

MARIA KRYSZYNA SZACHERSKA

528.115:528.331

Analiza rozkładu błędów w polskiej sieci astronomiczno-geodezyjnej

Polskiej sieci astronomiczno-geodezyjnej poświęcono liczne prace, w których przedstawiono jej genezę, historię, zasady budowy oraz metody obserwacji i wyrównania. Wstępną analizę wyników pomiarów i ocenę uzyskanych dokładności obserwacji przeprowadzono już przed wyrównaniem sieci. Obecnie zajmujemy się badaniem rozkładu błędów w oparciu o prawa i wzory, sformułowane w teorii błędów [2], [4], [6], [7], [8], [9], oraz z zastosowaniem metod statystyki matematycznej [1], [13], [14], [15], [17].

Analiza statystyczna stosowana jest ostatnio coraz częściej w geodezji do badania prawidłowości rozkładu błędów pomiarowych w dużych zespołach obserwacji. Wymienić tu należy zwłaszcza prace: J. Böhma [1], B. Hallerta [2], S. Hausbrandta [5], V. Radoucha [11], P. Richardusa [12] i H. Wolfa [19]. W wielu krajach, w oparciu o metody statystyki matematycznej, przeprowadzono analizy rozkładu błędów w państwowych sieciach triangulacyjnych. Sieci takie, ze względu na dużą ilość przeprowadzonych pomiarów i bogaty materiał obserwacyjny, nadają się szczególnie dobrze do analiz statystycznych.

S. Hausbrandt [5], [6] udowodnił jednak, że statystyka matematyczna nie powinna być jedynym narzędziem w badaniach rozkładu błędów. W analizie statystycznej określa się bowiem teoretyczne związki matematyczne w zbiorze z pominięciem wielu własności błędów, których pełne uzasadnienie znajdujemy w teorii błędów popartej przez praktykę pomiarów geodezyjnych.

Badanie rozkładu błędów w polskiej sieci astronomiczno-geodezyjnej wykonamy więc z zastosowaniem metod statystyki matematycznej, jed-

nak analizę i wnioski przeprowadzimy w oparciu o teorię błędów. Jako materiał podstawowy do analizy przyjmujemy błędy zamknięć trójkątów dla oceny wyników pomiarów i poprawki do kątów po wyrównaniu w celu określenia jego prawidłowości.

Przed przystąpieniem do analizy słuszna wydaje się krótka rekapitulacja podstawowych pojęć i wzorów teorii błędów oraz metod statystyki matematycznej, zastosowanych w toku dalszej pracy. Zestawienie to wykonamy głównie w oparciu o następujące dzieła: S. Hausbrandt, Teoria błędów pomiarów inżynierskich [6], B. L. van der Waerden, Mathematische Statistik [17] i J. Böhm, Statistische Prüfung von Messergebnissen auf Normalverteilung [1].

Omówienie zastosowanych metod i wzorów

Zdefiniowane w teorii błędów [5], [9] własności przypadkowych błędów pomiarowych umożliwiły wyznaczenie związków funkcyjnych pomiędzy ich wielkościami a częstością występowania w dużym zbiorze obserwacji. Przyjęto, że rozkład błędów zbioru prawidłowo przeprowadzonych obserwacji winien być zgodny z rozkładem dwumianowym. Nie będziemy przytaczać tu wszystkich własności rozkładu dwumianowego i wyprowadzeń charakteryzujących ten rozkład wzorów. Zagadnienie zostało szeroko omówione w literaturze [6], [17], ograniczymy się więc do przypomnienia wzoru ostatecznego, określającego prawdopodobieństwo wystąpienia w tym rozkładzie błędu określonej wielkości. W myśl założeń teoretycznych, ujętych w hipotezie Hagen'a i w oparciu o wzór Bernouilliego, prawdopodobieństwo wystąpienia w rozkładzie dwumianowym błędu x definiuje zależność [6]:

$$P(x) = \frac{\binom{n}{k}}{2^n}. \quad (1)$$

W przytoczonym wzorze n oznacza ilość wszystkich błędów elementarnych, których sumą algebraiczną jest błąd x , a k określa ilość elementarnych błędów ujemnych.

Wzór (1) charakteryzuje cały szereg rozkładów dwumianowych o różnych wartościach n . Do badania rozkładów błędów pomiarów geodezyjnych, w których występuje znaczna ilość źródeł błędów, S. Hausbrandt [6] zaleca stosowanie rozkładów dwumianowych o stosunkowo dużych wartościach n . W rozkładach takich przewiduje się bowiem możliwość wystąpienia również większych błędów, z którymi niekiedy spotykamy się w praktyce. Błąd x , którego prawdopodobieństwo wynosi $P(x)$, wyrazić

można również [6] w jednostkach błędu średniego m :

$$t = \frac{x}{m} = \frac{n-2k}{\sqrt{n}}.$$

Szczególnie dogodny dla analiz jest więc, jak wynika z podanej zależności, rozkład dwumianowy o $n = 16$, w którym rozważane są błędy będące wielokrotnością 0,5 m . Ten właśnie rozkład dwumianowy przyjmiemy jako podstawę przeprowadzanej analizy błędów.

Przypadek graniczny rozkładu dwumianowego, gdy n jest nieskończenie wielkie, stanowi rozkład normalny [6], [13], [14], [17]. Prawdopodobieństwo wystąpienia błędu x , zawartego w określonym przedziale Δx , wyznacza dla tego rozkładu wzór Gaussa-Laplace'a:

$$P(x) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 x^2} \Delta x, \quad (2)$$

gdzie

$$h = \frac{1}{m\sqrt{2}}.$$

Obok rozkładu dwumianowego $n = 16$, do analizy włączymy też porównanie rozkładu zbioru z rozkładem normalnym, przyjmując wielkość przedziału $\Delta x = 0,5 m$.

Wartości $P(x_i)$ zostały stabelowane zarówno dla rozkładu dwumianowego [6], jak i dla rozkładu normalnego [6], [17]. Na podstawie określonych z tablic wartości $P(x_i)$ obliczyć można częstość teoretyczną występowania błędów określonej wielkości w zbiorze N obserwacji:

$$C_T(x_i) = NP(x_i).$$

Analizie podlegają różnice pomiędzy częstością teoretyczną i częstością rzeczywistą $C_R(x_i)$ występowania błędów. Wielkości różnic

$$\Delta C_i = C_R(x_i) - C_T(x_i)$$

ukazują, w jakim stopniu rozkład zbioru rzeczywistego odpowiada przyjętemu rozkładowi teoretycznemu. W pracach z dziedziny teorii błędów [6] i statystyki matematycznej [1], [17] przedstawiono kilka metod tego rodzaju badań.

Kryterium Pearsona polega na badaniu wartości:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^r \frac{\Delta C_i^2}{C_T(x_i)} \quad (3)$$

obliczonej dla zbioru podzielonego na r przedziałów. Wielkość χ^2 umożliwia wyznaczenie z tablic [15], [17] prawdopodobieństwa, które określa zgodność rozkładu badanego zbioru rzeczywistego z przyjętym rozkładem

teoretycznym. Jeśli prawdopodobieństwo to jest duże, można przyjąć, że odchyłki są przypadkowe, a zastosowane prawo teoretyczne dobrze obrazuje rozkład błędów rozpatrywanego zbioru.

W kryterium K o ł m o g o r o w a analizie podlegają częstości S występowania błędów pogrupowanych w przedziałach $0 < |x| < mt$. Dla maksymalnej różnicy D_{\max} między częstościami w zbiorze rzeczywistym i teoretycznym oblicza się

$$\lambda = D_{\max} \frac{1}{\sqrt{N}}. \quad (4)$$

Na podstawie wartości λ w tablicach S m i r n o w a [15] znajdujemy prawdopodobieństwo $P(\lambda)$, które określa, jak dalece rozkład zbioru rzeczywistego odpowiada przyjętemu rozkładowi teoretycznemu.

Badanie zbioru błędów może też być przeprowadzone na drodze określenia dopuszczalności poszczególnych różnic między częstością rzeczywistą i teoretyczną. Średnią przewidywaną wartość odchyłki określa się [1], [11] wzorem

$$m_{c,i} = \sqrt{NP_i(1-P_i)}. \quad (5)$$

Jeśli przyjmiemy ogólnie stosowaną zasadę o błędzie granicznym, możemy ustalić, że maksymalna dopuszczalna wartość odchyłki wynosi $3 m_{c,i}$.

Dodatkowej charakterystyki zbioru błędów dostarczają podane przez S. H a u s b r a n d t a [6] wartości oczekiwane funkcji zmiennej losowej „błąd przypadkowy pomiaru”:

- | | |
|--------------------------------|---------------------------|
| 1. błędu | $b = \sum x P(x),$ |
| 2. wartości bezwzględnej błędu | $d = \sum x P(x),$ |
| 3. kwadratu błędu | $m^2 = \sum x^2 P(x),$ |
| 4. czwartej potęgi błędu | $\gamma = \sum x^4 P(x).$ |

Podobnemu celowi służą określone w statystyce matematycznej tzw. momenty zbioru. Dla zbioru N błędów prawdziwych moment j określany [1], [11] jest wzorem

$$m_{(j)} = \frac{[x^j]}{N}.$$

Obliczenie wartości oczekiwanej błędu b , równoznacznej z $m_{(1)}$, pozwala na określenie, czy w zbiorze błędów przypadkowych można wyróżnić składnik systematyczny. O jego istnieniu świadczy $b \neq 0$, jeśli oczywiście błąd wyznaczenia tej wielkości jest odpowiednio mały. Błąd μ_b określany jest [8], [11] wzorem

$$\mu_b = \pm \frac{m}{\sqrt{N}}.$$

Powszechnie stosuje się ocenę obserwacji na podstawie ich błędu średniego. Zgodnie z teorią błędów [2], [6] można zakładać, że w myśl prawa *G a u s s a* w granicach błędu średniego winno mieścić się 68,3% błędów, a zaledwie 0,27% wartości może przekroczyć wielkość $3 m$. Wobec znikomego prawdopodobieństwa wystąpienia błędów większych, ta ostatnia wartość przyjmowana jest jako górna granica błędów.

W statystyce matematycznej zaleca się ponadto stosowanie kryterium ekscesu i kryterium asymetrii rozkładu zbioru. Kryterium ekscesu zostało wyprowadzone z występującej w rozkładzie normalnym zależności podanej [6] przez *S. H a u s b r a n d t a*

$$\gamma^4 = 3 m^4.$$

W badanym zbiorze obliczamy

$$\tau_{(2)} = \frac{m_{(4)}}{m^4} - 3$$

i błąd średni tej wielkości wg wzoru [11]:

$$\mu_{\tau_{(2)}} = \pm \sqrt{\frac{15}{N}}.$$

Jeśli τ_2 jest dodatnie, w zbiorze występuje więcej błędów małych i dużych niż to przewiduje rozkład teoretyczny, a gdy jest ujemne, zbiór charakteryzuje przewaga błędów średniej wielkości.

Dla jednorodnego zbioru błędów pomiarowych nie powinniśmy w zasadzie otrzymać rozkładu asymetrycznego. Asymetria rozkładu może występować, jeśli badany zbiór całkowity powstał z połączenia zespołów o odmiennych parametrach rozkładu i różnych błędach systematycznych. W celu wykrycia asymetrii oblicza się

$$\tau_{(1)} = \frac{m_{(3)}}{m^3}.$$

Wartość $\tau_{(1)}$ świadczy o występowaniu asymetrii, jeśli w istotny sposób przekracza błąd jej określenia [11]:

$$\mu_{\tau_{(1)}} = \pm \sqrt{\frac{96}{N}}.$$

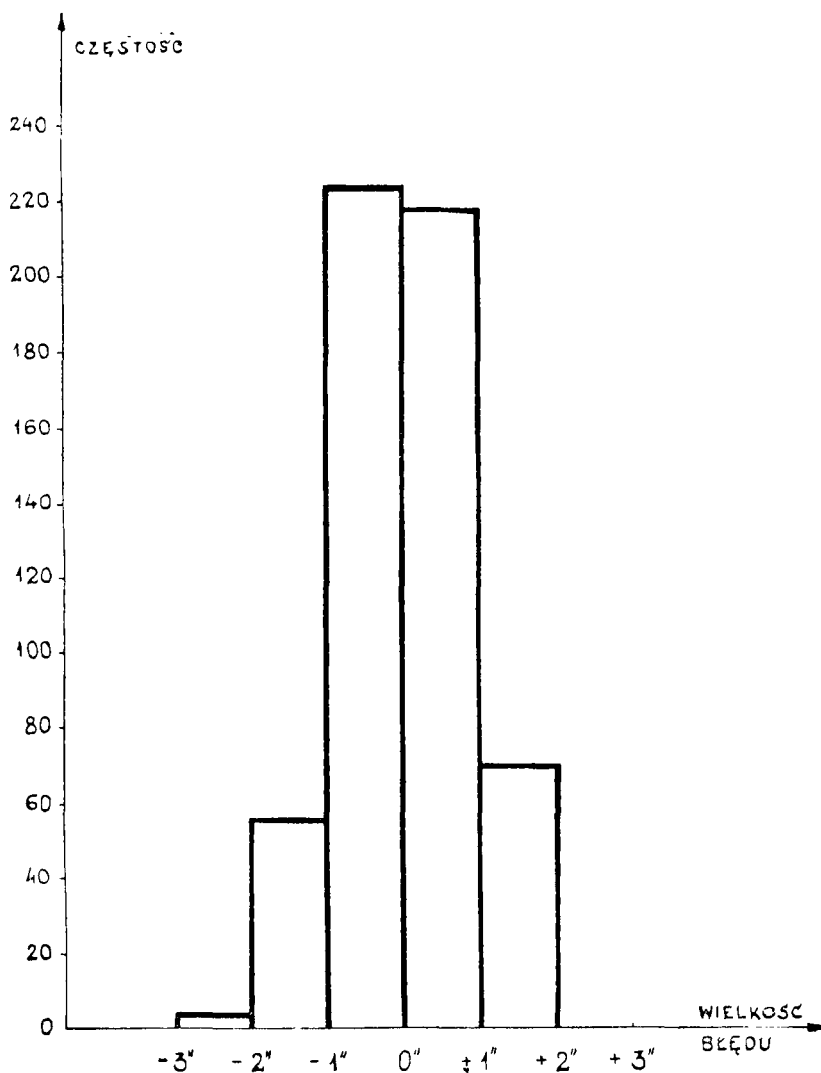
Dla uzyskania charakterystyki rozkładu błędów w statystyce matematycznej stosuje się również obliczenia korelacji pomiędzy ilością błędów określonej wielkości a dodatkowymi warunkami zewnętrznymi pomiarów. Ustalenie korelacji tego rodzaju dla dużej sieci triangulacyjnej jest jednak poważnie utrudnione przez znaczną ilość czynników wpływających w różnorodny sposób na dokładność obserwacji. Badania *V. R a d o u c h a* [11], mające na celu wykrycie korelacji w czeskosłowackiej sieci triangulacyjnej, nie wykazały związków pomiędzy uzyskanymi błędami zamknięć trójkątów a warunkami, w których prowadzone były obserwacje.

Tablica I

Zestawienie
błędów zamknięć trójkątów
Polskiej Sieci Astronomiczno-Geodezyjnej

+1,90	+1,90	+1,83	+1,86	+1,86	+1,74
+1,73	+1,69	+1,68	+1,66	+1,65	+1,63
+1,60	+1,60	+1,56	+1,54	+1,51	+1,50
+1,50	+1,49	+1,46	+1,45	+1,43	+1,42
+1,42	+1,39	+1,39	+1,38	+1,35	+1,33
+1,32	+1,32	+1,29	+1,29	+1,27	+1,27
+1,26	+1,26	+1,25	+1,25	+1,24	+1,24
+1,22	+1,21	+1,21	+1,20	+1,18	+1,17
+1,17	+1,16	+1,16	+1,15	+1,13	+1,11
+1,09	+1,09	+1,08	+1,08	+1,08	+1,08
+1,07	+1,06	+1,05	+1,05	+1,05	+1,03
+1,01	+1,01	+1,01	+1,00	+1,00	+0,99
+0,98	+0,98	+0,96	+0,95	+0,94	+0,94
+0,94	+0,93	+0,93	+0,91	+0,91	+0,91
+0,89	+0,89	+0,88	+0,87	+0,86	+0,85
+0,84	+0,83	+0,83	+0,82	+0,81	+0,81
+0,79	+0,79	+0,78	+0,78	+0,77	+0,76
+0,76	+0,75	+0,75	+0,75	+0,74	+0,72
+0,72	+0,70	+0,70	+0,70	+0,70	+0,70
+0,69	+0,69	+0,69	+0,68	+0,68	+0,66
+0,66	+0,66	+0,66	+0,66	+0,66	+0,65
+0,64	+0,64	+0,62	+0,62	+0,62	+0,61
+0,60	+0,59	+0,59	+0,57	+0,57	+0,57
+0,56	+0,55	+0,55	+0,55	+0,53	+0,53
+0,53	+0,52	+0,52	+0,51	+0,51	+0,51
+0,50	+0,50	+0,49	+0,49	+0,49	+0,49
+0,48	+0,48	+0,48	+0,48	+0,47	+0,47
+0,47	+0,46	+0,46	+0,46	+0,45	+0,44
+0,43	+0,43	+0,43	+0,42	+0,42	+0,41
+0,40	+0,40	+0,40	+0,39	+0,39	+0,39
+0,39	+0,38	+0,38	+0,38	+0,38	+0,37
+0,37	+0,36	+0,35	+0,35	+0,34	+0,34
+0,34	+0,33	+0,33	+0,33	+0,32	+0,32
+0,32	+0,32	+0,32	+0,31	+0,31	+0,31
+0,31	+0,30	+0,30	+0,30	+0,29	+0,28
+0,28	+0,27	+0,26	+0,25	+0,25	+0,25
+0,24	+0,23	+0,22	+0,22	+0,21	+0,21
+0,21	+0,20	+0,20	+0,20	+0,19	+0,18
+0,18	+0,18	+0,18	+0,18	+0,17	+0,17
+0,17	+0,17	+0,16	+0,16	+0,16	+0,16
+0,15	+0,15	+0,15	+0,15	+0,14	+0,14
+0,14	+0,14	+0,14	+0,13	+0,12	+0,12
+0,12	+0,12	+0,11	+0,11	+0,11	+0,11
+0,11	+0,11	+0,10	+0,10	+0,10	+0,09
+0,08	+0,08	+0,07	+0,07	+0,07	+0,06
+0,06	+0,05	+0,05	+0,05	+0,05	+0,05

+0,05	+0,04	+0,04	+0,04	+0,04	+0,02
+0,02	+0,02	+0,02	0,00	-0,01	-0,01
-0,03	-0,03	-0,03	-0,04	-0,04	-0,05
-0,05	-0,06	-0,06	-0,06	-0,06	-0,06
-0,07	-0,07	-0,07	-0,07	-0,07	-0,07
-0,07	-0,08	-0,08	-0,08	-0,08	-0,08
-0,09	-0,09	-0,10	-0,10	-0,10	-0,10
-0,11	-0,11	-0,12	-0,12	-0,12	-0,12
-0,12	-0,12	-0,13	-0,14	-0,14	-0,14
-0,14	-0,15	-0,15	-0,15	-0,16	-0,17
-0,17	-0,17	-0,17	-0,18	-0,18	-0,18
-0,19	-0,19	-0,20	-0,20	-0,21	-0,21
-0,22	-0,22	-0,23	-0,24	-0,24	-0,24
-0,24	-0,24	-0,24	-0,25	-0,26	-0,26
-0,26	-0,27	-0,27	-0,27	-0,27	-0,28
-0,28	-0,28	-0,29	-0,29	-0,29	-0,29
-0,30	-0,30	-0,31	-0,31	-0,31	-0,32
-0,32	-0,32	-0,33	-0,36	-0,36	-0,36
-0,37	-0,37	-0,37	-0,37	-0,38	-0,38
-0,38	-0,39	-0,39	-0,39	-0,39	-0,39
-0,39	-0,41	-0,41	-0,41	-0,42	-0,45
-0,45	-0,46	-0,46	-0,47	-0,47	-0,47
-0,48	-0,48	-0,48	-0,50	-0,51	-0,52
-0,52	-0,52	-0,53	-0,54	-0,54	-0,55
-0,55	-0,55	-0,57	-0,57	-0,57	-0,57
-0,58	-0,58	-0,58	-0,58	-0,58	-0,59
-0,59	-0,59	-0,59	-0,60	-0,60	-0,60
-0,60	-0,60	-0,60	-0,61	-0,61	-0,61
-0,62	-0,62	-0,62	-0,62	-0,62	-0,64
-0,65	-0,66	-0,66	-0,67	-0,67	-0,68
-0,68	-0,70	-0,70	-0,70	-0,70	-0,70
-0,70	-0,71	-0,71	-0,71	-0,73	-0,74
-0,75	-0,75	-0,75	-0,75	-0,76	-0,76
-0,77	-0,78	-0,79	-0,79	-0,79	-0,79
-0,80	-0,80	-0,80	-0,81	-0,82	-0,82
-0,83	-0,83	-0,83	-0,84	-0,85	-0,85
-0,85	-0,86	-0,86	-0,88	-0,88	-0,89
-0,89	-0,89	-0,91	-0,91	-0,91	-0,92
-0,93	-0,93	-0,93	-0,94	-0,95	-0,95
-0,96	-0,98	-0,99	-1,00	-1,01	-1,01
-1,01	-1,02	-1,02	-1,04	-1,04	-1,08
-1,08	-1,08	-1,09	-1,10	-1,11	-1,15
-1,16	-1,16	-1,20	-1,21	-1,21	-1,21
-1,23	-1,23	-1,27	-1,28	-1,28	-1,28
-1,30	-1,31	-1,31	-1,31	-1,32	-1,32
-1,32	-1,33	-1,33	-1,35	-1,35	-1,36
-1,38	-1,42	-1,44	-1,47	-1,51	-1,52
-1,55	-1,56	-1,59	-1,69	-1,71	-1,72
-1,75	-1,80	-1,87	-1,94	-2,03	-2,22
-2,61					



Wykres 1. Rozkład zbioru błędów zamknięć trójkątów w polskiej sieci astronomiczno-geodezyjnej (częstość występowania w przedziałach sekundowych)

Analiza rozkładu błędów zamknięć trójkątów

Najlepszy materiał do badania rozkładu błędów w sieci triangulacyjnej stanowią błędy prawdziwe zamknięć trójkątów, których analiza pozwala na ocenę jakości przeprowadzonych obserwacji kątowych. Dla polskiej

sieci astronomiczno-geodezyjnej dysponujemy dużym zbiorem tego rodzaju błędów. Analizie poddaliśmy zbiór 571 błędów zamknięć trójkątów włączonych do wyrównania sieci (tab. I). W zbiorze obliczyliśmy średni błąd zamknięcia

$$m = \pm 0,80''.$$

Jako podstawę do porównania przyjęliśmy rozkład dwumianowy o $n = 16$ i rozkład normalny. Przebieg obliczeń i uzyskane rezultaty przedstawiliśmy w tablicy II i III. Wyniki obliczeń świadczą o bardzo dobrej zgodności rozkładów z przyjętymi założeniami teoretycznymi. Wszystkie odchyłki od rozkładu teoretycznego są tego samego rzędu co ich wartości przewidywane. Badanie za pomocą kryterium Kolmogorowa różnicy maksymalnej $D_{\max} = -6,0$ dało w wyniku $P = 1,00$, a więc pełne potwierdzenie zgodności rozkładu zarówno z rozkładem dwumianowym, jak i z rozkładem normalnym.

W wyniku zastosowania kryterium Pearsona uzyskaliśmy stwierdzenie nieco lepszej zgodności rozkładu z rozkładem dwumianowym. Prawdopodobieństwo określające tę zgodność w przypadku porównania z rozkładem dwumianowym ($n = 16$) wynosi 0,76. Przyjęcie rozkładu normalnego dało w wyniku $P = 0,67$.

W zbiorze nie wykryliśmy błędu stałego. Wartość oczekiwana błędu wynosi bowiem

$$b = +0,004,$$

przy

$$\mu_b = \pm 0,034.$$

Rozkład zbioru nie odznacza się również deformacjami w stosunku do rozkładu teoretycznego. Świadczą o tym obliczone wartości

$$\tau_{(1)} = \pm 0,013, \quad \mu_{\tau,1} = \pm 0,161,$$

$$\tau_{(2)} = -0,243, \quad \mu_{\tau,2} = \pm 0,417.$$

Na szczególne podkreślenie zasługuje zwłaszcza symetria rozkładu rozpatrywanego zbioru. Świadczy ona o jednorodności włączonych do sieci obserwacji, na które złożyły się pomiary przeprowadzone w Polsce po wojnie, dawne pomiary polskie, oraz obserwacje wykonane przez obce służby geodezyjne.

Potwierdzenie prawidłowości obserwacji uzyskaliśmy też przez porównanie maksymalnych wartości niezamknięć trójkątów z błędem granicznym

$$3m = \pm 2,40''.$$

W zbiorze wykryliśmy jedną większą od $\pm 3m$ wartość niezamknięcia,

Tablica II

Badanie zbioru błędów zamknięć trójkątów w polskiej sieci astronomiczno-geodezyjnej
 $N = 571$ $m = \pm 0,80'$

Średnia wartość błędu w przedziale		Częstość rzeczywista $C_R(x)$	Rozkład dwumianowy $n = 16$			Rozkład normalny			Odchyłki dopuszczalne	
$\frac{x}{m}$	x		$F(x)$	$C_D = NP(x)$	ΔC_D	$P(x)$	$C_N = NP(x)$	ΔC_N	$m \cdot t$	$3m \cdot t$
-4,0	-3,20''	0	0,00002	0	0	0,00002	0,1	-0,1	0,1	0,3
-3,5	-2,80	1	0,00024	0,1	+0,9	0,00005	0,3	+0,7	0,7	2,1
-3,0	-2,40	1	0,00183	1,0	0,0	0,00024	1,4	-0,4	1,0	3,0
-2,5	-2,00	3	0,00855	4,9	-1,9	0,00092	5,3	-2,3	2,2	6,6
-2,0	-1,60	13	0,02777	15,9	-2,9	0,0278	15,9	-2,9	3,8	11,4
-1,5	-1,20	39	0,06865	38,0	+1,0	0,0656	37,5	+1,5	6,0	18,0
-1,0	-0,80	73	0,12219	69,8	+3,2	0,1210	69,1	+3,9	7,9	23,7
-0,5	-0,40	95	0,17456	99,7	-4,7	0,1746	99,7	-4,7	9,1	27,3
0	0	123	0,19638	112,1	+10,9	0,1974	112,7	+10,3	9,6	28,8
+0,5	+0,40	91	0,17456	99,7	-8,7	0,1746	99,7	-8,7	9,1	27,3
+1,0	+0,80	63	0,12219	69,8	-6,8	0,1210	69,1	-6,1	7,9	23,7
+1,5	+1,20	44	0,06865	38,0	+6,0	0,0656	37,5	+6,5	6,0	18,0
+2,0	+1,60	20	0,02777	15,9	+4,1	0,0278	15,9	+4,1	3,8	11,4
+2,5	+2,00	5	0,00855	4,9	+0,1	0,0092	5,3	-0,3	2,2	6,6
+3,0	+2,40	0	0,00183	1,0	-1,0	0,0024	1,4	-1,4	1,0	3,0
+3,5	+2,80	0	0,00024	0,1	-0,1	0,00005	0,3	-0,3	0,7	2,1
+4,0	+3,20	0	0,00002	0	0	0,00002	0,1	-0,1	0,1	0,3
		571	1,00000	570,9	+0,1	1,00000	571,3	-0,3		

Kryterium Pearsona*)	
Rozkład	χ^2
dwumianowy	5,743
(n = 16)	
normalny	6,693
	0,76
	0,67

$b = +0,004$ $\mu_b = \pm 0,034$
 $\tau(1) = \pm 0,018$ $\mu_{r,1} = \pm 0,161$
 $\tau(2) = -0,243$ $\mu_{r,2} = \pm 0,417$

*) Przy obliczaniu χ^2 zbiór podzielono na 11 przedziałów. Błędy $x \leq -2,5$ m oraz $x \geq +2,5$ m zgrupowano w dwóch przedziałach.

Tablica III

Badanie zbioru błędów zamknięć trójkątów w polskiej sieci astronomiczno-geodezyjnej
 $N = 751$ $m = \pm 0,80''$

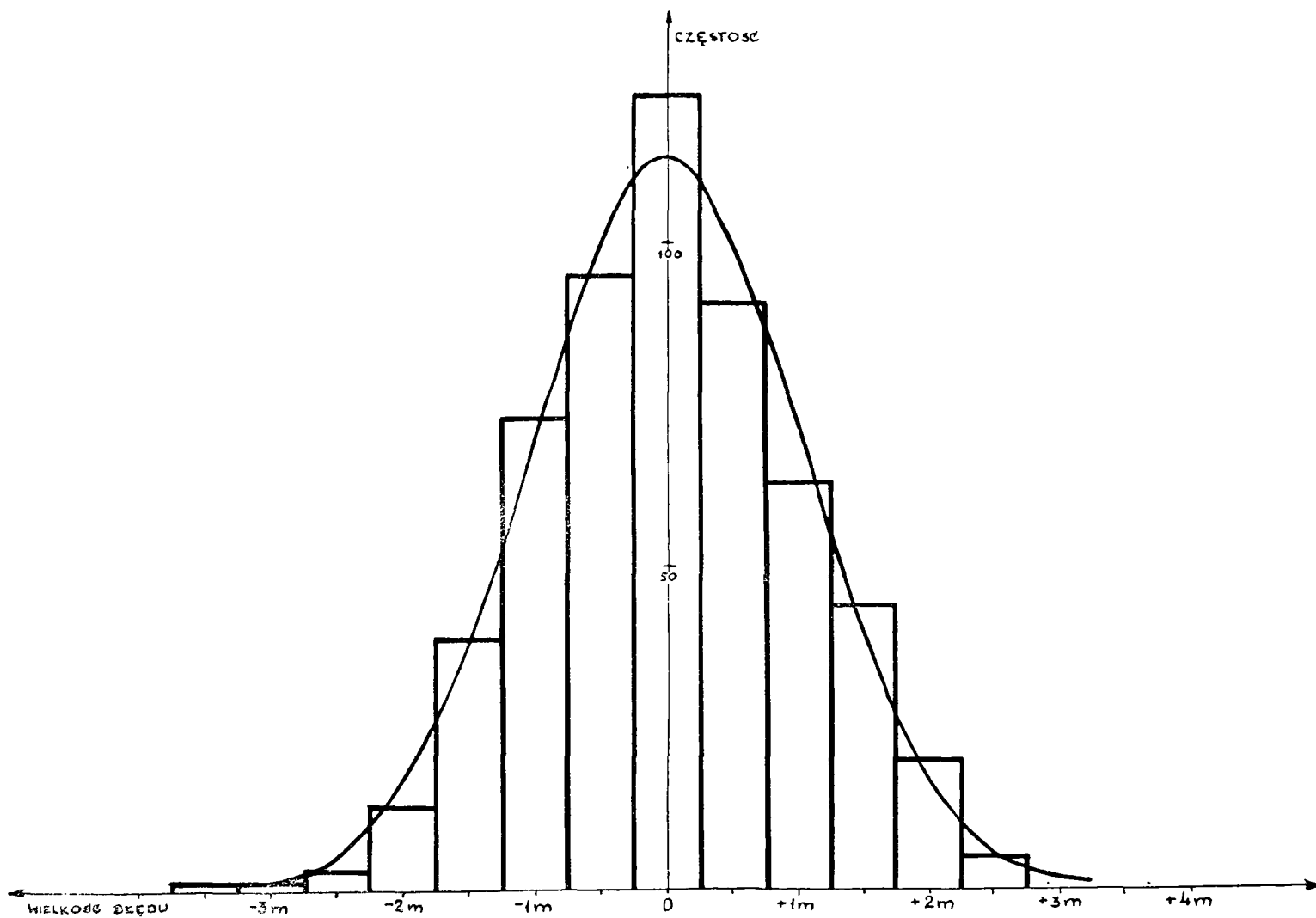
Granica przedziału		Częstość rzeczywista	Rozkład dwumianowy ($n = 16$)			Rozkład normalny		
$\frac{x}{m} = t$	mt		S_R	$P(x \leq mt)$	$S_D = NP$	D_D	$P(x \leq mt)$	S_N
0,5	0,40''	309	0,54550	311,5	-2,5	0,5467	312,2	-3,2
1,0	0,80	445	0,78988	451,0	-6,0	0,7887	450,3	-5,3
1,5	1,20	528	0,92318	527,1	+0,9	0,9190	525,3	+2,7
2,0	1,60	561	0,97872	558,8	+2,2	0,9756	557,1	+3,9
2,5	2,00	569	0,99582	568,6	+0,4	0,9940	567,6	+1,4
3,0	2,40	570	0,99948	570,7	-0,7	0,9988	570,3	-0,3
3,5	2,80	571	0,99996	571,0	0	0,9999	570,9	+0,1
4,0	3,20	571	1,00000	571,0	0	1,0000	571,0	0

Kryterium Kolmogorowa: $|D_{\max}| = 6,0$; $\lambda = 0,25$; $P(\lambda) = 1,00$.

wynosząc — 2,61''. Niezamknięcie to wyjaśniają znaczniejsze błędy kierunku uzyskane w wyniku wyrównań stacyjnych na punktach będących wierzchołkami rozpatrywanego trójkąta ($\pm 5,97''$ i $\pm 4,89''$). Kwestionowanie wymienionych obserwacji nie wydaje się jednak słuszne, gdyż w rozkładzie normalnym dla zbioru o $N = 571$ przewiduje się jeszcze możliwość wystąpienia błędu większego od $3m$.

Nie przeprowadziliśmy badania korelacji pomiędzy wielkościami błędów zamknięć trójkątów a wpływem czynników zewnętrznych. Ze względu na brak danych wpływ warunków pomiaru nie może być rozważany. Wstępny przegląd materiałów nie dał też podstaw do wnioskowania o badanej przez V. R a d o u c h a [11] współzależności między wielkościami niezamknięć trójkątów, a wartościami charakterystycznymi dla tych trójkątów. Różnice wysokości są niewielkie na znacznej części obszaru Polski, a długości boków trójkątów są w naszej sieci tego samego rzędu i różnią się jedynie dla fragmentów sieci założonych w odmiennych okresach.

Przeprowadzona analiza rozkładu zbioru błędów zamknięć trójkątów dała podstawy do stwierdzenia, że obserwacje kątowe w sieci wykonane zostały w sposób prawidłowy, a uzyskane błędy spełniają teoretyczne założenia prawa G a u s s a. Obserwacje zrealizowane przez odmienne służby geodezyjne, różnymi instrumentami i w znacznych odstępach czasu mogą być traktowane jako jednorodne. Warto zwrócić uwagę, że rozkład dwumianowy o $n = 16$, nieco lepiej obrazuje charakter rozkładu badanego zbioru, niż rozkład normalny. Uzasadnienie znajdujemy w ilości źródeł błędów pomiarów kątowych, która, acz znaczna, jest jednak ograniczona.



Wykres 2. Porównanie rozkładu zbioru błędów zamknięć trójkątów z rozkładem normalnym
 $m = \pm 0,80''$ $N = 571$

Analiza zbioru poprawek do kątów po wyrównaniu

Analiza zbioru błędów zamknięć trójkątów umożliwiła ocenę rozkładu błędów obserwacji kątowych. Dla oceny wyrównania rozpatrzyliśmy zbiór poprawek do kątów otrzymanych w jego wyniku. Z teorii błędów wiadomo, że jeśli rozkład błędów obserwacji jest zgodny z rozkładem normalnym, to rozkład zbioru, uzależnionych od nich funkcyjnie poprawek, winien być również zgodny z rozkładem normalnym. Wobec tego, że w wyrównaniu brane są pod uwagę wszystkie rodzaje obserwacji przeprowadzonych w sieci, na rozkład zbioru poprawek rzutują błędy nie tylko pomiarów kątowych, lecz również obserwacji azymutów i pomiarów długości baz. Ocena tych ostatnich nie może być przeprowadzona z zastosowaniem przedstawionych uprzednio metod ze względu na stosunkowo niewielką ilość azymutów Laplace'a i baz włączonych do sieci. Wartość tych pomiarów i sposób włączenia ich do wyrównania sieci możemy jednak zbadać drogą pośrednią przez analizę rozkładu poprawek do kątów po wyrównaniu.

W polskiej sieci astronomiczno-geodezyjnej określono w wyniku wyrównania 1582 poprawek do kątów. W zbiorze tym obliczyliśmy błąd średni według wzoru

$$m = \pm \sqrt{\frac{[vv]}{N}} = \pm 0,50''.$$

Jak dla uprzednio rozpatrywanego zbioru, przeprowadziliśmy porównanie rozkładu zbioru z rozkładem dwumianowym i z rozkładem normalnym (tablice IV i V). Ze względu jednak na znaczną ilość występujących w zbiorze dużych poprawek jakikolwiek rozkład dwumianowy o niewielkiej wartości n nie mógł być przyjęty dla określenia rozkładu badanego zbioru. Zakładając rozkład o $n = 16$, uzyskaliśmy $\chi^2 = 69,440$, która to wartość przekracza już nawet zasięg tablic *Pearsona*. Badanie za pomocą kryterium *Pearsona* i kryterium *Kolmogorowa* wykazały również niezgodność rozkładu zbioru z rozkładem normalnym. Obliczone $\chi^2 = 48,205$ jest wprawdzie nieco mniejsze jak wykazane poprzednio, wyklucza jednak przyjęcie rozkładu normalnego dla zobrazowania rozkładu zbioru poprawek.

Podobne rezultaty otrzymaliśmy przez porównanie odchyłek, uzyskanych w kolejnych przedziałach, z ich wartościami przewidywanymi. Większość odchyłek jest większa od wartości przewidywanych, a w kilku przypadkach odchyłki te przekraczają nawet $3m_{c,i}$. Znaczne różnice częstości rzeczywistej i teoretycznej występują zwłaszcza dla dużych wartości poprawek.

Tabela IV

Badanie zbioru poprawek do kątów po wyrównaniu polskiej sieci astronomiczno-geodezyjnej
 $N = 1582$ $m = \pm 0,50''$

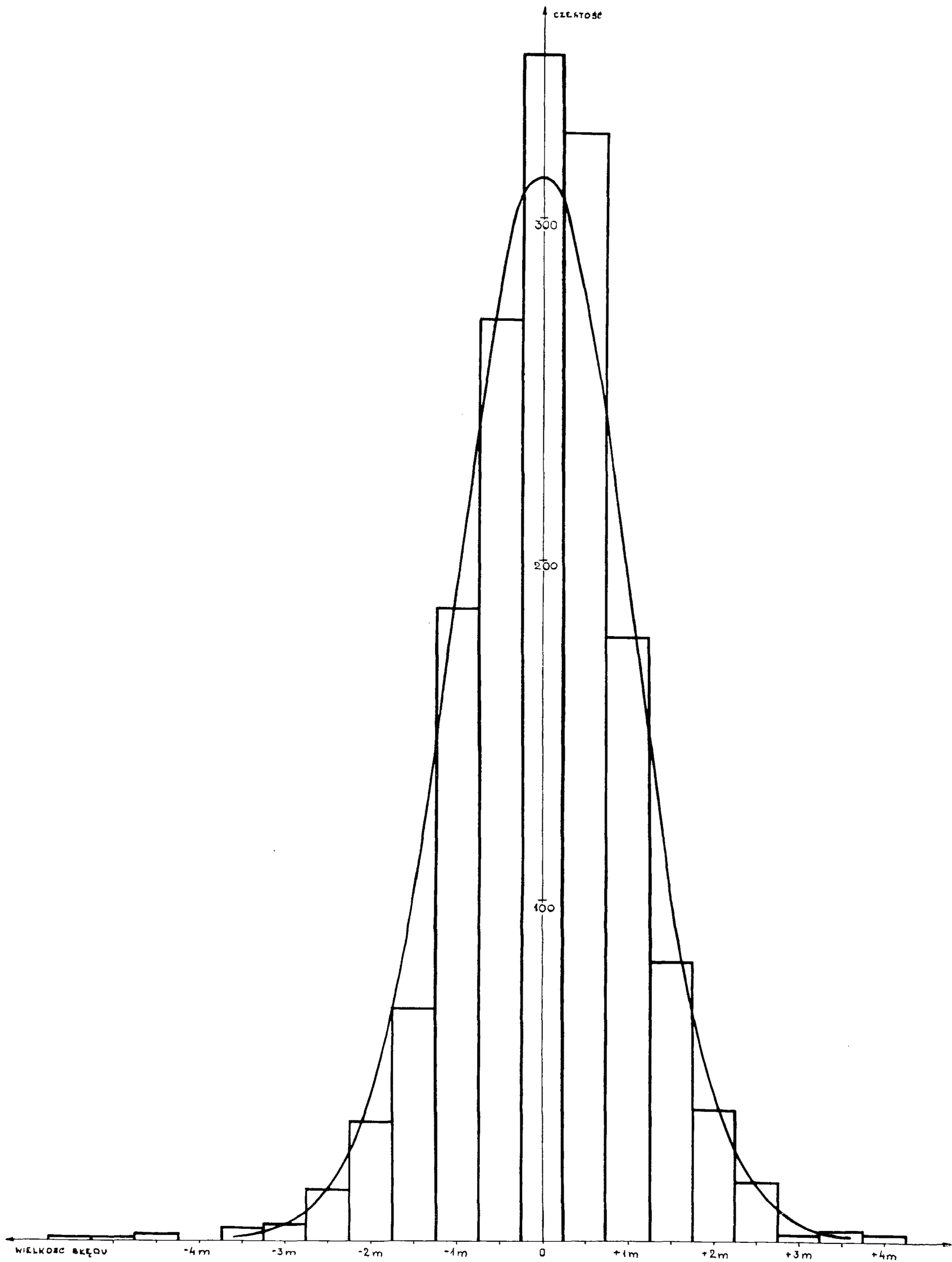
Średnia wartość błędu w przedziale		Częstość rzeczywista	Rozkład dwumianowy ($n = 16$)		Rozkład normalny		Odczyty dopuszczalne			
$\frac{x}{m}$	x		$F(x)$	$C_D = NF(x)$	ΔC_D	$F(x)$	$C_N = NP(x)$	ΔC_N	m_{ct}	$3 m_{ct}$
$\frac{x}{m} < -4,0$	$x < -2,00''$	4	—	—	+ 4,0	0,0002	0,3	+ 3,7	0,4	1,2
-4,0	-2,00	0	0,00002	0,0	0	0,0005	0,8	+ 3,2	1,2	3,6
-3,5	-1,75	4	0,00024	0,4	+ 3,6	0,00183	2,9	+ 1,2	1,6	4,8
-3,0	-1,50	5	0,00183	2,9	+ 2,1	0,00855	13,5	+ 0,4	3,6	10,8
-2,5	-1,25	15	0,00855	13,5	+ 1,5	0,02777	43,9	- 9,0	6,4	19,2
-2,0	-1,00	35	0,02777	43,9	- 8,9	0,06665	105,4	- 37,4	10,0	30,0
-1,5	-0,75	68	0,06665	105,4	- 7,3	0,12219	193,3	- 5,4	13,1	39,3
-1,0	-0,50	186	0,12219	193,3	- 6,2	0,17456	276,2	- 6,2	15,1	45,3
-0,5	-0,25	270	0,17456	276,2	+ 37,3	0,19688	310,7	+ 35,7	15,9	47,7
0	0	348	0,19688	310,7	+ 48,8	0,17456	276,2	+ 48,8	15,1	45,3
+0,5	+0,25	325	0,17456	276,2	- 1,63	0,12219	193,3	- 14,4	13,1	39,3
+1,0	+0,50	177	0,12219	193,3	- 23,4	0,06665	105,4	- 21,8	10,0	30,0
+1,5	+0,75	82	0,06665	105,4	- 4,9	0,02777	43,9	- 5,0	6,4	19,2
+2,0	+1,00	39	0,02777	43,9	+ 3,5	0,00855	13,5	+ 2,4	3,6	10,8
+2,5	+1,25	17	0,00855	13,5	- 0,9	0,00183	2,9	- 1,8	1,6	4,8
+3,0	+1,50	2	0,00183	2,9	+ 2,6	0,00024	0,4	+ 2,2	1,2	3,6
+3,5	+1,75	3	0,00024	0,4	+ 2,0	0,00002	0,0			
+4,0	+2,00	2	0,00002	0,0						
$\frac{x}{m} > +4,0$	$x > +2,00$	0	—	—	+ 0,1	0,0002	0,3	+ 1,7	0,4	1,2
		1582	1,00000	1581,9	+ 0,1	1,0000	1582,1	- 0,1		

Kryterium Pearsona*		
Rozkład dwumianowy ($n = 16$) normalny	χ^2	P
	69,440	0,00
	48,205	0,00

$$\begin{aligned} b &= -0,001 \\ \tau(1) &= \pm 0,156 \\ \tau(3) &= \pm 1,495 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mu_b &= \pm 0,013 \\ \mu_{r1} &= \pm 0,097 \\ \mu_{r3} &= \pm 0,250 \end{aligned}$$

* Przy obliczaniu χ^2 zbiór podzielono na 13 przedziałów. Długość $x \leq -3,0$ m oraz $x \geq +3,0$ m zgrupowano w dwóch przedziałach.



Wykres 3. Porównanie rozkładu zbioru poprawek do kątów po wyrównaniu z rozkładem normalnym
 $m = \pm 0,50''$ $N = 1582$

Tablica V

Badanie zbioru poprawek do kątów po wyrównaniu polskiej sieci astronomiczno-geodezyjnej
 $N = 1582 \quad m = \pm 0,50''$

Granica przedziału		Częstość rzeczywista S_R	Rozkład dwumianowy ($n = 16$)			Rozkład normalny		
$\frac{x}{m} = t$	mt		$P(x \leq mt)$	S_D	D_D	$P(x \leq mt)$	S_N	D_N
0,5	0,25''	943	0,54550	863,0	+80,0	0,5467	864,9	+78,1
1,0	0,50	1306	0,78988	1249,6	+56,4	0,7887	1247,7	+58,3
1,5	0,75	1456	0,92318	1460,5	-4,5	0,9199	1455,3	+0,7
2,0	1,00	1530	0,97872	1548,3	-18,3	0,9756	1543,4	-13,4
2,5	1,25	1562	0,99582	1575,4	-13,4	0,9940	1572,5	-10,5
3,0	1,50	1569	0,99948	1581,2	-12,2	0,9988	1580,1	-11,1
3,5	1,75	1576	0,99996	1582,0	-6,0	0,9999	1581,8	-5,8
4,0	2,00	1578	1,00000	1582,0	-4,0	1,0000	1582,0	-4,0
4,5	2,25	1580						
5,0	2,50	1581						
5,5	2,75	1582						

Kryterium Kolmogorowa: $|D_{\max}| = 80,0; \lambda = 2,0; P(\lambda) = 0,01.$

W zbiorze poprawek nie wykryliśmy wpływu czynników systematycznych:

$$b = -0,001, \quad a \quad \mu_b = \pm 0,013.$$

Stwierdziliśmy natomiast asymetrię rozkładu:

$$\tau_{(1)} = \pm 0,156;$$

$$\mu_{\tau,1} = \pm 0,097.$$

Rozkład zbioru obrazuje krzywa, której maksimum jest wyższe jak krzywej G a u s s a:

$$\tau_{(2)} = +1,495;$$

$$\mu_{\tau,2} = \pm 0,250.$$

Obliczona wartość $\tau_{(2)}$ wskazuje na wyraźną deformację rozkładu. Przyczyną deformacji jest występująca w zbiorze znaczna przewaga ilościowa małych i dużych poprawek w stosunku do poprawek średniej wielkości.

Szczególną uwagę zwraca znaczna ilość dużych poprawek do kątów. Zgodnie z rozkładem normalnym w zbiorze o $N = 1582$ możemy spodziewać się wystąpienia dwóch poprawek większych co do bezwzględnej wartości od $3m$. W badanym zbiorze otrzymaliśmy natomiast 13 poprawek przekraczających wartość graniczną, a poprawka maksymalna jest rzędu $5,5m$.

Wszystkie poprawki do kątów po wyrównaniu większe co do bezwzględnej wartości od $3m$ występują w pobliżu punktów Laplace'a i sieci bazowych. Jak wykazaliśmy uprzednio, błędy pomiarów kątowych spełniają zasady prawa G a u s s a. Przyczyn niezgodności rozkładu zbioru

poprawek do kątów z założonym rozkładem teoretycznym, szukać więc należy w dokładności wyznaczeń azymutów Laplace'a i pomiarze baz lub w sposobie włączenia tych obserwacji do wyrównywania sieci.

Badanie rzeczywistej dokładności wyznaczeń azymutów Laplace'a przeprowadziliśmy w oparciu o błędy średnie obserwacji azymutów astronomicznych i długości, różnice dwustronnie pomierzonych azymutów oraz wyrazy wolne warunków azymutalnych.

Z błędów średnich obserwacji azymutu astronomicznego (m_a) i długości (m_λ), określonych na podstawie zgodności wewnętrznej pomiarów, wynika średnia dla sieci wartość błędu wyznaczenia azymutu Laplace'a

$$m_A = \pm \sqrt{m_a^2 + m_\lambda^2 \sin^2 \varphi} = \pm 0,4''.$$

Przedstawiona wartość błędu nie może jednak, jak wynika z literatury [10], [16], w pełni charakteryzować dokładności wyznaczenia azymutów Laplace'a. Lepszej charakterystyki dostarcza wartość obliczona z różnic dwustronnie pomierzonych azymutów [16]. W polskiej sieci astronomiczno-geodezyjnej pomiary dwustronne wykonane były dla 13 azymutów. Z różnic tych pomiarów otrzymaliśmy

$$m'_A = \pm 0,6''.$$

Z analizy przybliżonych wyrazów wolnych warunków azymutalnych, przeprowadzonej z przyjęciem błędu kąta wg wzoru Ferrero $m_F = \pm 0,5''$, uzyskaliśmy

$$m''_A = \pm 1,4''.$$

Wynik ten jest zgodny z rezultatami badań dokładności wyznaczeń azymutów Laplace'a przeprowadzonych przez A. M. Starostina [16] dla sieci astronomiczno-geodezyjnej ZSRR. Słuszne wydaje się też przyjęcie określonej wyżej wartości błędu dla charakterystyki dokładności wyznaczeń azymutów Laplace'a w polskiej sieci astronomiczno-geodezyjnej.

Wyniki badań rzeczywistej dokładności wyznaczeń azymutów Laplace'a i błędy uzyskane przy pomiarze baz pozwalają kwestionować przyjęte w toku wyrównania założenia o praktycznej bezbłędności tych obserwacji. W wyrównaniu polskiej sieci astronomiczno-geodezyjnej azymutom i bazom przyporządkowano wagi nieporównanie większe jak obserwacjom kątowym, co, jak można przypuszczać, spowodowało wskazaną deformację sieci. Potwierdzenie znajdujemy w pracach H. Wolfa [20]. Zgodnie z wyprowadzonymi przez tego autora wzorami, wyraz wolny warunku azymutalnego winien rozkładać się na poprawki azymutów i kątów proporcjonalnie do błędów wyznaczeń azymutów i błędów ich przeniesień geodezyjnych. W przypadku nadania azymutom nieskończenie dużych wag wyraz wolny równania azymutalnego obciąża w całości poprawki do kątów. W podobny sposób na wyniki wyrównania sieci wpływają błędy pomiarów bazowych.

W polskiej sieci astronomiczno-geodezyjnej azymuty Laplace'a i bazy rozmieszczone są w odległościach 100—150 km. Błędy ich przeniesień geodezyjnych nie są tym samym duże. Przykładowo, dla przeniesienia azymutu, przy przeciętnej w sieci odległości między punktami Laplace'a i błędzie kąta $m_F = \pm 0,5''$, możemy spodziewać się błędu około $\pm 1,2''$, a więc tego rzędu co błąd samego wyznaczenia azymutu Laplace'a. Wynika stąd wniosek, że dla naszej sieci założenie o bezbłądności wyznaczeń azymutów i baz nie może być przyjęte i że to właśnie założenie spowodowało zniekształcenie w wyrównaniu obserwacji kątowych.

Wnioski

Analiza rozkładu błędów zamknięć trójkątów wykazała prawidłowość obserwacji kątowych włączonych do wyrównania sieci. Rozkład błędów tych obserwacji jest w pełni zgodny z prawem *G a u s s a*. Parametry rozkładu badanego zbioru są zgodne z parametrami rozkładu teoretycznego. Rozkład zbioru jest symetryczny, co dowodzi jednorodności obserwacji pomimo ich wykonania w odmiennych warunkach i w dużych odstępach czasu.

W toku analizy przeprowadziliśmy badania kilku zbiorów błędów zamknięć trójkątów, zarówno dla całej sieci, jak i dla jej fragmentów. W wyniku porównania rozkładu tych zbiorów z rozkładem dwumianowym o skończonej wartości n i z rozkładem normalnym otrzymaliśmy potwierdzenie założeń, proponowanych przez *S. H a u s b r a n d t a* [6] dla tego rodzaju analiz. Rozkład dwumianowy o $n = 16$ określa bowiem lepiej badane rzeczywiste rozkłady błędów niż rozkład normalny.

Z analizy nie wynika natomiast konieczność stosowania „zmodyfikowanego rozkładu normalnego” opracowanego przez *M. R o m a n o w s k i e g o* [13], [14]. Zgodnie z badaniami tego autora, rozkład błędów obserwacji określony jest przez rozkład normalny, którego parametry różnią się od przyjętych dla jego formy klasycznej i w którym przewiduje się występowanie większej jak w rozkładzie normalnym ilości małych błędów obserwacji. Dla badanych zbiorów błędów rozkładu takiego nie wykryliśmy.

Analizę rozkładu zbioru błędów obserwacji uzupełniliśmy badaniem zbioru poprawek do kątów po wyrównaniu. W myśl zasad teorii błędów oba te zbiory winny charakteryzować się tym samym rozkładem. Dla zbioru poprawek do kątów po wyrównaniu nie stwierdziliśmy jednak rozkładu normalnego. Przypuszczać należy, że wykazana deformacja rozkładu zbioru jest wynikiem przyjętego w toku wyrównania założenia o bezbłądności wyznaczeń azymutów i baz. Zgodnie z pracami *H. W o l-*

f a [20], w sieciach, w których punkty Laplace'a i bazy rozmieszczone są w stosunkowo niewielkich odległościach, a do nich należy polska sieć astronomiczno-geodezyjna, błędy wyznaczeń azymutów i baz oraz błędy ich przeniesień geodezyjnych są tego samego rzędu. Obserwacje te powinny więc otrzymać w wyrównaniu wagi zgodne z rzeczywistą dokładnością pomiarów.

Przedstawione próby określenia przyczyn deformacji powstałych w wyniku wyrównania sieci uzasadniają wniosek, że dla polskiej sieci astronomiczno-geodezyjnej celowe wydaje się ustalenie rzeczywistych błędów wyznaczeń azymutów Laplace'a i pomiaru baz oraz włączenie tych obserwacji do wyrównania z odpowiednimi wagami.

L I T E R A T U R A

- [1] *Böhm J.*: Statistische Prüfung von Messergebnissen auf Normalverteilung, Zeitschrift für Vermessungswesen 1965/3.
- [2] *Gotthardt E.*: Mittlerer Fehler und Vertrauensbereiche, Zeitschrift für Vermessungswesen, 1962/10.
- [3] *Hallert B.*: Einige Sätze und Verfahren der mathematischen Statistik von besonderer Bedeutung in der Vermessungstechnik, Zeitschrift für Vermessungswesen, 1964/5.
- [4] *Hausbrandt S.*: Rachunki geodezyjne, Warszawa 1953.
- [5] *Hausbrandt S.*: Parę uwag w sprawie możliwości wykorzystania zdobyczy statystyki matematycznej do oszacowania dokładności pomiarów inżynierskich. Geodezja i Kartografia, t. IX z. 1, Warszawa 1960.
- [6] *Hausbrandt S.*: Teoria błędów pomiarów inżynierskich, Warszawa 1963.
- [7] *Helmert F.R.*: Die Ausgleichsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate, 3 Aufl., Leipzig-Berlin 1934.
- [8] *Jordan W., Eggert O.*: Handbuch der Vermessungskunde, t. I, Stuttgart 1935.
- [9] *Kemnic J.W.*: Teoria oszibok izmierienii, Moskwa 1961.
- [10] *Rabinowicz B.N.*: K woprosu o znaczenii i tocznosti azimutow Laplace'a. Trudy M.I.I.G.A i K., 1957/29.
- [11] *Radouch V.*: Statistický rozbor trojuhelnikových uzáveru ceskoslovenske základni trigonometrické site, Geodetický a Kartografický Sborník, 1960/6.
- [12] *Richardus P.*: Triangulation oder Polygonisierung im Lichte der mathematischen Statistik, Zeitschrift für Vermessungswesen, 1964/11—12.
- [13] *Romanowski M.*: On the normal law of errors, Bulletin Géodésique, 1964/73.
- [14] *Romanowski M., Green E.*: Practical application of the modified normal distribution. Bulletin Géodésique, 1965/76.
- [15] *Romanowski W.I.*: Primienienie matematycznej statistiki w opytnom diele. Moskwa 1947.
- [16] *Starostin A.M.*: Issledowanije tocznosti opriedielienija azimutow Laplace'a Trudy CNIIGAIK, 1959/124.
- [17] *van der Waerden B.L.*: Mathematische Statistik, Berlin-Göttingen-Heidelberg 1957.
- [18] *Włodarczyk R.*: Nowa triangulacja polska. Geneza, technika i organizacja wykonania. Geodezja i Kartografia, t. III z. 1, Warszawa 1959.
- [19] *Wolf H.*: Zur Anwendung von Verfahren der mathematischen Statistik in der Vermessungstechnik, Zeitschrift für Vermessungswesen, 1964/11.
- [20] *Wolf H.*: Die Azimutausgleichung für das Zentraleuropäische Netz, Veröffentlichungen des Instituts für Erdmessung, Bamberg 1950/5.
- [21] Instrukcja o wykonywaniu pomiarów triangulacji głównej, GUGiK, Warszawa 1957.

Recenzował: dr inż. Jerzy Gaździcki

Rękopis złożono w Redakcji w czerwcu 1966 r.

МАРЯ КРЫСТЫНА ШАХЕРСКА

АНАЛИЗ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ОШИБОК В ПОЛЬСКОЙ АСТРОНОМО-ГЕОДЕЗИЧЕСКОЙ СЕТИ

Резюме

Анализ распределения ошибок в польской астрономо-геодезической сети проделано, применяя метод математической статистики [17] и опираясь на законы изложенные в теории ошибок [6].

Исходным материалом для анализа принято совокупность невязок треугольников для оценки результатов измерений и совокупность поправок в углы после уравнивания для определения правильности этого уравнивания.

В совокупности из 571 невязки треугольников включенных в сеть (таблица I) подсчитано среднюю квадратическую ошибку $m = \pm 0,80''$. Исследование распределения совокупности (таблицы II и III) с помощью критерий Пирсона и Колмогорова показало полную сходимость этого распределения так с распределением биномальным для $n = 16$, как и с распределением нормальным. В совокупности не обнаружено систематической постоянной ошибки. Установлено, что распределение совокупности обладает симметрией, а взаимное количественное отношение ошибок малых, больших и ошибок средней величины отвечает теоретическим принципам. Максимальная невязка, значение которой $-2,61''$, немного превосходит значение $3m = \pm 2,40''$, а ее появление предусматривается нормальным распределением.

Изложенный анализ утверждает, что угловые наблюдения в польской астрономо-геодезической сети выполнены правильно.

Симметрия распределения невязок треугольников свидетельствует об однородности включенных в сеть наблюдений, выполненных различными геодезическими службами, в различных условиях и значительных промежутках времени.

Характер распределения совокупности невязок треугольников лучше представляет биномальное распределение $n = 16$ чем нормальное распределение. Это сходится с разработанными С. Хаусбрандтом [6] принципами распределения ошибок геодезических измерений.

Анализ распределения совокупности ошибок наблюдений дополнено исследованием совокупности поправок к углам после уравнивания. По принципам теории ошибок, обе эти взаимозависимы функционально совокупности должны характеризоваться тем же распределением.

Для совокупности поправок с $N = 1582$ и $m = \pm 0,50''$ не обнаружено однако нормального распределения. Негативный результат показал так критерий Пирсона, как и Колмогорова (таблицы IV и V).

В совокупности поправок не обнаружено влияния систематических факторов

и определено только небольшую асимметрию. Выявлено однако значительное превосходство количества малых и больших ошибок в отношении к числу ошибок среднего значения. Свидетельствует об этом вычисленное значение $\tau_{(2)} = +1,495$ с ошибкой $\nu_{\tau,2} = \pm 0,250$.

Особенное внимание обращает факт, что большие поправки в углы, которые приводят к деформации распределения, располагаются вблизи пунктов Лапласа и базисных сетей.

Нужно предполагать, что выявленная деформация распределения совокупности поправок является результатом принятого в ходе уравнивания сети предположения об безошибочности определений азимутов и базисов. Правильность вывода утверждает сравнение истинной точности этих определений с ошибками их геодезических передач.

В результате анализа истинной точности определений Лапласовых азимутов в польской астрономо-геодезической сети получено $m_A = \pm 1,4''$. Для передачи азимута, при среднем в сети расстоянии между пунктами Лапласа 100—150 км к ошибке угла $m_F = \pm 0,5''$, можно ожидать ошибку $m_G = \pm 1,2''$, т. е. порядка ошибки определения азимута.

Отсюда вытекает вывод, что ошибки определения азимутов и базисов не можно считать небрежными и наблюдения эти должны в уравнивании получить веса соответствующие их истинной точности.

MARIA KRYSZYNA SZACHERSKA

ANALYSIS OF DISTRIBUTION OF ERRORS IN THE POLISH ASTRONOMIC-GEODETIC NETWORK

S u m m a r y

The author carried out her analysis of the distribution of errors in the Polish astronomic-geodetic network, applying methods of mathematical statistics [17] and basing her studies on the rules formulated in the theory of errors [6]. As basic material for this work she used a set of triangle closure errors for evaluating the results of the measurements made, and a set of angle corrections after the compensation of the net in order to define the regularity of this compensation.

In the set of 571 triangle closure errors as were included in the network (Table I), the mean error was calculated to be $m = \pm 0,80''$. The investigation of the distribution of this set (Tables II and III) by the use of the criteria of Pearson and Kolmogorow confirmed the full concordance of this distribution, both with the binomial distribution ($n = 16$) and the normal distribution. No systematic constant error was detected in the set. It also was found, that the distribution of the set is symmetrical, and that the mutual quantitative ratio of small, large, and medium-size errors corresponds to the theoretical principles anticipated. The maximum closing error, amounting to $-2,61''$, exceeds but slightly the value $3m = \pm 2,40''$, and the occurrence of this maximum error is anticipated in the normal distribution.

From the analysis presented by the author it appears, that in the Polish astronomic-geodetic network the angular observations have been made in an appropriate manner. The symmetry in the distribution of triangle closure errors proves the homogeneity of the observations incorporated in the network, which were made by different sections of the geodetic service under different conditions and at considerable time intervals.

The character of the distribution in the set of triangle closure errors is better illustrated by the binomial distribution (with $n = 16$) than by the normal distribution. This is in agreement with the basic principles of the distribution of errors in geodetic measurements developed by S. Hausbrandt [6].

The above analysis of the set of observation errors has been supplemented by an investigation of the set of angle corrections, after compensation. In conformity with the rules of the theory of errors, both these sets, functionally interrelated, should be characterized by an identical distribution. However, for the set of corrections with $N = 1582$ and $m = \pm 0,50''$, no normal distribution has been confirmed. The results of the application of Pearson's and of Kolmogorow's criteria (Tables IV and V) were also negative.

In the set of corrections no influence of systematic factors was detected, and only a minor asymmetry was determined. There was however established a marked predominance in the number of small and large errors over the number of medium-size errors. Evidence of this is the value of $\tau_{(2)} = 1,495$, with error $\mu_{\tau_2} = \pm 0,250$. Worthy of notice is, that the large angle corrections causing the deformation of the distribution are located in the vicinity of Laplace's points and of the basic networks. It seems possible, that the deformation in the distribution determined in the set of corrections is due to the assumption of a faultless determination of azimuths and bases, as was adopted in the network compensation. The correctness of this conclusion is confirmed by a comparison of the true precision of these determinations with the errors of their geodetic transfers.

As the results of an analysis of the true precision of the determination of the Laplace- azimuths in the Polish astronomic-geodetic network, it was found that $m_A = \pm 1,4''$. In transferring azimuths, in our network with distances between Laplace's points average 100 to 150 km and angular errors of the order of $m_F = \pm 0,5''$, we must anticipate an error $m_G = \pm 1,2''$, — that is, an error of the same order as that found in determining the azimuth. Hence the conclusion, that it is inadmissible to ignore errors in determining azimuths and bases and that, in compensating, these observations should be assigned weights which correspond with their real precision.