

где m — число колонок краковянов a, b .

Эту формулу можно тоже представить в виде

$$K_a^m c = \tau(\sqrt{a^2})^{-1} \cdot \tau a,$$

$$K_b^m c = \tau(\sqrt{a^2})^{-1} \cdot \tau b,$$

$$K_a^{m'} c = a' - a' \cdot [\tau a \cdot (a^2)^{-1} \cdot \tau a],$$

$$K_b^{m'} c = b' - a' \cdot [\tau b \cdot (a^2)^{-1} \cdot \tau a].$$

Род результатов получаемых при употреблении алгоритма K зависит от краковяна первоначальных данных c , т.е. от того, какие таблицы подставим в место блоков a, a' .

Для примера возьмем вычисление поправок в методе посредственных измерений. Составляем в таком случае краковян первоначальных данных в виде

$$P = \{a \ 1\}$$

где a — краковян коэффициентов системы уравнений поправок с m неизвестными.

1 — колонка свободных членов этих уравнений,

и производя m преобразований получаем непосредственно

$$V = K_1^m P$$

Алгоритм K , так же как и алгоритм G предназначенный для вычислений на ЭВМ, отличается несложностью и универсальностью в сравнении с другими известными алгоритмами, применяемыми для способа наименьших квадратов. Особенно нужно его рекомендовать для тех случаев, когда существенной является сжатость программы, или же, когда мы заинтересованы в получении полной точностной характеристики результатов уравнивания. Можно ожидать, что алгоритм K найдет в частности применение при разработке постоянных программ для ЭВМ специализированных для геодезических вычислений.

Применяя простую и краткую программу решающую алгоритм K можно вычислять поправки, неизвестные, трансформирующие краковяны, средние квадратические ошибки, а даже решать системы линейных уравнений.

Основные применения алгоритма излагаются в разделах: пятом (способ необходимых неизвестных), шестом (способ условий) и седьмом (решение систем линейных уравнений).

NEW ALGORITHMS OF ADJUSTMENT BY THE METHOD OF THE LEAST SQUARES

Summary

The paper deals with two algorithms which can be applied to electronic computers of the computations appearing in the method of the least squares.

The first of these algorithms called algorithm G relates to the Gauss algorithm; the second one called algorithm K possesses certain traits common with the algorithm of the cracovian root of Banachiewicz.

In order to explain the essence of the algorithm K discussed in a broader way in this paper we take in account the cracovian $\mathbf{c}$ possessing k columns and $n+p$ rows. We receive then a sequence of cracovians

$$\mathbf{c}^0 \cdot \mathbf{c}^1 \cdot \mathbf{c}^2 \dots \mathbf{c}^m$$

where $\mathbf{c}^0 = \mathbf{c}$; each of the next cracovians of the sequence is created on the basis of the previous one according to the formulae (8.1), (8.2) in which c_{ij}^h denotes the element of cracovian $\mathbf{c}^h$ in the i -th column and in the j -th line.

$$c_{hj}^h = \frac{c_{hj}^{h-1}}{\sqrt{\sum_{j=1}^n (c_{hj}^{h-1})^2}},$$

$$c_{ij}^h = c_{ij}^{h-1} - c_{hj}^h \cdot \sum_{j=1}^n c_{hj}^h \cdot c_{ij}^{h-1},$$

$$j = 1, 2, \dots, n, n+1 \dots n+p,$$

$$i = h+1, h+2 \dots k,$$

$$h = 1, 2 \dots m,$$

$$m \leq k.$$

The block of cracovian $\mathbf{c}$ created by the first n rows is called the principal part of the cracovian when the block created by the remaining p rows is called — its secondary part.

The cracovian $\mathbf{c}^m$ computed after m transformations by the algorithm K formulae is determined as $K^m \mathbf{c}$ and its blocks rows, and columns are determined by the symbols.

$K_a^m \mathbf{c}$ — block $\mathbf{a}$ of cracovian $\mathbf{c}$ after m -th transformation;

$K_i^m \mathbf{c}$ — i -th column of cracovian $\mathbf{c}$ after m -th transformation;

$K_{(i)}^m \mathbf{c}$ — i -th row of cracovian $\mathbf{c}$ after the m -th transformation;

$K_{ai}^m \mathbf{c}$ — i -th column of the block $\mathbf{a}$ of cracovian $\mathbf{c}$ after m -th transformation;

$K_{a(i)}^m \mathbf{c}$ — i -th row of the block $\mathbf{a}$ of cracovian $\mathbf{c}$ after m -th transformation.

We can admit that the principal part of the cracovian $\mathbf{c}$ consists of the blocks $\mathbf{a}$ and $\mathbf{a}'$ while the secondary part consists of blocks $\mathbf{b}$ and $\mathbf{b}'$

$$\mathbf{c} = \begin{Bmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{a}' \\ \mathbf{b} & \mathbf{b}' \end{Bmatrix}$$

Having performed thus m transformations of this cracovian we receive according to the formula (4.9)

$$K^m \mathbf{c} = K^m \begin{Bmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{a}' \\ \mathbf{b} & \mathbf{b}' \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \tau(\sqrt{\mathbf{a}^2})^{-1} \cdot \tau \mathbf{a} & \mathbf{a}' - \mathbf{a}' \cdot [\tau \mathbf{a} \cdot (\mathbf{a}^2)^{-1} \cdot \tau \mathbf{a}] \\ \tau(\sqrt{\mathbf{a}^2})^{-1} \cdot \tau \mathbf{b} & \mathbf{b}' - \mathbf{a}' \cdot [\tau \mathbf{b} \cdot (\mathbf{a}^2)^{-1} \cdot \tau \mathbf{a}] \end{Bmatrix},$$

where m — is the number of columns of the cracovians $\mathbf{a}$ and $\mathbf{b}$. This formula can be also written down as follows:

$$\begin{aligned} K_a^m \mathbf{c} &= \tau(\sqrt{\mathbf{a}^2})^{-1} \cdot \tau \mathbf{a}, \\ K_b^m \mathbf{c} &= \tau(\sqrt{\mathbf{a}^2})^{-1} \cdot \tau \mathbf{b}, \\ K_a^m \mathbf{c} &= \mathbf{a}' - \mathbf{a}' \cdot [\tau \mathbf{a} \cdot (\mathbf{a}^2)^{-1} \cdot \tau \mathbf{a}] \\ K_b^m \mathbf{c} &= \mathbf{b}' - \mathbf{a}' \cdot [\tau \mathbf{b} \cdot (\mathbf{a}^2)^{-1} \cdot \tau \mathbf{a}]. \end{aligned}$$

The kind of results obtained owing to the use of the algorithm K depends upon the cracovian of the initial data $\mathbf{c}$, i. e. upon tables which will be substituted in lieu on the blocks $\mathbf{a}$, $\mathbf{a}'$, $\mathbf{b}$ and $\mathbf{b}'$.

We take as an example the computation of corrections in the method of indirect observations. We create thus the cracovian of initial data

$$\mathbf{P} = \{\mathbf{a} \mathbf{l}\},$$

where: $\mathbf{a}$ — cracovian of coefficients in the system of correction equations with m unknowns, $\mathbf{l}$ = column of free terms of these equations. Doing m transformations we receive directly

$$\mathbf{V} = K_1^m \mathbf{P}.$$

The algorithm K like the algorithm G is destined for on the electronic computers; it distinguishes itself from the other known algorithms applied in the method of least squares by simplicity and universality. It shall especially be recommended in these cases when the consiseness of the programme is essential or when we will obtain a full accuracy characteristic of the adjustment results. One can hope that algorithm K will find the application in the elaboration of constant programmes of the electronic computers specialized for the needs of geodesy.

Applying a simple and short programme which realizes the algorithm K we can compute the corrections, the unknowns, transforming cracovians, the mean square errors, and even solve the systems of linear equations. The fundamental applications of the algorithm are given in the chapters: 5-method of indirect observations; 6-method of conditioned observations, and 7-solution of linear equation system.