

WOJCIECH JANUSZ

528.14 : 528.535.2

Wpływ nawiązania sieci geodezyjnej na wyniki wyrównania i oceny dokładności

Osnowa geodezyjna założona na pewnym obszarze dla celów gospodarczych jest wykorzystywana głównie dla nawiązania i wzmocnienia konstrukcyjnego osnów niższych rzędów, pokrywających poszczególne fragmenty tego obszaru. Z naukowego punktu widzenia najbardziej właściwe wyniki uzyskalibyśmy stosując jednoczesne wyrównanie całego materiału obserwacyjnego, dotyczącego wszystkich powiązanych ze sobą sieci na danym obszarze. Stosowany w praktyce podział osnów na rzędy wiąże się z:

- 1) niejednoczesnością wykonania poszczególnych prac pomiarowych na rozpatrywanym obszarze, podyktowaną względami organizacyjnymi i jednocześnie występującymi różnymi potrzebami gospodarczymi,
- 2) ułatwieniem prac obliczeniowych i wyrównawczych w stosunku do jednoczesnego wyrównania całego materiału obserwacyjnego,
- 3) różnicami w dokładności wykonania pomiaru osnów w poszczególnych fragmentach rozpatrywanego obszaru.

Należy podkreślić, że stosowane terminy: osnowa „wyższego” lub „niższego” rzędu nie zawierają w sobie zasadniczo elementów oceny stosunku dokładności tych osnów a jedynie określają kolejność wyrównania i nawiązania, jakkolwiek względy dokładnościowe często decydują o tym, którą osnowę traktujemy jako nawiązującą, a którą jako nawiązywaną. Określenie, która z osnów jest nawiązującą, a która nawiązywaną zależy głównie od struktury i obszaru jaki każda z nich pokrywa.

Z zagadnieniem stosunku dokładności dwu częściowo pokrywających się osnów powiązanych obserwacjami oraz zagadnieniem ich struktury wiąże się bezpośrednio sprawa oceny celowości, możliwości i sposobu wykorzystania jednej z nich jako nawiązującej oraz oceny ostatecznego efektu dokładnościowego w sieci nawiązanej.

Naogół nie istnieją wątpliwości co do celowości i sposobu nawiązania w przypadku, gdy osnowa wyższego rzędu jest wyraźnie dokładniejsza od osnowy niższego rzędu. W wielu jednak przypadkach zakłada się na sto-

sunkowo niedużych obszarach osnowy specjalne, o szczególnie wysokich dokładnościach, przy jednoczesnym występowaniu na tych obszarach punktów osnowy państwowej, pokrywającej w sposób mniej więcej jednolity większy obszar. Jako przykład mogą tu służyć wszelkie osnowy realizacyjne, zakładane na niewielkich obszarach budowanych zakładów przemysłowych, sieci miejskie lub kopalniane. Nawiązanie niektórych z tych osnów do sieci państwowej jest niezbędne dla określenia lokalizacji obiektu w jednolitym układzie współrzędnych. Ponieważ jednak niejednokrotnie istnieje obawa, że nawiązanie spowoduje obniżenie dokładności sieci nawiązywanej, stosuje się podwójne wykazy współrzędnych dla tych samych punktów:

1. wykaz współrzędnych sieci wyrównanej lokalnie, wykorzystywany dla wszelkich prac realizacyjnych i bezpośredniej obsługi geodezyjnej zakładu,
2. wykaz współrzędnych siatki wyrównanej lub przetransformowanej do układu państwowego z uwzględnieniem warunków nawiązania, wykorzystywany dla wszelkich prac mających związek z określeniem lokalizacji obiektu jako całości.

Zauważmy, że w wielu przypadkach nawiązanie osnów specjalnych mogłoby mieć na celu również ich wzmocnienie konstrukcyjne i dokładnościowe względnie uproszczenie i zmniejszenie ilości prac pomiarowych. Na przeszkodzie takiemu postawieniu sprawy stoi brak zasad oceny przydatności osnowy wyższego rzędu dla nawiązania osnów niższych rzędów oraz zbyt słaba orientacja w sposobach uwzględnienia nawiązania, które nie obniżyły by dokładności sieci nawiązywanej. Zachodzi więc potrzeba określenia zasad oceny przydatności punktów osnowy wyższego rzędu dla nawiązania osnów niższych rzędów oraz podania najbardziej właściwych sposobów uwzględniania w toku wyrównania warunków wynikających z nawiązania. Zagadnienia te należy rozpatrywać z odróżnieniem celu dokonywanych nawiązań, to jest: wzmocnienia konstrukcji nawiązywanej sieci lub wyrażenia jej w jednolitym układzie współrzędnych, zadany na rozpatrywanym obszarze przez punkty sieci wyższego rzędu. Na tym miejscu zajmiemy się głównie zagadnieniem nawiązań mających na celu wzmocnienie konstrukcji i podwyższenie dokładności sieci nawiązywanych.

Na ocenę przydatności punktów sieci wyższego rzędu do nawiązania innej sieci składa się:

- I. Ocena aktualnej wartości stabilizacji punktów nawiązujących pod kątem: a) możliwości wyznaczenia zmian położenia znaków w stosunku do położenia w okresie pomiaru osnowy wyższego rzędu, względnie oceny wielkości przypuszczalnych ruchów stabilizacji (stopień starzenia sieci), b) możliwości wykonania czynności pomiarowych związanych z nawiązaniem (np. istnienie i stan sygnalizacji punktów).

- II. Ocena dokładności punktów nawiazania, oparta na analizie dokładności sieci wyższego rzędu.
- III. Ocena korzyści dokładnościowych, wynikających z istniejącego rozmieszczenia i dokładność punktów przewidzianych jako nawiazujące.

I. Ocena aktualnej wartości stabilizacji punktów nawiazujących.

Potrzeba zabezpieczenia jaknajwyższej stabilności znaków pomiarowych oraz możliwości okresowego ich kontrolowania przewidziana jest w większości instrukcji technicznych w postaci odpowiednich przepisów dotyczących konstrukcji znaków, sposobu ich stabilizowania oraz systemu zabezpieczenia. Ocena aktualnej wartości stabilizacji polega więc na zapoznaniu się ze wspomnianymi przepisami i wykorzystaniu ich dla czynności kontrolnych w terenie. Niezależnie jednak od instrukcji technicznych, ocena winna być oparta na znajomości wpływu warunków środowiska na znaki pomiarowe oraz zachodzących na rozpatrywanym obszarze zmian tych warunków. Szczególnie ważna jest znajomość zmian stanu wody gruntowej, rozmieszczenia i zasięgu eksploatacji pobliskich wyrobisk górniczych, kamieniołomów z prowadzonymi pracami strzałowymi i innych regionalnych cech środowiska, które mogłyby spowodować poruszenie nie tylko samego znaku lecz również całej warstwy gruntowej lub skalnej. Ocena aktualnej wartości stabilizacji jest trudna i wymaga dużego doświadczenia nie tylko w pracach pomiarowych ale również w obserwacji zmian środowiska. Dochodzą tu nawet takie momenty, jak ocena stopnia prawdopodobieństwa, że znak został poruszony umyślnie lub przypadkowo w wyniku działalności ludzkiej. Dlatego też bardzo dobrze jest, jeśli w ocenie aktualnej wartości stabilizacji punktów przewidzianych jako nawiazujące uczestniczy geodeta, który brał udział w stabilizacji i pomiarze sieci wyższego rzędu.

II. Ocena dokładności punktów nawiazania

Jeśli z sieci wyższego rzędu wybieramy pewną grupę punktów z myślą wykorzystania ich do nawiazania innej sieci, to interesuje nas głównie wzajemna dokładność tych punktów.

W praktyce dokładność sieci jest charakteryzowana w najlepszym przypadku przez błędy współrzędnych przykładowo wybranych punktów sieci. W większości przypadków charakterystyka dokładnościowa danej sieci oparta jest na analogii z dokładnością innej, szczegółowo przeanalizowanej sieci o podobnej strukturze i dokładności pomiaru. Często też, przy charakterystyce sieci operuje się skrajnymi — największymi wielkościami błędów średnich najslabiej wyznaczonych punktów, traktując dalej wielkości te jako miarodajne dla oceny przydatności sieci do nawiazania dal-

szych prac. Taki stan praktyczny, spowodowany przez uciążliwość rachunków związanych ze szczegółową analizą dokładności sieci, jest z punktu widzenia rozpatrywanego zagadnienia wysoce niezadawalający. Licząc się z tym, że szczegółowa analiza dokładności każdej sieci nie jest praktycznie możliwa, przyjmujemy, że konieczne jest opracowanie jednoznacznych zasad oceny dokładności danych nawiązujących, które posłużyłyby do przeprowadzenia obliczeń eksperymentalnych. Obliczenia takie miałyby na celu przeanalizowanie dokładności pewnych typowych sieci przy różnych sposobach wykorzystania ich do nawiązania. W efekcie otrzymalibyśmy zbiór danych liczbowych i wniosków możliwych w praktyce do wykorzystania na drodze zastosowania analogii.

Aby przeanalizować celowość wykorzystania do nawiązania wybranych punktów istniejącej sieci wyższego rzędu konieczne jest posiadanie lub obliczenie krakowianu odwrotności tabeli współczynnikowej układu równań normalnych tej sieci $(\mathbf{apa})^{-1}$, w oparciu o który możemy obliczyć błąd dowolnej funkcji wyrównanych obserwacji, wyrażonej współrzędnymi. Z krakowianu tego wypisujemy elementy znajdujące się na przecięciu wierszy i kolumn odpowiadających współrzędnym rozpatrywanej grupy punktów nawiązujących. Elementy te utworzą krakowian $(\mathbf{kpk})^{-1}$ w oparciu o który możemy obliczyć błąd dowolnej funkcji wyrównanych obserwacji wyrażonej współrzędnymi punktów nawiązujących. Krakowian $(\mathbf{kpk})^{-1}$ stanowi charakterystykę dokładności grupy punktów, wyrażoną w odniesieniu do punktów nawiązania sieci wyższego rzędu.

Dla obliczenia błędu funkcji wyrównanych spostrzeżeń stosujemy ogólny wzór:

$$m_F = m_o \sqrt{\mathbf{f} \cdot (\mathbf{kpk})^{-1} \cdot \mathbf{f}} \quad (1)$$

gdzie: F — funkcja spostrzeżeń wyrażona przy pomocy wyrównanych współrzędnych punktów wchodzących w skład rozpatrywanej grupy

m_o — błąd średni typowego spostrzeżenia po wyrównaniu (w dalszych rozważaniach przyjmujemy $m_o = 1$)

f — krakowian kolumnowy pochodnych cząstkowych funkcji F względem poszczególnych zmiennych, uporządkowany zgodnie z numeracją zmiennych w układzie równań normalnych.

Z wzoru (1) możemy obliczyć błędy różnego rodzaju funkcji wyrażające stopień wzajemnej zgodności (dokładności) punktów rozpatrywanej grupy. Rozpatrując np. sieci niwelacyjne możemy obliczyć błędy przewyższeń pomiędzy wszystkimi reperami jakie zamierzamy wykorzystać do nawiązania sieci niwelacyjnej niższego rzędu. W przypadku sieci wyznaczających współrzędne X, Y możemy obliczyć błędy długości, kątów, powierzchni, przyrostów współrzędnych itp. Możemy również obliczać błędy szcze-

gólnego rodzaju funkcji, jakimi są same wyznaczone z wyrównania zmienne. W tym przypadku wzór (1) wydatnie upraszcza się i przyjmuje postać:

$$m_i = m_o \sqrt{(kpk)_{ii}^{-1}} = m_o \sqrt{Q_{ii}} \quad (2)$$

gdzie oznaczenie „ ii ” wskazuje, że pod pierwiastkiem znajduje się element przekątnej głównej odpowiadający i -tej niewiadomej

Zauważmy, że w przypadkach gdy pozabawieni jesteśmy pełnej odwrotności $(kpk)^{-1}$ a posiadamy jedynie elementy przekątne wyznaczone rachunkiem stosuje się założenie, że pozostałe elementy są równe zero. Wówczas obliczenie błędu funkcji sprowadza się do realizacji wzoru:

$$m'_F = \sqrt{\left[f_i \cdot (kpk)_{ii}^{-1} \cdot f_i \right]} m_o = \sqrt{\left[f_i^2 \cdot m_i^2 \right]} \quad (3)$$

Wykonanie obliczenia błędu średniego określonej funkcji przy wykorzystaniu wzorów (1), (3) przekona nas, że w bardzo wielu przypadkach zachodzi $m'_F > m_F$ przy czym częstokroć m'_F/m_F przyjmuje wartości 2,3 i więcej. Blizsze badanie tego zjawiska wykazuje, że m'_F jest tym większe w stosunku do m_F im bardziej peryferyjnie w danej sieci umieszczone są punkty określające funkcję F oraz — im silniej powiązane są wzajemnie obserwacjami. Również poważną rolę odgrywa tu wartość konstrukcyjna sieci.

Ilustracją wspomnianego zagadnienia, przejawioną wprawdzie, lecz dobitnie ukazującą postawiony problem może być analiza ciągu niwelacyjnego nawiązanego jednostronnie. Łatwo wykazać, że krakowian $(a^2)^{-1}$ przy uporządkowaniu zmiennych kolejno poczynając od punktu dostosowania przyjmie postać:

$$(a^2)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ 1 & 2 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & i & i & \cdot & i \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & i+1 & \cdot & i+1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & 2 & \cdot & i & i+1 & \cdot & n \end{pmatrix}$$

Korzystając z tego krakowianu obliczymy błąd średni przewyższenia między dwoma sąsiadującymi punktami o numerach $i, i+1$:

$$\text{z wzoru (1)} \quad m_{\Delta h_{i,i+1}} = \sqrt{\begin{pmatrix} -1 & \{i & i\} \\ 1 & \{i & i+1\} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}} m_{\Delta h} = m_{\Delta h}$$

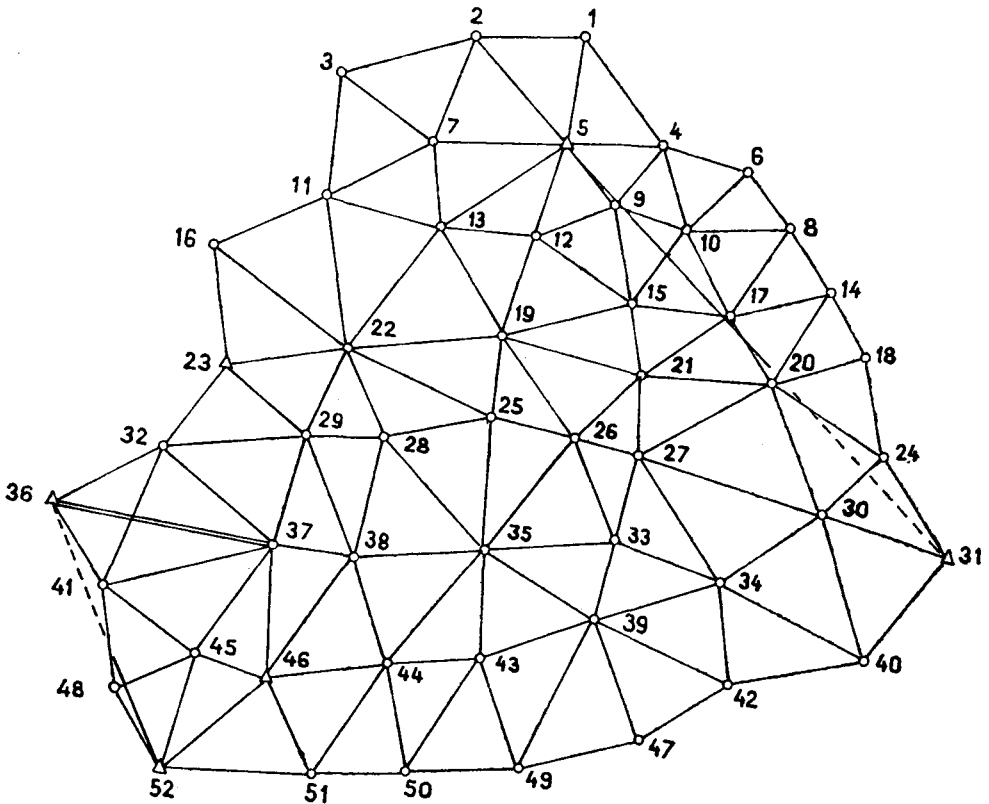
$$\text{z wzoru (3)} \quad m'_{\Delta h_{i,i+1}} = \sqrt{i + (i+1)} m_{\Delta h} = \sqrt{2i+1} m_{\Delta h}$$

Obliczenie błędu przewyższenia z wzoru (3) przyniosło rezultat, który

każdy odrzuci intuicyjnie, wiedząc, że wobec braku wyrównania i przy postawionym założeniu równorzędności przewyższeń między sąsiednimi reperami, nie istnieje uzasadniona przyczyna dla uznania błędu przewyższenia pomiędzy reperami $i, i + 1$ za różny w stosunku do błędu typowego spostrzeżenia $m_{\Delta h}$.

Gdyby zaistniała potrzeba pomierzenia dodatkowego ciągu niwelacyjnego, nawiązanego do rozpatrzonych w przykładzie reperów $i, i + 1$ to wykonawca opierający się na wyniku analizy dokładności przewyższenia między punktami nawiązującymi, dokonanej w oparciu o wzór (3) wyraźnie niedoceniałby wartości tych reperów. Mógłby wówczas wysuwać wątpliwości co do możliwości dokonania nawiązania i wyrównania powszechnie stosowanym sposobem nie uwzględniającym wpływu błędów nawiązujących.

Podany przykład jest wprawdzie drastyczny pod względem słabości konstrukcji pomiarowej jednak wyraźnie wskazuje na konsekwencje wynikające z posługiwania się wyłącznie błędami niewiadomych dla oceny wzajemnej zgodności wyznaczenia punktów.



Rys. 1

że jeden z punktów nawiązujących, np. punkt „e” jest bezbłędny, zaś pozostałe mają błędy identyczne z błędami przyrostów współrzędnych na odcinkach e—f, e—g, .. e—i, gdzie e, f, g ... i punkty nawiązania. Wykonajmy przykład odpowiedniego obliczenia dla grupy punktów NrNr 11, 13, 19, 22 sieci triangulacyjnej wg rysunku 1

$$(\text{kpk})^{-1} = \begin{matrix} & x^{11}_y & x^{13}_y & x^{19}_y & x^{22}_y & & \\ \left. \begin{matrix} 2338 & 7 & 1509 & 320 & 986 & 196 & 1114 & -282 \\ 7 & 2221 & -346 & 1341 & -277 & 848 & 11 & 987 \\ 1509 & -346 & 1433 & -39 & 989 & 34 & 899 & -269 \\ 320 & 1341 & -39 & 1389 & -118 & 901 & 119 & 786 \\ 986 & -277 & 989 & -118 & 1106 & -48 & 759 & -188 \\ 196 & 848 & 34 & 901 & -48 & 999 & 76 & 675 \\ 1114 & 11 & 899 & 119 & 759 & 76 & 1050 & -87 \\ -282 & 987 & -269 & 786 & -188 & 675 & -87 & 977 \end{matrix} \right\} 10^{-6} & \begin{matrix} x_{11} \\ y_{11} \\ x_{13} \\ y_{13} \\ x_{19} \\ y_{19} \\ x_{22} \\ y_{22} \end{matrix} \end{matrix}$$

Zestawimy krakowian f_{13} powstały z krakowianów kolumnowych f_x, f_y dla przyrostów współrzędnych na odcinkach 13—11, 13—19, 13—22

$$f_{13} = \begin{matrix} & f_x^{11} & f_y^{11} & f_x^{19} & f_y^{19} & f_x^{22} & f_y^{22} & \\ \left. \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix} \right\} & \begin{matrix} x_{11} \\ y_{11} \\ x_{13} \\ y_{13} \\ x_{19} \\ y_{19} \\ x_{22} \\ y_{22} \end{matrix} \end{matrix}$$

Wykonanie działania krakowianowego:

$$f_e \cdot (\text{kpk})^{-1} \cdot f_e = r_e \tag{4}$$

gdzie: f_e zespół krakowianów kolumnowych f obliczonych dla odcinków e—f e—g, ... e—i, prowadzi do obliczenia krakowianu r_e posiadającego tą charakterystyczną cechę, że błędy funkcji określonych przez współrzędne punktów e, f, g...i obliczone z wzoru:

$$m_F = \sqrt{f r_e f} m_o \tag{5}$$

są identyczne z błędami tych funkcji obliczonymi z wzoru (1) z wyjątkiem błędów funkcji jakimi są same zmienne.

Realizując wzór (5) otrzymamy w rozpatrywanym przykładzie:

$$r_{13} = 10^{-6} \begin{pmatrix} x & 11 & y & x & 13 & y & x & 22 & y \\ 753 & -6 & -79 & -197 & 139 & -372 & & & \\ -6 & 928 & 148 & -5 & 199 & 249 & & & \\ -79 & 148 & 561 & -3 & 304 & 160 & & & \\ -197 & -5 & -3 & 586 & -116 & 377 & & & \\ 139 & 199 & 304 & -116 & 685 & 24 & & & \\ -372 & 249 & 160 & 377 & 24 & 794 & & & \end{pmatrix} \begin{matrix} x \\ y \\ x \\ y \\ x \\ y \\ x \\ y \end{matrix}$$

Aby uniknąć uprzywilejowania jednego z punktów nawiązania przez przyjęcie jego bezbłądności, możnaby w powyższym rozumowaniu pójść nieco dalej przyjmując, że bezbłądną wartość osiąga punkt O , którego współrzędne wyznaczone są jako średnie ze współrzędnych punktów nawiązujących $e, f, g, \dots i$. Wówczas możemy uważać błędy współrzędnych punktów nawiązujących za identyczne z błędami przyrostów współrzędnych na odcinkach $O-e, O-f, O-g, \dots O-i$. Przyrosty współrzędnych wyrażają się tu wzorami:

$$\Delta x_{O-e} = x_e - \frac{\sum x}{n} = \frac{n-1}{n} x_e - \frac{1}{n} x_f - \frac{1}{n} x_g - \dots - \frac{1}{n} x_i$$

$$\Delta y_{O-e} = y_e - \frac{\sum y}{n} = \frac{n-1}{n} y_e - \frac{1}{n} y_f - \frac{1}{n} y_g - \dots - \frac{1}{n} y_i$$
(6)

gdzie: n — liczba punktów nawiązujących.

Krakovian f_0 zawierający w kolumnach pochodne cząstkowe poszczególnych przyrostów współrzędnych określonych powyższymi wzorami przyjmie ogólną postać:

$$f_0 = \begin{pmatrix} \frac{n-1}{n} & 0 & -\frac{1}{n} & 0 & \cdot & \cdot & -\frac{1}{n} & 0 \\ 0 & \frac{n-1}{n} & 0 & -\frac{1}{n} & \cdot & \cdot & 0 & -\frac{1}{n} \\ -\frac{1}{n} & 0 & \frac{n-1}{n} & 0 & \cdot & \cdot & -\frac{1}{n} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{n} & 0 & \frac{n-1}{n} & \cdot & \cdot & 0 & -\frac{1}{n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -\frac{1}{n} & 0 & -\frac{1}{n} & 0 & \cdot & \cdot & \frac{n-1}{n} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{n} & 0 & -\frac{1}{n} & \cdot & \cdot & 0 & \frac{n-1}{n} \end{pmatrix}$$
(7)

Wykonanie działania (4) przy wykorzystaniu krakowianu f_0 prowadzi do uzyskania krakowianu r_0 . Dla wyżej cytowanego przykładu w wyniku przeprowadzenia rachunku otrzymujemy:

$$r_0 = \frac{10^{-6}}{16} \begin{pmatrix} 8271 & 677 & -525 & 2137 & -4933 & 249 & -2813 & -3063 \\ 677 & 9022 & -1527 & -1138 & -379 & -5050 & 1229 & -2834 \\ -525 & -1527 & 2727 & -163 & -417 & 1101 & -1785 & 589 \\ 2137 & -1138 & -163 & 3550 & -1383 & -282 & -591 & -2130 \\ -4933 & -379 & -417 & -1383 & 5415 & -167 & -65 & 1929 \\ 249 & -5050 & 1101 & -282 & -167 & 5262 & -1183 & 70 \\ -2813 & 1229 & -1785 & -591 & -65 & -1183 & 4663 & 545 \\ -3063 & -2834 & 589 & -2130 & 1929 & 70 & 545 & 4894 \end{pmatrix} \begin{matrix} x \\ y \\ x \\ y \\ x \\ y \\ x \\ y \end{matrix} \begin{matrix} 11 \\ 13 \\ 19 \\ 22 \end{matrix}$$

Obliczymy wartości błędów średnich współrzędnych korzystając z $(kpk)^{-1}$ i wzoru (1) oraz r_{13} r_0 i wzoru (5)

Błędy obliczone przy korzystaniu z:	m_{x11}	m_{y11}	m_{x13}	m_{y13}	m_{x19}	m_{y19}	m_{x22}	m_{y22}
$(kpk)^{-1}$	0,048	0,047	0,038	0,037	0,033	0,032	0,032	0,031
r_0	0,023	0,024	0,013	0,015	0,018	0,018	0,017	0,018
r_{13}	0,028	0,030	0	0	0,024	0,024	0,026	0,028

III. Ocena dokładności sieci nawiązanej

Przy dokonywaniu oceny dokładności sieci bierzemy pod uwagę:

1. Wartość konstrukcyjną sieci, która wyraża się wielkościami elementów krakowianu $(apa)^{-1}$ odnoszącego się do tej sieci,

2. Stopień zgodności układu obserwacyjnego po wyrównaniu, określony wielkością błędu typowego spostrzeżenia m_0 oraz rozkładem wartościowym i przestrzennym poprawek wyrównawczych.

W zależności od poczynionych przy wyrównaniu założeń wynikających z warunków nawiązania możemy otrzymać różne charakterystyki dokładności, zarówno pod względem oceny wartości konstrukcji jak i uzyskanego w wyniku wyrównania rozkładu i wielkości poprawek.

Wyrównanie sieci geodezyjnych może być dokonane w różnych wariantach, różniących się sposobem uwzględnienia warunków wynikających z nawiązania:

1) Przy założeniu stałości minimalnej liczby elementów — takiej, która czyni układ wyznaczalnym lecz nie powoduje powstawania dodatkowych warunków wpływających na sposób kształtowania się poprawek obserwacji.

2) W sposób jednoczesny wraz z inną siecią, którą w dalszych wariantach nazywać będziemy siecią wyższego rzędu (nie zajmujemy się tu sposobem nawiązania sieci wyższego rzędu).

3) W nawiązaniu do sieci wyższego rzędu ze ścisłym uwzględnieniem wpływu błędów elementów nawiązujących, wyznaczonych z sieci wyższego rzędu i podlegających tu ponownemu poprawieniu.

4) W nawiązaniu do sieci wyższego rzędu z przybliżonym uwzględnieniem wpływu błędów elementów nawiązujących, wyznaczonych z sieci wyższego rzędu i podlegających tu ponownemu poprawieniu.

5) W nawiązaniu do sieci wyższego rzędu z uwzględnieniem wzajemnej dokładności elementów nawiązujących.

6) W nawiązaniu do sieci wyższego rzędu bez uwzględniania wpływu błędów elementów nawiązujących i bez ich ponownego poprawienia.

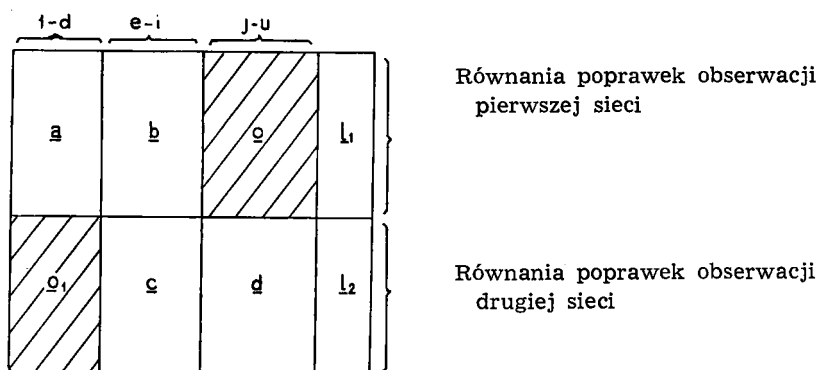
1) Wyrównanie przy założeniu stałości minimalnej liczby elementów, zwane wyrównaniem niezależnym, polega na rozwiązaniu układu równań poprawek obserwacji przy założeniu stałości tylko tylu zmiennych, aby wartość wyznacznika tabeli współczynnikowej równań normalnych była różna od zera i skończona. Przy wyrównaniu metodą pośredniczącą przyjmuje się np. dla sieci niwelacyjnych założenie stałości jednego reperu, w sieci z obserwowanymi długościami i kątami — założenie stałości jednego punktu i kierunku, w sieci uzupełnionej wyznaczeniem azymutów — stałość jednego punktu. Wyrównanie wg tego wariantu prowadzi do uzyskania minimalnej (w stosunku do pozostałych wariantów) wartości $\left[\frac{vv}{mm} \right]$. Wartość konstrukcyjna tak wyrównanej sieci jest najwyższa w bezpośrednim otoczeniu elementów dostosowania (przyjętych za stałe) lecz szybko maleje w rejonach peryferyjnych.

2) Wyrównanie jednoczesne wraz z inną (jedną lub wieloma) siecią należy uważać za najbardziej właściwe z naukowego punktu widzenia, prowadzi bowiem do uzyskania minimum $\left[\frac{vv}{mm} \right]$ w odniesieniu do znacznie większego materiału obserwacyjnego aniżeli przy innych wariantach wyrównania.

3) Wyrównanie sieci nawiązanej ze ścisłym uwzględnieniem wpływu błędów elementów nawiązujących. Wyrównanie takie polega na narzuceniu warunków wyni-

kających z nawiązania w sposób prowadzący do uzyskania po wyrównaniu wartości konstrukcji sieci nawiązanej identycznej z wartością konstrukcji sieci wyrównanej w sposób jednoczesny z siecią wyższego rzędu oraz identycznych wyników obu wyrównań. Zakres stosowalności tego wariantu ograniczony jest do przypadków, gdy dysponujemy pełną charakterystyką dokładności sieci wyższego rzędu. Wyjaśnimy sposób postępowania prowadzący do wspomnianego celu.

Dany jest układ równań poprawek obserwacji sieci jednorodnej, którego tabelę oznaczymy schematycznie jak na rysunku 2.



Rysunek 2

Na rysunku 2 zakreskowane pola oznaczają występowanie wyłącznie współczynników o wartości równej zero.

Jeśli na sieć jednorodną składają się dwie sieci wyznaczające niewiadome 1-i oraz e-u przy czym niewiadome e-i są wspólne dla obu sieci to podane wyżej pogrupowanie równań poprawek pozwala na dokonanie: wyrównania jednoczesnego z wykorzystaniem całego materiału, dwu niezależnych wyrównań opartych na oddzielnym wykorzystaniu każdej grupy równań, kolejnych wyrównań (wyrównanie jednej sieci a następnie drugiej z wykorzystaniem wyników wyrównania poprzedniej w zakresie niewiadomych łącznych e-i). W dalszych rozważaniach przyjmujemy, że sieć pierwsza jest siecią wyższego rzędu i że w jej układzie równań obserwacji uwzględniono warunki dostosowania. Sieć druga będzie siecią niższego rzędu.

W celu wyrównania sieci wyższego rzędu zestawia się równania normalne, których układ wyrażony przez krakowiany blokowe przyjmuje postać:

$$\begin{Bmatrix} X'_{1-d} \\ X'_{e-i} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} A & \tau B \\ B & D \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} l_1 a \\ l_1 b \end{Bmatrix} = X \cdot W = L_1 = 0 \quad (8)$$

gdzie: $A = a^2$, $B = ab$, $D = b^2$

X'_{1-d} , X'_{e-i} są to krakowiany kolumnowe niewiadomych o numerach $1-d$, $e-i$ wyznaczone w toku wyrównania sieci wyższego rzędu.

W celu wyrównania sieci niższego rzędu zestawiamy równania normalne, których układ wyrażony przez krakowiany blokowe przyjmuje postać:

$$\begin{Bmatrix} X''_{e-i} \\ X''_{j-u} \end{Bmatrix} \left(\begin{Bmatrix} E & \tau F \\ F & H \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} D_2 \end{Bmatrix} \right) - \left(\begin{Bmatrix} 1_2 c \\ 1_2 d \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} X'_{e-i} & E \\ X'_{e-i} & \tau F \end{Bmatrix} \right) = X(N + D_2) - L_2 = 0 \quad (9)$$

gdzie: $E = c^2$, $F = cd$, $H = d^2$, D_2 — krakowian uwzględniający wpływ błędów wyznaczenia niewiadomych zawartych w krakowianie X'_{e-i} , wykorzystanych do nawiązania. X''_{e-i} , X''_{j-u} są to krakowiany kolumnowe niewiadomych o numerach $e-i$, $j-u$ wyznaczone w toku wyrównania sieci niższego rzędu (przy założeniu, że przybliżone wartości niewiadomych $e-i$ są równe wartościom wyznaczonym z wyrównania sieci wyższego rzędu).

Krakowian D_2 powstaje z krakowianu D_1 o znaczeniu wyjaśnionym w [1] § 6 str. 185 wzór 6.9 przez uzupełnienie kolumnami i wierszami zer sprowadzającymi go do jednowymiarowości z krakowianem N :

$$D_2 = \begin{Bmatrix} D_1 & O \\ O & O \end{Bmatrix} \quad (10)$$

Wyjaśnimy sposób wyznaczenia krakowianu D_1

Przy obliczaniu odwrotności krakowianu W wchodzącego w skład wzoru (8) otrzymujemy następującą zależność wyrażoną krakowianami blokowymi:

$$\begin{Bmatrix} A & \tau B \\ B & D \end{Bmatrix}^{-1} = \begin{Bmatrix} A^{-1} + a \cdot \beta & D_1^{-1} \beta \\ a & D_1^{-1} \end{Bmatrix} \quad (11)$$

W niniejszym wywodzie interesuje nas wyłącznie krakowian D_1 , który przy zastosowanych oznaczeniach i w odniesieniu do krakowianów kwadrastych przyjmuje postać:

$$D_1 = D - \tau B \cdot A^{-1} \tau B \quad (12)$$

Ponieważ przy wyrównaniu sieci wyższego rzędu przeprowadzona została (wg. założenia omawianej metody) pełna analiza dokładności, dysponujemy krakowianem W^{-1} z którego możemy wypisać krakowian D_1^{-1} . W celu uzyskania interesującego nas krakowianu D_1 wykonujemy działanie:

$$D_1 = (D_1^{-1})^{-1} \quad (13)$$

Podstawiając do wzoru (9) wartość D_1 wyrażoną wzorem (12) otrzymamy:

$$\begin{Bmatrix} X''_{e-i} \\ X''_{j-u} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} E + D - \tau B A^{-1} \tau B & \tau F \\ F & H \end{Bmatrix} - L_2 = X \cdot M - L_2 = 0 \quad (14)$$

Analiza sieci niższego rzędu polega na obliczeniu M^{-1} oraz m_0 .

Słuszność powyższego sposobu uwzględnienia wpływu błędów danych nawiązujących stwierdzimy przeprowadzając porównanie z wyrównaniem jednoczesnym obu sieci. W celu dokonania takiego wyrównania zestawiamy układ równań normalnych, który wyrazimy tu za pośrednictwem krakowianów blokowych:

$$\begin{Bmatrix} X_{1-d} \\ X_{e-i} \\ X_{j-u} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} A & \tau B & \tau O \\ B & D + E & \tau F \\ O & F & H \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} l_1 a \\ l_1 b + l_2 c \\ l_2 d \end{Bmatrix} = X J - L = 0 \quad (15)$$

Zastosujemy podział krakowianu J na następujące bloki:

$$\begin{Bmatrix} A & \tau B_1 \\ B_1 & K \end{Bmatrix} = J$$

gdzie:

$$K = \begin{Bmatrix} D + E & \tau F \\ F & H \end{Bmatrix}, \quad \tau B_1 = \{ \tau B \tau O \}$$

(16)

Przy obliczaniu J^{-1} w miejscu odpowiadającym położeniu krakowianowi K otrzymamy na mocy wzoru (12) wyrażenie

$$K_1^{-1} = (K - \tau B_1 \cdot A^{-1} \tau B_1)^{-1}$$

Zauważmy, że obliczenie $\tau B_1 \cdot A^{-1} \tau B_1$ prowadzi do uzyskania zer w całym obszarze odpowiadającym położeniu krakowianom blokowym τF , F , H zaś w obszarze odpowiadającym położeniu krakowianowi $D + E$ jest identyczne z wykonaniem działania $\tau B \cdot A^{-1} \tau B$. W rezultacie krakowian K_1 wyrażony przez krakowiany blokowe przyjmuje postać:

$$\begin{Bmatrix} D + E - \tau B \cdot A^{-1} \cdot \tau B & \tau F \\ F & H \end{Bmatrix} = K_1 \quad (17)$$

Ponieważ $K_1 = M$ (por. (14) i (17)) będzie: $K_1^{-1} = M^{-1}$ co wskazuje na równowartość konstrukcji sieci niższego rzędu wyrównanej jednocześnie z siecią wyższego rzędu oraz sieci niższego rzędu wyrównanej przy wykorzystaniu zależności (14).

Korzystając z zależności (9) możemy napisać:

$$X''_{e-i} \cdot \tau F + X''_{j-u} \cdot H = l_2 d - X'_{e-i} \cdot \tau F \quad (18)$$

Korzystając z zależności (15) możemy napisać:

$$X_{1-d} \cdot \tau O + X_{e-i} \cdot \tau F + X_{j-u} \cdot H = l_2 d \quad (19)$$

Porównanie (18) i (19) wskazuje na następujące zgodności:

$$\begin{aligned} X'_{e-i} + X''_{e-i} &= X_{e-i} \\ X''_{j-u} &= X_{j-u} \end{aligned} \quad (20)$$

Zależności (20) wskazują, że wyrównanie sieci niższego rzędu przy wykorzystaniu zależności (14) prowadzi również do osiągnięcia identycznych wartości niewiadomych jak przy wyrównaniu jednoczesnym. Jak widzimy, omówione postępowanie przy wyrównaniu sieci nawiązanej pozwala na osiągnięcie wyników identycznych z wyrównaniem jednoczesnym tak pod względem wartości niewiadomych jak i charakterystyki konstrukcyjnej wartości sieci.

Zauważmy, że niezależnie od uporządkowania kolejności zmiennych w układzie równań, elementy krakowianu $(\mathbf{apa})^{-1}$ przyjmują dla tych samych zmiennych identyczne wartości. Wyrazimy to następująco: jeśli przy wyrównaniu sieci dwie zmienne x, y posiadają odpowiednio numery i, j zaś przy ponownym wyrównaniu nastąpiła jedynie zmiana kolejności zmiennych przy której zmienne x, y otrzymały nowe numery r, s to zachodzi związek:

$$Q_{i,j} = Q'_{r,s} \quad (21)$$

gdzie: Q — element odwrotności odpowiadający pierwszemu wyrównaniu,

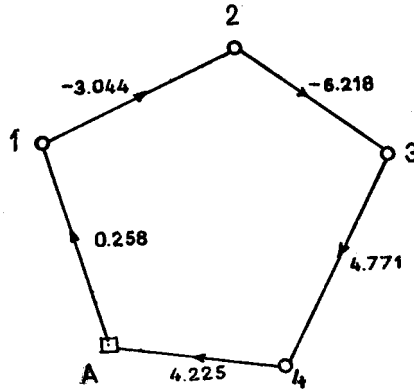
Q' — element odwrotności odpowiadający wyrównaniu przy zmiennej jedynie kolejności zmiennych.

Omówiona wyżej cecha posiada bardzo istotne znaczenie dla praktycznego korzystania ze sposobu wyrównania sieci niższego rzędu uwzględniającego ściśle wpływ błędów elementów nawiązujących, pozwala bowiem operować dowolnie wybranymi grupami punktów sieci wyższego rzędu przyjętymi do nawiązania różnych sieci niższego rzędu. Praktycznie oznacza ona, że równoważnik krakowianu D_1^{-1} otrzymać możemy z krakowianu W^{-1} przez wypisanie elementów znajdujących się na przecięciu wierszy i kolumn o numerach odpowiadających współrzędnym punktów nawiązujących — niezależnie od kolejności występowania tych współrzędnych w układzie równań sieci wyższego rzędu. Nie zachodzi więc potrzeba numerowania zmiennych w układzie sieci wyższego rzędu w taki sposób aby zmienne odpowiadające współrzędnym punktów jakie zamierzamy wykorzystać do późniejszego nawiązania sieci niższego rzędu występowały na końcu układu. Powracając do uprzedniego wywodu oznacza to, że zmienne $e-g$ mogą być pomieszane w kolejności występowania w układzie równań ze zmiennymi $1-d$.

Ilustracją przeprowadzonych wywodów może być następujący przykład.

Przykład liczbowy wyrównania i analizy dokładności sieci.

Pomierzono siatkę niwelacyjną jak na rysunku 3.



Rys. 3

W celu jej wyrównania wykonano następujące rachunki:

Nr	Rzędne przybl.	Rzędne wyrówn.	Przewyższenia		Popr. v	Wyrazy wolne
			przybl.	obserw.		
A	0,0000	0,0000				
1	0,2580	0,2595	0,2580	0,2580	1,5	0,0
2	-2,7860	-2,7829	-3,0440	-3,0440	1,6	0,0
3	-9,0040	-8,9993	-6,2180	-6,2180	1,6	0,0
4	-4,2330	-4,2266	4,7710	4,7710	1,7	0,0
A			4,2330	4,2250	1,6	8,0

Równania poprawek

1	2	3	4	dh	S	v
1				0	1	1,5
-1	1			0	0	1,6
	-1	1		0	0	1,6
		-1	1	0	0	1,7
			-1	8	7	1,6

Równania normalne

2	-1			0	1
	2	-1		0	0
		2	-1	0	0
			2	-8	-7

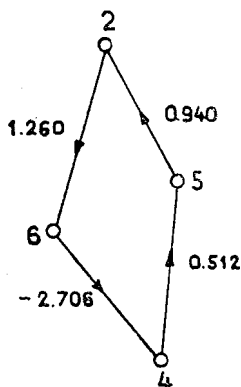
W-1

1	2	3	4	
0,80	0,60	0,40	0,19	1
0,60	<u>1,20</u>	0,80	<u>0,40</u>	2
0,40	0,80	1,18	0,59	3
0,19	<u>0,40</u>	0,59	<u>0,80</u>	4

1,42	-0,71			0	0,71					0,71
	1,23	-0,82		0	0,41					0,41
		1,16	-0,86	0	0,30					0,30
			1,12	-7,12	-6,00					-6,00
1,5	3,1	4,7	6,4							

				0,71
			0,41	0,82
		0,29	0,58	0,86
	0,22	0,45	0,66	0,89

Następnie sieć została uzupełniona dwoma ciągami tworzącymi układ jak na rysunku 4.



Rys. 4

Wyrównamy układ wg. rysunku 4 ze ściślej uwzględnieniem elementów nawiązujących (wyznaczonych z powyższego wyrównania rzędnych reperów Nr 2, 4). W tym celu wykonamy następujące rachunki:

Nr	Rzędne dane	Rzędne przybl.	Rzędne wyrówn.	Przewyższenia		Popr. v	Wyraży wolne
				przybl.	obserw.		
4	-4,2266		-4,2275	0,5120	0,5120	-2,7	0,0
5		-3,7146	-3,7182	0,9317	0,9400	-2,7	-8,3
2	-2,7829		-2,7809	1,2600	1,2600	-0,3	0,0
6		-1,5229	-1,5212	-2,7037	-2,7060	-0,3	2,3
4							

Krakowian D_1^{-1} wypisany z krakowianu W^{-1} odpowiadającego uprzednio dokonанemu wyrównaniu sieci reperów 1,2,3,4 odnoszący się do reperów 2,4 przyjętych do nawiązania wygląda następująco:

$$D_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1,2 & 0,4 \\ 0,4 & 0,8 \end{pmatrix}$$

Obliczamy:

$$D_1 = (D_1^{-1})^{-1} = \begin{pmatrix} 1,0 & -0,5 \\ -0,5 & 1,5 \end{pmatrix}$$

Ponieważ w toku wyrównania sieci niższego rzędu wyznaczamy rządne czterech reperów, krakowian D_2 przyjmie postać:

$$D_2 = \begin{pmatrix} 1,0 & -0,5 & 0 & 0 \\ -0,5 & 1,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Równania poprawek

2	4	5	6	dh	v
	-1	1		0	-2,7
1		-1		-8,3	-2,7
-1			1	0	-0,3
	1		-1	2,3	-0,3

Równania normalne (bez uwzgl. wpływu bł. naw.)

2		-1	-1	-8,3
	2	-1	-1	2,3
		2		8,3
			2	-2,3

Równania normalne z uwzględnieniem wpływu bł. naw.

M^{-1}

3,0	-0,5	-1,0	-1,0	-8,3	-7,8
	3,5	-1,0	-1,0	2,3	3,3
		2,0		8,3	8,3
			2,0	-2,3	-2,3

0,92	0,54	0,73	0,73
0,54	0,72	0,63	0,63
0,73	0,63	1,19	0,69
0,73	0,63	0,69	1,19

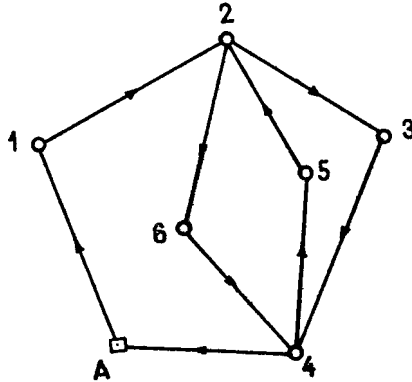
1,73	-0,29	-0,58	-0,58	-4,80	-4,51
	1,85	-0,63	-0,63	0,49	1,08
		1,18	-0,65	5,15	5,63
			0,92	-1,55	-0,63

0,58			
0,09	0,54		
0,35	0,30	0,89	
0,67	0,58	0,63	1,09

2,0 -0,9 -3,6 1,7

Sprawdzimy na przykładzie zachodzenie uprzednio omówionych zgodności wyników wyrównania przy ścisłym uwzględnieniu wpływu błędów

danych nawiązujących z wynikami wyrównania jednoczesnego. W tym celu dokonamy wyrównania sieci utworzonej przez układy z rysunków NrNr 3,4, tworzące układ jak na rysunku 5.



Rys. 5

Wykonamy następujące obliczenia:

Nr	Rzędne przybl.	Rzędne wyrówn.	Przewyższenia		Popr. v	Wyrazy wolne
			przybl.	obserw.		
A	0,0000	0,0000	0,2580	0,2580		0,0
1	0,2580	0,2605	-3,0440	-3,0440		0,0
2	-2,7860	-2,7810	-6,2180	-6,2180		0,0
3	-9,0040	-8,9988	4,7710	4,7710		0,0
4	-4,2330	-4,2276	4,2330	4,2250		8,0
A						
4			0,5120	0,5120		0,0
5	-3,7210	-3,7183	0,9350	0,9400		-5,0
2			1,2600	1,2600		0,0
6	-1,5260	-1,5213	-2,7070	-2,7060		-1,0
4						

Równania poprawek

1	2	3	4	5	6	dh	S	v
1						0	1	2,5
-1	1					0	0	2,5
	-1	1				0	0	0,2
		-1	1			0	0	0,2
			-1			8	7	2,6
				1		0	0	-2,7
	1		-1	-1		-5	-5	-2,7
	-1				1	0	0	-0,3
			1		-1	-1	-1	-0,3

Równania normalne

1	2	3	4	5	6	dh	S
2	-1					0	1
	4	-1		-1	-1	-5	-5
		2	-1			0	0
			4	-1	-1	-9	-8
				2		5	5
					2	1	1

1,41	-0,71					0,00	0,71
	1,87	-0,53		-0,53	-0,53	-2,67	-2,40
		1,31	-0,76	-0,22	-0,22	-1,09	-0,98
			1,85	-0,63	-0,63	-5,32	-4,73
				1,13	-0,65	-0,02	0,46
					0,92	-4,38	-3,46

2,5 5,0 5,2 5,4 2,7 4,7

W wyniku obliczenia odwrotności tabeli współzynniskowej układu równań normalnych otrzymano:

$$J^{-1} \begin{matrix} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix} & \left(\begin{array}{cccccc} 0,73 & 0,45 & 0,36 & 0,27 & 0,36 & 0,36 \\ 0,45 & 0,91 & 0,72 & 0,54 & 0,72 & 0,72 \\ 0,36 & 0,72 & 1,18 & 0,63 & 0,68 & 0,68 \\ 0,27 & 0,54 & 0,63 & 0,73 & 0,63 & 0,63 \\ 0,36 & 0,72 & 0,68 & 0,63 & 1,18 & 0,68 \\ 0,36 & 0,72 & 0,68 & 0,63 & 0,68 & 1,18 \end{array} \right) \end{matrix}$$

Wypiszemy z krakowianu J^{-1} elementy odnoszące się do grupy punktów 2,4,5,6 i porównamy utworzony w ten sposób krakowian z krakowianem M^{-1}

$$\left(\begin{array}{cccc} 0,91 & 0,54 & 0,72 & 0,72 \\ 0,54 & 0,73 & 0,63 & 0,63 \\ 0,72 & 0,63 & 1,18 & 0,68 \\ 0,72 & 0,63 & 0,68 & 1,18 \end{array} \right)$$

Porównanie wskazuje na zgodność w granicach dokładności rachunku. Porównanie rzędnych wyrównanych reperów 2,4,5,6 z obu wyrównań również wykazuje zgodność w granicach dokładności rachunku.

4) Wyrównanie w nawiazaniu z przybliżonym uwzględnieniem wpływu błędów elementów nawiazujących. Sposób ten opracowany został przez Prof. dr St. Hausbrandta z myślą o ograniczeniu szkodliwego wpływu błędów współrzędnych punktów nawiazania na wyniki wyrównania sieci nawiazanej. Uwzględnienie wpływu błędów współrzędnych nawiazujących polega tu na założeniu, że współrzędne te zostały „zaobserwowane” ze znaną dokład-

nością. Na tej podstawie do zrównoważonego dokładnościowo*) układu równań poprawek obserwacji bez wprowadzonych założeń stałości dopisuje się równania poprawek „obserwacji” współrzędnych punktów nawiązania w postaci:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{m_x} &= \frac{v}{m_x} \\ \frac{dy}{m_y} &= \frac{v}{m_y} \end{aligned} \quad (22)$$

Postępowanie takie praktycznie sprowadza się do wpisania w odpowiednich miejscach tabeli współczynnikowej układu równań poprawek, współczynników: $\frac{1}{m_x}$, $\frac{1}{m_y}$, zaś w odpowiednich miejscach kolumny wyrazów wolnych — zer. Następnie rozwiązuje się otrzymany układ równań poprawek poprzez ułożenie i rozwiązanie równań normalnych.

Omawiany sposób uwzględnienia wpływu błędów elementów nawiązujących pozostawia pewną swobodę w sposobie a’priorycznego ustalenia wielkości błędów współrzędnych punktów nawiązania jakie wykorzystujemy przy określeniu współczynników równań (22). Najlepiej jest przyjmować tu wielkości wynikające z analizy dokładności sieci wyższego rzędu obliczone z wzoru (2) przy wykorzystaniu $(kpk)^{-1}$ względnie r_e , r_o . W wielu jednak przypadkach, gdy nie posiadamy pełnej analizy sieci wyższego rzędu musimy posługiwać się wielkościami błędów średnich współrzędnych określonymi w przybliżeniu. Wspomniana swoboda w sposobie określenia a’piori błędów średnich współrzędnych punktów nawiązania pozwala uwzględnić również wpływ błędów spowodowanych przez ewentualne przemieszczenia się znaków pomiarowych. Wówczas błąd średni należy odpowiednio zwiększyć w stosunku do jego wielkości określonej na podstawie analizy dokładności sieci wyższego rzędu, biorąc pod uwagę oszacowaną przypuszczalną wielkość przemieszczenia znaków.

Postępowanie rachunkowe przy zastosowaniu niniejszego sposobu zilustrujemy na przykładzie liczbowym wyrównania sieci z rysunku 4.

Nr	Rzędne dane	Rzędne przybl.	Rzędne wyrówn.	Przewyższenia		Popr. v	Wyrazy wolne
				przybl.	obserw.		
4	- 4,2266		- 4,2281	0,5120	0,5120	-2,4	0,0
5		-3,7146	-3,7185	0,9317	0,9400	-2,4	-8,3
2	- 2,7829		-2,7809	1,2600	1,2600	-0,6	0,0
6		-1,5229	-1,5215	-2,7037	-2,7060	-0,6	2,3
4							

*) Równoważenie dokładnościowe układu równań poprawek polega na podzieleniu każdego równania przez błąd średni odpowiedniej obserwacji określony a’piori.

Równania poprawek

2	4	5	6	dh	S	$\frac{v}{m}$
1	-1	1		0	0	-2,4
-1		-1		-8,3	-8,3	-2,4
	1		1	0	0	-0,6
			-1	2,3	2,3	-0,6
0,91				0	0,91	1,8
	1,11			0	1,11	-1,7

Z W^{-1} otrzymujemy:

$$m_2 = \sqrt{1,2} = 1,1$$

$$m_4 = \sqrt{0,8} = 0,9$$

Równania normalne

2,84		-1,00	-1,00	-8,30	-7,46
	3,25	-1,00	-1,00	2,30	3,55
		2,00		8,30	8,30
			2,00	-2,30	-2,30

0,71	0,32	0,52	0,52
0,32	0,61	0,47	0,47
0,52	0,47	1,00	0,50
0,52	0,47	0,50	1,00

1,69		-0,59	-0,59	-4,90	-4,39
	1,80	-0,56	-0,56	1,28	1,96
		1,16	-0,58	5,30	5,88
			1,00	-1,38	-0,38

0,59			
0,00	0,56		
0,30	0,27	0,87	
0,52	0,47	0,50	1,00

2,0 -1,5 -3,9 1,4

5) Wyrównanie w nawiązaniu z uwzględnieniem wzajemnej dokładności elementów nawiązujących. Wyrównanie takie opiera się na sposobach opisanych w punktach 3), 4) jednak przy wykorzystaniu charakterystyki wzajemnej dokładności punktów nawiązania. Polega to na wstawieniu we wzorze (9) zamiast krakowianu D_2 utworzonego przy wykorzystaniu krakowianu $D_1 = ((kpk)^{-1})^{-1}$ następującego krakowianu:

$$D_3 = \begin{Bmatrix} \mathbf{r}_e^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{Bmatrix} \quad (23)$$

lub przy zastosowaniu sposobu 4) na przyjęciu wartości błędów średnich współrzędnych punktów nawiązania wynikających z \mathbf{r}_e lub \mathbf{r}_o .

Omówione postępowanie zilustrujemy ponownym wyrównaniem sieci z rysunku 4.

Obliczymy wartość \mathbf{r}_2 :

$$\begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 1,2 & 0,4 \\ 0,4 & 0,8 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix} = 1,2 = \mathbf{r}_2$$

skąd $\mathbf{r}_2^{-1} = 0,84$

Nr	Rzędne dane	Rzędne przybl.	Rzędne wyrówn.	Przewyższenia		Popr. v	Wyrazy wolne
				przybl.	obserw.		
4	-4,2266		-4,2295	0,5120	0,5120	-2,7	0,0
5		-3,7146	-3,7202	0,9317	0,9400	-2,7	-8,3
2	-2,7829		-2,7829	1,2600	1,2600	-0,3	0,0
6		-1,5229	-1,5232	-2,7037	-2,7060	-0,3	2,3
4							

Równania poprawek

4	5	6	dh	v
-1	1		0	-2,7
	-1		-8,3	-2,7
		1	0	-0,3
1		-1	2,3	-0,3

Równania normalne (bez uwzgl. wpływu bł. naw.)

2	-1	-1	2,3	2,3
	2		8,3	9,3
		2	-2,3	-1,3

Równania normalne z uwzgl. wpływu bł. naw.

2,84	-1,00	-1,00	2,30	3,14
	2,00		8,30	9,30
		2,00	-2,30	-1,30

0,53	0,27	0,27
0,27	0,64	0,13
0,27	0,13	0,64

1,69	-0,59	-0,59	1,36	1,87
	1,28	-0,27	7,12	8,13
		1,26	0,33	1,59

0,59		
0,27	0,78	
0,33	0,17	0,80

-2,9 -5,6 -0,3

6) Wyrównanie w nawiązaniu do sieci wyższego rzędu bez uwzględniania wpływu błędów punktów nawiązania. Jest to najbardziej powszechny sposób wyrównania, uzasadniony w przypadkach, gdy sieć wyższego rzędu jest wyraźnie bardziej dokładna od sieci nawiązywanej. Stosowanie tego sposobu jest szczególnie niekorzystne w przypadkach gdy punkty nawiązujące nie są odpowiednio zabezpieczone w terenie i podlegają przemieszczeniom. Wówczas całkowita wielkość przemieszczenia znaku pomiarowego wykorzystanego do nawiązania obciąża materiał obserwacyjny sieci nawiązywanej.

Wobec tego, że oszacowanie wielkości błędu średniego współrzędnej punktu nawiazania może odbywać się z dosyć dużym błędem dokonajmy próby oceny wpływu takiego lub innego oszacowania na wynik wyrównania. Opierając się na materiale liczbowym odpowiadającym sieci z rysunku 4 wykonano jej kilkakrotne wyrównanie sposobem 4) przy zastosowaniu różnych wielokrotności błędów średnich reperów 2,4. Wyniki tych wyrównań w postaci różnic rzędnych wyrównanych w stosunku do rzędnych uzyskanych z wyrównania sposobem 3) zestawione zostały w następującej tabelicy:

Tablica różnic wyników wyrównań przy różnych założeniach dokładności nawiazania w stosunku do wyników z wyrównania sposobem 3)

Założony błąd rep. nawiazania	Różnice rzędnych reperów:			
	2	4	5	6
2,0 m	0,7	-1,1	-0,2	-0,2
1,5 m	0,5	-0,9	-0,2	-0,2
1,0 m	0,0	-0,6	-0,3	-0,3
0,5 m	-1,0	0,2	-0,4	-0,4
0,0 m	-2,0	0,9	-0,6	-0,5
Bł. śr. rzędnej po wyrównaniu	2,6	2,3	3,0	3,0

Interesująco przedstawia się wynik analizy dokładności przy różnych wartościach założonych błędów średnich współrzędnych punktów nawiazania i przy różnych sposobach wyrównania:

Założenie błędu nawiazania	$\left[\frac{vv}{mm} \right]$	\sqrt{Q}			
		2	4	5	6
2,0 m	12	1,46	1,40	1,50	1,52
1,5 m	14	1,18	1,12	1,28	1,29
1,0 m	18,5	0,84	0,78	1,00	1,00
0,5 m	30	0,50	0,41	0,80	0,80
0,0 m	37	0,00	0,00	0,71	0,71
Przy użyciu $(kpk)^{-1}$	15	0,96	0,85	1,09	1,09
Przy użyciu r_2^{-1}	15	0,00	0,73	0,80	0,80

Powyższe zestawienia, dotyczące wyników analizy wpływu różnych założeń dokładnościowych w odniesieniu do elementów nawiazujących, wskazują, że problem ten nie jest obojętny dla praktyki obliczeń wyrów-

nawszych (jakkolwiek analizowany materiał nie jest typowy i nie pozwala na wyciąganie zbyt daleko idących wniosków). Wydaje się jednak, że omówione w niniejszej pracy metody wyrównań i analizowania dokładności sieci geodezyjnych zilustrowane przykładami liczbowymi, szczupłymi ze względów dydaktycznych i związanych z oszczędnością miejsca w wydawnictwie, mogą stać się podstawą do przeprowadzenia obszernych analiz o podobnym charakterze, dotyczących materiałów geodezyjnych spotykanych w praktyce. Tego rodzaju prace eksperymentalne mogą przyczynić się do wyjaśnienia szeregu wątpliwości z jakimi spotykamy się przy projektowaniu, pomiarze i wyrównywaniu sieci geodezyjnych.

IV. Poprawienie sieci wyższego rzędu z uwzględnieniem wyników wyrównania sieci nawiązanej do niej

W wyniku wyrównania sieci nawiązanej ze ścisłym uwzględnieniem wpływu błędów elementów nawiązujących otrzymaliśmy wartości $\mathbf{X}_{e-i}, \mathbf{X}_{j-u}$ współrzędnych $e-u$ identyczne ze współrzędnymi jakie otrzymalibyśmy z jednoczesnego wyrównania obu sieci. Interesuje nas obecnie sposób obliczenia poprawek do niewiadomych \mathbf{X}'_{1-d} , jakie należałoby wprowadzić w celu otrzymania wartości \mathbf{X}_{1-d} . Przyjmując: $\mathbf{X}'_{1-d} + \mathbf{X}''_{1-d} = \mathbf{X}_{1-d}$ obliczamy drugie poprawki z wzoru:

$$\mathbf{X}''_{1-d} \mathbf{A} = - \mathbf{X}''_{e-i} \mathbf{B} \quad (24)$$

Zależność powyższą możemy wyprowadzić z uprzednich wzorów w sposób następujący:

Korzystając z wzoru (15) możemy napisać:

$$\mathbf{X}_{1-d} \mathbf{A} = \mathbf{l}_1 \mathbf{a} - \mathbf{X}_{e-i} \mathbf{B} \quad (25)$$

co możemy napisać w formie:

$$\mathbf{X}_{1-d} \mathbf{A} = \mathbf{l}_1 \mathbf{a} - \mathbf{X}'_{e-i} \mathbf{B} - \mathbf{X}''_{e-i} \mathbf{B} \quad (26)$$

Korzystając z wzoru (8) możemy napisać:

$$\mathbf{X}'_{1-d} \mathbf{A} = \mathbf{l}_1 \mathbf{a} - \mathbf{X}'_{e-i} \mathbf{B} \quad (27)$$

Odejmując od (26) stronami wyrażenie (27) otrzymujemy:

$$(\mathbf{X}_{1-d} - \mathbf{X}'_{1-d}) \mathbf{A} = - \mathbf{X}''_{e-i} \mathbf{B} \quad (28)$$

Dokonując porównania stwierdzamy identyczność (24) i (28)

Praktycznie wyznaczenie \mathbf{X}''_{1-d} z wzoru (24) polega na rozwiązaniu układu równań normalnych w którym \mathbf{A} jest krakowianem tabeli współczynnikowej układu równań normalnych zaś $\mathbf{X}''_{e-i} \mathbf{B}$ krakowianem kolumnowym wyrazów wolnych tego układu.

W przypadku, gdy niewiadome $1-d$ (nie biorące bezpośredniego udziału w nawiązaniu sieci niższego rzędu) i niewiadome $e-i$ (wykorzystane do

nawiązania sieci niższego rzędu) są w układzie sieci wyższego rzędu pomieszczone pod względem kolejności występowania, należy dla określenia krakowianów **A** i **B** o znaczeniu jak we wzorze (24) poprzestawiać współczynniki krakowianu **W** z uwzględnieniem zmian numeracji niewiadomych dzielącej je na dwie wspomniane grupy.

Podane wyżej wywody wskazują na techniczną możliwość dokonania odpowiednich rachunków. Na tym miejscu nie zajmujemy się oceną opłacalności ich wykonywania a drogę postępowania wskazujemy jedynie dla podkreślenia pewnych analogii z metodą Pranis-Praniewicza grupowego wyrównania sieci geodezyjnych.

Przykład liczbowy

Biorąc pod uwagę wyniki wyrównania sieci z rysunku 4 dokonanego ze ścisłym uwzględnieniem wpływu błędów danych nawiązujących poprawimy ponownie rzędne tych reperów sieci z rysunku 3, które nie posłużyły do nawiązania (reperów NrNr 1, 3).

Z wyrównania sieci nawiązanej otrzymaliśmy $X''_2 = 2,0$, $X''_4 = -0,9$

Przestawiamy współczynniki w krakowianie **W** uwzględniając następującą nową kolejność reperów: 1, 3 oraz 2, 4. W rezultacie możemy wypisać następujące krakowiany:

$$\begin{array}{ccc} \text{Nr rep.} & 1 & 3 \\ 1 & \left\{ \begin{array}{cc} 2,0 & 0,0 \\ 0,0 & 2,0 \end{array} \right\} = \mathbf{A} \\ 3 & & \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \text{Nr rep.} & 2 & 4 \\ 2 & \left\{ \begin{array}{cc} -1 & 0 \\ -1 & -1 \end{array} \right\} = \tau \mathbf{B} \\ 4 & & \end{array}$$

W rezultacie:

$$\mathbf{X''}_{1-d} \cdot \mathbf{A} = - \mathbf{X''}_{e-i} \cdot \mathbf{B}$$

$$\begin{Bmatrix} X''_1 \\ X''_3 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} 2,0 \\ -0,9 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -2,0 \\ -1,1 \end{Bmatrix}$$

skąd otrzymujemy: $X''_1 = 1,0$, $X''_3 = 0,6$

Rzędne przybl.	X'_{1-d}	X''_{1-d}	Rzędne wyrówn.	Nr
0,2580	1,5 mm	1,0 mm	0,2605	1
-9,0040	4,7	0,6	-8,9987	3

Porównanie rzędnych otrzymanych na powyższej drodze dwukrotnego poprawienia wykazuje ich identyczność z otrzymanymi z wyr. jednoczesnego.

LITERATURA

- [1] *Banachiewicz T.*: Rachunek krakowianowy. W-wa PWN 1959
- [2] *Hausbrandt St.*: Rachunki geodezyjne. W-wa PPWK. 1953
- [3] *Hausbrandt St.*: Wyrównanie sieci trygonometrycznych z odrzuceniem założenia bezbłądności punktów nawiązania. Geodezja i Kartografia T. III z. 1 1954
- [4] *Lazzarini T.*: Wykłady Geodezji II. Łódź—Warszawa PWN. 1957
- [5] *Kasperek St. Pietrzykowski M.*: Przykład wyrównania sieci triangulacji wypełniającej z odrzuceniem założenia bezbłądności punktów nawiązania. Prace IGiK T. II z. 2 1954
- [6] *Janusz W.*: Przyczynek do zagadnienia wyrównania sieci geodezyjnych z odrzuceniem założenia bezbłądności. Przegląd Geodezyjny 2/1960

Recenzował: dr inż. Jerzy Gaździcki

Rękopis złożono w Redakcji w grudniu 1964 r.

ВОЙЦЕХ ЯНУШ

ВЛИЯНИЕ УВЯЗКИ ГЕОДЕЗИЧЕСКОЙ СЕТИ НА РЕЗУЛЬТАТЫ УРАВНИВАНИЯ И ОЦЕНКУ ТОЧНОСТИ

Резюме

В работе приводится точный метод учета, в процессе уравнивания геодезической сети, условий возникающих из ее увязки к пунктам другой сети „высшего порядка”. Этот метод приводит к получению результатов уравнивания увязываемой сети и характеристики ее точности, идентичных с результатами и характеристикой точности, которые мы бы получили, уравнивая выше упомянутую сеть совместно с сетью высшего порядка.

Применяя символику блоковых краковянов этот метод можно представить как следует:

Схематический чертеж приводит таблицу уравнений поправок наблюдений

t-d	e-i	j-u	
a	b	c	l_1
d	e	f	l_2

Неизвестные

Уравнения поправок наблюдений первой сети (высшего порядка.)

Уравнения поправок наблюдений второй группы (низшего порядка).

В заштрихованных полях имеют исключительно коэффициенты равные нулю.

Уравнивание сети высшего порядка заключается в осуществлении формулы:

$$\begin{pmatrix} X'_{1-d} \\ X'_{e-i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & \tau B \\ B & D \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} l_1 a \\ l_1 b \end{pmatrix} = X W - L_1 = 0 \quad (8)$$

где: $A = a^2$, $B = ab$, $D = b^2$, X'_{1-d} , X'_{e-i} — Уравненные значения неизвестных

Анализ точности сети высшего порядка заключается в вычислении m_0 и обратности матрицы W^{-1}

$$W^{-1} = \begin{pmatrix} A & \tau B \\ B & D \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} + a\beta & D_1^{-1}\beta \\ a & D_1^{-1} \end{pmatrix} \quad (11)$$

где: $D_1 = D - \tau B \cdot A^{-1} \tau B$ (12)

Уравнивание сети низшего порядка заключается в осуществлении формулы:

$$\begin{pmatrix} X''_{e-i} \\ X''_{j-u} \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} E & \tau F \\ F & H \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} D_1 & \tau O \\ O & O \end{pmatrix} \right) - \begin{pmatrix} l_2 c \\ l_2 d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} X'_{e-i} & E \\ X'_{e-i} & \tau F \end{pmatrix} = X.M - L_2 = 0 \quad (9)$$

где: $E = c^2$, $F = cd$, $H = d^2$, D_1 получаем путем выписки из краковяна W^{-1} краковяна D^{-1} и вычисления $D_1 = (D_1^{-1})^{-1}$

Анализ точности сети низшего порядка заключается в вычислении m_0 и M^{-1} .

Одновременное уравнивание обеих сетей заключается в осуществлении формулы:

$$\begin{pmatrix} X^{1-d} \\ X^{e-i} \\ X^{j-u} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A & \tau B & \tau O \\ B & D + E & \tau F \\ O & F & H \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} l_1 a \\ l_1 b + l_2 c \\ l_2 d \end{pmatrix} = X.J - L = 0 \quad (15)$$

Краковян J при вычислении J^{-1} можно представить в следующей форме:

$$J^{-1} = \begin{pmatrix} A & \tau B_1 \\ B_1 & K \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} + a_1 \beta_1 & K_1^{-1} \beta_1 \\ a_1 & K_1^{-1} \end{pmatrix}$$

В работе доказывается, что используя формулу (9) для уравнивания увязанной сети получается такие результаты, что справедливо:

$$\begin{aligned} X'_{e-i} + X''_{e-i} &= X_{e-i} \\ X''_{j-u} &= X_{j-u} \end{aligned} \quad (20)$$

а $M^{-1} = K_1^{-1}$

Кроме того в работе произведена дискуссия об методе оценки точ-

ностной пригодности пунктов сети высшего порядка для привязки сети низшего порядка. В рамках этой дискуссии постулируется вычисление характеристик взаимной точности увязываемых пунктов и приводятся методы таких вычислений.

Работа иллюстрируется числовыми примерами, характеризующими ход вычислений связанных с применением приводимых методов анализа точности и уравнивания сети.

WOJCIECH JANUSZ

THE INFLUENCE OF CONNECTION OF A GEODETIC NET ON THE RESULTS OF ADJUSTMENT AND ON THE ESTIMATION OF ACCURACY

Summary

In this work an exact method of taking into account in the adjustment of a geodetic net of conditions resulting from the connection of this net to that of an higher order. By use of this method we obtain the results of adjustment of the connected net and the characteristic of its accuracy identical with the results and characteristic to those we should obtain, if our net will be adjusted simultaneously and together with the net of higher order.

With the symbols of block cracovians we can illustrate the method as follows.

The figure shows schematically the table of equations of corrections to the observations.

t-d	e-i	j-u	
a	b	c	l ₁
e ₁	c	d	l ₂

Unknowns

Equations of corrections to the observations of 1st net (of the higher order)

Equations of corrections to the observations of 2nd net (of the lower order)

In the hatched quadrangles all the coefficients are 0.

The adjustment of the net of higher order consists in the realization of the formula:

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{X}'_{i-d} \\ \mathbf{X}'_{e-i} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{A} & \tau\mathbf{B} \\ \mathbf{B} & \mathbf{D} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \mathbf{l}_1 \mathbf{a} \\ \mathbf{l}_1 \mathbf{b} \end{Bmatrix} = \mathbf{X}\mathbf{W} - \mathbf{L}_1 = 0 \quad (8)$$

where: $\mathbf{A} = \mathbf{a}^2$, $\mathbf{B} = \mathbf{a} \mathbf{b}$, $\mathbf{D} = \mathbf{b}^2$, \mathbf{X}'_{i-d} , \mathbf{X}'_{e-i} — the adjusted values of unknowns.

The analysis of the accuracy of the net of higher order consists in the determination of m_o and of reciprocal \mathbf{W}^{-1}

$$\mathbf{W}^{-1} = \begin{Bmatrix} \mathbf{A} & \tau\mathbf{B} \\ \mathbf{B} & \mathbf{D} \end{Bmatrix}^{-1} = \begin{Bmatrix} \mathbf{A}^{-1} + a \cdot \beta & \mathbf{D}_1^{-1} \beta \\ a & \mathbf{D}^{-1} \end{Bmatrix} \quad (11)$$

where: $\mathbf{D}_1 = \mathbf{D} - \tau\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}^{-1} \cdot \tau\mathbf{B}$ (12)

The adjustment of the net of lower order consists in the realization of the formula:

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{X}''_{e-i} \\ \mathbf{X}''_{j-u} \end{Bmatrix} \left(\begin{Bmatrix} \mathbf{E} & \tau\mathbf{F} \\ \mathbf{F} & \mathbf{H} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \mathbf{D}_1 & \tau\mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} \end{Bmatrix} \right) - \left(\begin{Bmatrix} \mathbf{l}_2 \mathbf{c} \\ \mathbf{l}_2 \mathbf{d} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \mathbf{X}'_{e-i} \cdot \mathbf{E} \\ \mathbf{X}'_{e-i} \cdot \tau\mathbf{F} \end{Bmatrix} \right) = \mathbf{X} \cdot \mathbf{M} - \mathbf{L}_2 = 0 \quad (9)$$

where: $\mathbf{E} = \mathbf{c}^2$, $\mathbf{F} = \mathbf{c} \mathbf{d}$, $\mathbf{H} = \mathbf{d}^2$, \mathbf{D}_1 are obtained by writing of the cracovian \mathbf{D}^{-1} from the cracovian \mathbf{W}^{-1} and by solving $\mathbf{D}_1 = (\mathbf{D}^{-1})^{-1}$

The analysis of the accuracy of the net of lower order consists in the determination of m'_o and of \mathbf{M}^{-1} .

The simultaneous adjustment of both nets consists in the realization of the formula:

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{X}_{i-d} \\ \mathbf{X}_{e-i} \\ \mathbf{X}_{j-u} \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \mathbf{A} & \tau\mathbf{B} & \tau\mathbf{O} \\ \mathbf{B} & \mathbf{D} + \mathbf{E} & \tau\mathbf{F} \\ \mathbf{O} & \mathbf{F} & \mathbf{H} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \mathbf{l}_1 \mathbf{a} \\ \mathbf{l}_1 \mathbf{b} + \mathbf{l}_2 \mathbf{c} \\ \mathbf{l}_2 \mathbf{d} \end{Bmatrix} = \mathbf{X} \cdot \mathbf{J} - \mathbf{L} = 0 \quad (15)$$

The cracovian \mathbf{J} by the calculation of \mathbf{J}^{-1} may be written as follows:

$$\mathbf{J}^{-1} = \begin{Bmatrix} \mathbf{A} & \tau\mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_1 & \mathbf{K} \end{Bmatrix}^{-1} = \begin{Bmatrix} \mathbf{A}^{-1} + a_1 \beta_1 & \mathbf{K}_1^{-1} \beta_1 \\ a_1 & \mathbf{K}_1^{-1} \end{Bmatrix}$$

It is shown in this work, that by use of the formula (9) one obtains such results for the adjustment of the net to be connected, that the following concordance exists:

$$\begin{aligned} \mathbf{X}'_{e-i} + \mathbf{X}''_{e-i} &= \mathbf{X}_{e-i} \\ \mathbf{X}''_{j-u} &= \mathbf{X}_{j-u} \\ \text{and } \mathbf{M}^{-1} &= \mathbf{K}_1^{-1} \end{aligned} \quad (20)$$

The work contains also the discussion about the methods of evaluation of availability of points of higher order — due to their accuracy — for

the connection of net of the lower order. One postulates in this discussion the determination of mutual characteristics of the accuracy of points of connection; the methods of such computations are given.

The work is illustrated by numerical examples, in order to show the procedure of computations, connected with the use of methods of the determination of accuracies and adjustments of nets described.