

GRAŻYNA KLOCH

Instytut Geodezji i Kartografii

JAN KRYŃSKI

Instytut Geodezji i Kartografii

**IMPLEMENTACJA DŁUGO-, ŚREDNIO-
I KRÓTKOFALOWYCH SKŁADOWYCH SYGNAŁÓW
FUNKCJONAŁÓW POTENCJAŁU ZAKŁÓCAJĄCEGO
W PROCESIE MODELOWANIA GEOIDY**

ZARYS TREŚCI: Metoda remove-compute-restore znalazła powszechne zastosowanie do regionalnego modelowania grawimetrycznej geoidy. W metodzie tej, która umożliwia tworzenie dokładnych modeli geoidy przy użyciu danych grawimetrycznych praktycznie wyłącznie z rejonu objętego modelowaniem, wykorzystuje się podział funkcjonałów potencjału zakłócającego na składowe reprezentujące różne grupy spektralne. Do wyznaczenia tych składowych korzysta się z globalnego modelu geopotencjału, anomalii grawimetrycznych oraz danych o topografii terenu. Istotną rolę w modelowaniu geoidy, w szczególności przy użyciu metody remove-compute-restore, odgrywa rodzaj redukcji wprowadzonych do obserwacji grawimetrycznych, a co za tym idzie rodzaj anomalii grawimetrycznych.

W pracy podano szczegółowy algorytm klasycznej metody wyznaczania geoidy grawimetrycznej, a następnie dokładnie omówiono anomalie grawimetryczne: wolnopowietrzną, Faye'a i Helmerta, które najczęściej znajdują zastosowanie w modelowaniu geoidy. Opis metody remove-compute-restore modelowania grawimetrycznej geoidy rozdzielono na trzy podrodziału poświęcone odrębnym składowym spektralnym funkcjonałom potencjału zakłócającego: składowej długofalowej, składowej średniofalowej i składowej krótkofalowej. Zwrócono uwagę na zależność sposobu obliczania składowych średnio- i krótkofalowej od rodzaju anomalii grawimetrycznej. W szczególności omówiono zagadnienie obliczania efektu pośredniego w wyznaczonej wartości odstępów geoidy od elipsoidy. Przeprowadzone testy numeryczne wykazały potrzebę stosowania wzoru ścisłego do wyznaczania efektu pośredniego jedynie w górskich rejonach Polski.

Słowa kluczowe: modelowanie geoidy, składowe widmowe funkcjonałów potencjału zakłócającego, redukcje grawimetryczne, efekt pośredni

1. WPROWADZENIE

Stosunkowo niska dokładność obliczanych w latach 60. i 70. regionalnych modeli geoidy wynikała z braku jednolitego pokrycia kuli ziemskiej danymi grawimetrycznymi, a jednocześnie ograniczonego dostępu do istniejących danych grawimetrycznych, mimo dysponowania materiałem grawimetrycznym o odpowiedniej jakości z badanego rejonu. Istotną przeszkodą w tworzeniu dokładnych regionalnych modeli geoidy była również bardzo ograniczona znajomość globalnego opisu geopotencjału (Kryński, 2007).

Wraz z tworzeniem i udostępnianiem kolejnych globalnych modeli geopotencjału, wyznaczanych z rosnącą rozdzielczością i dokładnością przy wykorzystaniu danych satelitarnych oraz naziemnych danych grawimetrycznych, w latach 80. ubiegłego wieku pojawiła się możliwość udoskonalenia metodyki regionalnego modelowania geoidy grawimetrycznej i podniesienia dokładności obliczanych modeli. Nie bez znaczenia dla doskonalenia metodyki modelowania regionalnej geoidy jest również dostęp do wysokorozdzielczych numerycznych modeli terenu. Metodą, która znalazła powszechne zastosowanie do regionalnego modelowania grawimetrycznej geoidy, jest metoda *remove-compute-restore*, w której wykorzystany jest podział funkcjonalów potencjału zakłócającego na składowe reprezentujące różne grupy spektralne. Porównując klasyczną metodę wyznaczania geoidy grawimetrycznej (Heiskanen i Moritz, 1967; Torge, 2001) z metodą *remove-compute-restore* (Forsberg i Tscherning, 1981), należy zauważyć, że w obu metodach na pozornie identycznych etapach modelowania geoidy wymagane jest użycie zasadniczo różnej parametryzacji. Dla przykładu, dzięki wykorzystaniu wysokorozdzielczych globalnych modeli geopotencjału metoda *remove-compute-restore* umożliwia tworzenie dokładnych modeli geoidy przy użyciu danych grawimetrycznych praktycznie wyłącznie z rejonu objętego modelowaniem.

2. KLASYCZNA METODA WYZNACZANIA GEOIDY GRAWIMETRYCZNEJ

Geoidę grawimetryczną, jako powierzchnię brzegową w polu siły ciężkości, wyznacza się w wyniku rozwiązania tzw. mieszanego zagadnienia brzegowego geodezji fizycznej. W celu uzyskania rozwiązania zagadnienia brzegowego zaobserwowane na fizycznej powierzchni Ziemi wartości przyspieszenia siły ciężkości g muszą zostać zredukowane na geoidę. Dodatkowo, wszystkie masy sponad geoidy muszą zostać usunięte (przemieszczone pod geoidę lub na geoidę w postaci nieskończenie cienkiej warstwy) z uwagi na wymagane do uzyskania rozwiązania zagadnienia brzegowego spełnienie warunku harmoniczności potencjału zakłócającego na zewnątrz wyznaczonej powierzchni brzegowej. Problem sprowadzenia na geoidę zaobserwowanych wartości przyspieszenia siły ciężkości wraz

z usunięciem mas topograficznych sponad geoidy (przemieszczone pod geoidę) rozwiązywany jest poprzez zastosowanie redukcji grawimetrycznych δg . W celu zaś usunięcia efektu mas atmosferycznych do wartości przyspieszenia siły ciężkości g zaobserwowanej w punkcie P o wysokości H nad poziomem morza dodaje się poprawkę atmosferyczną (Wichiencharoen, 1982)

$$\delta g_A = (0.8658 - 9.727 \cdot 10^{-5} H + 3.482 \cdot 10^{-9} H^2) \text{ mGal} \quad (1)$$

Anomalia grawimetryczna Δg w punkcie P_0 na geoidzie obliczana jest następująco:

$$\Delta g = g + \delta g_A + \delta g - \gamma \quad (2)$$

gdzie γ odpowiada normalnemu przyspieszeniu siły ciężkości na elipsoidzie normalnej na szerokości geodezyjnej φ punktu P na fizycznej powierzchni Ziemi, w którym pomierzono wartość przyspieszenia siły ciężkości g . Do praktycznych obliczeń przyspieszenia normalnego korzysta się z wyrażenia (Moritz, 1984)

$$\gamma = \gamma_e \frac{1 + k \sin^2 \varphi}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}} \quad (3)$$

gdzie:

$$k = \frac{b\gamma_p}{a\gamma_e} - 1 \quad (4)$$

zaś γ_p i γ_e oznaczają normalne przyspieszenie siły ciężkości odpowiednio na biegunie i na równiku, a i b oznaczają dużą i małą półoś elipsoidy, e^2 jest kwadratem pierwszego mimośrodu elipsoidy.

Zgodnie z obowiązującym geodezyjnym systemem odniesienia GRS80 parametry w (3) przyjmują następujące wartości (Moritz, 1984):

$$\begin{aligned} \gamma_e &= 9.780\,326\,7715 \text{ m/s}^2, \\ e^2 &= 0.006\,694\,380\,022\,90, \\ k &= 0.001\,931\,851\,353. \end{aligned}$$

Rodzaje redukcji grawimetrycznych δg różnią się w zależności od sposobu przemieszczania mas topograficznych. Przemieszczenie mas topograficznych towarzyszące tworzeniu anomalii grawimetrycznych Δg powoduje zmianę pola siły ciężkości, a w szczególności zmianę δT potencjału grawitacyjnego tego pola

$$\delta T = T_i - T_c \quad (5)$$

w punkcie, w którym liczona jest anomalia grawimetryczna, a tym samym potencjału geoidy, przy czym T_i oznacza potencjał grawitacyjny w punkcie P mas topograficznych nad geoidą, zaś T_c – potencjał grawitacyjny w punkcie P

mas przemieszczonych, w szczególności mas skondensowanych na geoidzie. Zmiana δT potencjału grawitacyjnego (5) jest zasadniczym efektem pośrednim (*primary indirect effect*) przemieszczenia mas topograficznych, wynikającym z użycia redukcji grawimetrycznej (Sideris, 2005).

Powierzchnia poziomowa o potencjale geoidy, uformowana po przemieszczeniu mas topograficznych, nazwana jest co-geoidą lub zregulowaną geoidą. Co-geoida jest praktycznie powierzchnią brzegową, na której rozwiązywane jest zagadnienie brzegowe. Odstęp δN geoidy od co-geoidy, odpowiadający różnicy między odstępami geoidy i co-geoidy od elipsoidy, otrzymuje się z (5) przy zastosowaniu wzoru Brunsa

$$\delta N = -\frac{1}{\gamma} \delta T \quad (6)$$

przy czym δN reprezentuje zasadniczy efekt pośredni przemieszczenia mas topograficznych, wynikający z użycia redukcji grawimetrycznej, wyrażony przesunięciem powierzchni ekwipotencjalnej w kierunku pionowym.

Pośród wielu praktycznych wzorów wyrażających zasadniczy efekt pośredni (np. Wichiencharoen, 1982) często stosowany jest wzór uproszczony, który daje wyniki obliczeń z zadowalającą dokładnością. Jeśli do modelowania geoidy wykorzystywane są anomalie Faye'a, lub przy braku poprawek terenowych anomalie wolnpowietrzne, wzór ten ma postać (Grushinskiy, 1976)

$$\delta N = -\frac{\pi G \rho H^2}{\gamma_m} \quad (7)$$

gdzie G jest stałą grawitacyjną, ρ jest gęstością mas topograficznych (2.67 g/cm^3), H jest wysokością punktu P nad poziomem morza, γ_m jest średnim normalnym przyspieszeniem siły ciężkości na elipsoidzie normalnego pola siły ciężkości lub normalnym przyspieszeniem siły ciężkości na elipsoidzie normalnego pola siły ciężkości na szerokości 45° (Torge, 1989); zazwyczaj przyjmuje się $\gamma_m = 979\,800 \text{ mGal}$.

Aby zachować spójność anomalii grawimetrycznych i wyznaczonej na ich podstawie powierzchni ekwipotencjalnej (geoidy), należałoby przed zastosowaniem wzoru Stokesa przetransformować anomalie grawimetryczne z powierzchni geoidy na co-geoidę. Co-geoida nie pokrywa się z geoidą z uwagi na tzw. efekt pośredni, wywołany zniekształceniem pola siły ciężkości, a tym samym i powierzchni ekwipotencjalnej, z powodu zastosowania redukcji grawimetrycznych.

Transformacji anomalii grawimetrycznych z powierzchni geoidy na co-geoidę dokonuje się przez wprowadzenie małej poprawki $\delta \Delta g_c$ do anomalii grawimetrycznej Δg (2), zwanej wtórnym efektem pośrednim. Poprawka ta wyraża się wzorem (Sideris, 2005)

$$\delta\Delta g_c = -\frac{1}{\gamma_m} \frac{\partial\gamma}{\partial h} \delta T \quad (8)$$

Wielkość tej poprawki jest jednak bardzo mała (Wichiencharoen, 1982). Wynosi ona $0.3086 \cdot \delta N$ i w praktycznych obliczeniach może być zanedbana (Łyszkowicz, 2005). Dla przykładu, dla obszaru Polski maksymalne różnice między geoidą a co-geoidą wyznaczone przy użyciu anomalii Faye'a nie przekraczają 20 cm (Kryński, 2007); to z kolei przekłada się na poprawkę 0.06 mGal do przyspieszenia siły ciężkości, co jest wartością zanedbywalną.

Odstęp $N_{\text{co-geoid}}$ co-geoidy od elipsoidy wyznaczany jest ze wzoru Stokesa

$$N_{\text{co-geoid}} = \frac{R}{4\pi\gamma_m} \iint_{\sigma} (\Delta g + \delta\Delta g_c) S(\psi) d\sigma \quad (9)$$

gdzie

$$S(\psi) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{2n+1}{n-1} \cdot P_n(\cos\psi) \quad (10)$$

lub

$$S(\psi) = \frac{1}{\sin \frac{\psi}{2}} - \sin \psi + 1 - 5\cos \psi - 3\cos \psi \ln \left(\sin \frac{\psi}{2} + \sin^2 \frac{\psi}{2} \right) \quad (11)$$

jest funkcją Stokesa, która odgrywa rolę funkcji wagowej dla całkowanych anomalii grawimetrycznych, przy czym kąt ψ

$$\cos \psi = \cos \varphi \cos \varphi_P + \sin \varphi \sin \varphi_P \cos(\lambda_P - \lambda) \quad (12)$$

jest odległością sferyczną między bieżącym punktem o współrzędnych geograficznych (φ, λ) a punktem $P(\varphi_P, \lambda_P)$, w którym obliczany jest odstęp $N_{\text{co-geoid}}$ co-geoidy od elipsoidy, zaś całkowanie (9) przebiega po całej powierzchni σ geoidy.

Całka Stokesa jest klasycznym rozwiązaniem zagadnienia brzegowego, w praktyce opartym na aproksymacji sferycznej. Absolutny błąd tej aproksymacji dla $N = 30$ m (odpowiada to średniej undulacji geoidy na obszarze Polski) i dla $N = 100$ m (maksymalna undulacja geoidy) wynosi odpowiednio ± 9 cm i ± 30 cm.

Obliczanie całki (9) tradycyjnie odbywa się na drodze sumowania. Sumowanie to jest wykonywane niezależnie dla każdego punktu, w którym jest wyznaczany odstęp $N_{\text{co-geoid}}$ co-geoidy od elipsoidy. Całka (9) jako całka splotu (konwolucji)

$$N_{\text{co-geoid}} = \frac{R}{4\pi\gamma_m} (\Delta g + \delta\Delta g_c) * S(\psi) \quad (13)$$

może być również obliczana przy użyciu techniki szybkiej transformacji Fouriera (FFT), gdy anomalie grawimetryczne tworzą regularną siatkę. W wyniku zastosowania techniki FFT odstęp $N_{\text{co-geoid}}$ co-geoidy od elipsoidy wyznacza się jednocześnie na wszystkich węzłach siatki wejściowych danych grawimetrycznych.

Ostatecznie odstęp N geoidy od elipsoidy otrzymuje się jako

$$N = N_{\text{co-geoid}} + \delta N \quad (14)$$

Przejścia od undulacji geoidy N do anomalii wysokości ζ , odpowiadającej wysokości quasigeoidy nad elipsoidą, dokonuje się za pośrednictwem anomalii Bouguera Δg^B , korzystając ze wzoru (np. Heiskanen i Moritz, 1967; Forsberg, 2005)

$$\zeta = N - \frac{\Delta g^B}{\gamma} H \quad (15)$$

gdzie

$$\Delta g^B = g + \delta g_A + \delta g^B + \delta g^{FA} - \gamma \quad (16)$$

przy czym δg^{FA} oznacza redukcję wolnopoietrzną (*free-air*). Redukcja Bouguera δg^B wyraża się zaś jako

$$\delta g^B = -2\pi G \rho H \quad (17)$$

co, przyjmując ustaloną średnią wartość gęstości skorupy ziemskiej $\rho = 2.67 \text{ g/cm}^3$, daje

$$\delta g^B = -0.1119H \quad (18)$$

gdzie przy H wyrażonym w metrach otrzymuje się δg^B w miligalach.

3. ANOMALIE GRAWIMETRYCZNE UŻYWANE DO WYZNACZANIA GEOIDY GRAWIMETRYCZNEJ

Zasadniczo każdy rodzaj redukcji grawimetrycznej może być użyty do obliczenia anomalii grawimetrycznych Δg przeznaczonych do klasycznego rozwiązania zagadnienia brzegowego. W praktyce do modelowania geoidy znajdują zastosowanie jednak tylko takie redukcje grawimetryczne, które wywołują małe zmiany pola potencjału siły ciężkości (5), a co za tym idzie względnie nieduży efekt pośredni, który daje się łatwo wymodelować. W ogólności redukcję grawimetryczną na geoidę przeprowadza się trzyetapowo poprzez:

- 1) usunięcie mas sponad geoidy,
- 2) zredukowanie przyspieszenia siły z punktu P na fizycznej powierzchni Ziemi do punktu P_0 na geoidzie,
- 3) przywrócenie usuniętych mas pod geoidę lub na jej powierzchnię w postaci warstwy.

Usunięcie mas sponad geoidy powoduje zmniejszenie przyspieszenia siły ciężkości g w punkcie P o wartość δg_P . Po usunięciu mas pomiędzy punktu P i geoidy stosuje się redukcję wolnopowietrzną δg^{FA} , sprowadzającą przyspieszenie siły ciężkości z punktu P na fizycznej powierzchni Ziemi do punktu P_0 na geoidzie. Przywrócone masy spowodują zwiększenie przyspieszenia siły ciężkości w punkcie P_0 na geoidzie o wartość $\delta g_{P_0}^c$. Redukcja grawimetryczna δg w (2) przyjmie postać

$$\delta g = -\delta g_P + \delta g^{FA} + \delta g_{P_0}^c \quad (19)$$

zaś anomalia grawimetryczna w punkcie P_0 wyrażona jest następująco:

$$\Delta g = g + \delta g_A - \delta g_P + \delta g^{FA} + \delta g_{P_0}^c - \gamma \quad (20)$$

Do redukcji grawimetrycznych najczęściej używanych do wyznaczania geoidy grawimetrycznej zaliczają się: redukcja wolnopowietrzna, redukcja Faye'a i oparta na metodzie kondensacyjnej redukcja Helmerta.

3.1. Anomalia wolnopowietrzna

Najprostszą z używanych do wyznaczania geoidy grawimetrycznej redukcji grawimetrycznych jest redukcja wolnopowietrzna δg^{FA} . Odpowiada ona idealnej sytuacji, w której efekt przyciągania mas topograficznych δg_P usuniętych sponad geoidy został całkowicie skompensowany efektem przyciągania przywróconych mas $\delta g_{P_0}^c$, tak że

$$\delta g_P = \delta g_{P_0}^c \quad (21)$$

W ogólności redukcja wolnopowietrzna przedstawiana jest w postaci (np. Torge, 1989; Barlik i Pachuta, 2007)

$$\delta g^{FA} = -\frac{\partial g}{\partial h} H - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial h^2} H^2 + \dots \quad (22)$$

Sprowadza ona pomierzone na fizycznej powierzchni Ziemi przyspieszenie siły ciężkości g na geoidę przy założeniu, że masy topograficzne sponad geoidy zostały uprzednio usunięte. Wymagany do obliczenia redukcji wolnopowietrznej gradient pionowy rzeczywistego przyspieszenia siły ciężkości $\delta g/\delta h$ jest co prawda mierzalny, ale podlega on bardzo szybkim i nieregularnym zmianom nie tylko przy zmianie pozycji

w pionie, ale również w poziomie; zmian tych nie da się zamodelować. Pomiarowi przyspieszenia siły ciężkości na punktach zdjęć grawimetrycznych zazwyczaj nie towarzyszy pomiar gradientu pionowego. W praktyce gradient pionowy rzeczywistego przyspieszenia siły ciężkości jest zatem aproksymowany gradientem pionowym normalnego przyspieszenia siły ciężkości $\delta\gamma/\delta h$. Przy zastosowaniu dodatkowo aproksymacji sferycznej normalnego pola siły ciężkości (Barlik i Pachuta, 2007) otrzymuje się

$$\delta g^{FA} \approx \frac{2\gamma_m}{R} H - \frac{3}{2} \frac{\gamma_m}{R^2} H^2 + \dots \quad (23)$$

gdzie R jest średnim promieniem Ziemi. W szczególności dla sferoidy Helmerta (Barlik i Pachuta, 2007)

$$\delta g_{Helmert}^{FA} \approx 0.30855H - 0.000000072H^2 + 0.000219 \cos 2\varphi \text{ [mGal]} \quad (24)$$

Inny rodzaj aproksymacji gradientu pionowego rzeczywistego przyspieszenia siły ciężkości (Heiskanen i Moritz, 1967)

$$\frac{\partial g}{\partial h} = \frac{\partial \gamma}{\partial h} + \frac{\partial \Delta g}{\partial h} \quad (25)$$

gdzie

$$\frac{\partial \Delta g}{\partial h} \approx -G \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) \quad (26)$$

wykorzystuje nie tylko normalne pole siły ciężkości, ale także pochodzące z obserwacji informacje o gradientach poziomych składowych odchył pionu ξ i η .

W większości zagadnień praktycznych jako redukcji wolnopowietrznej używa się liniowej aproksymacji (24) w postaci

$$\delta g^{FA} \approx 0.3086H \quad (27)$$

gdzie przy H wyrażonym w metrach otrzymuje się δg^{FA} w miligalach.

Anomalia wolnopowietrzna w punkcie P_0 na geoidzie wyraża się jako

$$\Delta g^{FA} = g + \delta g_A + \delta g^{FA} - \gamma \quad (28)$$

3.2. Anomalia Faye'a

Redukcja Faye'a δg^F odpowiada redukcji wolnopowietrznej zastosowanej do przyspieszenia siły ciężkości, z którego wyeliminowano wpływ przyciągania nierówności terenowych wokół stanowiska. Wpływ ten wyraża się poprzez tzw. poprawkę terenową δg^T (Forsberg, 2005)

$$\delta g^T = G\rho \int_{x=-x_0}^{x=x_0} \int_{y=-y_0}^{y=y_0} \int_{z=H_P}^{z=H(x,y)} \frac{z - H_P}{\left[(x_Q - x_P)^2 + (y_Q - y_P)^2 + (z_Q - H_P)^2 \right]^{3/2}} dx_Q dy_Q dz_Q \quad (29)$$

gdzie:

- x_P, y_P – współrzędne płaskie stacji grawimetrycznej,
- H_P – wysokość stacji grawimetrycznej,
- x_Q, y_Q – współrzędne płaskie bieżącego elementu topografii (środką graniastosłupa),
- z_Q – wysokość bieżącego elementu topografii (graniastosłupa),
- dx_Q, dy_Q – kroki siatki modelu terenu, odpowiednio w kierunku północnym i wschodnim,
- dz_Q – różnica między wysokością stacji grawimetrycznej i wysokością bieżącego graniastosłupa tworzącego numeryczny model terenu,
- x_0, y_0 – współrzędne płaskie ograniczające obszar całkowania topografii terenu,
- ρ – gęstość mas tworzących topografię.

Redukcja Faye'a lepiej regularyzuje geoidę niż redukcja wolnopowietrzna (Barlik i Pachuta, 2007) i tym samym lepiej niż redukcja wolnopowietrzna nadaje się do modelowania geoidy. Redukcja Faye'a wyraża się następująco:

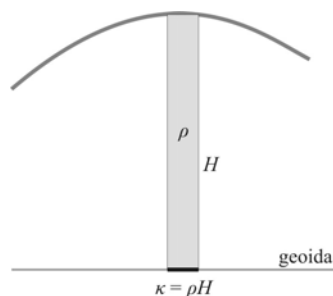
$$\delta g^F = \delta g^{FA} + \delta g^T \quad (30)$$

zaś anomalia Faye'a Δg^F zdefiniowana jest wzorem

$$\Delta g^F = g + \delta g_A + \delta g^{FA} + \delta g^T - \gamma \quad (31)$$

3.3. Anomalia Helmerta

Najczęściej stosowana do rozwiązywania całki Stokesa redukcja grawimetryczna jest oparta na drugiej metodzie kondensacyjnej Helmerta. W wyniku redukcji Helmerta masy topograficzne o stałej gęstości ρ wystające ponad geoidę zostają skondensowane na powierzchni geoidy w postaci nieskończenie cienkiej warstwy o gęstości powierzchniowej $\kappa = \rho H$ (rys. 1).



Rys. 1. Koncepcja metody kondensacji Helmerta

Redukcje Helmerta, a co za tym idzie i anomalie Helmerta, są często w praktyce utożsamiane odpowiednio z redukcjami i anomaliami Faye'a, tj.

$$\delta g^{Helmert} = \delta g^F \quad (32)$$

$$\Delta g^{Helmert} = \Delta g^F \quad (33)$$

Czynnikiem odróżniającym anomalię Helmerta od anomalii Faye'a jest efekt $\Delta g_T^{\delta T}$ związany ze zmianą potencjału wynikającą ze skondensowania w postaci nieskończenie cienkiej warstwy na powierzchni geoidy mas znajdujących się ponad geoidą. Czynnikiem ten wyraża się wzorem:

$$\Delta g_T^{\delta T}(P) = - \left(\frac{\partial T_t(P)}{\partial h} - \frac{\partial T_c(P)}{\partial h} \right) \quad (34)$$

gdzie $\Delta g_T^{\delta T}(P)$ jest bezpośrednim efektem topografii na wartość przyspieszenia spowodowanym różnicą w dowolnym punkcie P między potencjałem mas nad geoidą a potencjałem mas skondensowanych na geoidzie; $T_t(P)$ jest potencjałem w punkcie P mas nad geoidą; $T_c(P)$ jest potencjałem w punkcie P mas skondensowanych na geoidzie.

Wielkość $\Delta g_T^{\delta T}(P)$ można zaniedbać przy założeniu, że masy znajdujące się między stanowiskiem pomiarowym a geoidą stanowią jednorodną, bezkresną płytę o stałej grubości równej wysokości punktu (jest to konsekwencją faktu, że przyciąganie jednorodnej bezkresnej płyty o stałej grubości H i gęstości ρ jest równe przyciąganiu warstwy pojedynczej o nieskończonym zasięgu i stałej gęstości powierzchniowej κ , gdy $\kappa = \rho H$) (Heck, 2003). Wprowadzenie poprawki terenowej do pomierzonej wartości przyspieszenia siły ciężkości pozwala na przyjęcie takiego założenia.

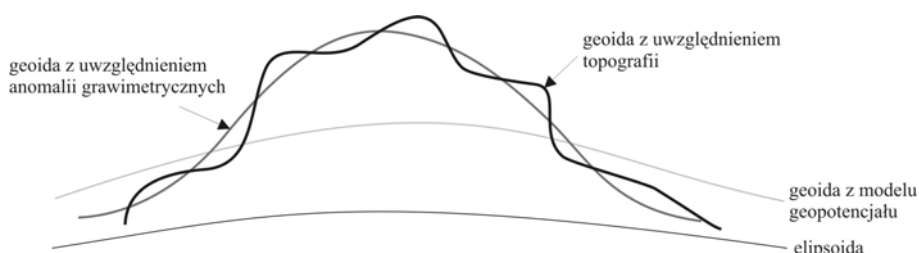
Obliczone w przedstawiony sposób anomalie Helmerta odnoszą się do rozpostartej na geoidzie nieskończenie cienkiej warstwy skondensowanych na niej mas topograficznych. Ta warstwa charakteryzuje się zmienną gęstością powierzchniową, zależną od lokalnej wysokości terenu (lokalna gęstość powierzchniowa = gęstość mas nad geoidą \times lokalna wysokość).

4. MODELOWANIE GEOIDY GRAWIMETRYCZNEJ METODĄ REMOVE-COMPUTE-RESTORE

W metodzie *remove-compute-restore* sygnały funkcjonałów potencjału zakłócającego przedstawiane są jako suma trzech składowych zawierających informacje pochodzące od:

- globalnego modelu geopotencjału (*GGM*), tzw. składowa długofalowa;
- wartości residualnych (*res*) funkcjonałów potencjału zakłócającego, tzw. składowa średniofalowa;
- topografii terenu (*H*), tzw. składowa krótkofalowa.

Wykorzystywane w metodzie *remove-compute-restore* składowe sygnałów funkcjonalów potencjału zakłócającego powinny w sensie spektralnym wzajemnie się uzupełniać i w sumie reprezentować pełne spektrum tych sygnałów. Wpływ sygnałów reprezentujących poszczególne grupy częstotliwości na całkowitą wartość odstepu geoidy od elipsoidy jest przedstawiony na rysunku 2 (Sideris, 2005).



Rys. 2. Składowe długo-, średnio- i krótkofalowa undulacji geoidy

Rozłożone na składowe długo-, średnio- i krótkofalowe anomalie wolnopowietrzne mają postać

$$\Delta g^{FA} = \Delta g_{GGM} + \Delta g_{res} + \Delta g_H \quad (35)$$

Składowa krótkofalowa Δg_H zależy od użytej redukcji grawimetrycznej i w ogólności wyraża się jako różnica między efektem grawitacyjnym mas wystających ponad geoidę w punkcie P na fizycznej powierzchni Ziemi i efektem grawitacyjnym punkcie P_0 przywrócenia tych mas w wyniku ich kompensacji

$$\Delta g_H = \delta g_P - \delta g_{P_0}^c \quad (36)$$

Wynikiem modelowania geoidy przy użyciu metody *remove-compute-restore* jest undulacja geoidy N reprezentowana przez sumę składowych długo-, średnio- i krótkofalowych

$$N = N_{GGM} + N_{\Delta g_{res}} + N_H \quad (37)$$

4.1. Składowa długofalowa

Wynikające z globalnego modelu geopotencjału składowe długofalowe Δg_{GGM} i N_{GGM} obliczane są ze wzorów (Sideris, 2005)

$$\Delta g_{GGM} = \gamma \sum_{n=2}^{n_{max}} (n-1) \sum_{m=0}^n (\bar{C}_{nm} \cos m\lambda + \bar{S}_{nm} \sin m\lambda) \bar{P}_{nm}(\sin \varphi) \quad (38)$$

$$N_{GGM} = R \sum_{n=2}^{n_{\max}} \sum_{m=0}^n (\bar{C}_{nm} \cos m\lambda + \bar{S}_{nm} \sin m\lambda) \bar{P}_{nm}(\sin \varphi) \quad (39)$$

gdzie \bar{C}_{nm} i \bar{S}_{nm} są w pełni znormalizowanymi współczynnikami globalnego modelu geopotencjału, \bar{P}_{nm} są w pełni znormalizowanymi stowarzyszonymi funkcjami Legendre'a, n_{\max} jest maksymalnym stopniem modelu geopotencjału, γ jest średnim normalnym przyspieszeniem siły ciężkości, zaś R jest średnim promieniem Ziemi. Składowe te reprezentują pasmo długich fal o minimalnej długości λ_{\min}

$$\lambda_{\min} = \frac{360^\circ}{n_{\max}} = \frac{40000 \text{ km}}{n_{\max}} \quad (40)$$

co przy $n_{\max} = 360$ odpowiada długości fali $\lambda_{\min} 1^\circ$ lub 110 km.

4.2. Składowa średniofalowa

W wyniku usunięcia z zaobserwowanych anomalii grawimetrycznych efektu globalnego (długofalowego) przy użyciu globalnego modelu geopotencjału pozostają w nich obok residualnych efektów długofalowych, wynikających z błędności użytego GGM, wyłącznie efekty o charakterze regionalnym (średniofalowe). Aby uzyskać anomalie residualne Δg_{res} , należy obliczone anomalie grawimetryczne zredukować o efekt długofalowy Δg_{GGM} . W przypadku użycia anomalii Faye'a lub anomalii Helmerta efekt krótkofalowy Δg_H (36) został usunięty już na etapie obliczania anomalii grawimetrycznych

$$\Delta g_{res} = \Delta g^F - \Delta g_{GGM} \quad \text{lub} \quad \Delta g_{res} = \Delta g^{Helmert} - \Delta g_{GGM} \quad (41)$$

W przypadku zaś korzystania z anomalii wolnopoietrznych Δg^{FA} do obliczenia anomalii residualnych należy dodatkowo uwzględnić efekt krótkofalowy

$$\Delta g_{res} = \Delta g^{FA} - \Delta g_{GGM} - \Delta g_H \quad (42)$$

W wyniku zredukowania anomalii grawimetrycznych o efekty globalne (długofalowa część sygnału), obszar, z jakiego należy wykorzystywać anomalie grawimetryczne do modelowania geoidy, ulega znacznemu zmniejszeniu, przy jednoczesnym zachowaniu poziomu dokładności wynikowego modelu. Spektra sygnałów reprezentowanych przez residualne anomalie grawimetryczne Δg_{res} składają się zatem głównie z elementów średniofalowych. Zawężenie spektrum sygnału w wyniku wyeliminowania efektu długo- i krótkofalowego pozwala na pełniejsze wykorzystanie średniofalowego spektrum obserwowanych anomalii grawimetrycznych, reprezentującego regionalne i lokalne zakłócenia pola grawitacyjnego Ziemi,

a tym samym dokładniejsze wyznaczenie lokalnego przebiegu geoidy. Obejmujący w klasycznym ujęciu Stokesa powierzchnię całej Ziemi obszar całkowania σ w przypadku użycia residualnych anomalii grawimetrycznych Δg_{res} we wzorze (5) może zostać ograniczony w zależności od rozdzielczości n_{max} globalnego modelu geopotencjału użytego do obliczenia Δg_{GGM} ze wzoru (38) oraz N_{GGM} ze wzoru (39). I tak, przy $n_{max} = 360$ promień obszaru całkowania residualnych anomalii grawimetrycznych można ograniczyć do kilkuset kilometrów, nie mniej jednak niż 110 km.

Składowa $N_{\Delta g_{res}}$ undulacji geoidy jest obliczana ze wzoru Stokesa (9) przy wykorzystaniu residualnych anomalii grawimetrycznych Δg_{res} (41) lub (42)

$$N_{\Delta g_{res}} = \frac{R}{4\pi\gamma} \iint_{\sigma_0} \Delta g_{res} S(\psi) d\sigma \quad (43)$$

gdzie całkowanie (43) przebiega po powierzchni σ_0 sferycznego wycinka geoidy, którego promień pozostaje w ścisłym związku z minimalną długością λ_{min} fali globalnego modelu geopotencjału wykorzystanego do modelowania składowej długofalowej.

Błąd aproksymacji sferycznej całki Stokesa przy zastosowaniu metody *remove-compute-restore* (43) jest o rząd wielkości mniejszy niż w klasycznej metodzie wyznaczania geoidy, gdyż całkowana anomalia grawimetryczna uwolniona jest od składowej długofalowej poprzez usunięcie z niej wpływu globalnego modelu geopotencjału.

W przypadku użycia szybkiej transformaty Fouriera do oszacowania całki Stokesa przeważnie stosowana jest lokalna aproksymacja kuli przez płaszczyznę. W takiej sytuacji całka Stokesa będzie w dwuwymiarowym układzie opisana za pomocą współrzędnych płaskich. Na pewnym obszarze E powierzchnia kuli jest zastąpiona przez płaszczyznę styczną do kuli. Wówczas funkcja Stokesa (11) będzie aproksymowana przez

$$S(\psi) \cong \frac{1}{\sin \frac{\psi}{2}} \cong \frac{2}{\psi} \quad (44)$$

Wprowadzając współrzędne biegunowe, $\psi = s/R$, $\sin \psi \cong \psi$, równanie (44) przyjmie postać $S(\psi) = 2R/s$, a całkę Stokesa (41) można napisać w postaci

$$N_{\Delta g_{res}} = \frac{1}{2\pi\gamma_m} \iint_E \frac{\Delta g_{res}}{s} s d\alpha ds \quad (45)$$

gdzie obszar całkowania E : $[0 \leq s \leq s_{max}, 0 \leq \alpha \leq 2\pi]$.

We współrzędnych prostokątnych obszar całkowania określony jest następująco: $E: [-X/2 \leq x \leq X/2, -Y/2 \leq y \leq Y/2]$, co daje

$$sd\alpha ds = dx dy \quad (46)$$

$$s = \left[(x - x_p)^2 + (y - y_p)^2 \right]^{1/2} \quad (47)$$

a całka Stokesa (45) przyjmuje postać

$$N_{\Delta g_{res}}(x_p, y_p) = \frac{1}{2\pi\gamma_m} \iint_E \frac{\Delta g_{res}(x, y)}{\left[(x - x_p)^2 + (y - y_p)^2 \right]^{3/2}} dx dy \quad (48)$$

Wyrażenie (48) jest całką splotu (konwolucji) dwu funkcji

$$N_{\Delta g_{res}}(x, y) = \frac{1}{2\pi\gamma_m} \Delta g_{res}(x, y) * l(x, y) \quad (49)$$

a

$$l(x, y) = (x^2 + y^2)^{-1/2} \quad (50)$$

jest funkcją jądra całki Stokesa.

4.3. Składowa krótkofalowa

Powierzchnia obliczona ze zredukowanych anomalii grawimetrycznych przy użyciu całki Stokesa nie jest geoidą, a tzw. co-geoidą (Heiskanen i Moritz, 1967). Z sumowania składowej $N_{\Delta g_{res}}$ obliczonej wzorami (43) lub (49) ze składową N_{GGM} obliczoną wzorem (39) otrzymuje się zatem undulację co-geoidy $N_{co-geoid}$

$$N_{co-geoid} = N_{GGM} + N_{\Delta g_{res}} \quad (51)$$

Aby z odstępów co-geoidy od elipsoidy uzyskać odstęp geoidy od elipsoidy należy uwzględnić krótkookresowy sygnał przebiegu geoidy. W praktyce realizuje się to poprzez uwzględnienie zmiany potencjału geoidy spowodowanej zastosowaniem konkretnej redukcji grawimetrycznej, czyli uwzględnienie zasadniczego efektu pośredniego (5) redukcji grawimetrycznej w obliczonej undulacji geoidy, związanego z przemieszczeniem mas topograficznych (Łyszkowicz i Forsberg, 1995).

Uzyskanie anomalii grawimetrycznych spełniających warunki konieczne zagadnienia brzegowego (masa Ziemi przed i po redukcji grawimetrycznej pozostaje niezmienną, a jednocześnie żadne masy nie wystają ponad geoidę), którego rozwiązanie reprezentowane jest przez wzór Stokesa, wymaga uwzględnienia topografii terenu. Reprezentowany przez składową

krótkofalową wpływ topografii terenu Δg_H wyraża się w różny sposób w zależności od zastosowanej redukcji grawimetrycznej. I tak, np.

$$\Delta g_H = 2\pi G\rho H - \delta g^T \quad (52)$$

w przypadku użycia redukcji Bouguera lub

$$\Delta g_H = -\delta g^T \quad (53)$$

gdy użyta jest redukcja kondensacyjna Helmerta.

Wykorzystywane w praktyce do modelowania geoidy średnie anomalie grawimetryczne w wyniku operacji uśredniania są dodatkowo uwolnione od residualnej składowej krótkofalowej, która mogłaby pozostać w wyznaczonych anomaliach grawimetrycznych na skutek ewentualnych błędów w wyznaczonej poprawce związanej z topografią terenu.

Na skutek usunięcia z anomalii grawimetrycznych czynnika związanego z topografią terenu wyznaczona na podstawie anomalii residualnych undulacja geoidy nie będzie zawierała sygnału krótkofalowego pochodzącego od topografii. Mająca charakter lokalny składowa krótkofalowa undulacja geoidy, zwana efektem pośrednim, jest związana z lokalnym ukształtowaniem terenu. Zarówno sposób wyznaczania efektu pośredniego, jak i jego wielkość zależą od rodzaju stosowanej redukcji grawimetrycznej. W przypadku użycia najpopularniejszej dla metody modelowania geoidy techniką *remove-compute-restore* redukcji grawimetrycznej, czyli redukcji kondensacyjnej Helmerta, efekt pośredni przyjmuje małe wartości. W dowolnym punkcie można go wyznaczyć, korzystając ze wzoru (54) (Omang, 2000)

$$N_H = -\frac{\pi G\rho}{\gamma_m} H_P^2 - \frac{G\rho}{6\gamma_m} \iint_E \frac{H^3 - H_P^3}{l^3} dx dy \quad (54)$$

którego pierwszy wyraz odzwierciedla wpływ zmiany potencjału spowodowanej skondensowaniem na geoidzie mas płyty Bouguera o grubości równej wysokości H_P danego punktu P nad geoidą na wartość odstepu N geoidy od elipsoidy, zaś drugi wyraz wyraża poprawkę związaną z odstępstwem topografii od płyty Bouguera.

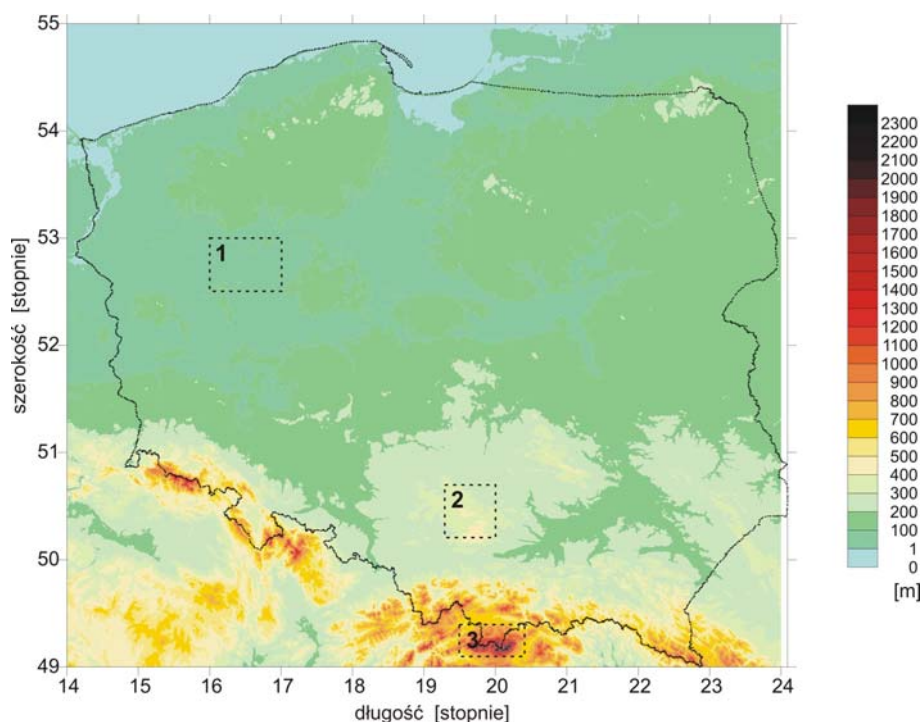
W praktyce często czynnik związany z odstępstwem topografii od płyty Bouguera jest pomijany i efekt pośredni wyznaczany jest na podstawie wzoru przybliżonego (7).

Zasięg obszaru, dla którego zostaje uwzględniony wpływ topografii, powinien zostać dobrany bardzo rozważnie. Podobnie jak promień całkowania anomalii residualnych, promień obszaru całkowania topografii przy wyznaczaniu poprawek terenowych δg^T (parametry x_0, y_0 w (29)) przeznaczonych do wykorzystania w procesie modelowania geoidy pozostaje w ścisłym związku z rozdzielczością globalnego modelu geopotencjału wykorzystanego do modelowania składowej długookresowej, odpowiadającą

minimalnej długości λ_{\min} fali (40). Nieuwzględnienie tego związku spowodowałoby, że oczyszczone z efektów długofalowych residualne anomalie grawimetryczne Δg_{res} zostałyby ponownie zakłócone elementami długofalowymi wynikającymi ze zwiększenia promienia obszaru całkowania topografii na etapie wyznaczania poprawek terenowych. Jednocześnie należy przypomnieć, że zmniejszenie rozmiarów obszaru całkowania topografii w znaczący sposób skraca czas obliczeń poprawek terenowych.

5. TESTY NUMERYCZNE

W celu zbadania wpływu lokalnej topografii na wartość składowej krótkofalowej undulacji geoidy N przeprowadzono testy numeryczne dla wybranych rejonów z obszaru Polski reprezentujących tereny nizinne (1), wyżynne (2) i górskie (3) (rys. 3). Uwzględniając topografię w promieniu 50 km wokół punktu grawimetrycznego, wyznaczono efekt pośredni N_H przy wykorzystaniu wzoru ścisłego (54) oraz za pomocą wzoru przybliżonego (7). Statystyki dotyczące wartości sygnału krótkofalowego wyznaczonego przy wykorzystaniu podejścia ścisłego oraz przybliżonego i statystyki obliczonych różnic zostały zamieszczone w tabeli 1.

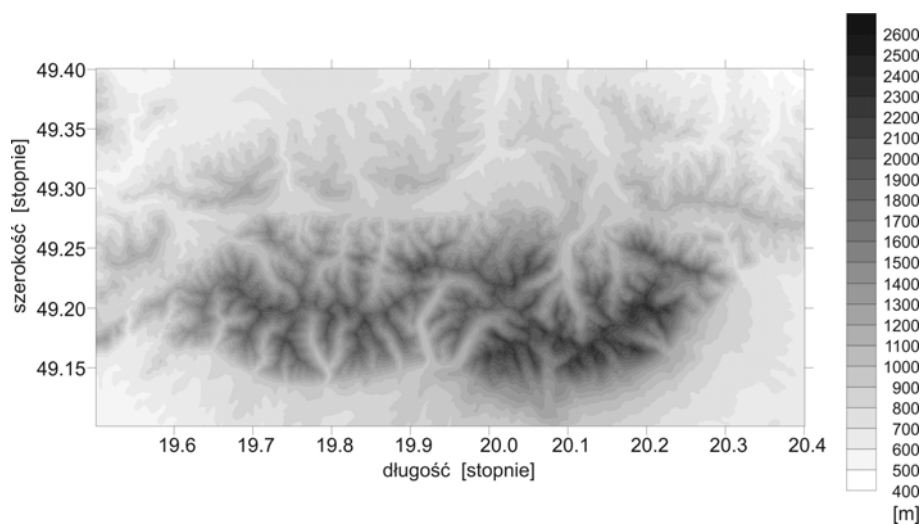


Rys. 3. Rozmieszczenie obszarów testowych

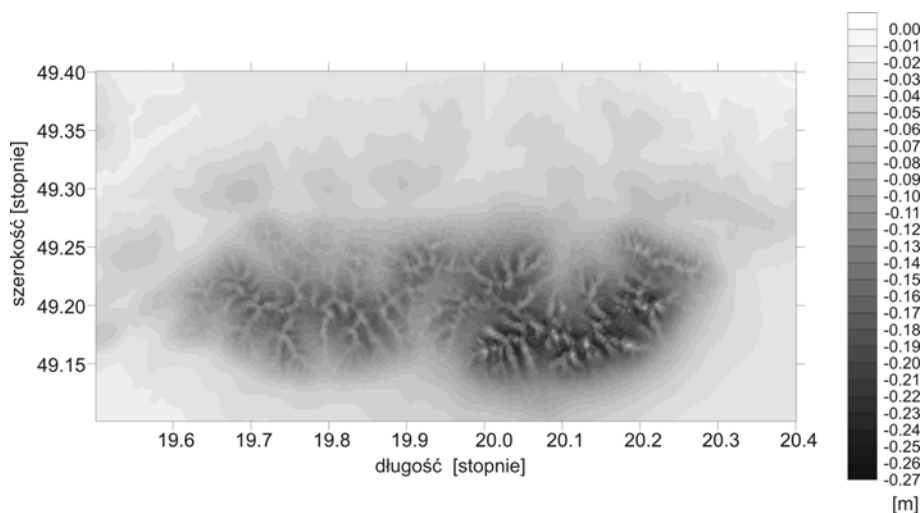
Tabela 1. Statystyki wartości sygnału krótkofalowego wyznaczonego przy wykorzystaniu wzorów ścisłego i przybliżonego oraz statystyki obliczonych różnic [m]

Obszar testowy	Sposób wyznaczenia	Min [m]	Max [m]	Średnia [m]	Odch. std. [m]
1	[1] Wzór ścisły	-0.002	0.000	0.000	0.000
	[2] Wzór przybliżony	-0.002	0.000	0.000	0.000
	[1] - [2]	-0.001	0.001	0.000	0.000
2	[1] Wzór ścisły	-0.013	-0.003	-0.007	0.002
	[2] Wzór przybliżony	-0.014	-0.003	-0.007	0.002
	[1] - [2]	-0.002	0.002	0.000	0.000
3	[1] Wzór ścisły	-0.261	-0.015	-0.070	0.047
	[2] Wzór przybliżony	-0.365	-0.012	-0.071	0.056
	[1] - [2]	-0.088	0.282	0.001	0.023

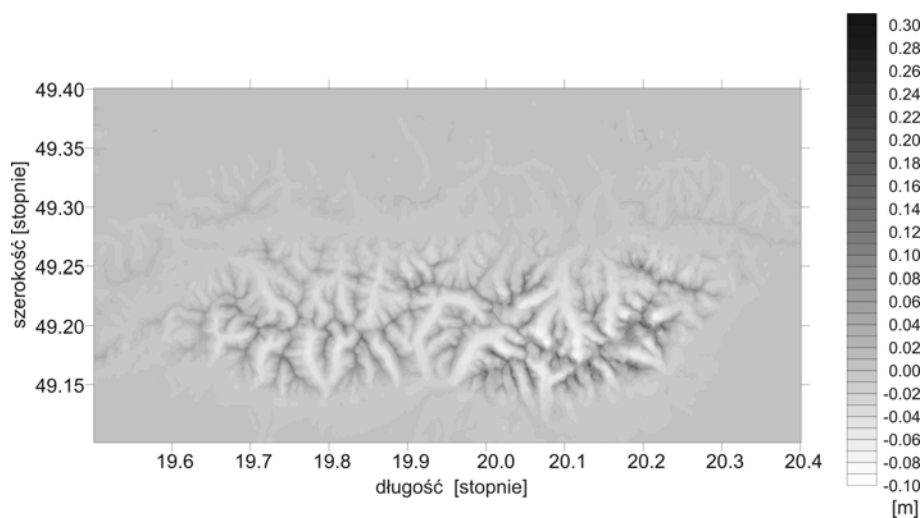
Rysunki 4–6 przedstawiają kolejno mapę rzeźby terenu, efektu pośredniego wyznaczonego przy użyciu wzoru ścisłego (54) oraz różnic spowodowanych zastosowaniem konkretnej metody wyznaczania sygnału krótkookresowego dla obszaru testowego 3 – o najbardziej zróżnicowanej topografii.



Rys. 4. Rzeźba terenu na obszarze testowym 3



Rys. 5. Efekt pośredni na obszarze testowym 3



Rys. 6. Różnica między efektem pośrednim wyznaczonym przy wykorzystaniu wzoru ścisłego oraz wzoru przybliżonego na obszarze testowym 3

Dla obszaru Polski największe rozbieżności między stosowaniem wzoru ścisłego (54) i wzoru przybliżonego (7) występują na obszarze Tatr. W praktyce tylko dla tego obszaru należałoby stosować wzór ścisły. Dla pozostałej części kraju stosowanie wzoru przybliżonego wydaje się być w pełni uzasadnione.

W ogólności przy modelowaniu geoidy o dokładności centymetrowej dla obszarów o bardzo zróżnicowanej topografii niezbędne jest wyznaczanie krótkofalowej składowej przebiegu geoidy przy zastosowaniu wzoru ścisłego (54).

6. PODSUMOWANIE

Porównanie klasycznej metody modelowania geoidy przy wykorzystaniu wzoru Stokesa z jedną z najbardziej popularnych obecnie metod – metodą *remove-compute-restore* ukazuje zdecydowaną wyższość tej ostatniej, która wynika nie tylko z większej dokładności uzyskiwanych na jej podstawie modeli, ale również ze skrócenia czasu obliczeń oraz ograniczenia ilości niezbędnych danych grawimetrycznych.

W metodzie *remove-compute-restore*, w przeciwieństwie do metody klasycznej, wystarczy znajomość anomalii grawimetrycznych praktycznie wyłącznie z obszaru modelowanego. Na tak znaczące ograniczenie zasięgu całkowania anomalii pozwala wyodrębnienie w przebiegu geoidy sygnału długo-, średnio- oraz krótkofalowego w połączeniu z zastosowaniem wysokorozdzielczego modelu geopotencjału. Zasięg całkowania anomalii w metodzie *remove-compute-restore* związany jest ściśle z minimalną długością λ_{\min} fali wykorzystywanego globalnego modelu geopotencjału. Im większy jest rząd współczynników modelu geopotencjału, tym mniejszy jest zasięg obszaru, z którego należy znać wartości anomalii. Zwiększenie rozdzielczości modelu geopotencjału wpływa ponadto na zmniejszenie zasięgu całkowania topografii na etapie wyznaczania poprawek terenowych, a tym samym skraca czas procesu obliczeniowego.

Do precyzyjnego modelowania geoidy powinny być stosowane anomalie grawimetryczne, których wyznaczenie wiąże się z jak najmniejszą zmianą potencjału siły ciężkości geoidy. Efekt pośredni związany ze zmianą potencjału siły ciężkości geoidy spowodowaną zastosowaniem redukcji grawimetrycznych, zwany również krótkofalową częścią sygnału przebiegu geoidy, powinien mieć nie tylko niewielką wartość, ale powinien być również łatwy do zamodelowania.

Zarówno rozważania teoretyczne, jak i testy numeryczne dowiodły, że w celu uzyskania modelu geoidy charakteryzującego się centymetrową dokładnością niezbędne jest uwzględnienie precyzyjnie wyznaczonej składowej krótkookresowej undulacji geoidy. Dla obszarów górskich konieczne jest wyznaczanie wartości tej składowej na podstawie wzoru ścisłego. Maksymalne różnice otrzymywane przy zastosowaniu wzoru ścisłego i przybliżonego mogą bowiem kilkunastokrotnie przekroczyć akceptowalny błąd wynikowego modelu geoidy.

Podziękowania

Badania, których wyniki przedstawiono w niniejszej pracy, wykonano w ramach finansowanego przez Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego projektu badawczego NN526 2163 33 „Badanie wpływu uwzględnienia odchyłań pionu na jakość grawimetrycznej quasigeoidy na obszarze Polski”.

Recenzował: Prof. dr hab. Adam Łyszkowicz

BIBLIOGRAFIA

- Bajracharya S., (2003): *Terrain Effects on Geoid Determination*, UCGE Reports, No 20181, University of Calgary, Alberta, Canada (130 pp).
- Barlik M., Pachuta A., (2007): *Geodezja fizyczna i grawimetria geodezyjna: Teoria i praktyka*, Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej.
- Forsberg R., (2005): *Terrain effects in geoid computation*, International School for the Determination and Use of the Geoid, Budapest, pp. V1–V38.
- Forsberg R., Tscherning C.C., (1981): *The use of Height Data in Gravity Field Approximation by Collocation*, J. Geophys. Res., Vol. 86, No B9, pp. 7843–7854.
- Grushinskiy N.P., (1976): *Teoria figury zemli*, Izdanie vtoroie, Izdatelstvo Nauka, Moskva, 1976.
- Grzyb M., Kryński J., Mańk M., (2006): *The effect of topography and quality of a digital terrain model on the accuracy of terrain corrections for centimetre quasigeoid modelling*, Geodezja i Kartografia, Vol. 55, No 1, pp. 23–46.
- Heck B., (2003): *On Helmert's methods of condensation*, Journal of Geodesy, Vol. 77, pp. 155–170.
- Heiskanen W., Moritz H., (1967): *Physical Geodesy*, W.H. Freeman and Company, San Francisco.
- Kryński J., (2007): *Precyzyjne modelowanie quasigeoidy na obszarze Polski – wyniki i ocena dokładności*, Seria Monograficzna Instytutu Geodezji i Kartografii, Nr 13, Warszawa 2007 (266 pp).
- Łyszkowicz A., (2005): *Opracowanie metody i utworzenie modelu geoidy grawimetrycznej*, Uniwersytet Warmińsko-Mazurski, Raport dla Instytutu Geodezji i Kartografii, Warszawa (20 pp).
- Łyszkowicz A., Forsberg R., (1995): *Gravimetric Geoid for Poland Area Using Spherical FFT*, IAG Bulletin d'Information No 77, IGES Bulletin No 4, Special Issue, Milan, pp.153–161.
- Moritz H., (1984): *Geodetic Reference System 1980*, The Geodesist's Handbook 1984, Bulletin Géodésique 58(3), pp. 388–398.
- Omang O.C.D., Forsberg R., (2000): *How to handle topography in practical geoid determination: three examples*, Journal of Geodesy, Vol. 74, pp. 458–466.
- Sideris M.G., (2005): *Geoid determination by FFT techniques*, International School for the Determination and Use of the Geoid, Budapest, pp. IV1–IV64.
- Torge W., (1989): *Gravimetry*, Walter de Gruyter, Berlin-New York 1989.
- Torge W., (2001): *Geodesy*, 3rd edition, Walter de Gruyter, Berlin-New York 2001.
- Wichiencharoen C., (1982): *Indirect Effects on the Computation of the Geoid Undulation*, OSU Report No 336.

**IMPLEMENTATION OF LONG, MEDIUM AND SHORT WAVE
COMPONENTS OF THE SIGNALS OF FUNCTIONALS
OF THE DISTURBING POTENTIAL IN THE PROCESS
OF MODELLING GEOID**

Summary

Remove-compute-restore method is commonly used for regional modelling of gravimetric geoid. In this method, which allows to develop precise geoid models using gravity data practically only from the modelled area, functionals of the disturbing potential are expressed in terms of components, which represent different spectral groups. Global geopotential model, gravity anomalies and topographic data are used to determine these components. An important role in modelling geoid, especially with the use of remove-compute-restore technique, plays the type of gravity reductions, and hence the type of gravity anomalies.

In the paper a detailed algorithm of classical technique of modelling geoid is shown, and then free-air, Faye and Helmert gravity anomalies, which are most often used for modelling geoid, are discussed. The description of remove-compute-restore method of geoid modelling is presented in three subsections, where separate spectral components of functionals of the disturbing potential: long, medium and short wave components are discussed. The authors paid attention to the dependence of the method of calculation of medium and short wave components on the type of gravity anomalies used. In particular, the problem of the determination of indirect effect in geoid undulation was discussed. Numerical tests showed the need of using the exact formula for calculating the indirect effect only in mountainous areas of Poland.

Keywords: geoid modelling, spectral components of functionals of the disturbing potential, gravimetric reductions, indirect effect

