

TADEUSZ KLUSS

528.142+528.143

Wyrównanie triangulacyjnej sieci przestrzennej metodą pośredniczącą przy przyjęciu pomierzonych cosinusów kierunkowych i metodą warunkową przy przyjęciu pomierzonych kątów przestrzennych

W przestrzeni trójwymiarowej obserwacjami bezpośrednimi mogą być współrzędne równikowe (α , δ , S), lub horyzontalne (α , β). Dodatkowymi obserwacjami mogą być też współrzędne astronomiczne (φ , λ , α).

W celu wyznaczenia współrzędnych punktów naziemnych (S.S.Z-iami lub inne punkty) lub naziemnych (punkty triangulacyjne) posługiwać się można w wyrównaniu sieci obserwacjami bezpośrednimi lub pośrednimi. Obserwacjami pośrednimi mogą być współrzędne wektorów jednostkowych (cosinusy kierunkowe) kierunków utworzonych z punktów naziemnych zaprojektowanej sieci. Elementy te posiadają w wyrównaniu sieci przestrzennej charakter spostrzeżeń niezależnych. Jak wykazał Y. Väisälä i L. Oterma [1], przy nadliczbowej ilości spostrzeżeń, cosinusy kierunkowe wektora mogą być wyrównane (wyrównanie stacyjne), a tym samym może być określona ich dokładność. Wyrównane na stacji cosinusy kierunkowe wyrównywać można w dalszej kolejności w sieci przestrzennej podobnie jak wyrównane na stacji kierunki w klasycznych sieciach triangulacyjnych. Wyrównując metodą pośredniczącą otrzymamy w wyniku obliczeń wyrównane współrzędne x , y , z punktów naziemnych.

Inna droga postępowania może być następująca: z wyrównanych na stacji cosinusów kierunkowych dają się obliczyć kąty trójkątów przestrzennych. Kąty te mogą być wyrównane w sieci przestrzennej, a następnie, wychodząc z danych współrzędnych, obliczone być mogą boki i współrzędne punktów naziemnych.

Praktyczne zastosowanie metody cosinusów lub innej podobnej ma na celu budowę przestrzennej sieci niższego rzędu w oparciu o podstawową

sieć rzędu I-go o długości boków około 3 tys. km oraz, w końcowym etapie, włączenie do sieci przestrzennej istniejących sieci klasycznych o długości boków około 30—50 km.

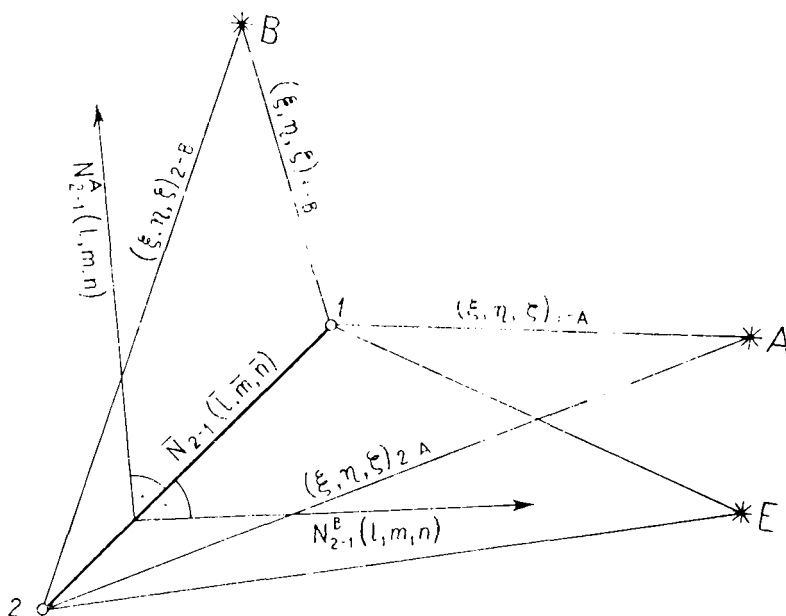
Przedstawione zagadnienia podaje się niżej w następującej kolejności:

1. Wyrównanie stacyjne współrzędnych wektorów jednostkowych (cosinusów kierunkowych).
2. Wyrównanie elementarnej sieci metodą półśredniczącą.
3. Wyrównanie sieci metodą zawarunkowaną.
4. Projekt sieci przestrzennej niższego rzędu.

1. Wyrównanie stacyjne *)

Poniżej podaje się wyrównanie a) metodą pośredniczącą wzorami (4) oraz b) metodą podaną w [1].

Punkty 2, 1 są punktami sieci, na których wykonano obserwacje (t , δ) do S.S.Z. w punktach A , B , E .



Rys. 1

*) Podane niżej przykłady opierają się na spostrzeżeniach fikcyjnych. To znaczy, wartości (t , δ) nie otrzymano z oryginalnych spostrzeżeń (α , δ , S), lecz obliczono je z przyjętych na mapach współrzędnych zaprojektowanej, elementarnej sieci przestrzennej. Z tej przyczyny przyjęte błędy spostrzeżeń (cosinusów kierunkowych) oraz inne błędy otrzymane z obliczeń mają tylko rachunkowe znaczenie.

Na podstawie tych obserwacji obliczy się cosinusy kierunkowe (ξ , η , ζ) kierunków 1-A, 2-A; 1-B, 2-B; 1-E, 2-E wzorami

$$\xi = \cos \delta \cos t, \quad \eta = \cos \delta \sin t, \quad \zeta = \sin \delta. \quad (1)$$

(dane i wyniki obliczeń podaje tabl. 1).

Tworząc normalne N do płaszczyzn 1-2-A, 1-2-B i 1-2-E otrzymamy trzy normalne:

$$N_{1-2}^A = (l, m, n)_A; \quad N_{1-2}^B = (l, m, n)_B; \quad N_{1-2}^E = (l, m, n)_E.$$

Normalne do płaszczyzn wyznaczonych prostymi:

$$N_{1-2}^A \text{ i } N_{1-2}^B; \quad N_{1-2}^A \text{ i } N_{1-2}^E; \quad N_{1-2}^B \text{ i } N_{1-2}^E,$$

dadzą w wyniku szukany wektor jednostkowy $\bar{N}_{1-2}(\bar{l}, \bar{m}, \bar{n})$. Wektorów takich otrzymamy trzy, z pary A-B, A-E i B-E.

Do obliczenia normalnych używamy wzoru wyznaczkowego:

$$N(l, m, n) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \xi_{1s} & \eta_{1s} & \zeta_{1s} \\ \xi_{2s} & \eta_{2s} & \zeta_{2s} \end{vmatrix}; \quad N_{2-1}(\bar{l}, \bar{m}, \bar{n}) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ l_p & m_p & n_p \\ l_r & m_r & n_r \end{vmatrix} \quad (2)$$

gdzie i, j, k są jednostkowymi wektorami podstawy. Otrzymane składowe (l, m, n) i $(\bar{l}, \bar{m}, \bar{n})$ sprowadzamy do współrzędnych wektora jednostkowego wymnażając je, odpowiednio, przez współczynnik:

$$k_1 = \frac{1}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}} \quad \text{lub} \quad k_2 = \frac{1}{\sqrt{\bar{l}^2 + \bar{m}^2 + \bar{n}^2}}.$$

W wyniku obliczeń, podanych w tabl. 2 i 3, otrzymano trzy różne wektory jednostkowe kierunku 2-1.

Ilość wektorów \bar{N}_{2-1} , a więc ilość równań błędów równa się ilości obserwowanych S.S.Z. lub ilości wektorów N . Tak na przykład dla czterech wektorów N^A, N^B, N^C, N^D będzie:

$$\bar{N}_{21}^1 = N^A \cdot N^B, \quad \bar{N}_{21}^2 = N^B \cdot N^C, \quad \bar{N}_{21}^3 = N^C \cdot N^D, \quad \bar{N}_{21}^4 = N^D \cdot N^A.$$

Wyrównując metodą pośredniczącą, przyjęto na wartości przybliżone obserwacji:

$$l_0 = \frac{\Delta x}{s_{21}}, \quad m_0 = \frac{\Delta y}{s_{21}}, \quad n_0 = \frac{\Delta z}{s_{21}},$$

gdzie $x_2 = y_2 = z_2 = 0$

$$\Delta x = x_1 - x_2, \quad \Delta y = y_1 - y_2, \quad \Delta z = z_1 - z_2;$$

$$s_{21} = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}.$$

Dla przyjętych obserwacji równanie błędów będzie:

$$v = d(\cos_{\text{przybl.}}) + \cos_{\text{przybl.}} - \cos_{\text{obserw.}} \quad (3)$$

$d(\cos_{\text{prz.}})$ jest funkcją współrzędnych x, y, z . (Skracając, przyjęto oznaczenia x, y, z zamiast $\Delta x, \Delta y, \Delta z$). Różniczkę tę podają wyprowadzone niżej wzory (24), skąd równania błędów przyjmą postać

$$\begin{aligned}v_x &= [(y^2+z^2) dx - yx dy - zx dz] \frac{1}{s^3} + l_1; \\v_y &= [-xy dx + (x^2+z^2) dy - zy dz] \frac{1}{s^3} + l_2 \\v_z &= [-xz dx - yz dy + (x^2+y^2) dz] \frac{1}{s^3} + l_3\end{aligned}\quad (4)$$

Poniżej, w tabl. 3 obliczono wyrazy wolne l dla przybliżonych wartości:

$$x_0 = 259\,364, \quad y_0 = 300\,091, \quad z_0 = 120\,145; \quad (5)$$

stąd $s = \sqrt{x^2+y^2+z^2} = 414\,438$; l, \bar{m}, \bar{n} są wielkościami obserwowanymi.

Tabl. 4 podaje równania błędów. Na błąd spostrzeżeń przyjęto $m = 0,00001$. Tabl. 5 podaje zrównoważone równania błędów, poprawki v i spostrzeżenia wyrównane.

Z rozwiązania równań normalnych otrzymano poprawki (dx, dy, dz), poprawki v oraz wyrównane cosinusy kierunkowe (l, \bar{m}, \bar{n}). Wyniki podano w tabl. 5.

Obliczenia cosinusów kier. (ξ, η, ζ) z obserwacji (t, δ), wzór (1).

Tablica 1

1-A		2-A		1-B		2-B		1-E		2-E	
	o' "		o' "		o' "		o' "		o' "		o' "
δ	-27-56-19,2	δ	12-10-19,6	δ	-0-13-16,1	δ	33-38-38,7	δ	-20-58-55,9	δ	10-18-54,7
t	335-58-08,3	t	122-48-26,3	t	307,13-03,4	t	135-14-41,2	t	336-21-23,8	t	108-20-23,9
ξ	0,806 8919	ξ	-0,529 6346	ξ	0,604 8392	ξ	-0,591 1724	ξ	0,855 3208	ξ	-0,309 5712
η	-0,359 7767	η	0,821 6021	η	-0,796 3309	η	0,586 1428	η	-0,374 4506	η	0,933 8709
ζ	-0,468 4876	ζ	0,210 8490	ζ	-0,003 8596	ζ	0,554 0322	ζ	-0,358 0778	ζ	0,179 0631

Współczynniki przy niewiadomych obliczono dla przybliżonych wartości (x_0, y_0, z_0) podanych niżej.

Z rozwiązania równań normalnych otrzymano

$$\begin{aligned}x_0 &= -259364,0, & y_0 &= 300091,0, & z_0 &= 120145,0, \\d_x &= \underline{8,6}, & d_y &= \underline{-11,8}, & d_z &= \underline{-10,8}, \\x &= 259355,4, & y &= 300079,2, & z &= 120134,2, \\s_{12} &= \sqrt{x^2+y^2+z^2} = 414\,421,3.\end{aligned}$$

Stąd spostrzeżenia wyrównane

$$\bar{l} = \frac{x}{s} = -0,6258266, \quad \bar{m} = \frac{y}{s} = 0,7240921, \quad \bar{n} = \frac{z}{s} = 0,2898842.$$

Obliczenie \cos kierunku $(\bar{l}, \bar{m}, \bar{n})$ kierunku 2-1, wzór (2)

		l	m	n	k	
1-B	$\begin{Bmatrix} i & j & k \\ 0,6048392 & -0,7963309 & -0,0038596 \\ -0,5911724 & 0,5861428 & 0,5540322 \end{Bmatrix}$	-0,4389307	-0,3328187	-0,1162467	1,776276	
2-B						
1-E	$\begin{Bmatrix} i & j & k \\ 0,8553208 & -0,3744506 & -0,3580778 \\ -0,3095712 & 0,9338709 & 0,1790631 \end{Bmatrix}$	0,2673482	-0,0423058	0,6828401	1,361414	
2-E						
Normalne wektora jednostkowego:						
		l	m	n		
1-2-B	$\begin{Bmatrix} i & j & k \\ -0,7796621 & -0,5911779 & -0,2064862 \\ 0,3639716 & -0,0575957 & 0,9296281 \end{Bmatrix}$	-0,5614683	0,6496407	0,2600771	1,114610	
1-2-E						
Normalne wektora jednost. $\bar{l}, \bar{m}, \bar{n} =$		(-0,6258182	0,7240947	0,2898845)		
1-A	$\begin{Bmatrix} i & j & k \\ 0,3068919 & -0,3597767 & -0,4184876 \\ -0,5296346 & 0,8216021 & 0,2108490 \end{Bmatrix}$	0,3090518	0,0779949	0,4723939	1,754786	
2-A						
Normalne wektora jednostkowego:						
		l	m	n		
1-2-A	$\begin{Bmatrix} i & j & k \\ 0,5423198 & 0,1368644 & 0,8289502 \\ -0,7796621 & -0,5911779 & -0,2064862 \end{Bmatrix}$	0,4617964	-0,5343195	-0,2138995	1,355184	
1-2-B						
Normalne wektora jednostkowego =		(-0,6258191	0,7241012	0,2898732)		
1-2-A	$\begin{Bmatrix} i & j & k \\ 0,5423198 & 0,1368644 & 0,8289502 \\ 0,3639716 & -0,0575957 & 0,9296281 \end{Bmatrix}$	0,1749770	-0,2024414	-0,0810500	3,576742	
1-2-E						
Normalne wektora jednostkowego =		(0,6258476	-0,7240807	-0,2898950)		

Wyrównanie stacji podaje się również wg metody podanej w [1]. Podane tam wzory wyprowadza się jednak w sposób odmienny:

Oznaczając przybliżony wektor

$$\bar{2}, \bar{1} = (\bar{\xi}_0, \eta_0, \bar{\zeta}_0),$$

oraz wektor normalny do płaszczyzn 2-1-A i 2-1-B

$$N_{2-1}^i = (l_i, m_i, n_i),$$

otrzymamy na iloczyn skalarny

$$\bar{2}, \bar{1} \cdot N_{2-1}^i = |\bar{2}, \bar{1} \cdot \bar{N}_{2-1}^i| \cos(90 + p_i).$$

gdzie p_i jest małym kątem.

Tablica 3

Obliczenie wyrazów wolnych

	$l_0 = \frac{x}{s}$ $m_0 = \frac{y}{s}$ $n_0 = \frac{z}{s}$	\bar{l} \bar{m} \bar{n}	l
A—E	-0,625 8205	-0,625 8476	$2,71 \times 10^{-5}$
	0,724 0909	0,724 0807	$1,02 \times 10^{-5}$
	0,289 8984	0,289 8950	$0,34 \times 10^{-5}$
A—B	-0,625 8205	-0,625 8191	$-0,14 \times 10^{-5}$
	0,724 0909	0,724 1012	$-1,03 \times 10^{-5}$
	0,289 8984	0,289 8732	$2,52 \times 10^{-5}$
E—B	-0,625 8205	-0,625 8182	$-0,23 \times 10^{-5}$
	0,724 0909	0,724 0947	$-0,38 \times 10^{-5}$
	0,289 8984	0,289 8845	$1,39 \times 10^{-5}$

Tablica 4

Równania błędów (wzór 4)

	dx	dy	dz	l	m
1	$0,114\ 780 \times 10^{-5}$	$0,109\ 341 \times 10^{-5}$	$0,043\ 776 \times 10^{-5}$	$2,71 \times 10^{-5}$	10^{-5}
2	$0,109\ 341 \times 10^{-5}$	$0,114\ 780 \times 10^{-5}$	$-0,050\ 650 \times 10^{-5}$	$1,02 \times 10^{-5}$	10^{-5}
3	$0,043\ 776 \times 10^{-5}$	$-0,050\ 650 \times 10^{-5}$	$0,221\ 012 \times 10^{-5}$	$0,34 \times 10^{-5}$	19^{-5}
4	$0,114\ 780 \times 10^{-5}$	$0,109\ 341 \times 10^{-5}$	$0,043\ 776 \times 10^{-5}$	$-0,14 \times 10^{-5}$	10^{-5}
5	$0,109\ 341 \times 10^{-5}$	$0,114\ 780 \times 10^{-5}$	$-0,050\ 650 \times 10^{-5}$	$-1,03 \times 10^{-5}$	10^{-5}
6	$0,043\ 776 \times 10^{-5}$	$-0,050\ 650 \times 10^{-5}$	$0,221\ 012 \times 10^{-5}$	$2,52 \times 10^{-5}$	10^{-6}
7	$0,114\ 780 \times 10^{-5}$	$0,109\ 341 \times 10^{-5}$	$0,043\ 776 \times 10^{-5}$	$-0,23 \times 10^{-5}$	10^{-5}
8	$0,109\ 341 \times 10^{-5}$	$0,114\ 780 \times 10^{-5}$	$-0,050\ 650 \times 10^{-5}$	$-0,38 \times 10^{-5}$	10^{-5}
9	$0,043\ 776 \times 10^{-5}$	$-0,050\ 650 \times 10^{-5}$	$0,221\ 012 \times 10^{-5}$	$1,39 \times 10^{-5}$	10^{-5}

Tablica 5

Zrównoważone równania błędów, poprawki i spostrzeżenia wyrównane

	$dx = 8,6$	$dy = 11,8$	$dz = 10,8$	l	m	$\frac{v}{m}$	v	spostreżenia wyrównane
1	0,114 780	0,109 341	0,043 776	2,71	1	1,90	$1,90 \times 10^{-5}$	-0,625 8278
2	0,109 341	0,114 780	-0,050 650	1,02	1	1,15	$1,15 \times 10^{-5}$	0,724 0922
3	0,043 776	-0,050 650	0,221 012	0,34	1	-1,07	$-1,07 \times 10^{-5}$	0,289 8843
4	0,114 780	0,109 341	0,043 776	-0,14	1	-0,91	$-0,91 \times 10^{-5}$	-0,625 8278
5	0,109 341	0,114 780	-0,050 650	-1,03	1	-0,90	$-0,90 \times 10^{-5}$	0,724 0922
6	0,043 776	-0,050 650	0,221 012	2,52	1	1,11	$1,11 \times 10^{-5}$	0,289 8843
7	0,114 780	0,109 341	0,043 776	-0,23	1	-1,00	$-1,00 \times 10^{-5}$	-0,625 8278
8	0,109 341	0,114 780	-0,050 650	-0,38	1	-0,25	$-0,25 \times 10^{-5}$	0,724 0922
9	0,043 776	-0,050 650	0,221 012	1,39	1	-0,02	$-0,02 \times 10^{-5}$	0,289 8843

$$-\sin p_1 = \frac{\overline{2,1} \cdot \overline{N}_{2-1}^i}{|2,1 \cdot \overline{N}_{2-1}^i|} = \frac{\xi_0 l_{in} + \eta_0 m_{in} + \zeta_0 n_{in}}{\sqrt{\xi_0^2 + \eta_0^2 + \zeta_0^2} \sqrt{l_{in}^2 + m_{in}^2 + n_{in}^2}}; \quad (5)$$

dla $\sqrt{\xi_0^2 + \eta_0^2 + \zeta_0^2} = 1$;
będzie

$$-\sin p_i = \frac{\xi_0 l_{in} + \eta_0 m_{in} + \zeta_0 n_{in}}{\sqrt{l_{in}^2 + m_{in}^2 + n_{in}^2}}. \quad (6)$$

Uwzględniając, że

$$(\xi_0, \eta_0, \zeta_0) = (\cos \delta_0 \cos t_0, \cos \delta_0 \sin t_0, \sin \delta_0).$$

oraz rozwijając funkcję (6) w szereg, otrzymamy

$$v = \frac{-l_{in} \sin t_0 + m_{in} \cos t_0}{\sqrt{l_{in}^2 + m_{in}^2 + n_{in}^2}} \cos \delta_0 dt + \frac{n_{in}}{\sqrt{l_{in}^2 + m_{in}^2 + n_{in}^2}} \sec \delta_0 d\delta - \sin p = 0;$$

Oznaczając wg [1]

$$\cos \beta = \frac{-l_{in} \sin t_0 + m_{in} \cos t_0}{\sqrt{l_{in}^2 + m_{in}^2 + n_{in}^2}}; \quad \sin \beta = \frac{n_{in}}{\sqrt{l_{in}^2 + m_{in}^2 + n_{in}^2}} \sec \delta_0;$$

otrzymamy

$$v = \cos \beta \cos \delta_0 dt + \sin \beta d\delta - \sin p; \quad (7)$$

$$\text{lub} \quad v = a dt + b d\delta - \sin p; \quad (8)$$

$$\text{gdzie} \quad a = \cos \beta \cos \delta_0, \quad b = \sin \beta. \quad (9)$$

Interpretacja geometryczna kąta β .

Kąt β jest kątem pomiędzy płaszczyzną kąta godzinowego 2-1 a płaszczyzną przechodzącą przez punkty 2-1-S.S.Z. Kąt β jest również kątem pomiędzy normalnymi do obu płaszczyzn. Płaszczyznę kąta godzinowego tworzą wektory

$$\overline{2,1} = (\cos \delta_0 \cos t_0, \cos \delta_0 \sin t_0, \sin \delta_0), \\ \overline{z} = (0, 0, \sin \delta_0).$$

Normalną do płaszczyzny kąta godzinowego obliczymy z wyznacznika

$$N_{2-1}^z = \begin{vmatrix} i & , & j & , & k \\ \cos \delta_0 \cos t_0 & , & \cos \delta_0 \sin t_0 & , & \sin \delta_0 \\ 0 & , & 0 & , & \sin \delta_0 \end{vmatrix};$$

stąd

$$N_{2-1}^z = (\cos \delta_0 \sin t_0 \sin \delta_0, -\cos \delta_0 \cos t_0 \sin \delta_0, 0).$$

Normalną do płaszczyzny 2-1-S.S.Z. podają wzory (2)

$$\overline{N}_i = (l_{in}, m_{in}, n_{in}),$$

stąd kąt β zawarty między tymi normalnymi

$$\cos \beta = \frac{\cos \delta_0 \sin t_0 \sin \delta_0 l_{in} - \cos \delta_0 \cos t_0 \sin \delta_0 m_{in}}{\sqrt{\cos^2 \delta_0 \sin^2 t_0 \sin^2 \delta_0 + \cos^2 \delta_0 \cos^2 t_0 \sin^2 \delta_0} \sqrt{l_{in}^2 + m_{in}^2 + n_{in}^2}};$$

stąd

$$a = \cos \beta = \frac{l_{in} \sin t_0 - m_{in} \cos t_0}{\sqrt{l_{in}^2 + m_{in}^2 + n_{in}^2}}; \quad (10)$$

podobnie znajdziemy

$$b = \sin \beta = \frac{n_{in}}{\sqrt{l_{in}^2 + m_{in}^2 + n_{in}^2}} \sec \delta_0. \quad (11)$$

Otrzymane wzory (7), (10), (11) zgodne są ze wzorami podanymi w pracy [1].

Kąt β jest więc kątem dwuściennym płaszczyzny kąta godzinowego (t_0, δ_0) i płaszczyzny przechodzącej przez 2-1-S.S.Z. W równaniu błędów (7) występują jako niewiadome poprawki $d\delta$ i dt do przybliżonych δ_0 i t_0 , spostrzeżeniami są $\sin p$, wartość tę obliczamy wg wzorów (5).

Przybliżone δ_0, t_0 oblicza się najwygodniej ze współrzędnych (x, y, z) otrzymanych ze współrzędnych punktów wyjściowych za pomocą obserwowanych cosinusów kierunkowych.

Poniżej podaje się przykład wyrównania stacji.

Dla przybliżonych wartości (x_0, y_0, z_0) podanych na str. 73 obliczono potrzebne dane do wzorów (6), (10), (11)

$$t_0 = 130^\circ - 50' - 10,8'', \quad \delta_0 = 16^\circ - 51' - 06,7'';$$

stąd

$$\sin \delta_0, \quad \cos \delta_0, \quad \sin t_0, \quad \cos t_0;$$

następnie z tablicy (3) składowe (l_0, m_0, n_0) oraz z tablicy (2) składowe (l, m, n).

Dla tych wartości obliczono wg wzorów (10), (11) współczynniki a, b do równań błędów (8) oraz wyrazy wolne wg wzoru (6)

$$-p_A = \frac{0,0001125}{0,56987} \varrho'' = 4,07'';$$

$$-p_E = \frac{0,00000823}{0,73453} \varrho'' = 2,47'';$$

$$-p_B = \frac{0,000000785}{0,562976} \varrho'' = 0,29'';$$

stąd równania błędów (wzór 8)

$$v_A = -0,4783 dt + 0,8661 d\delta + 4,1'';$$

$$v_E = -0,2276 dt + 0,9713 d\delta + 2,5'';$$

$$v_B = 0,9345 dt - 0,2158 d\delta + 0,3'';$$

oraz z równań normalnych niewiadome dt , $d\delta$.

Stąd wyrównane t , δ

$$\delta = 16^\circ 51' 06,7'' - 3,8'' = 16^\circ 51' 02,9'';$$

$$t = 130^\circ 50' 10,8'' - 0,8'' = 130^\circ 50' 10,0'';$$

$$\sin \delta = 0,2898807, \quad \cos \delta = 0,9570628,$$

$$\sin t = 0,7565831, \quad \cos t = 0,6538976.$$

oraz cosinusy kierunkowe wektora $\overline{2, 1}$

$$\overline{l} = \cos \delta \cos t = -0,6258211;$$

$$\overline{m} = \cos \delta \sin t = 0,7240975;$$

$$\overline{n} = \sin \delta = 0,2898807;$$

Wyniki te różnią się od wyników pierwszej metody (str. 75) o wielkość rzędu $\pm 0,000005$.

Z równań błędów otrzymano

$$v_A = 1,2'', \quad v_E = -1,0'', \quad v_B = 0,4'',$$

stąd

$$m_0 = \sqrt{\frac{2,00}{3-2}} = \pm 1,4''.$$

2. Wyrównanie sieci metodą pośredniczącą

Wyrównane na stacjach cosinusy kierunkowe uważane jako niezależne spostrzeżenia z ich błędami otrzymanymi na stacji wprowadza się do wyrównania w sieci na podstawie równań błędów kształtu (3)

$$v = d(\cos_{\text{przybl.}}) + \cos_{\text{przybl.}} - \cos_{\text{obserw.}} \quad (12)$$

$d(\cos_{\text{przybl.}})$ jest funkcją przybliżonych współrzędnych (x, y, z) otrzymanych z dostępnych danych. Różniczkę $d(\cos_{\text{przybl.}})$ obliczy się na drodze rachunku wektorowego, dwa ostatnie człony tworzą wyraz wolny.

Przyjmując, że dane są przybliżone i obserwowane wartości cosinusów kierunkowych:

$$\frac{r_{12}^0}{|r_{12}^0|} = \left(\frac{x_2^0 - x_1^0}{|r_{12}^0|}, \frac{y_2^0 - y_1^0}{|r_{12}^0|}, \frac{z_2^0 - z_1^0}{|r_{12}^0|} \right);$$

$$\frac{r_{12}}{|r_{12}|} = \left(\frac{x_2 - x_1}{|r_{12}|}, \frac{y_2 - y_1}{|r_{12}|}, \frac{z_2 - z_1}{|r_{12}|} \right);$$

równania błędów przyjmą kształt

$$V = d \left(\frac{r_{12}^0}{|r_{12}^0|} \right) + \frac{r_{12}^0}{|r_{12}^0|} - \frac{r_{12}}{|r_{12}|} = d \left(\frac{r_{12}^0}{|r_{12}^0|} \right) + 1. \quad (13)$$

Z algebry wektorowej mamy

$$d\varphi = dr \nabla \varphi,$$

gdzie $\varphi = \frac{r_{12}}{|r_{12}|}$;

$$\nabla \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} i + \frac{\partial \varphi}{\partial y} j + \frac{\partial \varphi}{\partial z} k; \quad (14)$$

$$d \left(\frac{r_{12}}{|r_{12}|} \right) = dr \nabla \frac{r_{12}}{|r_{12}|};$$

stąd

$$v = dr \nabla \frac{r_{12}}{|r_{12}|} + l. \quad (15)$$

Poniżej podaje się wyprowadzenie równań błędów tylko w przestrzeni dwuwymiarowej w celu porównania otrzymanych wyników ze znanymi w geodezji klasycznej wzorami dla stwierdzenia poprawności liczeń. W przestrzeni trójwymiarowej podano jedynie końcowe wyniki, nie powtarzając analogicznych liczeń ze względu na oszczędności miejsca.

W układzie prostokątnym będzie

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \left(\frac{xi+yj}{\sqrt{x^2+y^2}} \right)}{\partial x} = \frac{i}{|r|} - \frac{r}{|r^2|} \frac{x}{|r|}; \quad (16)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial \left(\frac{xi+yj}{\sqrt{x^2+y^2}} \right)}{\partial y} = \frac{j}{|r|} - \frac{r}{|r^2|} \frac{y}{|r|}; \quad (17)$$

(16) i (17) podstawiamy w (14)

$$\begin{aligned} \nabla \frac{r_{12}}{|r_{12}|} &= \frac{i \cdot i}{|r|} - \frac{r}{|r^2|} \frac{x}{|r|} i + \frac{j \cdot j}{|r|} - \frac{r}{|r^2|} \frac{y}{|r|} j; \\ \nabla \frac{r_{12}}{|r_{12}|} &= \frac{1}{|r^3|} \left[|r^3| \begin{Bmatrix} ii \\ jj \end{Bmatrix} - r \cdot r \right]; \end{aligned} \quad (18)$$

gdzie

$$r \cdot r = \begin{Bmatrix} xx \ ii + \ xy \ ij \\ yx \ ji + \ yy \ jj \end{Bmatrix}; \quad (19)$$

(19) podstawiamy w (18)

$$\nabla \frac{r_{12}}{|r_{12}|} = \frac{1}{|r^3|} \left[(x^2 + y^2) \begin{Bmatrix} ii \\ jj \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} xxii + xyij \\ yxji + yyjj \end{Bmatrix} \right];$$

po wykonaniu działań otrzymamy

$$\nabla \frac{r_{12}}{|r_{12}|} = \frac{1}{|r^3|} \left\{ \begin{array}{l} (y^2i - xyj) i \\ (-yxi + x^2j) j \end{array} \right\}, \quad (20)$$

(20) podstawiamy w (15)

$$v = dr \frac{1}{|r^3|} \left\{ \begin{array}{l} (y^2i - xyj) i \\ (-yxi + x^2j) j \end{array} \right\} + l,$$

stąd

$$v_x i + v_y j = (dx_i + dy_j) \left\{ \begin{array}{l} (y^2i - xyj) i \\ (-yxi + x^2j) j \end{array} \right\} \frac{1}{|r^3|} + l;$$

$$v_x i + v_y j = \left\{ \begin{array}{l} (y^2 dx - xy dy) i \\ (-yx dx + x^2 dy) j \end{array} \right\} \frac{1}{|r^3|} + l.$$

Z porównania otrzymujemy

$$v_x = \frac{y^2}{|r^3|} dx - \frac{xy}{|r^3|} dy + l; \quad (21)$$

$$v_y = \frac{-yx}{|r^3|} dx + \frac{x^2}{|r^3|} dy + l.$$

Przyjęte wyżej (x, y) oznaczają różnice współrzędnych (przyrosty). We wzorze (21) przyjęto, że punkt 1 jest stały, punkt 2 — zmienny. Jeżeli oba punkty są zmienne, otrzymamy

$$v_x = \frac{y^2}{|r^3|} dx_2 - \frac{xy}{|r^3|} dy_2 - \frac{y^2}{|r^3|} dx_1 + \frac{xy}{|r^3|} dy_1 + l;$$

$$v_x = \frac{\sin^2 \alpha}{|r|} dx_2 - \frac{\cos \alpha \sin \alpha}{|r|} dy_2 - \frac{\sin^2 \alpha}{|r|} dx_1 + \frac{\cos \alpha \sin \alpha}{|r|} dy_1 + l;$$

przyjmując $v_x = d \cos \alpha = -\sin \alpha da$,
będzie

$$d\alpha = -\frac{\sin \alpha}{|r|} dx_2 + \frac{\cos \alpha}{|r|} dy_2 + \frac{\sin \alpha}{|r|} dx_1 - \frac{\cos \alpha}{|r|} dy_1 + l. \quad (22)$$

Podobnie otrzymamy z porównania

$$v_y = \frac{-yx}{|r^3|} dx_2 + \frac{x^2}{|r^3|} dy_2 + \frac{yx}{|r^3|} dx_1 - \frac{x^2}{|r^3|} dy_1 + l;$$

$$v_y = d \sin \alpha = \cos \alpha da;$$

$$d\alpha = -\frac{\sin \alpha}{|r|} dx_2 + \frac{\cos \alpha}{|r|} dy_2 + \frac{\sin \alpha}{|r|} dx_1 - \frac{\cos \alpha}{|r|} dy_1 + l. \quad (23)$$

Jak widzimy, z obu pierwotnych równań (21) otrzymano zgodne wyniki (22), (23). Równania te są identyczne z równaniami błędów otrzymanymi na drodze klasycznej.

Stosując powyższe postępowanie do przestrzeni trójwymiarowej należy w tej przestrzeni obliczyć gradient $\nabla \frac{r_{12}}{r_{12}}$.

Po wykonaniu działań i podstawieniu do (15) otrzymujemy:

$$\begin{aligned} v_x &= [(y^2 + z^2) dx - yx dy - zx dz] \frac{1}{|r^3|} + l_1; \\ v_y &= [-xy dx + (x^2 + z^2) dy - zy dz] \frac{1}{|r^3|} + l_2; \\ v_z &= [-xz dx - yz dy + (x^2 + y^2) dz] \frac{1}{|r^3|} + l_3. \end{aligned} \quad (24)$$

W równaniach powyższych (x, y, z) oznaczają różnice współrzędnych pomiędzy końcowymi punktami wektora. Wzory (24) odnoszą się do przypadku, gdy jeden z punktów jest stały drugi zmienny, w przypadku gdy oba punkty są zmienne należy postąpić jak podano w wyjaśnieniu do (21).

Bazowe równanie błędów

$$|v_{12}| = d|r_{12}| + |r_{12}| - |b_{12}| = d|r_{12}| + l;$$

gdzie

$|r_{12}|$ — przybliżona długość wektora \bar{r}_{12} ,
 $|b_{12}|$ — spostrzegana długość wektora \bar{b}_{12} ,
 $d|r_{12}|$ i $|v_{12}|$ — poprawki przybliżonych i spostrzeganych wielkości,

$$d|r_{12}| = d r_{12} \nabla |r_{12}| = d r_{12} \frac{r_{12}}{|r_{12}|}.$$

Przyjmując system kartezjański, będzie

$$|v| = (dx i + dy j + dz k) (xi + yj + zk) \frac{1}{|r|} + l.$$

Z wymnożenia otrzymujemy

$$|v| = \frac{x}{|r|} dx + \frac{y}{|r|} dy + \frac{z}{|r|} dz + l. \quad (25)$$

Jeżeli oba punkty są zmienne będzie

$$|v| = \frac{x}{|r|} dx_2 + \frac{y}{|r|} dy_2 + \frac{z}{|r|} dz_2 - \frac{x}{|r|} dx_1 - \frac{y}{|r|} dy_1 - \frac{z}{|r|} dz_1 + l; \quad (26)$$

(x, y, z) oznaczają różnice współrzędnych pomiędzy punktami 1 i 2.

Przykład

Siatkę przedstawia trójkąt o danym punkcie początkowym 2, pomierzonej bazie b_{2-1} oraz cosinusie kierunkowych 2—1, 2—3, 1—3.

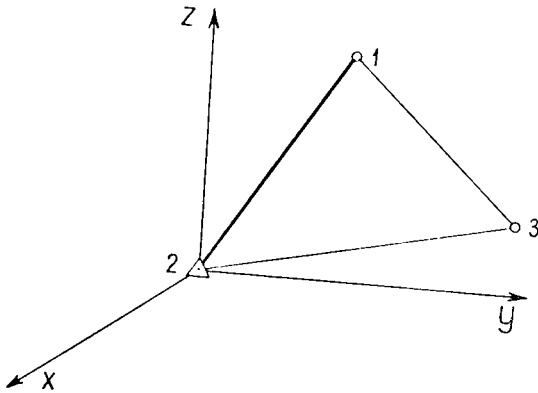
Z przyjętych wartości (x, y, z) punktów 1, 2, 3 (tabl. 6) obliczono przybliżone cosinusy kierunkowe (tabl. 7). Spozrzegane cosinusy kierunkowe otrzymano z wyrównań stacyjnych w sposób podany wyżej. Zestawienie spozrzeganych cosinusów kierunkowych oraz obliczenie wyrazów wolnych równań błędów podano w tablicy 8, a równanie błędów w tabl. 9 na str. 84.

$$b_{2-1} = 414\,427,5 \quad \text{z błędem} \quad m = \pm 1 \text{ m.}$$

Stąd wyraz wolny

$$l = 414\,438,3 - 414\,427,5 = 10,8.$$

Współczynniki równań błędów obliczono wg wzorów (24) dla współrzędnych (x, y, z) podanych w tabl. 6. Na błąd spozrzeganych cosinusów kierunkowych przyjęto $m = \pm 0,000\,01$.



Rys. 2

Dzieląc równania błędów przez $m = 10^{-5}$ otrzymujemy zrównoważony system równań błędów. Współczynniki i wyrazy wolne zmieniają się tylko o mnożnik 10^{-5} , który należy zaniedbać. Równanie bazowe $m = 1$ pozostaje bez zmiany. Otrzymane z rozwiązania równań normalnych

niewiadome dx, dy, dz (tabl. 9) dodane do współrzędnych przybliżonych (tabl. 6) dają wyrównane współrzędne punktów 1 i 3:

$$\begin{aligned} x_1 &= -259357,1, & y_1 &= 300086,7, & z_1 &= 120136,6, \\ x_3 &= -58524,3, & y_3 &= 473738,3, & z_3 &= -82736,7. \end{aligned}$$

Tablica 6

Współrzędne przybliżone

	x	y	z
2	0,0	0,0	0,0
1	-259 364,0	300 091,0	120 145,0
3	-58 520,0	473 744,0	-82 740,0

Błędów z wyrównania nie podaje się, ponieważ nie przedstawiają one praktycznej wartości dla przyjętych fikcyjnych spozrzeżeń. Porównanie wyrównanych współrzędnych z danymi a priori wykazało zgodność z dokładnością $\pm 0,4$ m.

Tablica 7

Wielkości przybliżone			
	różnica współrzędnych	boki	cosinusy kierunkowe
r_{2-1}	-259 364,0	414 438,3	-0,625 8205
	300 091,0		0,724 0908
	120 145,0		0,289 8983
r_{2-3}	-58 520,0	481 462,4	-0,120 7937
	473 744,0		0,977 8756
	-82 740,0		-0,170 7872
r_{1-3}	200 844,0	334 149,7	0,601 0600
	173 653,0		0,519 6862
	-202 885,0		-0,607 1679

Tablica 8

Wyrazy wolne			
	Cosinusy kierunkowe		wyrazy wolne
	przybliżone	obserwowane	
1	-0,625 8205	-0,625 8177	-0,000 0031
2	0,724 0908	0,724 0983	-0,000 0075
3	0,289 8983	0,289 8856	0,000 0127
4	-0,120 7937	-0,120 8044	0,000 0107
5	0,977 8756	0,977 8749	0,000 0007
6	-0,170 7872	-0,170 7839	-0,000 0042
7	0,601 0600	0,601 0512	0,000 0088
8	0,519 6862	0,519 7069	-0,000 0207
9	-0,607 1679	-0,607 1616	-0,000 0063

Przykład służy jedynie sprawdzeniu metody w zastosowaniu jej do praktycznych rachunków w ograniczonym zakresie ze względu na fikcyjne obserwacje.

3. Wyrównanie punktu metodą warunkową

Z wyrównanych na stacji cosinusów kierunkowych punktów naziemnych obliczone być mogą kąty trójkątów przestrzennych z iloczynu skalarnego. Kąty te poddać można dalszemu wyrównaniu w sieci, a następnie, w odpowiedni sposób, obliczone być mogą współrzędne punktów weinanych. Najkorzystniej zagadnienie to może być rozwiązane, gdy punkt weinany jest z trzech danych punktów w przestrzeni.

Rys. 3 przedstawia trzy dane punkty i punkt 4, weinany, w przestrzeni (x, y, z) . Tę samą figurę przestrzenną podaje rys. 4 w układzie

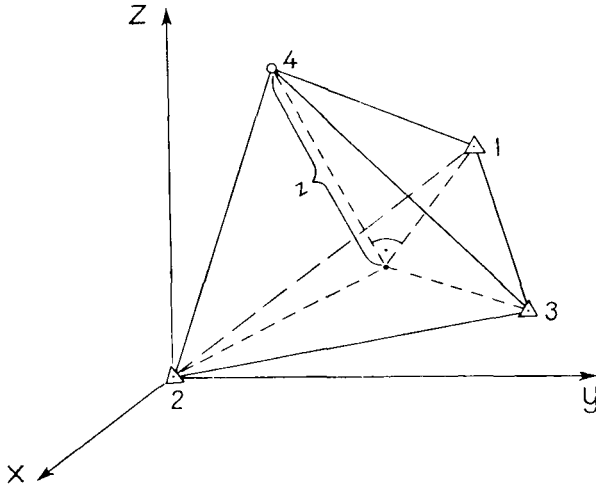
Tablica 9

Równania błędów

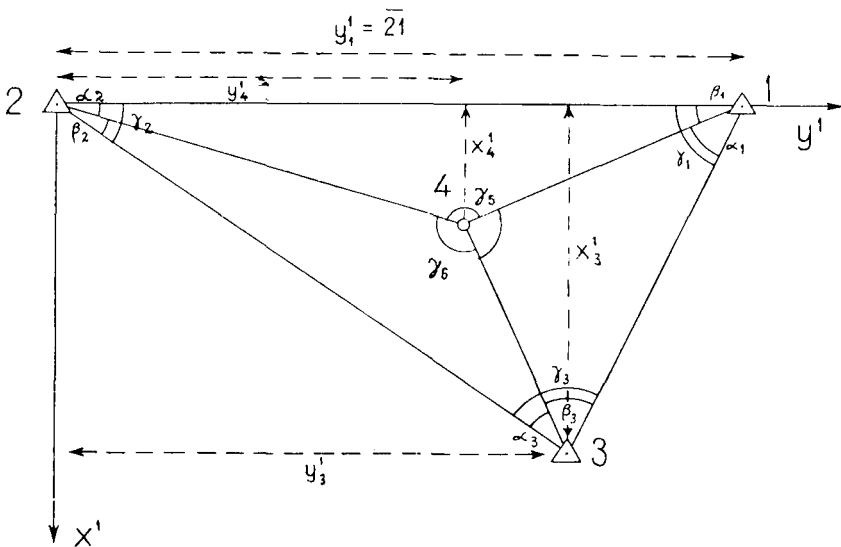
	$dz_1 = 6,9$	$dy_1 = -4,3$	$dz_1 = -8,4$	$dx_3 = -4,3$	$dy_3 = -5,7$	$dz_3 = 3,3$	wyraz wolny	m
1	$0,114\ 780 \times 10^{-5}$	$0,109\ 341 \times 10^{-5}$	$0,043\ 776 \times 10^{-5}$	$0,203\ 402 \times 10^{-5}$	$0,024\ 882 \times 10^{-5}$	$-0,004\ 258 \times 10^{-5}$	$-0,31 \times 10^{-5}$	10^{-5}
2	$0,109\ 341 \times 10^{-5}$	$0,114\ 780 \times 10^{-5}$	$-0,050\ 650 \times 10^{-5}$	$0,024\ 882 \times 10^{-5}$	$0,009\ 083 \times 10^{-5}$	$0,034\ 473 \times 10^{-5}$	$-0,75 \times 10^{-5}$	10^{-5}
3	$0,043\ 776 \times 10^{-5}$	$-0,050\ 650 \times 10^{-5}$	$0,221\ 012 \times 10^{-5}$	$-0,004\ 258 \times 10^{-5}$	$0,034\ 473 \times 10^{-5}$	$0,200\ 894 \times 10^{-5}$	$1,27 \times 10^{-5}$	10^{-5}
4				$0,191\ 150 \times 10^{-5}$	$-0,093\ 480 \times 10^{-5}$	$0,109\ 216 \times 10^{-5}$	$1,07 \times 10^{-5}$	10^{-5}
5				$-0,109\ 216 \times 10^{-5}$	$0,218\ 443 \times 10^{-5}$	$0,094\ 480 \times 10^{-5}$	$0,07 \times 10^{-5}$	10^{-5}
6	$-0,191\ 150 \times 10^{-5}$	$0,093\ 480 \times 10^{-5}$	$-0,109\ 216 \times 10^{-5}$	$-0,093\ 480 \times 10^{-5}$	$-0,093\ 480 \times 10^{-5}$	$0,109\ 216 \times 10^{-5}$	$-0,42 \times 10^{-5}$	10^{-5}
7	$0,093\ 480 \times 10^{-5}$	$-0,218\ 443 \times 10^{-5}$	$-0,094\ 430 \times 10^{-5}$	$-0,093\ 480 \times 10^{-5}$	$0,218\ 443 \times 10^{-5}$	$0,094\ 480 \times 10^{-5}$	$0,88 \times 10^{-5}$	10^{-5}
8	$-0,109\ 216 \times 10^{-5}$	$-0,094\ 430 \times 10^{-5}$	$-0,188\ 941 \times 10^{-5}$	$0,109\ 216 \times 10^{-5}$	$0,094\ 430 \times 10^{-5}$	$0,188\ 941 \times 10^{-5}$	$-2,07 \times 10^{-5}$	10^{-5}
9							$-0,63 \times 10^{-5}$	10^{-5}
bazowe	$-0,625\ 820$	$0,724\ 090$	$0,289\ 898$	—	—	—	$10,80$	$1,0$

W pierwszym wierszu podano otrzymane z wyrównania wartości niewiadomych.

pomocniczym (x', y', z') , w którym płaszczyzna x', y' jest płaszczyzną rysunku, a oś y' przyjęta jest wzdłuż danego boku $\overline{21}$ (oś z' jest prostopadła do płaszczyzny rysunku). Punkty 1, 2, 3 leżą w płaszczyźnie x', y' . Zagadnienie rozwiązuje się w dwóch częściach. W pierwszej kolejności wyrównuje się spostrzegane kąty, w części drugiej oblicza się współrzędne punktu 4 na podstawie wyrównanych kątów.



Rys. 3



Rys. 4

Spostrzeganych kątów posiada sieć 9, natomiast koniecznych do określenia punktu 4 — jest trzy, stąd sześć warunków niezależnych. Będą nimi trzy warunki trójkątowe i trzy sinusowe. Trójkątowe warunki odnoszą się do trójkątów (1, 2, 4), (1, 3, 4) i (2, 3, 4). Wyrazy wolne tych warunków równe będą zero ze względu na to, że kąty otrzymano z cosinusów kierunkowych (podobnie na płaszczyźnie: suma kątów otrzymanych z azymutów boków trójkąta równa się 180°). Warunki sinusowe będą kształtu, np. w odniesieniu do punktu centralnego 2

$$\frac{2}{2} \frac{1}{3} = \frac{\sin \gamma_5 \sin \alpha_3}{\sin \beta_1 \sin \gamma_6}.$$

Pozostałe dwa warunki odnosi się do punktów centralnych 3 i 4. Po wyrównaniu kątów obliczy się z odpowiednich trójkątów boki $\overline{41}$, $\overline{42}$, $\overline{43}$.

W drugiej części obliczy się współrzędne punktu 4. Bezpośrednie obliczenie współrzędnych punktu 4 w układzie (x, y, z) nie jest możliwe. Współrzędne te obliczy się najpierw w układzie (x', y', z') , a następnie przetransformuje do układu (x, y, z) .

Na rysunku 4 podane są współrzędne punktu 3 $(x', y', z' = 0)_3$, punktu 1 $(x' = 0, y' = \overline{21}, z' = 0)_1$ oraz punktu 4 $(x', y', z')_4$, współrzędna z_4 jest wysokością ostrosłupa 1, 2, 3, 4. Punkt 2 jest początkiem układu $(x'_2 = y'_2 = z'_2 = 0)$.

Obliczanie wysokości z .

Wychodzimy z równań (rys. 3)

$$x_4^2 + y_4^2 + z_4^2 = s_{24}^2;$$

$$(x_4 - x_3)^2 + (y_4 - y_3)^2 + (z_4 - z_3)^2 = s_{34}^2;$$

$$(x_4 - x_1)^2 + (y_4 - y_1)^2 + (z_4 - z_1)^2 = s_{14}^2.$$

Stąd

$$x_4^2 + y_4^2 + z_4^2 = s_{24}^2; \quad (1)$$

$$x_4 x_3 + y_4 y_3 + z_4 z_3 = \frac{s_{24}^2 + s_{23}^2 - s_{34}^2}{2} = p; \quad (2)$$

$$x_4 x_1 + y_4 y_1 + z_4 z_1 = \frac{s_{24}^2 + s_{21}^2 - s_{14}^2}{2} = q. \quad (3)$$

Z 2) i 3) otrzymamy

$$x_4 = a z_4 + b, \quad y_4 = c z_4 + d; \quad (4)$$

gdzie

$$a = \frac{z_3 y_1 - z_1 y_3}{x_1 y_3 - x_3 y_1}; \quad b = \frac{q y_3 - p y_1}{x_1 y_3 - x_3 y_1};$$

$$c = \frac{x_3 z_1 - x_1 z_3}{x_1 y_3 - x_3 y_1}; \quad d = \frac{p x_1 - q x_3}{x_1 y_3 - x_3 y_1}.$$

Podstawimy 4) do 1)

$$a^2 z_4^2 + b^2 + 2abz_4 + c^2 z_4^2 + d^2 + 2cdz_4 + z_4^2 = s_{24}^2;$$

$$(1 + a^2 + c^2) z_4^2 + (ab + cd) 2z_4 + b^2 + d^2 = s_{24}^2;$$

lub

$$Pz_4^2 + 2Qz_4 + R = 0; \quad (5)$$

gdzie

$$P = 1 + a^2 + c^2;$$

$$Q = ab + cd;$$

$$R = b^2 + d^2 - s_{24}^2.$$

W naszym, szczególnym przypadku (rys. 4) jest

$$z'_1 = z'_3 = 0, \quad x'_1 = 0.$$

Stąd

$$b = \frac{qy'_3 - py'_1}{-x'_3 y'_1}, \quad d = \frac{q}{y'_1}, \quad a = c = 0.$$

oraz

$$P = 1, \quad Q = 0, \quad R = b^2 + d^2 - s_{24}^2,$$

podstawiając do (5) otrzymamy

$$z_4^2 = -R. \quad (6)$$

Transformację wykona się wg znanych wzorów:

$$x_i = x'_i \cos(x'x) + y'_i \cos(y'x) + z'_i \cos(z'x);$$

$$y_i = x'_i \cos(x'y) + y'_i \cos(y'y) + z'_i \cos(z'y); \quad (7)$$

$$z_i = x'_i \cos(x'z) + y'_i \cos(y'z) + z'_i \cos(z'z).$$

Na podstawie współrzędnych punktów łącznych 1, 2, 3 obu układów oblicza się współczynniki wzorów (1). Ponieważ współrzędne punktu 2 w obu układach są równe zeru, pozostają do transformacji tylko dwa punkty łączne.

Współrzędne punktu 1 w układzie (x', y', z') są $x'_1 = z'_1 = 0$, $y'_1 = \overline{2 \ 1}$ ($\overline{2 \ 1}$ długość boku $\overline{2 \ 1}$), stąd z wzoru (7) obliczy się od razu współczynniki $\cos(y'x)$, $\cos(y'y)$, $\cos(y'z)$. Podobnie, podstawiając do (7) znane $(x'_3, y'_3, z'_3 = 0)$ otrzyma się współczynniki $\cos(x'x)$, $\cos(x'y)$, $\cos(x'z)$. Współczynniki przy z' nie dają się obliczyć z (7), ponieważ $z'_1 = z'_3 = 0$. Wiadomym natomiast jest, że oś z' jest prostopadła do płaszczyzny 1, 2, 3 lub do prostych $\overline{2 \ 1}$, $\overline{2 \ 3}$ tworzących tę płaszczyznę. Obliczając iloczyn wektorowy wg:

$$\overline{2 \ 3} \cdot \overline{2 \ 1} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \cos_{23}(y'x) & \cos_{23}(y'y) & \cos_{23}(y'z) \\ \cos_{21}(y'x) & \cos_{21}(y'y) & \cos_{21}(y'z) \end{vmatrix};$$

otrzymuje się składowe wektora \bar{z}'

$$\bar{z}' = (\cos(z'x), \quad \cos(z'y), \quad \cos(z'z)).$$

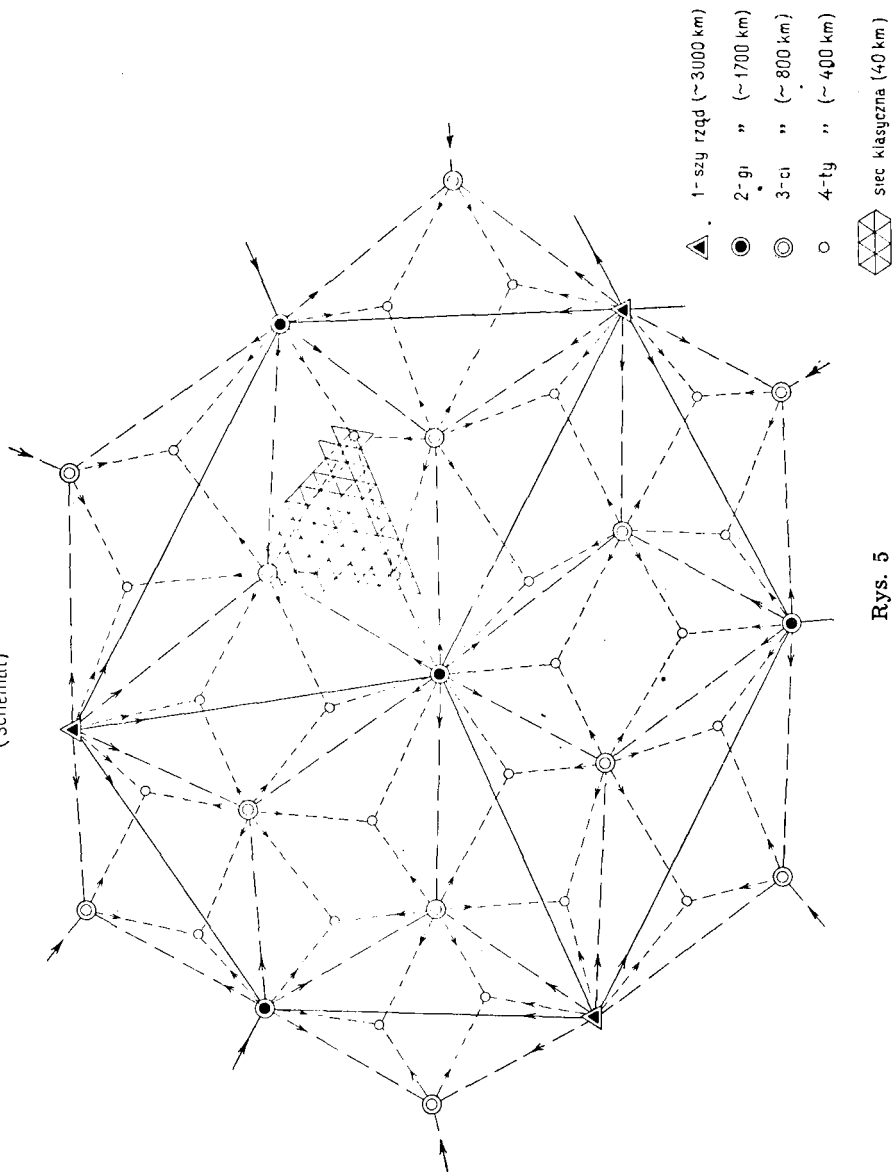
Obliczone w ten sposób współczynniki wzorów (7) służą do transformacji współrzędnych punktu 4.

W podobny sposób wyrównać można, a następnie przetransformować inne punkty wcięte z punktów 1, 2, 3. Z przykładu tego widocznym jest, że elementarną siecią przestrzenną jest figura utworzona z czterech punktów 1, 2, 3, 4, z których trzy punkty są dane, podobnie jak na płaszczyźnie (układ x, y) — trójkąt 1, 2, 3, w którym danymi punktami są punkty 1, 2 zaś punkt 3 jest punktem wcinanym.

Sieci przestrzenne niższego rzędu

Realne korzyści nowej elipsoidy ziemskiej i współrzędnych sieci satelitarnej o długości boków 2—3 tys. km posiadać będą wtedy praktyczną wartość, jeżeli zaistnieje możliwość nawiązania istniejącej sieci klasycznej o długości boków około 40 km do otrzymanych współrzędnych sieci o długości boków 2—3 tys. km. Nie jest to możliwe przy istniejących różnicach boków. Nawiązanie takie będzie możliwe w przypadku zaprojektowania kilku sieci pośrednich 2-go, 3-go i dalszych rzędów. Każdy rząd niższy obliczony być może w nawiązaniu do rzędu wyższego za pomocą wyrównania pojedynczych punktów lub grup punktów. Obserwacjami byłyby współrzędne wektorów jednostkowych (cosinusów kierunkowych), (rys. 5). Jako rząd najniższy przyjąć można sieć zastępczą, o długości boków około 400 km zbudowaną z sieci klasycznej o długości boków około 40 km. Cosinusy kierunkowe sieci zastępczej obliczyć można na podstawie znajomości współrzędnych (φ, λ, h) sieci klasycznych. O dokładności tak uzyskanych cosinusów kierunkowych przekonać się można na kilku fragmentach sieci, porównując wyniki uzyskane z oryginalnych pomiarów (α, δ, s) z wielkościami zastępczymi po przeprowadzeniu poprzedniej redukcji (transformacji) ze względu na różne elipsoidy i skręt układów współrzędnych. Użycie tak rozumianych spostrzeżeń zastępczych posiadać będzie tylko wtedy znaczenie wyrównawcze, jeżeli spostrzeżenia te użyte będą w sieci, w której występować będą również i równania błędów uzyskane z bezpośrednich obserwacji. Wynika to z faktu, że zastępcze równania błędów posiadają wyraz wolny równy zeru. Włączenie obserwacji zastępczych do sieci satelitarnej upewnić może, że kolejna czynność, tj. transformacja współrzędnych sieci klasycznej (40 km) do sieci satelitarnej może być z powodzeniem przeprowadzona.

Astronomiczno geodezyjna siec przestrzenna
(schemat)



Rys. 5

L I T E R A T U R A

- [1] Väisälä Y., Oterma L.: Anwendung der astronomischen Triangulations-methode, Helsinki 1960, Veröffentlichungen des finnischen geodetischen Institutes.
- [2] Milbert S.: Wyrównanie i obliczenie Satelitarnej sieci triangulacyjnej. Geodezja i Kartografia, tom XIV, Warszawa 1965.
- [3] Kluss T.: Anwendung dreidimensionaler Geodäsie zu Triangulations problemen, Warszawa, 1965, Veröffentlichungen des Häupemts für Geodäsie und Kartografie.

Recenzował: Prof. dr Stanisław Milbert

Rękopis złożono w Redakcji w lipcu 1966 r.

ТАДЭУШ КЛОСС

УРАВНИВАНИЕ ТРИАНГУЛЯЦИОННОЙ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ СЕТИ КОСВЕННЫМ МЕТОДОМ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ИЗМЕРЕННЫХ ДИРЕКЦИОННЫХ КОСИНУСОВ И УСЛОВНЫМ МЕТОДОМ ПРИНИМАЯ ИЗМЕРЕННЫЕ ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ УГЛЫ

Резюме

Спутниковая сеть с длиной сторон около трех тысяч км может быть только тогда применена к практическим вопросам, если к ней увязать классические сети с длиной сторон около 40 км.

Это можно выполнить с помощью нескольких посредственных сетей, в которых низшим классом будет спутниковая сеть с длиной сторон около 400 км. К такой сети легче уже навязать различные фрагменты континентальных сетей.

Спутниковые сети второго и низших рядов могут быть различным способом уравнены с привязкой к сетям высших рядов, однако сеть самого низшего ряда предлагается уравнивать, особенно за счет большого количества пунктов, с помощью координат единичных векторов направлений сети (направляющих косинусов), которые, уравнены на станции, нужно считать как независимые наблюдения. Уравнения поправок будет составляться по формуле (12) и в окончательной форме для употребления по формуле (24).

Неизвестными в этих формулах являются координаты (x, y, z) наземных пунктов. Исключается необходимость вычисления координат вспомогательных пунктов (искусственных спутников Земли).

На территориях где имеются классические сети со сторонами порядка 40 км предлагается применение с их помощью заменяющих сетей самого низкого ряда (400 км).

Направляющие косинусы заменяющих сетей легко вычислить, соответствующим способом, похоже к способу вычисления заменяющих углов в классической триангуляции.

Заменяющие наблюдения применены будут в уравнивании вместе с непосредственными наблюдениями.

Статья излагает уравнивание направляющих косинусов на станции, вывод формул (24) и пример уравнивания двух пунктов.

Приводится тоже метод условных уравнений для угловых наблюдений вычисленных по направляющим косинусам уравненным на станции. Метод условий может быть применен предположительно для составления плана наблюдений при развитии стороны в пространственной сети, аналогично к приему определения весов для развития исходных сторон по измеренному базису в классической сети.

Приложенные примеры исполнено по мнимым наблюдениям и по этой причине они представляют по сути дела вычислительные схемы, потребительскую суть метода, а не точности уравнивания наблюдений.

TADEUSZ KLUSS

COMPENSATION OF SPATIAL TRIANGULATION NETWORK BY AN
INTERMEDIATE METHOD ASSUMING MEASURED DIRECTION
COSINES, AND BY A CONDITIONAL METHOD ASSUMING
MEASURED SPATIAL ANGLES

S u m m a r y

A satellite network with side lengths of some 3000 km each can only be used for solving practical problems, when classical networks of some 40 km lengths are interlinked with them. This can be accomplished by means of a number of intermediate networks in which the satellite network of lowest order has side lengths of some 400 km each. It then will be easier to tie in with this latter network fragments of the variegated continental networks. The satellite networks of the second and of lower orders can be compensated by a variety of methods; however, it is recommended to compensate the lowest order network, particularly in view of its larger number of points, by means of the coordinates of the unit vectors of network directions (the direction cosines) which, compensated at the station, shall be considered as independent observations. The error equations are arranged in conformity with the basic formula (12) and in the form in which the formula is ultimately utilized (24). The unknowns in these equations are the coordinates (x, y, z) of the earth surface points; this eliminates the necessity of calculating the coordinates of the auxiliary points (the artificial Earth satellites). In areas containing classical networks of a side length of some 40 km it is suggested to construct from them vicarious networks of lowest (400 km) order. The direction cosines of the vicarious networks are easily calculated in a suitable way, similarly as the angles of the vicarious networks in the classical triangulation.

In compensating operations, the vicarious observations will be used in combination with direct observations.

In his paper the author indicates, how to compensate direction cosines at a station, and how to evolve equations (24), and he presents an example of compensating two points. He also presents a conditional method for angular observations calculated on the basis of direction cosines adjusted at a station. This conditional method can be applied, when it is intended to prepare a plan of observations for computing a side in a spatial network similarly as for computing a side from a measured base in the classical network.

The examples given by the author are set up on the basis of fictitious observations; therefore they rather represent schematic pictures of calculations, that is, the practical way of applying this method, — not examples of an accurate manner of compensating observations.