PRACE INSTYTUTU GEODEZJI I KARTOGRAFII

Tom XIV, Zeszyt 1(31), 1967

STEFAN HAUSBRANDT 528.113

Wyznaczanie wielkości błędu średniego z zespołu błędów prawdziwych w oparciu o założenie normalności rozkładu

Wprowadzenie

Obliczenie wartości błędu średniego m w oparciu o znajomość szeregu błędów prawdziwych ε

$$\varepsilon_1; \; \varepsilon_2; \; \ldots \; \varepsilon_N;$$

na drodze realizacji wzoru klasycznego

$$m = \sqrt{\frac{[\varepsilon\,\varepsilon]}{N}}; \tag{1}$$

prowadzi do otrzymywania wyników bardzo niedokładnych, nawet przy stosunkowo dużej liczebności szeregu. Tak np. z wzoru na błąd średni średniego błędu

$$m_m = \frac{m}{\sqrt{2N}}; \tag{2}$$

wynika, że pomimo rozporządzania szeregiem 200 błędów, otrzymamy błąd średni średniego błędu równy 5% samego błędu.

Można jednak — do czego prowadzi niniejsza praca — uzyskać dużo dokładniejsze oszacowanie wartości średniego błędu, jeżeli wykorzystać przy rachunku okoliczność, że badany szereg błędów podlega rozkładowi normalnemu (względnie dwumianowemu).

Przyjęcie takiego założenia „normalności" rozkładu w badanym szeregu błędów jest, o ile chodzi o obserwacje geodezyjne, tak mocno ugruntowane praktycznie, że nie będziemy się nad nim zatrzymywać, a jedynie zwrócimy uwagę, że nawet przy oszacowaniu klasycznym konstruując wzór na błąd średni średniego błędu (2) opieramy się na tym założeniu, aczkolwiek wzór (1) obchodzi się bez niego. Parę uwag na temat normalności rozkładu w obserwacjach geodezyjnych podamy zresztą dalej w niniejszej pracy.

Przyjęcie założenia normalności rozkładu w badanym szeregu błędów może być wykorzystane do obliczenia wartości średniego błędu w różny sposób. Najprymitywniejszym takim sposobem byłoby dobrze znane szacowanie średniego błędu w oparciu o znajomość błędu prawdopodobnego. Wychodzi się wtedy z założenia, że przy dużej oczywiście ilości elementów w badanym szeregu, można po prostu uporządkować błędy co do ich wartości bezwzględnej i uważać środkowy element szeregu uporządkowanego za równy błędowi prawdopodobnemu r. Że zaś w rozkładzie normalnym mamy $m = 1{,}483\ r$, tedy mnożąc środkowy błąd szeregu uporządkowanego przez 1,483 dostaniemy wartość błędu średniego.

Takie oszacowanie jest jednak stosunkowo mało dokładne, gdyż stawiając założenie normalności rozkładu w szeregu, opiera się następnie obliczenie błędu średniego na znajomości jednego tylko elementu i jego położenia w szeregu.

Będziemy w dalszym ciągu przyjmować, że wyznaczenie wartości błędu średniego w oparciu o założenie normalności rozkładu w badanym szeregu błędów dokonuje się w oparciu o znajomość przynajmniej dziewięciu elementów tego szeregu, w miarę możności równomiernie rozłożonych (mówimy tu i nadal o szeregu uporządkowanym co do wartości bezwzględnych).

W zasadzie można by oczywiście stosując postępowanie, którego szczegóły zaraz opiszemy, użyć do rachunku wszystkich elementów szeregu. Nie byłoby to jednak celowe, gdyż nie wniosłoby istotnych korzyści, a przedłużyło rachunek. Drugą krańcowością byłoby użycie do rachunku jednego tylko elementu, w szczególności elementu położonego w środku szeregu, co doprowadziłoby do omówionego już oszacowania opartego na związku między błędem prawdopodobnym i średnim i dałoby wynik mało dokładny.

Wykorzystanie do rachunku tylko części elementów szeregu, których wielkości i uporządkowanie są znane, posiada jeszcze tę dodatnią stronę, że umożliwia ono dwu-, lub więcej, -krotny rachunek w oparciu o niezależne układy danych, co z kolei pozwala na charakteryzowanie dokładności oszacowania w oparciu o rozbieżności wyników.

Szacowanie klasyczne takiej możliwości nie daje. Uwzględnia ono bowiem w rachunku jedynie wielkości błędów, abstrahując od ich położenia w szeregu uporządkowanym.

Wspomnieliśmy już, że przyjęcie założenia normalności może być wykorzystane do obliczenia wartości błędu średniego w różny sposób.

Omówienie takich różnych możliwości znajduje się w dalszym ciągu pracy. Istotę rzeczy stanowi tu z jednej strony możliwość wykorzystywania tych, czy innych, własności rozkładu normalnego, zaś z drugiej strony możliwość różnorodnego podchodzenia do zagadnienia wyrównywania rozbieżności przy wykorzystywaniu materiału nadliczbowego, z którym zawsze mieć będziemy do czynienia przy postawieniu założenia normalności. Obecnie podamy ten sposób rozwiązania zadania, który autorowi wydaje się najlepszy. Nazywać go będziemy „sposobem Bw", ze względu na oznaczenie tymi literami współczynników występujących w rachunku.

Czytelnik, którego nie interesują rozważania teoretyczne, a pragnąłby tylko zapoznać się ogólnie z koncepcją, będzie dostatecznie zorientowany po przeczytaniu niniejszego wprowadzenia i prześledzeniu przykładu liczbowego na str. 6 ewentualnie i streszczenia pracy na str. 33.

Obliczenie sposobem Bw średniego błędu z szeregu błędów prawdziwych, uporządkowanego co do wartości bezwzględnych

$$\varepsilon_1;\ \varepsilon_2;\ \ldots\ \varepsilon_N;\qquad \varepsilon_i > \varepsilon_k,\quad \text{gdy}\quad i > k, \tag{3}$$

wymaga wykonania następujących czynności:

I. Wybieramy z szeregu zespół składający się z nie mniej niż 9 błędów, w przybliżeniu równoległych, po czym dla każdego z nich obliczamy wielkość jego „pozycji" w szeregu (3), tj. przybliżoną wartość prawdopodobieństwa nieprzekroczenia tego błędu. Jeżeli liczebność szeregu jest duża, za pozycję przyjmujemy ułamek, którego licznikiem jest liczba porządkowa błędu, a mianownikiem ogólna liczba błędów w szeregu.

Jeżeli liczebność szeregu nie jest duża (poniżej 200), zmniejszamy zarówno licznik jak i mianownik wyżej wymienionego ułamka o jedność.

Jest więc przy oznaczeniu przez P_i pozycji i-tego błędu

$$\boxed{Pi = \frac{i}{N} \quad \text{lub} \quad Pi = \frac{i-1}{N-1}} \tag{4}$$

II. Z tabeli funkcyjnej (str. 41) znajdujemy dla każdej wielkości P_i odpowiadające wartości B_i oraz w_i.*) Niezbędną przy tym interpolację liniową najdogodniej przeprowadzić dla obu poszukiwanych wielkości łącznie. Sprowadza się to do nastawienia w liczniku nastawień arytmometru wielkości B_i (lewa część licznika), oraz w_1 (prawa część licznika) dla niższej wartości argumentu i pomnożenia przez spełnienie ułamka interpolacyjnego do jedności, po czym nastawienia w liczniku nastawień wielkości B_2 (lewa) i w_2 (prawa) dla wyższej wartości argumentu i pomnożenia przez

*) Są to: $B = \frac{e \cdot t}{e t^2}$ oraz $w = \frac{e \cdot t^2}{e t^2}$ gdzie e podstawa log. nat. zaś t stosunek błędu danego do błędu średniego m.

ułamek interpolacyjny. W liczniku rezultatów odczytujemy poszukiwane wartości B (lewa), oraz w (prawa). Konkretnie np. interpolując dla $P_i = 0{,}37_2$, czyli przy ułamku interpolacyjnym 0,2, nastawimy na liczniku nastawień wartości B i w dla 0,37, to znaczy liczby 1038 i 500 i pomnożymy przez 8, po czym wartości B i w dla 0,38, tj. 1054 i 523 i pomnożymy przez 2. W liczniku rezultatów będzie: 10412 i 5046, a więc wartości poszukiwane wynoszą $B_i = 1{,}0412$ oraz $w_i = 0{,}5046$.

III. Obliczamy sumę w, która ma nie być mniejsza od 4,9 i wykonujemy działanie

$$\boxed{m = \frac{[B\varepsilon]}{[w]}} \tag{5}$$

IV, V, VI. Powtarzamy opisane czynności wybierając zespół innych błędów, co prowadzi do otrzymania drugiej, niezależnej, wartości m

$$m' = \frac{[B\varepsilon]}{[w]};$$

po czym z obu obliczeń znajdujemy średnią. Błąd średni oszacowania średniego błędu jest wielkością rzędu $\frac{2{,}07\,m}{N\sqrt{[w]}}$.

Przykład liczbowy

Obliczymy średni błąd zamknięcia trójkąta w sieci Zachodnio Pruskiej, posługując się materiałem błędów prawdziwych zamknięć trójkątów podanym w publikacji: „Die Preussische Landesvermessung, Hauptdreiecke Neue Folge" — Berlin 1925 — który przytaczamy poniżej. Ponieważ szereg błędów jest stosunkowo mały (41), nie ograniczymy się do dwóch obliczeń, lecz weźmiemy trzy „próbki", wyczerpujące przy tym cały materiał. Będą to błędy o numerach:

I. 1, 4, 7 . . . 37, 40, II. 2, 5, 8 . . . 38, 41, III. 3, 6, 9 . . . 36, 39.

Cały rachunek przytaczamy w tablicy 1.

Jeżeli przyjąć średnią z tych trzech oszacowań za wartość błędu średniego $m_{Bw} = 0{,}465$, to przy porównaniu zgodności szeregu z rozkładem normalnym i podziale na 4 klasy, w których winny być równe liczby błędów, otrzymamy rezultaty przytoczone w tablicy 2.

Jeżeli natomiast przyjąć za wartość średniego błędu wynik oszacowania klasycznego, który jest tu równy $m_{kl} = 0{,}420$, otrzymamy wartości przedstawione w tablicy 3.

Jak można było przewidywać, zgodność z rozkładem normalnym jest przy przyjęciu wyniku klasycznego dużo gorsza.

Tablica 1

i	P_i	ε_i	B_i	w_i	i	P_i	ε_i	B_i	w_i	i	P_i	ε_i	B_i	w_i
		0,					0,					0,		
1	0,000	063	0,0000	0,0000	2	0,025	078	0,0850	0,0030	3	0,050	107	0,1700	0,0110
4	0,075	128	0,2535	0,0240	5	0,100	133	0,3360	0,0420	6	0,125	144	0,4170	0,0660
7	0,150	144	0,4960	0,0940	8	0,175	145	0,5720	0,1270	9	0,200	145	0,6460	0,1640
10	0,225	154	0,7160	0,2045	11	0,250	155	0,7820	0,2490	12	0,275	167	0,8450	0,2970
13	0,300	171	0,9030	0,3480	14	0,325	196	0,9560	0,4010	15	0,350	234	1,0040	0,4560
16	0,375	276	1,0460	0,5115	17	0,400	286	1.0830	0,5680	18	0,425	289	1,1125	0,6240
19	0,450	295	1,1370	0,6790	20	0,475	317	1,1535	0,7335	21	0,500	317	1,1640	0,7850
22	0,525	320	1,1655	0,8325	23	0,550	332	1,1610	0,8770	24	0,575	371	1,1475	0,9155
25	0,600	378	1,1260	0,9480	26	0,625	408	1,0970	0.9735	27	0,650	414	1,0610	0,9910
28	0,675	415	1,0160	0,9995	29	0,700	457	0,9620	0,9970	30	0,725	458	0,9010	0,9840
31	0,750	476	0,8330	0,9580	32	0,775	545	0,7565	0,9175	33	0,800	586	0,6740	0,8640
34	0,825	619	0,5860	0,7945	35	0,850	645	0,4930	0,7090	36	0,875	655	0,3965	0,6075
37	0,900	679	0,2990	0,4920	38	0,925	685	0,2035	0,3620	39	0,950	756	0,1140	0,2240
40	0,975	794	0,0405	0,0905	41	1,000	846	0,0000	0,0000					
(I)				6,9760	(II)				6,9595	(III)				6,9890
$m = \frac{3,207308}{6,9760} = 0,4598$					$m = \frac{3,261739}{6,9595} = 0,4687$					$m = \frac{3,256949}{6,9890} = 0,4660$				

Tablica 2

Przedziały błędu (przy $m = m_{Bw}$)	Ilość błędów		Odchylenia procentowe od rozkładu normalnego
	bezwzgl.	proc.	
0,000 m — 0,319 m, tj. 0,000 — 0,148	9	22%	+3
0,319 m — 0,674 m, tj. 0,148 — 0,313	10	24%	+1
0,674 m — 1,150 m, tj. 0,313 — 0,535	12	29%	−4
1,150 m — ε_{max}, tj. 0,535 — ε_{max}	10	24%	+1

Tablica 3

Przedziały błędu (przy $m = m_{kl}$)	Ilość błędów		Odchylenia procentowe od rozkładu normalnego
	bezwzgl.	proc.	
0,000 m — 0,319 m, tj. 0,000 — 0,134	5	12%	+13
0,319 m — 0,674 m, tj. 0,134 — 0,283	11	27%	−2
0,674 m — 1,150 m, tj. 0,283 — 0,483	15	37%	−12
1,150 m — ε_{max}, tj. 0,483 — ε_{max}	10	24%	+1

Uzasadnienie teoretyczne

1. Rozpatrujemy szereg wartości bezwzględnych błędów prawdziwych ε_i uporządkowany według rosnących wartości błędów, tj. szereg (3):

$$\varepsilon_1;\ \varepsilon_2;\ \ldots\ \varepsilon_N; \quad \text{gdzie} \quad \varepsilon_j > \varepsilon_k, \quad \text{gdy} \quad j > k$$

Będziemy nazywali „pozycją" błędu i-tego w szeregu i oznaczali przez P_i przybliżoną wartość prawdopodobieństwa nieprzekroczenia błędu o wielkości ε_i. Jeżeli szereg jest szeregiem o bardzo dużej liczebności, można za pozycję przyjąć po prostu stosunek wielkości wskaźnika błędu do liczby błędów w szeregu, to znaczy częstość względną zdarzenia: „błąd nie przekroczył wielkości ε_i".

$$P_i = \frac{i}{N}. \tag{6}$$

Jeżeli liczebność szeregu nie jest bardzo wielka, słuszniej będzie obliczać wartość pozycji wzorem:

$$\boxed{Pi = \frac{i-1}{N-1}} \tag{7}$$

którym też będziemy się z reguły posługiwali. Wynika on z następujących rozważań. W badanym szeregu znajduje się:
$i-1$ *błędów mniejszych,* 1 *błąd równy,* $N-1$ *błędów większych,* od rozważanego błędu ε_i figurującego na i-tym miejscu. Ponieważ w rozkładzie normalnym możemy rozpatrywać tylko dwa następujące, wykluczające się zdarzenia: błąd jest mniejszy od rozważanego, o prawdopodobieństwie p_i, oraz: błąd jest większy od rozważanego, o prawdopodobieństwie $\overline{p_i} = 1 - p_i$, tedy, przechodząc od częstości względnych do prawdopodobieństw, pozostaje podzielić liczbę 1 w stosunku $(i-1):(N-i)$ i otrzymane ułamki:

$$\frac{i-1}{N-1} \quad \text{oraz} \quad \frac{N-i}{N-1};$$

dodać do liczby błędów mniejszych, oraz do liczby błędów większych od rozważanego. Otrzymamy wówczas na przybliżone wartości prawdopodobieństwa P oraz $\overline{P}$ wyrażenia następujące:

$$P = \frac{i-1+\frac{i-1}{N-1}}{N} \quad \text{oraz} \quad \overline{P} = \frac{N-i+\frac{N-i}{N-1}}{N}.$$

Po wykonaniu działań upraszczających otrzymujemy:

$$P_i = \frac{i-1}{N-1} \quad \text{oraz} \quad \overline{P}_i = \frac{N-i}{N-1} \quad \text{przy} \quad P+\overline{P} = 1;$$

jako przybliżone wartości prawdopodobieństw (wydedukowane z częstości względnych) dwóch wykluczających się zdarzeń: wystąpienie błędu mniejszego od ε_1, oraz: wystąpienie błędu większego od ε_i.

Jeżeli zechcemy od znanej wartości prawdopodobieństwa P_i przejść do szukanej wartości wskaźnika „i", znajdziemy w myśl (7) wzór:

$$\boxed{i = P_i(N-1)+1} \tag{8}$$

2. Wiadomo, że prawdopodobieństwo nieprzekroczenia t-krotnej wartości błędu średniego m w rozkładzie normalnym wyrazić można jak następuje:

$$P(\varepsilon < t \cdot m) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left[t - \frac{t^3}{2^1 \cdot 3.1!} + \frac{t^5}{2^2.5.2!} - \frac{t^7}{2^3.7.3!} + \cdots\right] \tag{9}$$

co wynika z rozwinięcia w szereg całki $P_0^t = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_0^t e^{-0,5t^2} dt$ i całkowania poszczególnych wyrazów. Odpowiadające sobie w myśl tego związku pary wartości liczbowych t $\left(\text{stosunek błędu do błędu średniego } t = \frac{\varepsilon}{m}\right)$ oraz

$P(t) = P(\varepsilon \leqslant t \cdot m)$ (prawdopodobieństwo nieprzekroczenia t-krotnej wartości błędu średniego) porządkuje się zazwyczaj w tablicy funkcyjnej, w której t traktuje się jako argument, zaś $P(t)$ jako funkcję.

Tablica 4a ma więc postać:

Tablica 4

a) t	$P(t)$	b) P	t
0	0	0	0
0,10	0,0797	0,10	0,1257
0,20	0,1585	0,20	0,2533
0,30	0,2358	0,30	0,3853
....	......	....	......
1,00	0,6827	0,70	1,0364
2,00	0,9545	0,80	1,2816
3,00	0,9973	0,90	1,6449
....	......	....	......
∞	1	1	∞

Do naszych celów wygodniejsze będzie posługiwanie się tablicą, w której — odwrotnie — P gra rolę argumentu, zaś t rolę funkcji, a więc tablicą 4b. Obszerną tablicę tego rodzaju podajemy na str. 41.

Oprócz wartości t odpowiadających prawdopodobieństwom P stabelaryzowanym w przedziale 0,01, znajdują się tam jeszcze wartości innych funkcji, których przydatność omówiona będzie dalej. Są to następujące funkcje zmiennej t uporządkowane względem P jako argumentu:

$$w = \frac{e \cdot t^2}{e^{t^2}}; \quad B = \frac{e \cdot t}{e^{t^2}}. \tag{10}$$

Uwaga. Pomimo, że tablice typu 4a, tj. tablice o uporządkowaniu t-argument, P-funkcja, są dobrze znane, podaliśmy je także na str. 42 uważając, że może być wygodne mieć pod ręką oba uporządkowania.

3. Wyobraźmy sobie teraz, że prawdopodobieństwa nieprzekroczenia błędów ε_i figurujących w szeregu o omówionym uporządkowaniu są nam znane z dużą dokładnością, a więc np., że duża liczebność szeregu pozwala na identyfikowanie prawdopodobieństw z pozycjami obliczonymi wzorem (6) lub (7). Wówczas każda ze znanych wartości ε_i pozwoli nam obliczyć błąd średni w myśl równania:

$$m = \frac{\varepsilon_i}{t_i}; \tag{11}$$

w której wielkość ε_i jest znana z obserwacji, zaś wielkość t_i znajdziemy w tablicy funkcyjnej 4b dla argumentu $P_i = \frac{i}{N}$ lub $P_i = \frac{i-1}{N-1}$.

Będzie wówczas obojętne, którym z równań:

$$m = \frac{\varepsilon_1}{t_1}; \quad m = \frac{\varepsilon_2}{t_2}; \quad \ldots \; m = \frac{\varepsilon_N}{t_N}; \tag{12}$$

posłużymy się dla wyznaczenia m. Jeżeli szereg nie jest dostatecznie liczebny, aby można było identyfikować prawdopodobieństwa z pozycjami, wówczas obliczane z kolejnych równań wartości m będą się między sobą różnić. Będziemy je odróżniali przez postawienie przy literze m odpowiedniego wskaźnika. Będzie więc, gdy napisać to wyraźnie:

$$m_1 = \frac{\varepsilon_1}{t_1}; \quad m_2 = \frac{\varepsilon_2}{t_2}; \quad \ldots \; m_N = \frac{\varepsilon_N}{t_N}; \tag{13}$$

Możemy oczywiście, opierając się na prawie wielkich liczb, twierdzić, że w miarę wzrastania liczebności szeregu coraz mniej prawdopodobne stawać się będzie, aby wielkości pozycji (6 lub 7) znacznie różniły się od odpowiadających prawdopodobieństw, a więc — w konsekwencji — coraz bardziej prawdopodobniejsze stawać się będzie, że różnice między wielkościami m obliczanymi z poszczególnych równań (13) stawać się będą znikome. Możemy również, posługując się symboliką rachunku prawdopodobieństwa, zapisywać w ten czy inny sposób wyżej wypowiedziane sformułowanie. Nie zmieni to jednak w niczym faktu, że, o ile chodzi o realia, mieć będziemy zawsze do czynienia z układem równań (12), z którego poszukiwane wielkości m w sposób jednoznaczny obliczyć się nie daje bez postawienia dodatkowych założeń. Chodzi o to, aby założenia te były możliwie konsekwentne i dające się w rachunku liczbowym łatwo realizować. Ponieważ przy tym zagadnienie wyznaczenia „najlepszej" wartości z układu niezgodnych równań jest typowym zagadnieniem rachunku wyrównawczego, musimy rozumowanie opierać na metodzie najmniejszych kwadratów, co — przynajmniej z grubsza — narzuca już drogę rozumowania.

Można by tu zaproponować dwa różne rozwiązania, z których jedno oparte byłoby na założeniu minimalnego zniekształcenia wartości pozycji, zaś drugie na potraktowaniu wartości poszukiwanej m jako średniej ogólnej (średniej z wag) z jej różnych przybliżonych wartości (13) przy przyjęciu za wagi liczb odwrotnie proporcjonalnych do kwadratów różnic $\Delta\varepsilon$, które dają się ustalić w oparciu o prawo błędów.

Oba te różne rozwiązania prowadzą do bardzo podobnych wyników, dając tym niejako dowód, że przy zasadniczej myśli przewodniej jednakowej dla obu rozwiązań — przyjęciu założenia podstawowego normalności rozkładu — sposób uzgadniania rozbieżności jest mało istotny.

Sposób średniej ogólnej jest rachunkowo dużo wygodniejszy, choć pojęciowo nieco bardziej skomplikowany. Nim się też zasadniczo zajmiemy, poświęcając na końcu parę uwag sposobowi minimalnego zniekształcania pozycji.

4. Rozpoczniemy od wykazania, że gdy szereg błędów o dużej liczebności

$$\varepsilon_1; \quad \varepsilon_2; \ldots \quad \varepsilon_N; \tag{14}$$

podlega rozkładowi normalnemu, wówczas wartości bezwzględne odstępów $\Delta\varepsilon$ między sąsiadującymi błędami będą w przybliżeniu równe

$$\Delta\varepsilon = \frac{m}{N} \cdot \sqrt{\frac{\pi}{2}}\, e^{0,5 \cdot t^2} \tag{15}$$

Rozważajmy w tym celu trzy sąsiadujące błędy ε_{i-1}, ε_i, ε_{i+1} i niech odstępy między błędami wynoszą $\Delta\varepsilon$ to znaczy wyraźnie:

$$\varepsilon_{i+1} - \varepsilon_i = \Delta\varepsilon; \qquad \varepsilon_i - \varepsilon_{i-1} = \Delta\varepsilon;$$

Z prawa błędów Gaussa-Laplace'a wynika, że prawdopodobieństwa wystąpienia błędów w przedziałach od ε_{i-1} do ε_i oraz od ε_i do ε_{i+1} wynoszą odpowiednio:

$$p(\varepsilon_{i-1} < \varepsilon < \varepsilon_i) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \cdot e^{-h^2\varepsilon^2} \cdot \Delta\varepsilon;$$

$$p(\varepsilon_i < \varepsilon < \varepsilon_{i+1}) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \cdot e^{-h^2\varepsilon^2} \cdot \Delta\varepsilon.$$

Stąd na prawdopodobieństwo wystąpienia błędu w przedziale od ε_{i-1} do ε_{i+1} otrzymamy:

$$p(\varepsilon_{i-1} < \varepsilon < \varepsilon_{i+1}) = \frac{2 \cdot h}{\sqrt{\pi}} \cdot e^{-h^2\varepsilon^2} \cdot \Delta\varepsilon; \tag{16}$$

gdzie h jest miarą dokładności, związaną z błędem średnim związkiem:

$$h^2 \cdot m^2 = \frac{1}{2}. \tag{17}$$

Lecz z uwagi na założenie dużej liczebności szeregu możemy prawdopodobieństwo wystąpienia błędu w przedziale od ε_{i-1} do ε_{i+1}, równoważne prawdopodobieństwu wystąpienia błędu ε_i uważać za równe $\frac{1}{N}$.

Wynika stąd przy skorzystaniu z równania (16) oraz (17):

$$\frac{1}{N} = \frac{2 \cdot h}{\sqrt{\pi}} \cdot e^{-h^2\varepsilon^2} \cdot \Delta\varepsilon = \frac{2}{\sqrt{\pi} \cdot m\sqrt{2}} \cdot e^{-0,5t^2} \cdot \Delta\varepsilon; \tag{18}$$

gdzie zastąpiliśmy $\frac{\varepsilon}{m}$ przez t. Rozwiązując równanie (18) względem odstępu $\Delta\varepsilon$, otrzymamy:

$$\boxed{\Delta\varepsilon = \frac{m}{N} \cdot \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot e^{0,5t^2}} \tag{19}$$

co mieliśmy wykazać. Ponieważ czynnik, przez który mnożone jest $\frac{m}{N}$ w ostatnim równaniu może być traktowany jako funkcja P (gdzie — przypominamy — $P = P(\varepsilon < t \cdot m)$), możemy też napisać:

$$\boxed{\Delta\varepsilon = \frac{m}{N} \cdot f(P)} \tag{20}$$

Obierając szereg wartości liczbowych P, nietrudno znaleźć odpowiadające im wartości t i realizując działanie $\sqrt{\frac{\pi}{2}}\, e^{0,5\,t^2}$, stabelaryzować wartości liczbowe $f(P)$. Pozwoli to na praktyczne zweryfikowanie wzoru (19), na którym się oprzemy w dalszym ciągu przy ustalaniu wag dla wyrażeń $m_i = \frac{\varepsilon_i}{t_i}$ (por. wzory 13). Wartość odstępu $\Delta\varepsilon$ między sąsiadującymi błędami tabelaryzujemy zresztą dwukrotnie (tabl. 5): raz traktując jako argument $t = \frac{\varepsilon}{m}$, a drugi raz $P = P(\varepsilon < t \cdot m)$, niekiedy bowiem może być wygodniejsze posługiwanie się pierwszym z tych argumentów, a niekiedy drugim.

Z liczb podanych w lewej części tablicy 5 wynika, że w przedziałach:
od 0 m do 0,5 m średnia wartość odstępu wynosi 1,31 k
od 0,5 m do 1,0 m ,, ,, ,, ,, 1,70 k
od 1,0 m do 1,5 m ,, ,, ,, ,, 2,84 k
od 1,5 m do 2,0 m ,, ,, ,, ,, 6,15 k

W przykładzie na str. 6 mamy $k = \frac{m}{N} = \frac{0,465}{41} = 0,01134$. Wynika stąd, że średnie wartości odstępów powinny dla badanego tam zespołu błędów wynosić w przybliżeniu:

od 0 do 0,232 $\Delta\varepsilon = 0,015$ gdy mamy: $\frac{0,234 - 0,063}{14} = 0,012$

od 0,232 do 0,465 $\Delta\varepsilon = 0,019$,, ,, $\frac{0,458 - 0,234}{15} = 0,015$

od 0,465 do 0,698 $\Delta\varepsilon = 0,032$,, ,, $\frac{0,685 - 0,458}{8} = 0,028$

od 0,698 do 0,930 $\Delta\varepsilon = 0,070$,, ,, $\frac{0,846 - 0,685}{3} = 0,054$

Obliczenia średnich odstępów z materiału praktycznego (ostatnia ko-

Tablica 5

Wartości odstępów między sąsiadującymi błędami w rozkładzie normalnym

$t = \frac{\varepsilon}{m}$,	$\Delta\varepsilon$	$P = P\,(\varepsilon < tm)$,	$\Delta\varepsilon$
0	1,25 k	0	1,25 k
0,1	1,26 k	0,05	1,26 k
0,2	1,28 k	0,10	1,26 k
0,3	1,31 k	0,15	1,28 k
0,4	1,36 k	0,20	1,29 k
0,5	1,42 k	0,25	1,32 k
0,6	1,50 k	0,30	1,35 k
0,7	1,60 k	0,35	1,39 k
0,8	1,73 k	0,40	1,44 k
0,9	1,88 k	0,45	1,50 k
1,0	2,07 k	0,50	1,57 k
1,1	2,30 k	0,55	1,67 k
1,2	2,57 k	0,60	1,79 k
1,3	2,92 k	0,65	1,94 k
1,4	3,34 k	0,70	2,14 k
1,5	3,86 k	0,75	2,43 k
1,6	4,51 k	0,80	2,85 k
1,7	5,32 k	0,85	3,53 k
1,8	6,33 k	0,90	4,85 k
1,9	7,62 k	0,95	8,56 k
2,0	9,26 k	0,999	281,4 k
2,1	11,37 k	1	∞ k
2,2	14,09 k	Wielkość k oznacza stosunek błędu średniego do ilości błędów w szeregu	
2,3	17,65 k		
2,4	22,33 k		
2,5	28,53 k	$k = \frac{m}{N}$	
3	112,8 k		
∞	∞ k		

lumna tabl. 5) dokonano, jak widać, w ten sposób, że w tablicy błędów które wystąpiły w praktyce (str. 6), odszukano liczby najbliższe wielokrotnościom błędu średniego wyznaczającym dany przedział, po czym podzielono różnicę tych liczb przez ilość odstępów między odszukanymi błędami. Konkretnie np. ponieważ liczbami najbliższymi liczb 0,232 (połowa błędu średniego) i 0,465 (błąd średni), okazały się w wykazie błędów na str. 6 liczby 0,234 (błąd 15-ty), oraz 0,458 (błąd 30-ty), obliczono różnicę 0,458−0,234 = 0,224 i podzielono ją przez 30−15 = 15, otrzymując 0,015, jako praktyczną wartość średniego odstępu między sąsiadującymi błędami dla przedziału od 0,5 m do 1,0 m (wartość teoretyczna wyniosła 0,019).

Można oczywiście także przeprowadzać badanie, posługując się w pracy prawą połową tablicy. Tak np. ponieważ z liczb podanych tam wynika, że średnią wartością odstępu w przedziale od $P = 0$ do $P = 0{,}50$ będzie $1{,}36\ k$, czyli przy $k = 0{,}01134$ ową średnią wartością odstępu w przedziale od $P = 0$ do $P = 0{,}50$ będzie $1{,}36 \cdot 0{,}01134 = 0{,}015$, tedy możemy oczekiwać, że różnica między błędem środkowym a pierwszym w wykazie błędów na str. 6 podzielona przez ilość przedziałów, równą 19, dać winna liczbę bliską 0,015. W rzeczywistości otrzymujemy $\frac{0{,}317-0{,}063}{19} = 0{,}013$.

Można powiedzieć, że przeprowadzona „weryfikacja" materiału praktycznego dała wyniki dobre. Oczywiście taka weryfikacja nie może odnosić się do wielkości poszczególnych odstępów, lecz do wartości średnich odstępów w pewnych, nie bardzo małych, przedziałach. Zrozumiałe jest też, że wyniki weryfikacji będą w dużym stopniu zależne od ilości błędów N.

W naszym przykładzie N było bardzo niewielkie. Przy dużych wartościach N obliczanie średnich wartości odstępów daje — nawet w stosunkowo małych przedziałach — wyniki o wysokiej zgodności z teorią.

Zatrzymaliśmy się nieco dłużej nad omawianiem „weryfikacji praktycznej" wzoru (19, 20), gdyż wzór ten odegra podstawową rolę w zagadnieniu wagowania wielkości m_i obliczanych w oparciu o znajomość ε_i (por. wzory 12, 13). Będziemy mianowicie przyjmować, że jeżeli z szeregu błędów prawdziwych, który jest szeregiem o dużej liczebności, pobierzemy pewien błąd ε_i, należy mu przypisać błąd średni M_{ε_i} równy odstępowi $\Delta\varepsilon_i$, czyli będziemy przyjmować:

$$M_{\varepsilon_i}^2 = (\Delta\varepsilon_i)^2 \tag{21}$$

Należy to interpretować jak następuje. W szeregu figuruje zbiór błędów, dla których prawdopodobieństwo nieprzekroczenia ich $P' = P\ (\varepsilon < \varepsilon_i)$ nie są nam ściśle znane. Znane są natomiast „pozycje" tych błędów P_i, czyli wielkości bliskie owych prawdopodobieństw. Jeżeli chcielibyśmy poznać wartość błędu $\varepsilon_{(i)}$, który będzie odpowiadał wartości p r a w d o p o d o b i e ń s t w a P_i, należałoby nieco zmienić wielkość ε_i dodając doń lub odejmując niewielki przyrostek Δ. Wielkość tego przyrostku nie jest nam znana. Wobec jednak założenia dużej liczebności szeregu można oczekiwać, że wystarczy przyjąć $\Delta = \Delta\varepsilon_i$, czyli, wyrażając się obrazowo, że wystarczy „sięgnąć do błędów sąsiadujących bezpośrednio". Skoro jednak wartość nieznana błędu prawdziwego $\varepsilon_{(i)}$ odpowiadająca prawdopodobieństwu P_i zawarta jest pomiędzy:

$$\varepsilon_i - \Delta\varepsilon_i \quad \text{oraz} \quad \varepsilon_i + \Delta\varepsilon_i;$$

pozostaje nam przyjąć ją równą wielkości ε_i, przypisując tej ostatniej błąd średni $M\varepsilon_i = \Delta\varepsilon_i$, co też i zrobiliśmy przez napisanie wzoru (21).

Mógłby ktoś zarzucić, że nie należało przyjmować równości wielkości M i $\Delta\varepsilon$, lecz ich proporcjonalność. Nie jest to jednak istotne, gdyż przypisanie wielkościom ε błędów średnich potrzebne nam będzie do operacji wagowania, przy której w rezultacie chodzi nie o wielkości błędów średnich, lecz o ich stosunki. Pozostaniemy więc przy wzorze (21), zdając sobie sprawę, że wielkość M jest, być może, nieco większa, lub nieco mniejsza, od wielkości $\Delta\varepsilon$.

5. Możemy już rozwiązać zadanie ogólne: wyznaczenia najlepszej — z punktu widzenia metody najmniejszych kwadratów przy założeniu (21) — wartości średniego błędu m dla szeregu błędów prawdziwych o dużej liczebności:

$$\varepsilon_1; \quad \varepsilon_2; \ldots \quad \varepsilon_N; \tag{22}$$

na podstawie znajomości pewnej grupy błędów wybranej z tego szeregu:

$$\varepsilon_x; \quad \varepsilon_y; \ldots \varepsilon_z; \tag{23}$$

Wskaźniki $x, y \ldots z$ są tedy pewnymi liczbami wybranymi z pośród liczb $1, 2, \ldots N$. Wskaźnik ogólny „i" będzie teraz oznaczał którąś z liczb $x, y \ldots z$. Liczba N oznacza ilość błędów w całym szeregu (22). Ilość błędów w wybranej grupie nie będzie w rozumowaniu odgrywała roli, toteż jej nie oznaczamy. Nie jest zresztą, jak niedługo zobaczymy, ważne, ile błędów znajduje się w wybranej grupie, lecz jak te błędy są rozłożone. Mamy obecnie, nawiązując do oznaczeń wzorów (12, 13), możność obliczenia błędu średniego m z następujących równań:

$$\begin{aligned}
m_x &= \frac{\varepsilon_x}{t_x} \text{ gdzie } t_x \text{ możemy znaleźć, znając } P_x = \frac{x-1}{N-1}; \\
m_y &= \frac{\varepsilon_y}{t_y} \text{ gdzie } t_y \text{ możemy znaleźć, znając } P_y = \frac{y-1}{N-1}; \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
m_z &= \frac{\varepsilon_z}{t_z} \text{ gdzie } t_z \text{ możemy znaleźć, znając } P_z = \frac{z-1}{N-1}.
\end{aligned} \tag{24}$$

Jeżeli oznaczyć przez $w_x, w_y \ldots w_z$ wagi wielkości $m_x, m_y \ldots m_z$ obliczanych wzorami (24), wówczas wartość „najlepsza" poszukiwanego błędu średniego, czyli średnia ogólna m_0 wyrazi się wzorem:

$$m_0 = \frac{\frac{\varepsilon_x}{t_x} \cdot w_x + \frac{\varepsilon_y}{t_y} \cdot w_y \ldots + \frac{\varepsilon_z}{t_z} \cdot w_z}{w_x + w_y + w_z} = \frac{\varepsilon_x \left(\frac{w_x}{t_x}\right) + \varepsilon_y \left(\frac{w_y}{t_y}\right) \ldots + \varepsilon_z \left(\frac{w_z}{t_z}\right)}{w_x + w_y + w_z}.$$

Gdy jeszcze oznaczymy stosunki wag do odpowiadających wartości t

przez B, czyli gdy przyjmiemy:

$$\frac{w_i}{t_i} = B_i \ldots (i = x, y \ldots z); \tag{25}$$

rozwiązanie mieć będzie postać:

$$m_0 = \frac{\varepsilon_x \cdot B_x + \varepsilon_y \cdot B_y \ldots + \varepsilon_z \cdot B_z}{w_x + w_y + w_z} \quad \text{lub} \quad m_0 = \frac{[\varepsilon_i \cdot B_i]}{[w_i]}. \tag{26}$$

Ponieważ wielkość m_i $(i = x, y, z)$ wyznacza się z równania: $m_i = \frac{\varepsilon_i}{t_i}$, tedy jej błąd średni wyniesie: $M^2_{m_i} = \frac{M^2_{\varepsilon_i}}{t_i^2}$, zaś waga, przy oznaczaniu przez c dowolnej stałej, którą możemy obrać tak, aby rachunki były wygodniejsze; może być napisana pod postacią:

$$w_i = \frac{c \cdot t_i^2}{M^2_{\varepsilon_i}}.$$

Korzystając ze związków (21) i (19) otrzymamy:

$$w_i = \frac{c \cdot t_i^2}{(\Delta \varepsilon_i)^2} = \frac{c \cdot t_i^2}{\left(\frac{m}{N}\right)^2 \frac{\pi}{2} \cdot e^{t_i^2}}.$$

Jeżeli zaś dla dowolnej stałej c przyjmiemy

$$c = \left(\frac{m}{N}\right)^2 \cdot \frac{\pi}{2} \cdot e,$$

będzie

$$w_i = \frac{e \cdot t_i^2}{e^{t_i^2}} \quad \text{oraz (por. 25)} \quad B_i = \frac{e \cdot t_i}{e^{t_i^2}} \tag{27}$$

Są to wielkości, o których wspominaliśmy już na str. 10 (wzór 10) i których wartości liczbowe staberyzowaliśmy na str. 41.

Reasumując powiemy: dla rozwiązania postawionego zadania wybieramy z szeregu pewną grupę błędów, następnie według wskaźników tych błędów „i”, wskazujących ich miejsce w pełnym szeregu, obliczamy odpowiadające wartości pozycji $P_i = \frac{i-1}{N-1}$, po czym interpolujemy z tablic na str. 41 dla każdej wartości P_i odpowiadające wartości B_i oraz w_i. Wreszcie realizujemy rachunek wyznaczony wzorem (26), który tu powtarzamy:

$$m_0 = \frac{[\varepsilon_i \cdot B_i]}{[w_i]} \tag{28}$$

6. Przed zilustrowaniem raz jeszcze (por. str. 6) wzoru (28) na przykładzie, omówimy możliwości przybliżonej oceny dokładności wyznaczenia błędu średniego m_0 w oparciu o ten wzór. Rozpoczniemy od pewnej uwagi dotyczącej obrania wag. Czytelnik pomyślał być może, patrząc na wzory (27), że celowe byłoby obranie wielkości w i B e-krotnie mniejszych, tzn. przyjęcie $w = t^2/t^{t^2}$ oraz $B = t/e^{t^2}$, gdyż spowodowałoby to i prostszą postać wzorów i ułatwienie w tabelaryzacji.

Zrobiliśmy to jednak celowo, gdyż przy przyjętym obraniu wag, waga dla $t = 1$, czyli waga dla błędu ε równego błędowi średniemu, staje się jednością. Jest to wygodniejsze w rachunku i od razu pozwala zauważyć, że wyznaczając błąd średni, zrobimy to najdokładniej posługując się błędami ε położonymi w otoczeniu błędu średniego, co jest intuicyjnie zrozumiałe. Również przemawiające do intuicji jest, że, jak to widać z tablicy na str. 41 podającej wartości w, rola bardzo małych i bardzo dużych błędów jest w procesie wyznaczania błędu średniego omawianym sposobem znikoma. Już poniżej połowy błędu średniego i powyżej półtorakrotnej wartości błędu średniego wielkość wagi spada do połowy. Może więc należałoby, przy wybieraniu z szeregu błędów grupy błędów ε_x, $\varepsilon_y \ldots \varepsilon_z$, poprzestawać na błędach położonych tylko w pobliżu błędu średniego, czyli w pobliżu $t = 1$, więc $P = 0{,}68$, a zrezygnować z błędów reprezentujących cały zakres zmienności? Wydaje się, że nie byłoby to słuszne, gdyż pobranie „próbki” z całego zakresu zmienności w większym stopniu uniezależnia wynik rachunku od lokalnych odchyleń od normalności rozkładu. Przejdźmy jednak do próby oszacowania dokładności błędu średniego wyznaczonego wzorem (28). Jak wiadomo błąd średni średniej ogólnej równy jest błędowi tego składnika, któremu przypisano wagę jedność, podzielonemu przez pierwiastek z sumy wag. Dla naszego zadania będzie to miało postać:

$$\mathrm{M}_{m_0} = \frac{\mathrm{M}_{\varepsilon(w=1)}}{\sqrt{[w]}}; \tag{29}$$

gdzie oznaczyliśmy symbolem $\mathrm{M}_{\varepsilon(w=1)}$ błąd średni tego spośród błędów prawdziwych ε, któremu przypisujemy wagę jedność. Przyjęliśmy jednak (por. 21), że $\mathrm{M}_\varepsilon = \Delta\varepsilon$. Ponieważ zaś waga jedność odpowiada wielkości błędu średniego, więc wartości $t = 1$, przeto pozostaje nam w tablicy funkcyjnej (5) na str. 14 znaleźć wielkość $\Delta\varepsilon$ dla $t = 1$.

Znajdujemy $\Delta\varepsilon = 2{,}07\, k$, co po podstawieniu do (29) daje:

$$\mathrm{M}_{m_0} = \frac{2{,}07\,k}{\sqrt{[w]}} \quad \text{gdzie} \quad k = \frac{m}{N}. \tag{30}$$

Z uwagi na to, co mówiliśmy na str. 16 o pewnej dowolności w identyfikowaniu błędu średniego wielkości ε i odstępu $\Delta\varepsilon$, dowolności nieszkodliwej zresztą przy obiorze wag, lecz obecnie rzutującej na dokładność wyniku, słuszniej może będzie nie nazywać wzoru (30) wzorem na błąd średni średniego błędu, lecz nazwać go np. przybliżonym wzorem na oszacowanie błędu m_0 błędu średniego wyznaczonego wzorem (28). Napiszemy też ostatecznie te wzory pod postacią:

$$\boxed{m_0 = \frac{[\varepsilon_i \cdot B_i]}{[w_i]}; \quad \Delta m_0 \approx \frac{2{,}07\,k}{\sqrt{[w]}}, \quad \text{gdzie} \quad k = \frac{m}{N}} \tag{31}$$

Nazwa jest zresztą mało istotna. W rezultacie chodzi nam przecież tylko o poznanie rzędu wielkości zmian w obliczaniu średniego błędu, w oparciu o założenie normalności rozkładu, jakie obserwować będziemy posługując się grupami różnych błędów pobieranych z dużego szeregu N błędów prawdziwych ε. Ten rząd wielkości zmian możemy jeszcze określać na drodze rachunków praktycznych i następnie konfrontować z wzorem (31).

Zobaczymy też, że taka „konfrontacja" żadnych niespodzianek nie przynosi. Przechodzimy do ilustracji liczbowych.

Przykład liczbowy

Obliczymy dwukrotnie błąd średni zamknięcia trójkąta w sieci podanej na str. 6, raz biorąc błędy o numeracji nieparzystej, drugi raz błędy o numeracji parzystej. Tok obliczeń przedstawiony w tablicy 6 zrozumiały jest ze schematu i z wzoru (31).

7. Z wzorów (30 lub 31) widoczne jest, że dokładność wyznaczenia średniego błędu m_0 wzrasta bardzo szybko ze wzrostem ilości błędów w szeregu (błąd średniego błędu jest tu odwrotnie proporcjonalny do ilości, a nie do pierwiastka z ilości błędów, co ma miejsce dla wzoru klasycznego). Powoduje to zbędność posługiwania się w rachunku całkowitym szeregiem, jak to zrobiliśmy w ostatnim przykładzie biorąc raz wszystkie błędy o numeracji nieparzystej, a drugi raz o parzystej, i nasuwa myśl przygotowania dwóch stałych niewielkich zespołów liczbowych — nazwaliśmy je krakowianami **F** — zawierających współczynniki, przez które wystarczy mnożyć elementy dwóch odpowiadających grup błędów wybranych z całego szeregu, obliczając w ten sposób dwukrotnie błąd średni w oparciu o dwa różne zespoły liczbowe, spełniające założenie dobrej reprezentatywności, to znaczy równomiernie rozłożone w szeregu. Ta właśnie myśl została zrealizowana przy opracowaniu krakowianów **F**. Przyjęto tam założenie, że rachunek będzie wykonywany raz przy po-

Tablica 6

I. Z błędów o num. nieparzystej					II. Z błędów o num. parzystej				
i	$P_i = \frac{i-1}{N-1}$	B_i	w_i	ε_i	i	$P_i = \frac{i-1}{N-1}$	B_i	w_i	ε_i
1	0	0	0	0,063	2	0,025	0,0850	0,0030	0,078
3	0,05	0,170	0,011	0,107	4	0,075	0,2535	0,0240	0,128
5	0,10	0,336	0,042	0,133	6	0,125	0,4170	0,0660	0,144
7	0,15	0,496	0,094	0,144	8	0,175	0,5720	0,1270	0,145
9	0,20	0,646	0,164	0,145	10	0,225	0,7160	0,2045	0,154
11	0,25	0,782	0,249	0,155	12	0,275	0,8450	0,2970	0,167
13	0,30	0,903	0,348	0,171	14	0,325	0,9560	0,4010	0,196
15	0,35	1,004	0,456	0,234	16	0,375	1,0460	0,5115	0,276
17	0,40	1,083	0,568	0,286	18	0,425	1,1125	0,6240	0,289
19	0,45	1,137	0,679	0,295	20	0,475	1,1535	0,7335	0,317
21	0,50	1,164	0,785	0,317	22	0 525	1,1655	0,8325	0,320
23	0,55	1,161	0,877	0,333	24	0,575	1,1475	0,9155	0,371
25	0,60	1,126	0,948	0,378	26	0,625	1,0970	0,9735	0,408
27	0,65	1,061	0,991	0,414	28	0,675	1,0160	0,9995	0,415
29	0,70	0,962	0,997	0,457	30	0,725	0,9010	0,9840	0,458
31	0,75	0,833	0,958	0,476	32	0,775	0,7565	0,9175	0,545
33	0,80	0,674	0,864	0,586	34	0,825	0,5860	0,7945	0,619
35	0,85	0,493	0,709	0,645	36	0,875	0,3965	0,6075	0,655
37	0,90	0,299	0,492	0,679	38	0,925	0,2035	0,3620	0,685
39	0,95	0,114	0,224	0,756	40	0,975	0,0405	0,0905	0,794
41	1,00	0	0	0,846					

I:

$$[w] = 10{,}456$$

$$m_0 = \frac{[B\varepsilon]}{[w]} = \frac{4{,}84246}{10{,}456} = \underline{0{,}463_1}$$

$$\Delta m_0 = \frac{2{,}07 \cdot 0{,}46}{\sqrt{10{,}46 \cdot 41}} = \underline{0{,}007}$$

II:

$$[w] = 10{,}4685$$

$$m_0 = \frac{[B\varepsilon]}{[w]} = \frac{4{,}88353}{10{,}468} = \underline{0{,}466_5}$$

$$\Delta m_0 = \frac{2{,}07 \cdot 0{,}46}{\sqrt{10{,}47 \cdot 41}} = \underline{0{,}007}$$

Odchylenia od wartości średniej 0,465 wynoszą 0,002 oraz $-0{,}002$.

braniu tych elementów z szeregu, które scharakteryzowane są przez pozycje (ob.: tablica na str. 45):

$$P_i \rightarrow 0{,}10 \quad 0{,}20 \quad 0{,}30 \quad 0{,}40 \quad 0{,}50 \quad 0{,}60 \quad 0{,}70 \quad 0{,}80 \quad 0{,}90$$

a więc tych błędów, których wskaźnikami są liczby (por. wzór 8)

$$i \rightarrow 0{,}1\ (N-1) + 1 \ \ldots\ 0{,}9\ (N-1) + 1,$$

zaś drugi raz przy pobraniu tych elementów z szeregu, które scharakteryzowane są przez pozycje:

$P_i \to 0{,}05 \quad 0{,}15 \quad 0{,}25 \quad 0{,}35 \quad 0{,}45 \quad 0{,}55 \quad 0{,}65 \quad 0{,}75 \quad 0{,}85 \quad 0{,}95$

a więc tych błędów, których wskaźnikami są liczby:

$i \to 0{,}05\,(N-1)+1 \;\ldots\; 0{,}95\,(N-1)+1.$

Symbol N oznacza, jak zawsze, ilość błędów w całym szeregu.

Odpowiadające obranym pozycjom wartości współczynników B, wzięte z tablicy, którą czytelnik już poznał, zostały od razu podzielone przez sumy odnośnych wag, aby sprowadzić operację obliczenia średniego błędu wyłącznie do mnożenia. Ma to więc wyraźnie postać następującą:

$$m_0 = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \cdots \\ \varepsilon_z \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} B_x \\ B_y \\ \cdots \\ B_z \end{Bmatrix} \frac{1}{[w]} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \cdots \\ \varepsilon_z \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} B_x/[w] \\ B_y/[w] \\ \cdots \\ B_z/[w] \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \cdots \\ \varepsilon_z \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_y \\ \cdots \\ F_z \end{Bmatrix} = \mathbf{E}\cdot\mathbf{F}; \tag{32}$$

przy czym krakowian dla pierwszego z zespołów oznaczono $\mathbf{F}'$, dla drugiego $\mathbf{F}''$. Ponieważ sumy wag wynoszą: dla pierwszego zespołu 5,208, zaś dla drugiego 5,248, możemy obie operacje wyznaczenia: $m_0' = \mathbf{E}'\mathbf{F}'$ i $m_0'' = \mathbf{E}''\mathbf{F}''$ uznać za dokładnościowo równoważne i wyniki uśrednić:

$$m_0 = \frac{1}{2}[\mathbf{E}'\,\mathbf{F}' + \mathbf{E}''\,\mathbf{F}'']. \tag{33}$$

Dla błędu każdego z wyznaczeń będziemy mieli $\Delta m_0 = \dfrac{2{,}07}{\sqrt{5{,}2}}\,k$, gdzie $k = \dfrac{m}{N}$. Ostatecznie można to napisać pod postacią łatwą do zapamiętania:

$$\boxed{\Delta m_0 \approx \frac{m}{N} \cdots \text{dla krakowianów } \mathbf{F}} \tag{34}$$

czyli: wartość błędu oszacowania średniego błędu m_0 obliczanego za pomocą krakowianów $\mathbf{F}$ (str. 45) równa jest w przybliżeniu samemu błędowi średniemu podzielonemu przez ilość błędów w całym szeregu.

Dla skonfrontowania zgodności tego wzoru z praktyką obliczymy dla szeregu różnych sieci *) wielkości $\dfrac{m}{N}$ i porównamy je z odchyleniami od wartości m_0 obliczanej na drodze uśredniania rezultatów otrzymywanych z rachunku za pomocą krakowianów $\mathbf{F}'$ i $\mathbf{F}''$.

---

*) Są to sieci polskiej triangulacji wypełniającej, oraz cytowana już sieć Neue Folge o $N = 41$.

Oto wyniki:

Ilość błędów N	→	41	561	284	162	158	277
Błąd sredni m	→	0,463	0,420	0,446	0,417	0,416	0,396
$\Delta_{m_0} = \frac{m}{N}$	→	0,010	0,001	0,002	0,003	0,003	$0{,}001_4$
Odchylenia od średniej	→	0,005	0,002	0,002	0,001	0,002	0,002

Jak widać zgodność jest bardzo dobra. Z reguły odchylenia od średniej są mniejsze od oczekiwanego błędu oszacowania $\frac{m}{N}$, co usprawiedliwia używanie wzoru (34) w charakterze kryterium, pozwalającego przewidzieć dokładność wyniku operacji wyznaczenia średniego błędu w oparciu o założenie normalności rozkładu i użycie krakowianów **F**.

Warto może przypomnieć, że posługując się wzorem klasycznym przy użyciu wszystkich N kwadratów błędów, a więc przy rachunku o wiele uciążliwszym, osiągalibyśmy wyniki o błędach średnich średniego błędu $\frac{m}{\sqrt{2N}}$ równych odpowiednio dla rozważanych sieci:

$$\frac{m}{\sqrt{2N}} \quad 0{,}051 \quad 0{,}013 \quad 0{,}019 \quad 0{,}023 \quad 0{,}023 \quad 0{,}017$$

Nie pozwoliłoby to w żadnym z wypadków na ustalenie drugiej cyfry znaczącej w wielkości błędu średniego, na co rachunek za pomocą krakowianów **F** pozwolił niemal we wszystkich wypadkach (z wyjątkiem szeregu o 41 błędach, gdzie drugiej cyfry znaczącej nie można jeszcze uważać za pewną).

Z kolei należy wyjaśnić dlaczego przy posługiwaniu się krakowianami **F** zalecamy (por. str. 45) opieranie się na szeregach błędów o liczebności nie mniejszej od 40. Wynika to z wymagania, aby oba zbiory błędów **E**′ i **E**″, użyte do rachunku, były niezależne, to znaczy aby nie zawierały elementów wspólnych, bądź też — w wypadku interpolacji wielkości błędów odpowiadających założonym wielkościom P — aby nie zawierały elementów do wyznaczenia których posłużono się tym samym błędem ε.

Otóż będzie to zachodzić w razie posługiwania się szeregami poniżej 40 (ściślej 39) błędów. Tak np. dla $N = 38$ będziemy przy użyciu krakowianu **F**′ brać z szeregu następujące błędy:

$\varepsilon_{4,70}$ $\varepsilon_{8,40}$ $\varepsilon_{12,10}$ $\varepsilon_{15,30}$ $\varepsilon_{19,50}$ $\varepsilon_{23,20}$ $\varepsilon_{26,90}$ $\varepsilon_{30,60}$ $\varepsilon_{34,3}$

Natomiast przy użyciu krakowianu **F**″ użylibyśmy błędów

$\varepsilon_{2,85}$ $\varepsilon_{6,55}$ $\varepsilon_{10,25}$ $\varepsilon_{13,95}$ $\varepsilon_{17,65}$ $\varepsilon_{21,35}$ $\varepsilon_{25,05}$ $\varepsilon_{28,75}$ $\varepsilon_{32,45}$ $\varepsilon_{36,15}$

Łatwo zauważyć, że zarówno posłużenie się trzecim błędem z pierwszego zespołu ($\varepsilon_{12,10}$) jak i czwartym błędem z drugiego zespołu ($\varepsilon_{13,95}$), wymaga przy interpolacji oparcia się na wielkości błędu ε_{13}. Liczb więc $\varepsilon_{12,10}$ i $\varepsilon_{13,95}$ nie można uważać za niezależne. Podobnie siódmy błąd z pierwszego zespołu ($\varepsilon_{26,90}$) oraz siódmy błąd z drugiego zespołu ($\varepsilon_{25,05}$) będą wymagały przy interpolacji oparcia się na wielkości błędu ε_{26}, a więc nie będą wzajemnie niezależne. Wprawdzie dla $N = 36$, $N = 37$, $N = 39$ takie wypadki zależności nie zajdą, nie byłoby jednak wygodne cytowanie poszczególnych wielkości N, przy których zależność zajdzie i prostsze wydało się ustalenie granicy $N = 40$, poza którą można operować bez specjalnych rozważań. Jeżeli zaszłaby potrzeba rozwiązania zadania dla $N < 40$, można oczywiście do jednego zespołu włączyć błędy o numeracji nieparzystej, a do drugiego błędy o numeracji parzystej, gwarantując sobie w ten sposób niezależność w obu zespołach, i przeprowadzić rachunek nie posługując się krakowianami **F**, lecz tablicą wartości B_i i w_i, jak to zrobiliśmy w przykładzie na str. 20. Rachunek jest nieco uciążliwszy ze względu na potrzebę interpolowania wartości współczynników B_i i w_i.

Na temat dokładności oszacowania błędu średniego przy użyciu wszystkich błędów o numeracji parzystej i wszystkich błędów o numeracji nieparzystej wypowiemy jeszcze dalej parę uwag. Ponieważ nie jest to jednak tematycznie związane z krakowianami **F**, warto jeszcze powiedzieć co następuje.

Posługując się szeregami błędów o liczebności rzędu $N = 100$, możemy tu w drodze bardzo prostego procesu rachunkowego osiągnąć oszacowanie błędu średniego m_0 z dokładnością rzędu 1%. Mamy bowiem

$$\frac{\Delta m_0}{m_0} = \frac{m_0}{N \cdot m_0} = \frac{1}{N} \quad \text{co dla } N = 100 \text{ daje } 0{,}01 \text{ lub } 1\%.$$

Gdybyśmy chcieli osiągnąć taką samą dokładność oszacowania za pomocą postępowania klasycznego, musielibyśmy użyć szeregu błędów o liczebności rzędu $N = 5000$. Mamy bowiem dla błędu średniego średniego błędu

$$\frac{m_m}{m} = \frac{m}{m\sqrt{2N}} = \frac{1}{\sqrt{2N}} \quad \text{co dopiero dla } N = 5000 \text{ wyniesie } \frac{1}{100}.$$

Przyczyny stosunkowo niskiej dokładności obliczenia błędu średniego sposobem klasycznym (tj. przez sumowanie kwadratów błędów) omówimy dalej obszernie (str. 34).

8. Ponieważ przyjęliśmy za zasadę, że błąd średni m_0 ma być obliczany dwukrotnie z dwóch wzajemnie niezależnych zespołów błędów, wykluczyliśmy tym samym ewentualność obliczania błędu z wszystkich elementów jednocześnie choć — formalnie rzecz biorąc — dałoby to najdokładniejszy wynik. Możemy natomiast rozważyć jaki najdokładniejszy wynik możemy osiągnąć, nie pozostając w sprzeczności z obraną zasadą, a więc

wykorzystując wszystkie pozycje szeregu błędów, jednak używając ich do dwóch równoważnych dokładnościowo obliczeń. Jeżeli pozostaniemy przy warunku równomierności rozłożenia błędów w szeregu, ten najlepszy wynik osiągniemy zaliczając do jednego zespołu wszystkie błędy o numeracji nieparzystej, a do drugiego wszystkie błędy o numeracji parzystej (takie obliczenie przeprowadziliśmy dla szeregu 41 błędów w przykładzie na str. 20). Zajmijmy się ustaleniem wzoru na oszacowanie błędu Δm przy takim posłużeniu się raz błędami o numeracji nieparzystej, a drugi raz o parzystej, w oparciu o związek (32), który tu powtarzamy

$$m = \frac{2{,}07}{\sqrt{[w]}} k = \frac{2{,}07m}{N \cdot \sqrt{[w]}}; \tag{35}$$

Otóż łatwo zauważyć, z tablicy wartości wag w, że wartość średnia wagi w całym obszarze zmienności wynosi 0,5. Biorąc pod uwagę równomierne rozłożenie elementów w próbce, przyjąć więc możemy $[w] = 0{,}5 \frac{N}{2} = 0{,}25\, N$ (dla każdego z obu rachunków). Podstawienie tego do (35) przy oznaczeniu $\Delta m_{\text{niep.}}$ $\Delta m_{\text{parz.}}$ błędów oszacowanie średniego błędu m_0 w oparciu o rachunek z użyciem wszystkich błędów o numeracji nieparzystej i wszystkich błędów o numeracji parzystej, da następujący wzór:

$$\boxed{\Delta m_{\text{niep.}} = \Delta m_{\text{parz.}} = \frac{4{,}14m}{N \cdot \sqrt{N}}} \tag{36}$$

Tak np. dla $N = 41$, oraz $m = 0{,}46$ znajdziemy

$$\Delta m_{\text{niep.}} = \Delta m_{\text{parz.}} = \frac{4{,}14 \cdot 0{,}46}{41 \cdot \sqrt{41}} = 0{,}007_2;$$

co zresztą obliczyliśmy na str. 20, nie posiłkując się wzorem (36).

Dwukrotne obliczenie, poza innymi korzyściami, przynosi jeszcze i tę, że pozwala na oszacowanie dokładności średniej

$$m_0 = \frac{1}{2} (m_{\text{niep.}} + m_{\text{parz.}});$$

na dwóch drogach: raz jako błędu średniej $\Delta m_0 = \pm (m_{\text{niep.}} - m_{\text{parz.}})$, a drugi raz jako błędu średniej w oparciu o wzór (36), z którego po podzieleniu przez $\sqrt{2}$ otrzymamy: $\Delta m_0 = \frac{2{,}93\, m}{N \cdot \sqrt{N}}$. Tak np. dla przykładu na str. 20 otrzymalibyśmy z tych obu różnych sposobów scharakteryzowania dokładności liczby 0,002 oraz 0,005. Druga jest oczywiście bardziej miarodajna.

Przejdziemy teraz do omówienia sposobu rozwiązania rozpatrywanego zagadnienia na innej drodze (minimalne zniekształcenia pozycji).

9. Obecnie zmienimy nieco założenie wyrównawcze, rozumując jak następuje. Jeżeli wielkości m obliczone z równań (por. 12, 13):

$$\begin{aligned} m \cdot t_1 &= \varepsilon_1; \\ m \cdot t_2 &= \varepsilon_2; \\ &\dots\dots\dots \\ m \cdot t_N &= \varepsilon_N; \end{aligned} \tag{37}$$

nie są identyczne, wynika to ze zbyt małej liczebności szeregu

$$\varepsilon_1; \quad \varepsilon_2; \dots \varepsilon_N;$$

powodującej, że pozycje $P_i = \frac{i-1}{N-1}$, przyjmowane przez nas za prawdopodobieństwa przy znajdowaniu odnośnych wartości t_i są nieco różne od prawdopodobieństw $P(\varepsilon \leqslant \varepsilon_i)$, czyli od liczb, które otrzymalibyśmy dla odnośnych wielkości ε_i gdyby szereg był liczebnie niemal nieograniczony. Aby usunąć różnoznaczność rozwiązań z poszczególnych równań układu (37) można więc zniekształcać wielkości P_i nadając im drobne poprawki ΔP_i, powodujące takie zmiany odpowiadających wartości t_i, oznaczajmy te zmiany Δt_i, które doprowadzą układ do zgodności.

Układ więc — napiszmy to wyraźnie —

$$\begin{aligned} m\,(t_1+\Delta t_1) &= \varepsilon_1; \\ m\,(t_2+\Delta t_2) &= \varepsilon_2; \\ &\dots\dots\dots\dots \\ m\,(t_N+\Delta t_N) &= \varepsilon_N \end{aligned} \tag{38}$$

ma być układem zgodnym, pozwalającym na jednoznaczne obliczenie m.

Powstaje pytanie jaką zasadą kierować się przy uzgadnianiu? Otóż, ponieważ za szereg wyjściowy przyjmujemy zawsze szereg o stosunkowo dużej liczebności, wydaje się konsekwentne postawienie założenia, aby zniekształcenia wielkości P_i były możliwie małe, a więc, aby suma ich kwadratów była najmniejszością

$$\Delta P_1^2 + \Delta P_2^2 \dots + \Delta P_N^2 = \text{minimum} \tag{39}$$

Postawienie tego założenia, jak to zaraz udowodnimy, prowadzi do wniosku, że za wartość wyrównaną poszukiwanego błędu średniego m należy przyjąć ułamek

$$m = \frac{[\varepsilon_i^2 \alpha_i]}{[\varepsilon_i \beta_i]}; \tag{40}$$

gdzie współczynniki, których wartości liczbowe podano na str. 42, mają następujące znaczenie:

$$\alpha_i = \left(\frac{dP}{dt}\right)_i^2; \quad \beta_i = t_i \cdot \alpha_i. \tag{41}$$

Podobnie jak w sposobie poprzednio rozpatrzonym możemy przy tym posiłkować się nie całym szeregiem, a pewnymi wybranymi zespołami błędów.

Pamiętać jednak oczywiście należy, że wielkości pozycji

$$P_i = \frac{i-1}{N-1};$$

muszą być odniesione do całego szeregu, to znaczy N oznacza zawsze liczbę błędów w całym szeregu, a nie w pobranej „próbce".

Dowód słuszności wzorów (40, 41) w oparciu o założenie (39) przeprowadzić można jak następuje. Z i-tego równania układu (38) tj. z równania $m(t_i+\Delta t_i) = \varepsilon_i$, po podstawieniu doń na wielkość Δt_i wartości $\Delta t_i = \left(\frac{dt}{dP}\right)_i \cdot \Delta P_i$, mieć będziemy

$$m \cdot t_i + m \cdot \left(\frac{dt}{dP}\right)_i \cdot \Delta P_i = \varepsilon_i$$

lub

$$\frac{\varepsilon_i}{m} = t_i + \left(\frac{dt}{dP}\right)_i \cdot \Delta P_i.$$

Po pomnożeniu tego równania przez wielkość $\left(\frac{dP}{dt}\right)_i = \frac{1}{\left(\frac{dt}{dP}\right)_i}$ otrzymamy

$$\left(\varepsilon_i \left(\frac{dP}{dt}\right)_i\right) \cdot \frac{1}{m} = \left(t_i \left(\frac{dP}{dt}\right)_i\right) + \Delta P_i. \tag{42}$$

Jest to już typowe „równanie błędu" metody najmniejszych kwadratów, zawierające niewiadomą $\frac{1}{m}$ oraz poprawkę ΔP_i, oznaczane tradycyjnie w metodzie najmniejszych kwadratów

$$a_i \cdot x = l_i + v_i.$$

Pisząc takie równanie błędów dla każdego z równań układu (38), ewentualnie dla równań odnoszących się do pobranej „próbki", otrzymamy układ równań błędów prowadzący do układu równań normalnych, a właściwiej do równania normalnego $[aa] \cdot x = [al]$, to znaczy dla naszego wypadku

$$\left[\varepsilon_i^2 \left(\frac{dP}{dt}\right)_i^2\right] \cdot \frac{1}{m} = \left[\varepsilon_i \cdot t_i \left(\frac{dP}{dt}\right)_i^2\right].$$

Sumowanie odbywa się oczywiście w przyjętych granicach, to znaczy dla całego szeregu, jeżeli tak zdecydowaliśmy, bądź dla obranej próbki. Wyznaczając z tego równania poszukiwaną wartość m otrzymujemy:

$$m = \frac{\left[\varepsilon_i^2 \cdot \left(\frac{dP}{dt}\right)_i^2\right]}{\left[\varepsilon_i \cdot t_i \left(\frac{dP}{dt}\right)_i^2\right]}.$$

Przy oznaczeniach (41) przybiera to postać

$$m = \frac{[\varepsilon_i^2 \cdot \alpha_i]}{[\varepsilon_i \cdot \beta_i]};$$

co wyraża wzór (40) i czego mieliśmy dowieść.

10. Z porównania wzoru (40) odnoszącego się do sposobu opartego na założeniu minimalnego zniekształcenia pozycji, który nazywać będziemy w skróceniu „sposób alfa beta", z wzorem (28), odnoszącym się do sposobu średniej z wag, który nazywać będziemy w skróceniu „sposób *BW*" wynika, że przeprowadzenie rachunków za pomocą sposobu $\alpha\beta$ jest około trzykrotnie pracochłonniejsze od przeprowadzenia rachunków za pomocą sposobu *BW*. Jeżeli pomimo tego podaliśmy tablicę wartości współczynników α, β (str. 42), zrobione to zostało wyłącznie dla umożliwienia porównania rezultatów rachunku za pomocą obu tych sposobów.

Każde bowiem obliczenie wielkości błędu średniego w oparciu o skończoną ilość błędów (nie wyłączając obliczenia klasycznego), oparte być musi na postawieniu pewnego założenia, nacechowanego z konieczności pewną dowolnością. Sprawdzenie więc wyników w rachunku przy oparciu się na nieco innych założeniach będzie zawsze stanowiło cenne kryterium.

Sposoby *BW* i $\alpha\beta$, jak widzieliśmy, oparte były na tym samym założeniu naczelnym normalności rozkładu, lecz na innych założeniach wyrównawczych (pierwsze z założeń było bardziej sprecyzowane pod względem wyrównawczym przez wprowadzenie wag, drugie było prostsze pojęciowo).

Wynikałoby stąd, że przy dużej liczebności całego szeregu winniśmy oczekiwać praktycznie jednakowych wyników przy posługiwaniu się bądź jednym, bądź drugim sposobem. Przy małej liczebności szeregu mogą występować pewne różnice, przy czym trudno jest zdecydować, którą odpowiedź należy uznać za trafniejszą. Pozostawałby więc wówczas raczej uniwersalny środek uśrednienia wyników. Rachunki praktyczne potwierdzają w pełni te przewidywania. Tak np., gdy z sieci o 561 błędach zamknięcia trójkątów wybierzemy błędy o numerach 100, 200, 300, 400, 500, a więc próbkę bardzo niedużą, i przeprowadzimy rachunek oboma sposobami, otrzymamy wyniki „praktycznie identyczne",, tzn. różniące się w jednostkach, w których podane zostały wyniki obserwacji. Poniżej podajemy rachunek.

Sposób BW

i	ε	$P=\frac{i-1}{N-1}$	B	w
100	0,108	0,1768	0,5774	0,1295
200	0,197	0,3554	1,0137	0,4679
300	0,307	0,5339	1,1646	0,8490
400	0,445	0,7125	0,9328	0,9918
500	0,618	0,8911	0,3337	0,5347
				2,9729

$$m_{BW}=\frac{[\varepsilon\cdot B]}{[w]}=\frac{1{,}24091}{2{,}9729}=0{,}417_4.$$

Sposób $\alpha\beta$

i	ε	ε^2	$P=\frac{i-1}{N-1}$	α	β
100	0,108	0,011664	0,1768	0,6056	0,1353
200	0,197	0,038809	0,3554	0,5146	0,2373
300	0,307	0,094249	0,5339	0,3742	0,2727
400	0,445	0,198025	0,7125	0,2054	0,2184
500	0,618	0,381924	0,8911	0,0487	0,0781

$$m_{\alpha\beta}=\frac{[\varepsilon^2\cdot\alpha]}{[\varepsilon\cdot\beta]}=\frac{0{,}121577}{0{,}290533}=0{,}418_5.$$

Wielkości $m_{BW}=0{,}417$ oraz $m_{\alpha\beta}=0{,}418$ są, jak widać, „praktycznie identyczne" w znaczeniu jakie nadaliśmy wyżej temu wyrażeniu.

Warto też zauważyć, że jeżeli posłużymy się wzorem (31) na oszacowanie błędu Δm błędu średniego obliczonego sposobem BW, dojdziemy również do wniosku o niepewności w trzecim miejscu za przecinkiem. Mamy bowiem

$$\Delta m_{BW}=\frac{2{,}07\cdot m}{\sqrt{[w]\cdot N}}=\frac{2{,}07\cdot 0{,}42}{\sqrt{2{,}97\cdot 561}}=\frac{0{,}8694}{967}=0{,}001.$$

Jeżeli z kolei weźmiemy z sieci o 41 błędach zamknięcia trójkątów (str. 20) próbkę zawierającą wszystkie błędy o numeracji nieparzystej, a więc próbkę o dużej dość liczebności, otrzymamy w wyniku rachunku oboma sposobami następujące rezultaty

sposób BW	0,463	analogicznie dla błędów	sposób BW	0,466
sposób $\alpha\beta$	0,477	o numeracji parzystej	sposób $\alpha\beta$	0,480
średnia	0,470		średnia	0,473

Tu — z uwagi na małą liczebność całego szeregu — rozbieżności zgodnie z przewidywaniami są większe, rzędu 0,007. Będzie to jednak znowu zgodne z wzorem na oszacowanie błędu Δm błędu średniego obliczonego sposobem *BW*. Otrzymamy bowiem, stosując wzór (31)

$$\Delta m_{BW} = \frac{2{,}07 \cdot m}{\sqrt{[w] \cdot N}} = \frac{2{,}07 \cdot 0{,}47}{\sqrt{10{,}4 \cdot 41}} = \frac{0{,}9729}{132} = 0{,}007,$$

gdzie wykorzystaliśmy sumę wag 10,4 z przykładu na str. 20.

Ogólnie powiedzieć można, w oparciu o przeprowadzone badania rachunkowe, że poczynając od szeregów 100 czy 150 błędów różnice w wynikach obliczenia oboma sposobami stają się zupełnie znikome. Jednocześnie jednak przy szeregach o takiej liczebności stają się również znikome różnice między wynikami obliczenia z jednej strony sposobem *BW* lub $\alpha\beta$ przy użyciu do tego rachunku w s z y s t k i c h błędów, a z drugiej strony wynikami obliczenia za pomocą krakowianów **F**, a więc takiego wariantu sposobu *BW* w którym posługujemy się tylko dwiema próbkami po 9 i 10 błędów.

Oto zestawienie porównawcze dla błędów zamknięcia sieci polskich

Tablica 7

Ilość błędów N	Przy użyciu wszystkich błędów uzyskano wyniki			Za pomocą krakowianów **F**	Sposobem klasycznym $\sqrt{\frac{[ee]}{N}}$	Błąd średni śred. błędu szac. klas.
	BW	$\alpha\beta$	średnia			
561	0,421	0,422	**0,421**	**0,420**	0,390	0,012
284	0,445	0,447	**0,446**	**0,446**	0,409	0,017
162	0,418	0,421	**0,419**	**0,417**	0,374	0,021
158	0,416	0,418	**0,417**	**0,416**	0,379	0,021
277	0,396	0,397	**0,396**	**0,396**	0,370	0,016

W zestawieniu tym uderza wysoka zgodność między sposobami *BW* i $\alpha\beta$ z jednej strony, a z drugiej strony stosunkowo duże różnice w szacowaniu błędu średniego w oparciu o te sposoby i w oparciu o sposób klasyczny. Przyczyny powstawania tych różnic postaramy się wyjaśnić.

11. Przy obliczaniu błędu średniego m z szeregu błędów prawdziwych

$$\varepsilon_1; \quad \varepsilon_2; \quad \dots \quad \varepsilon_N;$$

w oparciu o wzór klasyczny

$$m_{kl} = \sqrt{\frac{[\varepsilon\varepsilon]}{N}};$$

można oczekiwać poprawnych rezultatów jeżeli rozkład częstości względnych w danym szeregu błędów jest zbliżony do rozkładu prawdopodobieństw w rozkładzie normalnym. Jeżeli ta przybliżona zgodność rozkładów nie zachodzi, a w szczególności jeżeli częstości występowania błędów o dużej wartości bezwzględnej są znacznie większe, lub znacznie mniejsze od odpowiadających prawdopodobieństw w rozkładzie normalnym, obliczenie za pomocą wzoru klasycznego musi dawać i daje wyniki wadliwe. Nazwijmy umownie błędami „dużymi" błędy przekraczające dwukrotny błąd średni. Ponieważ wartość przybliżona błędu średniego jest zawsze znana wykonawcy prac geodezyjnych stosunkowo dokładnie, (w szczególności może on ją obliczyć bądź to stosując wzór klasyczny, bądź — nieco prędzej — mnożąc środkowy błąd szeregu przez 1,483), tedy ilość błędów dużych w każdym szeregu jest znana. Można więc bez trudności obliczyć częstość względną występowania tych błędów i porównać ją z prawdopodobieństwem przekroczenia podwójnego błędu średniego w rozkładzie normalnym, to znaczy z liczbą 0,0455. Tego rodzaju porównania prowadzą, ogólnie rzecz biorąc, do wniosku, że błędy duże występują znacznie rzadziej, niż wynikałoby to z prawa rozkładu. Ich procentowa ilość, zamiast oczekiwanej ilości 4,55%, waha się raczej około 2%. Nie będziemy rozważać, dlaczego tak jest. Być może wynika to w dużym stopniu stąd, że wykonawca pracy, znający przybliżoną wartość błędu średniego, ma przeważnie możliwość skonstatowania wystąpienia błędu dużego i usuwa go przez dokonanie nowego pomiaru w lepszych warunkach. Nie będziemy też zakładać, że zjawisko występowania dużych błędów w mniejszej ilości, niżby należało oczekiwać, jest regułą ogólną.

Byłoby to ograniczaniem rozważań, niesłusznym już choćby z tego względu, że — choć bardzo rzadko — zdarzają się jednak niekiedy wypadki nadmiaru błędów dużych. W literaturze geodezyjnej takim przykładem jest np. sieć triangulacyjna indyjska, cytowana u Helmerta (Die Ausgleichungsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate. Berlin 1924), gdzie w szeregu błędów zamknięć trójkątów spotykamy około 6% błędów przekraczających dwukrotny błąd średni, a więc według naszej nomenklatury umownej błędów „dużych".

Przystępujemy do omówienia możliwości zmniejszenia wpływu występowania nieco mniejszej, lub nieco większej liczby błędów dużych, niż to przewiduje rozkład normalny. Najprostszą drogą wydaje się być usunięcie z szeregu błędów „dużych" i opiniowanie o wielkości błędu średniego w oparciu o błędy pozostałe.

Rozumowanie miałoby przebieg następujący. Niech N będzie liczbą błędów w całym szeregu, zaś n liczbą błędów przekraczających podwójny błąd średni, przy czym sumę kwadratów tych ostatnich błędów oznaczymy przez $[\varepsilon'\varepsilon']$. Na sumę kwadratów wszystkich błędów szeregu $[\varepsilon\varepsilon]$ złożą się więc dwie następujące grupy błędów:

a) N-n błędów nie przekraczających podwójnego błędu średniego, oraz

b) n błędów przekraczających podwójny błąd średni.

Ponieważ w rozkładzie normalnym wartość oczekiwana kwadratu błędu w granicach od zera do podwójnego błędu średniego wynosi 0,774 m^2, tedy licząc na zgodność rozkładu częstości z rozkładem normalnym w granicach pierwszej grupy, oszacujemy sumę kwadratów błędów tej grupy jako 0,774 $m^2 \cdot (N-n)$. Dodając do tego sumę kwadratów błędów grupy drugiej, znaną nam z obliczenia bezpośredniego i równą $[\varepsilon'\varepsilon']$, otrzymamy znaną sumę kwadratów wszystkich błędów $[\varepsilon\varepsilon]$. Obliczenie z równania

$$0{,}774\ m^2 \cdot (N-n) + [\varepsilon'\varepsilon'] = [\varepsilon\varepsilon];$$

wielkości błędu średniego m daje

$$m^2 = \frac{[\varepsilon\varepsilon]-[\varepsilon'\varepsilon']}{(N-n)\cdot 0{,}774};$$

lub

$$\boxed{m = 1{,}137 \cdot \sqrt{\frac{[\varepsilon\varepsilon]-[\varepsilon'\varepsilon']}{N-n}}} \tag{43}$$

Jak widać wzór jest bardzo prosty. Wymaga on w rezultacie obliczenia pierwiastka z średniej wartości kwadratu błędów dla błędów nie przekraczających dwukrotnego błędu średniego i pomnożenia wyniku pierwiastkowania przez stałą 1,137. Ponieważ przy tym suma kwadratów $[\varepsilon\varepsilon]$ i tak bywa zazwyczaj obliczana, tedy czynności rachunkowe sprowadzają się do odjęcia od tej sumy kilku (czy kilkunastu) kwadratów, podzielenia jej przez $N-n$, spierwiastkowania i pomnożenia przez 1,137. Warto też podkreślić, że sposób ten nie wymaga porządkowania błędów co do ich wielkości, gdyż wyszukanie z nie uporządkowanego szeregu błędów kilku (czy kilkunastu) błędów największych jest czynnością prostą nawet bez porządkowania szeregu. W sposobach Bw, $\alpha\beta$, czy też sposobach, jakie można by otrzymać ściślej precyzując założenia ostatniego rozumowania, opierającego się na pojęciu wartości oczekiwanej kwadratu błędu w pewnym przedziale, czynność uporządkowania błędów co do ich wartości jest niezbędna.

Warunkiem osiągania jednoznacznych wyników za pomocą wzoru (43) jest ustalenie jaką wielkość błędu średniego będziemy uważali za obowiązującą przy podejmowaniu decyzji, które błędy mamy uważać za „duże”, tzn., które kwadraty błędów mamy usunąć z szeregu. Jeżeli bowiem przyjmiemy raz za punkt wyjścia wielkość błędu średniego ustaloną wzorem klasycznym, a drugi raz ustaloną np. za pomocą krakowianów **F**, lub też wielkość obliczoną wzorem klasycznym po jej skorygowaniu itp., otrzymywać będziemy nieco inne rezultaty, zresztą bardzo mało się różniące. Dla osiągnięcia jednolitości interpretacji można by też przyjąć zasadę, że za błędy „duże" uważać będziemy wszystkie te błędy, których wartość bezwzględna przekracza trzykrotną wartość błędu zajmującego środkowe miejsce w szeregu.

Zasada jest prosta i łatwa do zapamiętania, a umotywować ją można, zważywszy, że błąd środkowy w szeregu pomnożony przez 1,483 winien dać z dużym przybliżeniem błąd średni (tzw. kryterium błędu prawdopodobnego), a więc pomnożony przez $1{,}483 \cdot 2 = 2{,}97$, czyli okrągło 3, winien dać podwójny błąd średni. Można wówczas napisać wzór (43) jak następuje:

$$m = 1{,}137\sqrt{\frac{[\varepsilon\varepsilon]-[\varepsilon'\varepsilon']}{N-n}} \tag{44}$$

gdzie ε' błędy większe od potrójnego błędu środkowego w szeregu, zaś n ich ilość.

Zasada jest prosta, ma jednak tę wadę, że odszukanie błędu środkowego w szeregu wymaga uporządkowania szeregu, czego nie wymaga obliczenie błędu średniego z wzoru klasycznego. Wyniki są zresztą — jak to już nadmienialiśmy — niemal identyczne. Można by również przyjąć bardzo konsekwentną zasadę, że za miarodajną wartość błędu średniego przyjmiemy średnią z oszacowania klasycznego i skorygowanego. Stosując pierwszą z proponowanych zasad (błędu środkowego) otrzymuje się dla badanych sieci, do których dołączyliśmy jeszcze sieć Helmerta wyżej wzmiankowaną, następujące wyniki:

N	561	284	162	158	277	41.N.F.	51, Hel.
m	0,429	0,451	0,425	0,425	0,408	0,478	0,827

Przy drugiej z proponowanych zasad (szacunek klasyczny i skorygowany) otrzymuje się:

0,423 0,444 0,418 0,417 0,407 0,468 0,827

Oszacowanie za pomocą krakowianów **F** daje

0,421 0,446 0,417 0,416 0,396 0,465 0,834

Z oszacowania klasycznego bez żadnej korekty otrzymuje się

0,390 0,409 0,374 0,379 0,370 0,420 0,863

Podajemy jeszcze procentowe ilości przekroczenia podwójnego błędu średniego (ewentualnie potrójnego błędu środkowego):

1,1% 0,7% 0,0% 0,6% 1,4% 0,0% 5,9%

Jest widoczne — czego zresztą należało oczekiwać — że oszacowanie klasyczne bez korekty wydatnie obniża wielkość błędu średniego gdy liczby procentowe są mniejsze od 4,5%, oraz wydatnie podwyższa gdy liczby te są większe od 4,5%. Jest też wyraźne — o czym już mówiliśmy — że szacowanie oparte o normalność rozkładu pozwala na ogół ustalić drugą cyfrę znaczącą w wielkości błędu średniego, od czego szacowanie klasyczne jest bardzo dalekie.

Streszczenie i uwagi końcowe

Reasumując powyższe z dodaniem paru uwag, które nasunęły się autorowi w czasie reasumpcji, powiedzieć można co następuje:

a) Obliczenie błędu średniego w oparciu o znajomość szeregu błędów prawdziwych

$$\varepsilon_1; \quad \varepsilon_2; \quad \ldots \quad \varepsilon_N; \tag{45}$$

na drodze realizacji wzoru klasycznego

$$m_{kl} = \sqrt{\frac{[\varepsilon\varepsilon]}{N}}; \tag{46}$$

prowadzi do otrzymywania rezultatów bardzo niedokładnych nawet przy stosunkowo dużej liczebności szeregu błędów. Tak np. z wzoru na błąd średni średniego błędu

$$m_m = \frac{m}{\sqrt{2N}}; \tag{47}$$

wynika, że pomimo rozporządzania szeregiem 200 błędów, otrzymamy jeszcze błąd średni średniego błędu równy 5% samego błędu.

b) Praktyka rachunkowa nie tylko potwierdza tę niemożność stosunkowo dokładnego wyznaczenia wielkości średniego błędu w oparciu o wzór klasyczny, lecz jednocześnie pozwala skonstatować pewną właściwość rozkładu częstości w szeregach błędów obserwacji geodezyjnych, powodującą specjalną nieprzydatność wzoru klasycznego do tego rodzaju rachunków.

Tą właściwością jest znacznie mniejsza przeważnie częstość występowania błędów „dużych", tj. przekraczających podwójny błąd średni, niżby to wynikało z prawa rozkładu normalnego. Zamiast oczekiwanych w myśl prawa rozkładu około 4,5%, błędów przekraczających podwójny błąd średni, konstatujemy przeważnie około 2% takich błędów.

Zjawisko wynika prawdopodobnie stąd, że w obserwacjach geodezyjnych wykonawca znający dość dokładnie wartość błędu średniego, jest w możności skonstatowania w czasie pomiaru wystąpienie błędu „dużego", i ponownego dokonania obserwacji w lepszych warunkach. Nie można go oczywiście winić z tytułu takiego „zniekształcenia materiału", gdyż w pracach geodezyjnych z natury rzeczy nie chodzi, jak w statystyce, o zgromadzenie dużego materiału pozwalającego na wyciąganie wniosków o właściwościach badanej zbiorowości, lecz o osiągnięcie precyzji wyników. Statystyk usuwający z gromadzonego zbioru wariant znacznie odbiegający od wartości średniej byłby oczywiście nie w porządku i mógłby narazić się na zarzut złej woli (gdyby np. chodziło o badanie jakości towaru), lub ignorancji (np. przy pomiarach biometrycznych). Wprost przeciwnie miałaby się sprawa z geodetą. Pozostawienie przezeń w szeregu błędów błędu rzędu 2,5 *m* czy 3 *m* naraziłoby go na zarzut partactwa, nie mówiąc już o błędach jeszcze większych, uznawanych tradycyjnie za „nieprzypadkowe". Te parę uwag, być może luźno związanych z tematem, pozwoliłem sobie umieścić dlatego, że istnieją niekiedy ludzie, którzy chcieliby mechanicznie przenosić wnioski z rozumowań statystycznych w dziedzinę pomiarów inżynieryjnych. Podkreślanie więc różnic między elementami rozumowania tych dziedzin wydaje się celowe i zgodne jest z następującym skonstatowaniem Gliwenki, podanym w jego „Rachunku prawdopodobieństwa" (tłum. polskie, Warszawa Wrocław 1953): „Historia zastosowania statystyki w konkretnych naukach wykazała, że owocne wyniki i rzeczywiste wniknięcie w istotę rzeczy otrzymywano tylko tam, gdzie materiał stanowiący przedmiot badania nie tylko był badany statystycznie, lecz także był studiowany przez daną konkretną naukę".

W wypadku skrajnym, lecz w praktyce często zachodzącym, niewystąpienia żadnego błędu przekraczającego dwukrotny błąd średni, zaniżenie wielkości średniego błędu obliczanej wzorem klasycznym dochodzić będzie do 13%.

Ponieważ jednak owa stosunkowo mała częstość występowania błędów dużych nie jest regułą ogólną, gdyż, choć rzadko, jednak zachodzą wypadki przeciwne, gdzie procentowa ilość błędów przekraczająca podwójny średni jest większa od 4,5%, tedy nie może tu być mowy o jakimś generalizowaniu zjawiska i powiększaniu każdego wyniku oszacowania klasycznego, lecz iść trzeba po linii stosowania takich sposobów obliczania średniego błędu, których wyniki byłyby zależne od przypadkowego wystąpienia czy niewystąpienia błędu „dużego", niż to ma miejsce w metodzie klasycznej.

Sposoby takie oprzeć można na założeniu, że błędy pomiarów podlegają rozkładowi normalnemu, z którego to założenia rezygnuje wzór klasyczny (46), choć stawia się je przy konstruowaniu wzoru (47) na błąd średni średniego błędu. W stosunku do błędów pomiarów geodezyjnych postawienie założenia normalności rozkładu wydaje się tak mocno umotywowane, że omawianie tematu można by uważać za zbędne. Warto może jednak przypomnieć, że:

1. Subtelne kryteria rachunku prawdopodobieństwa (kryterium „chi", kryterium Kołmogorowa), stosowane do szeregów błędów pomiarów geodezyjnych, nigdy nie prowadzą do wniosku o usprawiedliwieniu odrzucenia założenia normalności rozkładu.

2. Teoria rozkładu normalnego powstała na gruncie matematycznego uogólnienia molekularnej teorii błędu, której założenia postawione zostały w wyniku analizy błędów występujących właśnie przy pomiarach geodezyjnych.

3. W miarę wzrastania liczebności szeregu błędów zgodność między częstościami względnymi i odpowiadającymi prawdopodobieństwami rozkładu normalnego staje się tak wyraźna, że wyrzeczenie się założenia normalności rozkładu nie byłoby niczym umotywowane.

Przyjęcie założenia normalności rozkładu otwiera od razu możliwość dużo dokładniejszego rozwiązywania zadania wyznaczenia średniego błędu. Po uporządkowaniu bowiem według rosnącej wartości bezwzględnej błędów w szeregu o dużej liczebności, w zasadzie każdy wybrany błąd ε_i z tego szeregu pozwalać nam już będzie na niezależne obliczenie wielkości błędu średniego. (Możemy mianowicie — stosunek ilości błędów nieprzekraczających błędu wybranego do ilości wszystkich błędów w szeregu, czyli częstość względną zdarzenia: „błąd nie przekroczył błędu ε_i" — utożsamiać z prawdopodobieństwem nieprzekroczenia t-krotnego błędu średniego w rozkładzie normalnym, co prowadzi do równania pozwalającego wyznaczyć m).

Oczywistą jest rzeczą, że wyniki obliczenia wielkości średniego błędu z różnych błędów, czy z różnych grup błędów, wybranych z szeregu, nie będą wykazywać jednoznaczności i że zachodzić będzie potrzeba takiego, czy innego, uzgodnienia rozbieżności. Szczegóły te omówiliśmy w pracy. W streszczeniu chodzi mi tylko o podkreślenie faktu istnienia dużej ilości danych nadliczbowych, wynikającego ze sprecyzowania prawa rozkładu, tj. z założenia jego normalności. W sposobie klasycznym nie spotykamy się z możliwością podniesienia dokładności przez wykorzystanie materiału nadliczbowego. Dopóki bowiem nie sprecyzujemy prawa rozkładu, dane nadliczbowe nie istnieją. Dlatego obliczenie klasyczne musi być mniej dokładne od proponowanych. Wyrazem tej wyższej dokładności wyznaczenia błędu średniego sposobami opartymi na założeniu normalności rozkładu jest m. in. wysoka zgodność wyników otrzymywanych różnymi sposobami opartymi na tym założeniu podstawowym (operowanie różnymi grupami błędów, rozważanie bądź błędów, bądź sum kwadratów błędów w różnych przedziałach, odmienne podchodzenie do problemu uzgodnienia itp. itp.). Zgodność między wynikami sposobów opartych na założeniu normalności z jednej strony, a wynikami sposobu klasycznego z drugiej zachodzi wtedy, gdy nie występuje zjawisko wydatnego nadmiaru czy niedomiaru błędów dużych deformujące wyniki szacowania klasycznego a w mniejszym stopniu wpływające na wyniki sposobów przyjmujących normalność rozkładu, które, jak możnaby powiedzieć obrazowo, podejmują decyzję nie tyle w oparciu o zakłócenia lokalne, ile o układ sił w całości.

Przechodzimy do omówienia najważniejszych rozważonych w pracy sposobów obliczenia błędu średniego w oparciu o założenie normalności rozkładu.

c) Najprostszym sposobem jest wyeliminowanie z szeregu tych błędów, które przekraczają podwójny błąd średni i zadecydowanie o wielkości średniego błędu z błędów zawartych w granicy od 0 do 2 m. Przy oznaczeniu przez $[\varepsilon\varepsilon]$ sumy kwadratów wszystkich N błędów, zaś przez $[\varepsilon'\varepsilon']$ sumy kwadratów tych n błędów, które przekraczają podwójny błąd średni, prowadzi to do wzoru:

$$m = 1{,}137 \sqrt{\frac{[\varepsilon\varepsilon]-[\varepsilon'\varepsilon']}{N-n}} \tag{48}$$

Wzór posiada zaletę wielkiej prostoty i nie wymaga porządkowania błędów w szeregu co do ich wielkości. Odszukanie bowiem kilku błędów przekraczających 2 m jest łatwe nawet bez porządkowania szeregu. Przybliżoną wartość 2 m potrzebną do podjęcia decyzji, które błędy przekraczają podwójny średni, obliczyć można z oszacowania klasycznego. Jeżeli błędy w szeregu zostały uporządkowane co do wielkości, można przyjąć za 2 m potrójną wartość błędu zajmującego w uporządkowanym szeregu miejsce środkowe: $2\,m \approx 3,\ \varepsilon_{\text{środ}}$.

Wadą wzoru jest oczywiście pewna dowolność w obieraniu granicy przedziału między błędami użytymi do rachunku i wyeliminowaniu zeń.

d). Sposobami ogólnymi, które pozwalają na obliczenie wartości średniego błędu z dowolnej próbki pobranej z szeregu (45), a więc w szczególności i z wszystkich elementów tego szeregu — ciągle przy założeniu uporządkowania szeregu — są sposoby nazwane w pracy „sposób Bw”, oraz „sposób $\alpha\beta$”. Oba one wymagają pobrania z uporządkowanego szeregu próbki, przyporządkowania elementom tej próbki liczb, nazywanych „pozycjami elementów w szeregu” P_i, przy czym

$$P_i = \frac{i-1}{N-1}, \text{ lub przy bardzo dużym } N \quad P_i = \frac{i}{N}, \tag{49}$$

oraz przeprowadzenia rachunku, wyznaczającego wartość m w oparciu o wielkości elementów wybranych ε_i i ich pozycje P_i.

Rachunek ten dla sposobu *Bw* realizuje się za pomocą wzoru

$$m_{Bw} = \frac{[B\varepsilon]}{[w]}; \tag{50}$$

przy czym wartości współczynników B_i, w_i bierze się z tablic funkcyjnych dla argumentu P_i (str. 41).

Rachunek wyznaczenia m dla sposobu $\alpha\beta$ realizuje się za pomocą wzoru

$$m = \frac{[\alpha\varepsilon^2]}{[\beta\varepsilon]}; \tag{51}$$

przy czym wartości współczynników $\alpha\beta_i$ bierze się z tablic funkcyjnych dla argumentu P_i (str. 42).

Rachunek (50 wzgl. 51) realizuje się przynajmniej dwukrotnie, obierając za każdym razem inne elementy próbki. Ilość elementów w próbce nie powinna być mniejsza od 9, przy czym pożądane jest, aby były one w miarę możności równomiernie rozłożone. Suma współczynników w_i, zwanych w tekście „wagami", nie powinna być mniejsza od 4. Błąd średni oszacowania średniego błędu jest wielkością rzędu

$$\frac{2{,}07m}{N \cdot \sqrt{[w]}}. \tag{52}$$

Obydwa sposoby *Bw* oraz $\alpha\beta$ rozwiązują więc zadanie następujące, którego w oparciu o wzór klasyczny (46) rozwiązać nie można: znana jest ilość błędów w szeregu uporządkowanym oraz wielkości kilkunastu błędów i ich miejsca w szeregu — wyznaczyć należy błąd średni.

Jedynym warunkiem przy spełnieniu którego rozwiązanie ma wartość praktyczną jest, aby suma wag nie była zbyt mała (por. 52).

Założeniem podstawowym, na którym oparte są oba sposoby, jest założenie normalności rozkładu w badanym szeregu błędów. Różnice wynikają z przyjęcia odmiennych założeń wyrównawczych przy traktowaniu materiału nadliczbowego. Różnice między wynikami rachunku sposobem *Bw* i $\alpha\beta$ są, dla dużych zbiorów błędów, pozbawione znaczenia praktycznego. Sposób *Bw* jest rachunkowo około trzykrotnie mniej pracochłonny. Z tego względu wydaje się on być bardziej godny zalecenia.

e). Szczególnym przypadkiem zastosowania sposobu *Bw* jest rachunek za pomocą krakowianów **F**, które pozwalają, przy bardzo nieznacznym obniżeniu dokładności rachunku, obliczać wartość średniego błędu na drodze pomnożenia stałego krakowianu kolumnowego **F** przez krakowian kolumnowy błędów **E**

$$m = \mathbf{F} \cdot \mathbf{E} \tag{53}$$

Krakowian **E** zestawia się wybierając z danego szeregu uporządkowanego te błędy, których wskaźniki i równe są

bądź to: $0{,}1\,(N-1)+1 \quad 0{,}2\,(N-1)+1 \ldots 0{,}9\,(N-1)+1$ (54)

bądź to: $0{,}05\,(N-1)+1 \quad 0{,}15\,(N-1)+1 \ldots 0{,}95\,(N-1)+1$ (55)

Wartości liczbowe elementów krakowianu **F** podane są w tablicach, przy czym krakowian do pierwszego rachunku (54) oznaczono tam **F**′, a do drugiego rachunku (55) **F**″ (str. 45). Jeżeli obliczony wskaźnik $p\,(N-1)+1$ (54, 55) nie jest liczbą całkowitą, określa się odpowiadającą wartość błędu na drodze interpolacji liniowej.

Kończąc pracę wyrażam gorące podziękowanie panu doc. dr Jerzemu Gaździckiemu, wykładowcy Politechniki Warszawskiej oraz kierownikowi Zakładu Rachunku Wyrównawczego i Obliczeń Geodezyjnych w Instytucie Geodezji i Kartografii, za ułożenie tablicy funkcyjnej wartości współczynników $\alpha\beta$, oraz opracowanie programów do obliczania wielkości średniego błędu sposobami *Bw* i $\alpha\beta$ w oparciu o wszystkie elementy badanego szeregu błędów. Programy te oraz ich realizacja, przeprowadzona przez mg inż. Jerzego Witkowskiego, asystenta Katedry Rachunku Wyrównawczego i Obliczeń Geodezyjnych PW pod kierunkiem doc. dr Gaździckiego, pozwoliły z jednej strony uniknąć wielu uciążliwych rachunków arytmometrycznych, a z drugiej strony umożliwiły oparcie weryfikacji liczbowych na bardzo dużym materiale.

Przypisek

Po napisaniu niniejszego artykułu miałem możność zapoznania się z interesującą pracą pani mgr inż. Marii Szacherskiej „Analiza rozkładu błędów w polskiej sieci astronomiczno-geodezyjnej”. W pracy tej podano błędy zamknięć trójkątów omawianej tam sieci, obejmującej 571 trójkątów. Materiał ten pozwalam sobie przytoczyć na str. 44 po uporządkowaniu wszystkich błędów co do ich wartości bezwzględnej (w pracy mgr inż. Szacherskiej uporządkowanie odnosiło się oddzielnie do błędów dodatnich i ujemnych). Ponieważ materiał jest bardzo obfity, można oczekiwać (por. wzór orientacyjny 31), że nawet próbki o małej liczebności dawać będą wyniki stosunkowo dokładne.

Z materiału pobierano następujące próbki:

Próbki zawierające po 28 elementów.

A. Pobrano co 10-ty błąd ujemny zamknięcia, to znaczy błędy o numerach: 25, 40, 53, 72, 104, 120, 139, 155, 175, 199, 215, 246, 271, 291, 304, 318, 337, 356, 375, 392, 407, 424, 449, 469, 483, 513, 533, 560.

Wynik rachunku $m = 0{,}813$, przy $[w] = 15{,}29$.

B. Pobrano co 10-ty błąd dodatni zamknięcia, to znaczy błędy o numerach: 17, 34, 62, 85, 99, 116, 141, 168, 184, 202, 221, 235, 255, 267, 286, 324, 341, 362, 380, 408, 430, 447, 464, 483, 499, 526, 539, 554.

Wynik rachunku: $m = 0{,}814$, przy $[w] = 14{,}77$.

Po uśrednieniu wyników z obu próbek otrzymujemy $m = 0{,}814$.

Próbki zawierające po 11 elementów.

C. Pobrano błędy o numerach równych co 10-tej liczbie pierwszej od 2 do 547, to znaczy błędy o numerach: 2, 31, 73, 127, 179, 233, 283, 353, 419, 467, 547. Wynik rachunku: $m = 0{,}807$, przy $[w] = 4{,}95$.

D. Pobrano błędy o numerach równych co 10-tej liczbie pierwszej od 7 do 563, to znaczy błędy o numerach: 7, 41, 83, 137, 193, 241, 307, 367, 433, 487, 563. Wynik rachunku: $m = 0{,}821$ przy $[w] = 4{,}90$.

Po uśrednieniu wyników z obu próbek otrzymujemy $m = 0{,}814$.

Zwracamy uwagę, że próbki *A, B, C, D* nie zawierają elementów wspólnych, oraz że rozłożenie elementów w próbkach jest dość dalekie od równomierności.

Przeprowadzono też rachunek za pomocą krakowianów **F**, który przytoczymy, gdyż w tekście nie podawaliśmy przykładu liczbowego na rachunek taki, mimo że jego teoria została szczegółowo omówiona. Otrzymuje się:

$$\left\{\begin{matrix} \varepsilon_{58} = 0{,}10 \\ \varepsilon_{115} = 0{,}18 \\ \varepsilon_{172} = 0{,}31 \\ \varepsilon_{229} = 0{,}42 \\ \varepsilon_{286} = 0{,}57 \\ \varepsilon_{343} = 0{,}69 \\ \varepsilon_{400} = 0{,}84 \\ \varepsilon_{457} = 1{,}05 \\ \varepsilon_{514} = 1{,}32 \end{matrix}\right\} \left\{\begin{matrix} 0{,}0646 \\ 0{,}1240 \\ 0{,}1734 \\ 0{,}2079 \\ 0{,}2235 \\ 0{,}2163 \\ 0{,}1848 \\ 0{,}1295 \\ 0{,}0574 \end{matrix}\right\} = 0{,}814 \qquad \left\{\begin{matrix} \varepsilon_{29,5} = 0{,}060 \\ \varepsilon_{86,5} = 0{,}140 \\ \varepsilon_{143,5} = 0{,}250 \\ \varepsilon_{200,5} = 0{,}370 \\ \varepsilon_{257,5} = 0{,}490 \\ \varepsilon_{314,5} = 0{,}620 \\ \varepsilon_{371,5} = 0{,}760 \\ \varepsilon_{428,5} = 0{,}935 \\ \varepsilon_{485,5} = 1{,}200 \\ \varepsilon_{542,5} = 1{,}530 \end{matrix}\right\} \left\{\begin{matrix} 0{,}0324 \\ 0{,}0945 \\ 0{,}1491 \\ 0{,}1913 \\ 0{,}2166 \\ 0{,}2212 \\ 0{,}2021 \\ 0{,}1587 \\ 0{,}0939 \\ 0{,}0218 \end{matrix}\right\} = 0{,}815$$

Zauważyliśmy już w tekście głównym, że wykorzystanie normalności rozkładu pozwala w większych sieciach wyznaczyć wartość błędu średniego z dwiema cyframi znaczącymi pewnymi. Ma to miejsce i w ostatnim przypadku, gdzie możemy dla błędu średniego zamknięcia trójkąta napisać ostatecznie $m = 0{,}81_4$, z czego wynika, że średni błąd pomiaru kąta w polskiej sieci astronomiczno-geodezyjnej jest wielkością poniżej $0{,}5''$ ($0{,}81_4 : \sqrt{3} = 0{,}47''$). Należy żałować, że ten wartościowy materiał nie został prawidłowo potraktowany w procesie wyrównania międzynarodowej sieci astronomiczno-geodezyjnej, na temat czego znaleźć można krytyczne uwagi w cytowanej pracy mgr inż. M. Szacherskiej.

LITERATURA

[1]. Die Preussische Landesvermessung, Hauptdreiecke Neue Folge, Berlin, 1925.

[2]. *Helmert F. R.*: Die Ausgleichungsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate, Leipzig-Berlin 1924.

[3]. *Szacherska M. K.*: Analiza rozkładu błędów w polskiej sieci astronomiczno-geodezyjnej, Prace Instytutu Geodezji i Kartografii Warszawa 1966 (ob. przypisek).

Rękopis złożono w Redakcji we wrześniu 1966 r.

P	t	P	t
0	0	0,50	0,6745
0,01	0,0125	0,51	0,6903
0,02	0,0251	0,52	0,7063
0,03	0,0376	0,53	0,7225
0,04	0,0502	0,54	0,7388
0,05	0,0627	0,55	0,7554
0,06	0,0753	0,56	0,7722
0,07	0,0878	0,57	0,7892
0,08	0,1004	0,58	0,8064
0,09	0,1130	0,59	0,8239
0,10	0,1257	0,60	0,8416
0,11	0,1383	0,61	0,8596
0,12	0,1510	0,62	0,8779
0,13	0,1637	0,63	0,8965
0,14	0,1764	0,64	0,9154
0,15	0,1891	0,65	0,9346
0,16	0,2019	0,66	0,9542
0,17	0,2147	0,67	0,9741
0,18	0,2275	0,68	0,9945
0,19	0,2404	0,69	1,0152
0,20	0,2533	0,70	1,0364
0,21	0,2663	0,71	1,0581
0,22	0,2793	0,72	1,0803
0,23	0,2924	0,73	1,1031
0,24	0,3055	0,74	1,1264
0,25	0,3186	0,75	1,1503
0,26	0,3319	0,76	1,1750
0,27	0,3451	0,77	1,2004
0,28	0,3585	0,78	1,2265
0,29	0,3719	0,79	1,2536
0,30	0,3853	0,80	1,2816
0,31	0,3989	0,81	1,3106
0,32	0,4125	0,82	1,3408
0,33	0,4261	0,83	1,3722
0,34	0,4399	0,84	1,4051
0,35	0,4538	0,85	1,4395
0,36	0,4677	0,86	1,4758
0,37	0,4817	0,78	1,5141
0,38	0,4959	0,88	1,5548
0,39	0,5101	0,89	1,5982
0,40	0,5244	0,90	1,6449
0,41	0,5388	0,91	1,6954
0,42	0,5534	0,92	1,7507
0,43	0,5681	0,93	1,8119
0,44	0,5828	0,94	1,8808
0,45	0,5978	0,95	1,9600
0,46	0,6128	0,96	2,0537
0,47	0,6280	0,97	2,1701
0,48	0,6433	0,98	2,3263
0,49	0,6588	0,99	2,5758
0,50	0,6745	0,999	3,2906
		1	∞

P — prawdopodobieństwo nieprzekroczenia t-krotnego błędu średniego w rozkładzie normalnym.

P_i	B_i	w_i	P_i	B_i	w_i
0	0	0	0,50	1,164	0,785
0,01	0,034	0,000	0,51	1,165	0,804
0,02	0,068	0,002	0,52	1,166	0,823
0,03	0,102	0,004	0,53	1,165	0,842
0,04	0,136	0,007	0,54	1,164	0,860
0,05	0,170	0,011	0,55	1,161	0,877
0,06	0,204	0,015	0,56	1,156	0,893
0,07	0,237	0,021	0,57	1,151	0,908
0,08	0,270	0,027	0,58	1,144	0,923
0,09	0,303	0,034	0,59	1,136	0,936
0,10	0,336	0,042	0,60	1,126	0,948
0,11	0,369	0,051	0,61	1,116	0,959
0,12	0,401	0,061	0,62	1,104	0,969
0,13	0,433	0,071	0,63	1,090	0,978
0,14	0,465	0,082	0,64	1,076	0,985
0,15	0,496	0,094	0,65	1,061	0,991
0,16	0,527	0,106	0,66	1,044	0,996
0,17	0,557	0,120	0,67	1,026	0,999
0,18	0,587	0,134	0,68	1,006	1,000
0,19	0,617	0,148	0,69	0,985	1,000
0,20	0 646	0,164	0,70	0,962	0,997
0,21	0,374	0,180	0,71	0,939	0,993
0,22	0,702	0,196	0,72	0,914	0,988
0,23	0,730	0,213	0,73	0,888	0,980
0,24	0,757	0,231	0,74	0,861	0,970
0,25	0,782	0,249	0,75	0,833	0,958
0,26	0,808	0,268	0,76	0,803	0,944
0,27	0,833	0,287	0,77	0,772	0,927
0,28	0,857	0,307	0,78	0,741	0,908
0,29	0,880	0,327	0,79	0,708	0,887
0,30	0,903	0,348	0,80	0,674	0,864
0,31	0,925	0,369	0,81	0,639	0,838
0,32	0,946	0,390	0,82	0,604	0,810
0,33	0,966	0,412	0,83	0,568	0,779
0,34	0,985	0,433	0,84	0,530	0,745
0,35	1,004	0,456	0,85	0,493	0,709
0,36	1,022	0,478	0,86	0,454	0,671
0,37	1,038	0,500	0,87	0,416	0,629
0,38	1,054	0,523	0,88	0,377	0,586
0,39	1,069	0,545	0,89	0,338	0,540
0,40	1,083	0,568	0,90	0,299	0,492
0,41	1,096	0,590	0,91	0,260	0,441
0,42	1,107	0,613	0,92	0,222	0,389
0,43	1,118	0,635	0,93	0,185	0,335
0,44	1,128	0,657	0,94	0,149	0,280
0,45	1,137	0,679	0,95	0,114	0,224
0,46	1,144	0,701	0,96	0,082	0,169
0,47	1,511	0,723	0,97	0,053	0,115
0,48	1,156	0,744	0,98	0,028	0,066
0,49	1,160	0,764	0,99	0,009	0,023
0,50	1,164	0,785	1,00	0,000	0,000

P_i — pozycja błędu w szeregu uporządkowanym i wartości współczynników B_i w_i do realizacji wzoru: $m = \frac{(B\varepsilon)}{(w)}$

Tablica funkcyjna III

P_i	α_i	β_i	P_i	α_i	β_i
0,00	0,6366	0,0000	0,50	0,4039	0,2724
0,01	0,6365	0,0080	0,51	0,3953	0,2729
0,02	0,6362	0,0159	0,52	0,3866	0,2730
0,03	0,6357	0,0239	0,53	0,3777	0,2729
0,04	0,6350	0,0318	0,54	0,3688	0,2725
0,05	0,6341	0,0398	0,55	0,3598	0,2718
0,06	0,6330	0,0476	0,56	0,3507	0,2708
0,07	0,6317	0,0555	0,57	0,3415	0,2695
0,08	0,6302	0,0633	0,58	0,3322	0,2679
0,09	0,6285	0,0710	0,59	0,3229	0,2660
0,10	0,6266	0,0787	0,60	0,3135	0,2639
0,11	0,6246	0,0864	0,61	0,3041	0,2614
0,12	0,6223	0,0939	0,62	0,2946	0,2586
0,13	0,6198	0,1014	0,63	0,2850	0,2555
0,14	0,6171	0,1088	0,64	0,2754	0,2521
0,15	0,6143	0,1162	0,65	0,2658	0,2484
0,16	0,6112	0,1234	0,66	0,2562	0,2444
0,17	0,6079	0,1305	0,67	0,2465	0,2401
0,18	0,6045	0,1376	0,68	0,2368	0,2355
0,19	0,6009	0,1445	0,69	0,2271	0,2306
0,20	0,5970	0,1513	0,70	0,2175	0,2254
0,21	0,5930	0,1579	0,71	0,2078	0,2199
0,22	0,5888	0,1645	0,72	0,1982	0,2141
0,23	0,5845	0,1709	0,73	0,1886	0,2080
0,24	0,5799	0,1771	0,74	0,1790	0,2016
0,25	0,5752	0,1833	0,75	0,1695	0,1950
0,26	0,5702	0,1892	0,76	0,1601	0,1881
0,27	0,5651	0,1950	0,77	0,1507	0,1809
0,28	0,5599	0,2007	0,78	0,1414	0,1735
0,29	0,5544	0,2062	0,79	0,1323	0,1658
0,30	0,5488	0,2115	0,80	0,1232	0,1579
0,31	0,5430	0,2166	0,81	0,1143	0,1498
0,32	0,5370	0,2215	0,82	0,1055	0,1414
0,33	0,5309	0,2262	0,83	0,0969	0,1329
0,34	0,5246	0,2308	0,84	0,0884	0,1242
0,35	0,5182	0,2351	0,85	0,0802	0,1154
0,36	0,5115	0,2392	0,86	0,0721	0,1064
0,37	0,5048	0,2432	0,87	0,0643	0,0974
0,38	0,4979	0,2469	0,88	0,0568	0,0882
0,39	0,4908	0,2503	0,89	0,0495	0,0791
0,40	0,4836	0,2536	0,90	0,0425	0,0700
0,41	0,4762	0,2566	0,91	0,0359	0,0609
0,42	0,4687	0,2594	0,92	0,0297	0,0520
0,43	0,4610	0,2619	0,93	0,0239	0,0433
0,44	0,4533	0,2642	0,94	0,0185	0,0348
0,45	0,4453	0,2662	0,95	0,0137	0,0268
0,46	0,4373	0,2680	0,96	0,0094	0,0193
0,47	0,4291	0,2695	0,97	0,0057	0,0124
0,48	0,4209	0,2708	0,98	0,0028	0,0066
0,49	0,4124	0,2717	0,99	0,0008	0,0022
0,50	0,4039	0,2724	1,00	0,0000	0,0000

P_i — pozycja błędu w szeregu uporządkowanym i wartości współczynników α_i β_i do realizacji wzoru: $m = \frac{(\alpha\,\varepsilon^2)}{(\beta\,\varepsilon)}$

Tablica funkcyjna IV (część)

t	P	t	P
0,00	0,0000	0,50	0,3829
0,01	0,0080	0,51	0,3900
0,02	0,0159	0,52	0,3969
0,03	0,0239	0,53	0,4039
0,04	0,0319	0,54	0,4108
0,05	0,0399	0,55	0,4177
0,06	0,0478	0,56	0,4245
0,07	0,0558	0,57	0,4313
0,08	0,0637	0,58	0,4381
0,09	0,0717	0,59	0,4448
0,10	0,0797	0,60	0,4515
0,11	0,0876	0,61	0,4581
0,12	0,0955	0,62	0,4647
0,13	0,1034	0,63	0,4713
0,14	0,1113	0,64	0,4778
0,15	0,1192	0,65	0,4843
0,16	0,1271	0,66	0,4908
0,17	0,1350	0,67	0,4971
0,18	0,1428	0,68	0,5035
0,19	0,1507	0,69	0,5098
0,20	0,1585	0,70	0,5161
0,21	0,1663	0,71	0,5223
0,22	0,1741	0,72	0,5285
0,23	0,1819	0,73	0,5346
0,24	0,1897	0,74	0,5407
0,25	0,1974	0,75	0,5467
0,26	0,2051	0,76	0,5527
0,27	0,2128	0,77	0,5587
0,28	0,2205	0,78	0,5646
0,29	0,2282	0,79	0,5705
0,30	0,2358	0,80	0,5763
0,31	0,2434	0,81	0,5821
0,32	0,2510	0,82	0,5878
0,33	0,2586	0,83	0,5935
0,34	0,2661	0,84	0,5991
0,35	0,2737	0,85	0,6047
0,36	0,2812	0,86	0,6102
0,37	0,2886	0,87	0,6157
0,38	0,2960	0,88	0,6211
0,39	0,3035	0,89	0,6265
0,40	0,3108	0,90	0,6319
0,41	0,3182	0,91	0,6372
0,42	0,3255	0,92	0,6424
0,43	0,3328	0,93	0,6476
0,44	0,3401	0,94	0,6528
0,45	0,3473	0,95	0,6579
0,46	0,3545	0,96	0,6629
0,47	0,3616	0,97	0,6680
0,48	0,3688	0,98	0,6729
0,49	0,3759	0,99	0,6778
0,50	0,3829	1,00	0,6827

P — prawdopodobieństwo nieprzekroczenia t-krotnego błędu średniego

Tablica funkcyjna IV (część)

t	P	t	P	t	P	t	P	t	P
1,00	0,6827	1,50	0,8664	2,00	0,9545	2,50	0,9876	3,00	0,9973
1,01	0,6875	1,51	0,8689	2,01	0,9556	2,51	0,9879	3,10	0,9981
1,02	0,6923	1,52	0,8715	2,02	0,9566	2,52	0,9883	3,20	0,9986
1,03	0,6970	1,53	0,8740	2,03	0,9576	2,53	0,9886	3,30	0,9990
1,04	0,7016	1,54	0,8764	2,04	0,9586	2,54	0,9889	3,40	0,9993
1,05	0,7063	1,55	0,8789	2,05	0,9596	2,55	0,9892	3,50	0,9995
1,06	0,7109	1,56	0,8812	2,06	0,9606	2,56	0,9895	3,60	0,9997
1,07	0,7154	1,57	0,8836	2,07	0,9616	2,57	0,9898	3,70	0,9998
1,08	0,7198	1,58	0,8859	2,08	0,9625	2,58	0,9901	3,80	0,9999
1,09	0,7243	1,59	0,8882	2,09	0,9634	2,59	0,9904	3,90	0,9999
1,10	0,7287	1,60	0,8904	2,10	0,9643	2,60	0,9907	4,00	1,0000
1,11	0,7330	1,61	0,8926	2,11	0,9651	2,61	0,9909	∞	1
1,12	0,7373	1,62	0,8948	2,12	0,9660	2,62	0,9912		
1,13	0,7415	1,63	0,8969	2,13	0,9668	2,63	0,9915		
1,14	0,7457	1,64	0,8990	2,14	0,9676	2,64	0,9917		
1,15	0,7498	1,65	0,9011	2,15	0,9684	2,65	0,9920		
1,16	0,7539	1,66	0,9031	2,16	0,9692	2,66	0,9922		
1,17	0,7580	1,67	0,9051	2,17	0,9700	2,67	0,9924		
1,18	0,7620	1,68	0,9070	2,18	0,9707	2,68	0,9926		
1,19	0,7660	1,69	0,9090	2,19	0,9715	2,69	0,9928		
1,20	0,7699	1,70	0,9109	2,20	0,9722	2,70	0,9931		
1,21	0,7737	1,71	0,9127	2,21	0,9729	2,71	0,9933		
1,22	0,7775	1,72	0,9146	2,22	0,9736	2,72	0,9935		
1,23	0,7813	1,73	0,9164	2,23	0,9742	2,73	0,9937		
1,24	0,7850	1,74	0,9181	2,24	0,9749	2,74	0,9939		
1,25	0,7887	1,75	0,9199	2,25	0,9756	2,75	0,9940		
1,26	0,7923	1,76	0,9216	2,26	0,9762	2,76	0,9942		
1,27	0,7959	1,77	0,9233	2,27	0,9768	2,77	0,9944		
1,28	0,7994	1,78	0,9249	2,28	0,9774	2,78	0,9946		
1,29	0,8030	1,79	0,9266	2,29	0,9780	2,79	0,9947		
1,30	0,8064	1,80	0,9281	2,30	0,9785	2,80	0,9949		
1,31	0,8098	1,81	0,9297	2,31	0,9791	2,81	0,9950		
1,32	0,8132	1,82	0,9312	2,32	0,9797	2,82	0,9952		
1,33	0,8165	1,83	0,9328	2,33	0,9802	2,83	0,9953		
1,34	0,8197	1,84	0,9342	2,34	0,9807	2,84	0,9955		
1,35	0,8229	1,85	0,9357	2,35	0,9812	2,85	0,9956		
1,36	0,8262	1,86	0,9371	2,36	0,9817	2,86	0,9958		
1,37	0,8293	1,87	0,9385	2,37	0,9822	2,87	0,9959		
1,38	0,8324	1,88	0,9399	2,38	0,9827	2,88	0,9960		
1,39	0,8355	1,89	0,9412	2,39	0,9832	2,89	0,9961		
1,40	0,8385	1,90	0,9426	2,40	0,9836	2,90	0,9963		
1,41	0,8415	1,91	0,9439	2,41	0,9840	2,91	0,9964		
1,42	0,8444	1,92	0,9451	2,42	0,9845	2,92	0,9965		
1,43	0,8473	1,93	0,9464	2,43	0,9849	2,93	0,9966		
1,44	0,8501	1,94	0,9476	2,44	0,9853	2,94	0,9967		
1,45	0,8529	1,95	0,9488	2,45	0,9857	2,95	0,9968		
1,46	0,8557	1,96	0,9500	2,46	0,9861	2,96	0,9969		
1,47	0,8584	1,97	0,9512	2,47	0,9865	2,97	0,9970		
1,48	0,8611	1,98	0,9524	2,48	0,9869	2,98	0,9971		
1,49	0,8638	1,99	0,9534	2,49	0,9872	2,99	0,9972		
1,50	0,8664	2,00	0,9545	2,50	0,9876	3,00	0,9973		

P — prawdopodobieństwo nieprzekroczenia *t*-krotnego błędu średniego w rozkładzie normalnym.

T a b l i c a f u n k c y j n a V. Krakowiany do obliczania błędu średniego z uporządkowanego szeregu błędów prawdziwych przy założeniu normalności rozkładu.

Krakowiany **F** służą do obliczania średniego błędu („kwadratycznego") m_0 w oparciu o znajomość uporządkowanego szeregu N wartości bezwzględnych błędów prawdziwych ε_i jednakowo dokładnych pomiarów

$$\varepsilon_1;\ \varepsilon_2;\ \ldots\ \varepsilon_N;\qquad (\varepsilon_j < \varepsilon_k \quad \text{gdy} \quad j < k) \tag{1}$$

(Mogą to być np. błędy zamknięć trójkątów w sieci triangulacyjnej).

Rachunek przeprowadza się w myśl wzoru

$$m_0 = \mathbf{E} \cdot \mathbf{F}, \tag{2}$$

gdzie **E** jest krakowianem kolumnowym zawierającym zespół błędów pobranych z szeregu (1), zaś **F** krakowianem kolumnowym wartości stałych.

Rachunek (2) realizuje się dwukrotnie: raz pobierając z szeregu (1) zespół błędów $\mathbf{E}'$ i mnożąc przez krakowian $\mathbf{F}'$, a drugi raz pobierając z tegoż szeregu zespół błędów $\mathbf{E}''$ i mnożąc przez krakowian $\mathbf{F}''$. Z wyników obu mnożeń: $m_0' = \mathbf{E}'\mathbf{F}'$ oraz $m_0'' = \mathbf{E}''\mathbf{F}''$ bierze się średnią $m_0 = \frac{1}{2}\left(m_0' + m_0''\right)$.

Postępowanie oparte jest na przyjęciu założenia podstawowego — normalności rozkładu i uzgodnieniu rozbieżności metodą najmniejszych kwadratów.

Krakowiany **E** i **F** mają następujące postaci:

$$\mathbf{E}' = \begin{vmatrix} \varepsilon_{0,1(N-1)+1} \\ \varepsilon_{0,2(N-1)+1} \\ \varepsilon_{0,3(N-1)+1} \\ \varepsilon_{0,4(N-1)+1} \\ \varepsilon_{0,5(N-1)+1} \\ \varepsilon_{0,6(N-1)+1} \\ \varepsilon_{0,7(N-1)+1} \\ \varepsilon_{0,8(N-1)+1} \\ \varepsilon_{0,9(N+1)-1} \end{vmatrix} \quad \mathbf{F}' = \begin{vmatrix} 0{,}0646 \\ 0{,}1240 \\ 0{,}1734 \\ 0{,}2079 \\ 0{,}2235 \\ 0{,}2163 \\ 0{,}1848 \\ 0{,}1295 \\ 0{,}0574 \end{vmatrix} \quad \mathbf{E}'' = \begin{vmatrix} \varepsilon_{0,05(N-1)+1} \\ \varepsilon_{0,15(N-1)+1} \\ \varepsilon_{0,25(N-1)+1} \\ \varepsilon_{0,35(N-1)+1} \\ \varepsilon_{0,45(N-1)+1} \\ \varepsilon_{0,55(N-1)+1} \\ \varepsilon_{0,65(N-1)+1} \\ \varepsilon_{0,75(N-1)+1} \\ \varepsilon_{0,85(N-1)+1} \\ \varepsilon_{0,95(N-1)+1} \end{vmatrix} \quad \mathbf{F}'' = \begin{vmatrix} 0{,}0324 \\ 0{,}0945 \\ 0{,}1491 \\ 0{,}1913 \\ 0{,}2166 \\ 0{,}2212 \\ 0{,}2021 \\ 0{,}1587 \\ 0{,}0939 \\ 0{,}0218 \end{vmatrix}$$

Jeżeli wskaźnik błędu $\varepsilon_{p(N-1)+1}$ figurującego w krakowianie **E**, to znaczy jeżeli liczba $p\,(N-1)+1$ okaże się liczbą całkowitą, wówczas wartość błędu bierzemy bezpośrednio z szeregu (1). Jeżeli wskaźnik ten nie będzie liczbą całkowitą, najlepiej wyinterpolować liniowo wartość błędu z dwóch znajdujących się w szeregu wartości błędów o najbliższych wskaźnikach całkowitych: mniejszego od liczby $p\,(N-1)+1$, oraz większego od niej.

Można zresztą także zrezygnować z interpolacji i za błąd $\varepsilon_{p(N-1)+1}$ brać z szeregu (1) błąd, którego wskaźnikiem jest liczba całkowita najbliższa liczby $p\,(N-1)+1$. Powoduje to jednak pewien nieznaczny spadek dokładności rachunku. Ilość N błędów w szeregu nie powinna być mniejsza od 40.

Błędy zamknięć trójkątów polskiej sieci astronomiczno-geodezyjnej wyrażone w setnych sekundy st. podz.
(a więc e = 132 znaczy e'' = 1,32'')

i	*e*	*i*	*e*	*i*	*e*	*i*	*e*	*i*	*e*	*i*	*e*	*i*	*e*	*i*	*e*	*i*	*e*	*i*	*e*	*i*	*e*
1	0	55	·10	109	·18	163	·29	217	39	271	·52	325	65	379	79	433	·95	487	·121	541	·151
2	·1	56	10	110	·18	164	·29	218	39	272	·53	326	·65	380	79	433	·95	488	·121	542	·152
3	·1	57	10	111	18	165	·30	219	39	273	53	327	·66	381	·79	435	95	489	·121	543	154
4	2	58	10	112	18	166	·30	220	39	274	53	328	·66	382	·79	436	96	490	121	544	·155
5	2	59	11	113	18	167	30	221	40	275	53	329	66	383	·79	437	·96	491	121	545	156
6	2	60	11	114	18	168	30	222	40	276	·54	330	66	384	·79	438	·98	492	122	546	·156
7	2	61	11	115	18	169	30	223	40	277	·54	331	66	385	·80	439	98	493	·123	547	·159
8	·3	62	11	116	19	170	31	224	41	278	·55	332	66	386	·80	440	98	494	·123	548	160
9	·3	63	11	117	·19	171	31	225	·41	279	·55	333	66	387	·80	441	99	495	124	549	160
10	·3	64	11	118	·19	172	31	226	·41	280	·55	334	66	388	·81	442	·99	496	124	550	163
11	·4	65	·11	119	·20	173	31	227	·41	281	55	335	·67	389	81	443	·100	497	125	551	165
12	·4	66	·11	120	·20	174	·31	228	·42	282	55	336	·67	390	81	444	100	498	125	552	166
13	4	67	·12	121	20	175	·31	229	42	283	55	337	·68	391	82	445	100	499	126	553	168
14	4	68	·12	122	20	176	·31	230	42	284	56	338	·68	392	·82	446	101	500	126	554	169
15	4	69	·12	123	20	177	·32	231	43	285	57	339	68	393	·82	447	101	501	127	555	·169
16	4	70	·12	124	21	178	·32	232	43	286	57	340	68	394	·83	448	101	502	127	556	·171
17	5	71	·12	125	21	179	·32	233	43	287	57	341	69	395	·83	449	·101	503	·127	557	·172
18	5	72	·12	126	21	180	32	234	44	288	·57	342	69	396	·83	450	·101	504	·128	558	173
19	5	73	12	127	·21	181	32	235	45	289	·57	343	69	397	83	451	·101	505	·128	559	174
20	5	74	12	128	·21	182	32	236	·45	290	·57	344	70	398	83	452	·102	506	·128	560	·175
21	5	75	12	129	·22	183	32	237	·45	291	·57	345	70	399	84	453	·102	507	129	561	·180
22	5	76	12	130	·22	184	32	238	·46	292	·58	346	70	400	·84	454	103	508	129	562	186
23	·5	77	13	131	22	185	33	239	·46	293	·58	347	70	401	·85	455	·104	509	·130	563	186
24	·5	78	·13	132	22	186	33	240	46	294	·58	348	70	402	·85	456	·104	510	·131	564	186
25	·6	79	·14	133	23	187	33	241	46	295	·58	349	·70	403	·85	457	105	511	·131	565	·187
26	·6	80	·14	134	·23	188	·33	242	46	296	·58	350	·70	404	85	458	105	512	·131	566	190
27	·6	81	·14	135	·24	189	34	243	47	297	·59	351	·70	405	86	459	105	513	·132	567	190
28	·6	82	·14	136	·24	190	34	244	47	298	·59	352	·70	406	·86	460	106	514	·132	568	·194
29	·6	83	14	137	·24	191	34	245	47	299	·59	353	·70	407	·86	461	107	515	·132	569	·203
30	6	84	14	138	·24	192	35	246	·47	300	·59	354	·70	408	87	462	108	516	132	570	·222
31	6	85	14	139	·24	193	35	247	·47	301	59	355	·71	409	88	463	108	517	132	571	·261
32	7	86	14	140	·24	194	36	248	·47	302	59	356	·71	410	·88	464	108	518	133		
33	7	87	14	141	24	195	·36	249	·48	303	60	357	·71	411	·88	465	108	519	·133		
34	7	88	15	142	25	196	·36	250	·48	304	·60	358	72	412	·89	466	·108	520	·133		
35	·7	89	15	143	25	197	·36	251	·48	305	·60	359	72	413	·89	467	·108	521	·135		
36	·7	90	15	144	25	198	·37	252	48	306	·60	360	·73	414	·89	468	·108	522	·135		
37	·7	91	15	145	·25	199	·37	253	48	307	·60	361	·74	415	89	469	·109	523	135		
38	·7	92	·15	146	·26	200	·37	254	48	308	·60	362	74	416	89	470	109	524	·136		
39	·7	93	·15	147	·26	201	·37	255	48	309	·60	363	75	417	91	471	109	525	·138		
40	·7	94	·15	148	·26	202	37	256	49	310	·61	364	75	418	91	472	·110	526	138		
41	·7	95	·16	149	26	203	37	257	49	311	·61	365	75	419	91	473	·111	527	139		
42	·8	96	16	150	27	204	38	258	49	312	·61	366	·75	420	·91	474	111	528	139		
43	·8	97	16	151	·27	205	38	259	49	313	61	367	·75	421	·91	475	113	529	142		
44	·8	98	16	152	·27	206	38	260	50	314	62	368	·75	422	·91	476	115	530	142		
45	·8	99	16	153	·27	207	38	261	50	315	62	369	·75	423	·92	477	·115	531	·142		
46	·8	100	17	154	·27	208	·38	262	·50	316	62	370	·76	424	·93	478	·116	532	143		
47	8	101	17	155	·28	209	·38	263	·51	317	·62	371	·76	425	·93	479	·116	533	·144		
48	8	102	17	156	·28	210	·38	264	51	318	·62	372	76	426	·93	480	116	534	145		
49	9	103	17	157	·28	211	·39	265	51	319	·62	373	76	427	93	481	116	535	146		
50	·9	104	·17	158	28	212	·39	266	51	320	·62	374	77	428	93	482	117	536	·147		
51	·9	105	·17	159	28	213	·39	267	52	321	·62	375	·77	429	94	483	117	537	149		
52	·10	106	·17	160	29	214	·39	268	52	322	·64	376	·78	430	94	484	118	538	150		
53	·10	107	·17	161	·29	215	·39	269	·52	323	64	377	78	431	94	485	120	539	150		
54	·10	108	·18	162	·29	216	·39	270	·52	324	64	378	78	432	·94	486	·120	540	151		

Punktem oznaczono błędy zamknięcia ujemne

СТЭФАН ХАУСБРАНДТ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЗНАЧЕНИЯ СРЕДНЕЙ КВАДРАТИЧЕСКОЙ ОШИБКИ ИЗ КОМПЛЕКСА ИСТИННЫХ ОШИБОК, ОПИРАЯСЬ НА ПРЕДПОЛОЖЕНИИ НОРМАЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Резюме

Значение средней квадратической ошибки m_0, вычисленное из ряда n истинных ошибок $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_n$ (нпр. ошибки невязок треугольников в триангуляции) по классической формуле $m_0 = \sqrt{\frac{[\varepsilon\varepsilon]}{n}}$. является в значительной степени зависимым от значения максимальной ошибки появившейся в исследуемом ряду. Это часто приводит к невозможности удовлетворительно точного вычисления значения m_0, если количество ошибок в ряду не очень велико.

Вопрос усложняет еще обстоятельство, что в геодезических работах по существу дело не заключается, как в статистике, в собрании обширного материала позволяющего сделать выводы об свойствах исследуемой совокупности, а речь идет в достижении найвысшей точности результатов измерений.

Это приводит к некоторой деформации совокупностей путем исключения из них, в ходе измерений, больших ошибок методом исполнения нового измерения в более благоприятных условиях.

Так как критерия математической статистики (критерий Колмогорова), применяемые к совокупностям ошибок в геодезических сетях, никогда не приводят к выводу об справедливости отклонения предположения нормальности распределения, возникает вопрос, не является ли правильнее вычислять значение средней квадратической ошибки m_0 принимая и используя предположение, что исследуемая совокупность ошибок подчиняется нормальному распределению. Это позволяет на немного точнейшее вычисление значения средней квадратической ошибки, а также значительно уменьшает влияние максимальных ошибок на суждение об значении средней квадратической ошибки.

К этой теме относится излагаемая работа, в которой приведено обоснование способов позволяющих на такого рода вычисление средней квадратической ошибки опираясь на предположении нормальности распределения, приведено числовые таблицы облегчающие вычисления а также продемонстрировано целесообразность концепции на числовых примерах.

STEFAN HAUSBRANDT

DETERMINATION OF MAGNITUDE OF MEAN ERROR FROM A GROUP OF TRUE ERRORS, BASED ON THE ASSUMPTION OF A NORMAL DISTRIBUTION

Summary

The value of the mean square error m_0, calculated from series n of true errors $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots \varepsilon_n$ such as triangle closure errors by means of the classical formula $m_0 = \sqrt{\frac{[\varepsilon\varepsilon]}{n}}$ depends, to a high degree, on the magnitude of the maximal error occurring in the series under investigation. This frequently precludes calculating magnitude m_0 with a satisfactory precision, unless the number of errors within the series is very great. This problem is further complicated by the fact, that in geodetic work it is obviously not, as in statistics, the matter collecting a great bulk of material enabling one to draw conclusions as to the properties of the accumulation under discussion, but rather of attaining the highest possible precision in the results of the measurements. This causes a certain deformation in the accumulated material due to the cancelling of large errors, while making measurements, by replacing them with new measurements made under more favourable conditions.

In view of the fact, that criteria of mathematical statistics (χ square tast. Kolmogorow's criterium), as are applied for samples of errors in geodetic networks, never lead to a conclusion justifying the rejection of the assumption of a normal distribution, the question arises whether the value of the mean error m_0 should not rather be calculated by putting forth and applying the assumption of a normal distribution of the investigated sample of errors. This permits a somewhat more precise calculation of the mean error, and it considerably reduces the influence of maximal errors on defining the value of the mean error.

This problem is the topic of the present paper, in which the author presents his justification of the methods making possible this type of calculation of the mean error on the basis of the assumption of a normal distribution; moreover, he adds numerical tables facilitating this calculation, and illustrates the feasibility of his concept by numerical examples.