

JERZY GAŻDZICKI

528.14:681.142.8-523.8

Kilka metod numerycznych związanych z wyrównaniem sieci geodezyjnych na maszynach elektronicznych

1. W s t ę p

Kierunki rozwoju metod numerycznych zależą przede wszystkim od istniejącego poziomu techniki obliczeniowej, od właściwości stosowanych w praktyce urządzeń rachunkowych. Jeszcze nie tak dawno obserwowaliśmy zmierzch metod numerycznych wyrosłych na gruncie rachunku logarytmicznego. Metody te uległy dość szybkiej dezaktualizacji po wprowadzeniu do powszechnego użycia arytmometrów. Specyfika rachunku arytmometrycznego, a w szczególności możliwość stosunkowo szybkiego obliczania sum iloczynów bez zapisów pośrednich, stała się przyczyną opracowania szeregu nowych metod numerycznych. Między innymi szybki rozwój rachunku krakowianowego wywodzi się z potrzeb rachunku arytmometrycznego. Właściwie każdy wzór krakowianowy może być traktowany jako przejrzysta instrukcja narzucająca kształt formularza rachunkowego i kolejność wykonywanych operacji, przy czym jako podstawową operację wyróżnia się mnożenie kolumn krakowianowych które jest przeciwieństwem obliczaniem sum iloczynów. Walory eksploatacyjne arytmometrów sprawiają, że będą one używane jeszcze przez długie lata, zwłaszcza przy rozwiązywaniu wszelkiego rodzaju drobnych zadań rachunkowych. W związku z tym będą się również rozwijały metody numeryczne bezpośrednio dostosowane do tej techniki rachunkowej.

Jednakże większe zadania rachunkowe są już obecnie rozwiązywane niemal wyłącznie na maszynach elektronicznych. Różnorodne zastosowania maszyn elektronicznych, nawet w tych dziedzinach, w których przedtem technika numeryczna nie była w ogóle stosowana, sprawiają, że metody numeryczne są dziś przedmiotem żywego zainteresowania. Powstały i szybko się rozwijają nowe metody, nowe algorytmy, przystosowane do szczególnych właściwości eksploatacyjnych maszyn elektronicznych.

Na czym polega odmienność tych nowych metod? Udzielenie zwięzłej odpowiedzi na to pytanie jest dość trudne, niemniej jednak można się pokusić o podanie pewnych cech charakterystycznych, predestynujących dane metody numeryczne do rachunku na maszynach elektronowych. Tak więc metody te powinny być przede wszystkim proste, o małej liczbie wzorów, łatwe do zaprogramowania i późniejszego stosowania praktycznego. Jako działanie typowe dla maszyny elektronicznej należy uważać cykliczne realizowanie tych samych prostych wzorów przy zmieniających się w sposób regularny argumentach. Dalej — metody te powinny być uniwersalne, tzn. powinny się nadawać do rozwiązywania różnorodnych zadań, należących do tej samej klasy zagadnień. Istotne jest również oszczędne wykorzystywanie miejsc pamięci maszyny, zwłaszcza jeśli idzie o wyniki pośrednie. Metoda, która wymaga zapamiętywania znacznej liczby wyników pośrednich nie jest odpowiednia dla maszyny elektronicznej i to zarówno ze względu na wynikające stąd ograniczenia wielkości zadań rozwiązywalnych na danej maszynie, jak też ze względu na przedłużenie czasu rachunku przy wykorzystywaniu dowolnych pamięci pomocniczych.

Jak w świetle powyższych uwag przedstawia się tradycyjny schemat rachunkowy stosowany przy rozwiązywaniu podstawowego zadania obliczeń geodezyjnych: wyrównania układów obserwacyjnych metodą spozstrzeń pośrednich? W schemacie tym, poza obliczeniami wstępnymi i kontrolnymi, można wydzielić następujące 4 etapy rachunku:

- a) ułożenie równań poprawek,
- b) ułożenie równań normalnych,
- c) rozwiązanie równań normalnych,
- d) obliczenie poprawek.

Obliczenia są tu różnorodne, o niewielkim stopniu powtarzalności, a wzory dość skomplikowane. Opracowanie programów według tego schematu jest pracochłonne, przy czym zarówno programy jak też wyniki pośrednie rachunku zajmują znaczną liczbę miejsc pamięci [9], co utrudnia i przedłuża wyrównywanie większych układów obserwacyjnych.

W pracy niniejszej omawia się kilka nowych metod numerycznych związanych z wyrównaniem sieci geodezyjnych. Wspólną cechą tych metod jest ich przystosowanie do rachunku na maszynach elektronicznych oraz — ich całkowita nieprzydatność do rachunku arytmometrycznego. Autor zwraca na to wyraźnie uwagę dla uniknięcia ewentualnych nieporozumień.

W następnym rozdziale wyprowadza się podstawowe wzory metody spozstrzeń pośrednich. Sposób ujęcia tych wzorów, odbiegający od powszechnie przyjętego, dostosowany został do treści dalszych rozdziałów,

przedstawiających między innymi nowe metody iteracyjnego wyrównania sieci geodezyjnych. Na końcu pracy podana została prosta metoda obliczenia odwrotności krakowianów symetrycznych, istotna w tych przypadkach, gdy prócz wyrównania należy przeprowadzić analizę dokładnościową wyników tego wyrównania.

2. Metoda spostrzeżeń pośrednich

Metoda najmniejszych kwadratów w jej ujęciu zwanym metodą spostrzeżeń pośrednich zajmuje się wyznaczaniem wartości r niezależnych zmiennych $x, y \dots u$ na podstawie podlegających pomiarowi wielkości $L_1, L_2 \dots L_n$, gdzie $n \geq r$. Pomiedzy niewiadomymi $x, y \dots u$ i wielkościami mierzonymi istnieją związki funkcyjne:

$$L_i = L_i(x, y \dots u) \quad i = 1, 2 \dots n \quad (1)$$

Wartości L_i obliczane w zależności od $x, y \dots u$ będą z reguły różne od wartości zaobserwowanych $L_i^{obs.}$, co wynika z istnienia nieuniknionych błędów pomiarowych; oznaczając różnice wartości obliczanych i obserwowanych przez v_i ; możemy napisać tzw. równania poprawek:

$$v_i = L_i - L_i^{obs.} = L_i(x, y \dots u) - L_i^{obs.} \quad (2)$$

Wyrównanie metodą spostrzeżeń pośrednich polega na obliczeniu takich wartości zmiennych $x, y \dots u$, przy których spełniony jest warunek

$$[vv] = W = W(x, y \dots u) = \min., \quad (3)$$

słuszny dla obserwacji jednakowo dokładnych, bądź też warunek

$$\left[\frac{vv}{mm} \right] = \min. \quad (4)$$

obowiązujący w przypadku ogólniejszym, dotyczącym wyrównania obserwacji niejednakowo dokładnych o błędach średnich m_i . Ponieważ warunek (4) daje się łatwo sprowadzić do prostszej postaci (3) przez wprowadzenie poprawek $v'_i = \frac{v_i}{m_i}$, w dalszym ciągu będziemy rozważali przede wszystkim wyrównanie obserwacji jednakowo dokładnych.

Rozwińmy funkcję $W = W(x, y \dots u)$ w szereg Taylora w otoczeniu punktu $(x_0, y_0 \dots u_0)$. Przy założeniu, że przyrosty zmiennych niezależnych $dx, dy \dots du$ są dostatecznie małe będziemy mogli napisać:

$$W(x_0 + dx, y_0 + dy, \dots u_0 + du) = W_0 + \frac{\partial W_0}{\partial x} dx + \frac{\partial W_0}{\partial y} dy + \dots + \frac{\partial W_0}{\partial u} du +$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 W_0}{\partial x \partial x} dx + \frac{\partial^2 W_0}{\partial x \partial y} dy + \dots + \frac{\partial^2 W_0}{\partial x \partial u} du \right] dx + \\
 & + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 W_0}{\partial y \partial x} dx + \frac{\partial^2 W_0}{\partial y \partial y} dy + \dots + \frac{\partial^2 W_0}{\partial y \partial u} du \right] dy + \\
 & \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\
 & + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 W_0}{\partial u \partial x} dx + \frac{\partial^2 W_0}{\partial u \partial y} dy + \dots + \frac{\partial^2 W_0}{\partial u \partial u} du \right] du,
 \end{aligned} \tag{5}$$

gdzie $W_0, \frac{\partial W_0}{\partial x}, \frac{\partial^2 W_0}{\partial x \partial x}$ itd. oznaczają odpowiednio wartości funkcji W oraz jej pierwszych i drugich pochodnych cząstkowych obliczone w punkcie $(x_0, y_0 \dots u_0)$.

Wzór (5) przedstawimy w postaci krakowianowej:

$$W = W_0 + \mathbf{W}'_0 \cdot \mathbf{dx} + \frac{1}{2} \mathbf{dx} \cdot \mathbf{W}''_0 \cdot \mathbf{dx}, \tag{6}$$

gdzie \mathbf{dx} oznacza jednokolumnowy krakowian przyrostów zmiennych niezależnych:

$$\mathbf{dx} = \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ \dots \\ du \end{pmatrix},$$

\mathbf{W}' — jednokolumnowy krakowian pierwszych pochodnych:

$$\mathbf{W}'_0 = \begin{pmatrix} \frac{\partial W_0}{\partial x} \\ \frac{\partial W_0}{\partial y} \\ \dots \\ \frac{\partial W_0}{\partial u} \end{pmatrix},$$

zaś \mathbf{W}'' — kwadrasty krakowian drugich pochodnych:

$$\mathbf{W}''_0 = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 W_0}{\partial x \partial x} & \frac{\partial^2 W_0}{\partial y \partial x} & \dots & \frac{\partial^2 W_0}{\partial u \partial x} \\ \frac{\partial^2 W_0}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 W_0}{\partial y \partial y} & \dots & \frac{\partial^2 W_0}{\partial u \partial y} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial^2 W_0}{\partial x \partial u} & \frac{\partial^2 W_0}{\partial y \partial u} & \dots & \frac{\partial^2 W_0}{\partial u \partial u} \end{pmatrix}.$$

Krakowian W_0'' jest krakowianem symetrycznym, ponieważ drugie pochodne różniące się tylko kolejnością różniczkowania są sobie równe,

$$\text{np.: } \frac{\partial W}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 W}{\partial y \partial x}.$$

Zwróćmy teraz uwagę na fakt, że elementy pierwszej kolumny krakowianu W_0'' są pierwszymi pochodnymi cząstkowymi pochodnej $\frac{\partial W}{\partial x}$, ana-

logicznie elementy drugiej kolumny są pierwszymi pochodnej $\frac{\partial W}{\partial y}$ itd.

W związku z tym, mnożąc kolumnę dx przez kolejne kolumny krakowianu W_0'' będziemy otrzymywali różniczki zupełne pochodnych $\frac{\partial W}{\partial x}$, $\frac{\partial W}{\partial y}$ itd. Utożsamiając przyrosty pochodnych cząstkowych z ich różniczkami zupełnymi będziemy mogli zatem napisać wzór

$$W' = W_0' + dx \cdot W_0, \quad (7)$$

wyrażający wartości pierwszych pochodnych w punkcie $(x_0 + dx, y_0 + dy \dots u_0 + du)$.

Założmy, że punkt $(X, Y \dots U)$ spełniający warunek minimum (3) leży w otoczeniu punktu $(x_0, y_0 \dots u_0)$, wówczas wyrównanie sprowadza się do znalezienia takich przyrostów $dx, dy \dots du$, które dodane do wartości $x_0, y_0 \dots u_0$ dadzą nam wartości $X, Y \dots U$:

$$\begin{aligned} X &= x_0 + dx \\ Y &= y_0 + dy \\ \dots & \dots \dots \\ U &= u_0 + du \end{aligned}$$

Poszukiwane przyrosty $dx, dy \dots du$ oblicza się przyrównując do zera pierwsze pochodne funkcji W . Na podstawie wzoru (7) mamy od razu:

$$dx \cdot W_0' + W_0' = 0 \quad (8)$$

Równanie krakowianowe (8) przedstawia układ r symetrycznych równań liniowych o r niewiadomych:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 W_0}{\partial x \partial x} dx + \frac{\partial^2 W_0}{\partial x \partial y} dy + \dots + \frac{\partial^2 W_0}{\partial x \partial u} du + \frac{\partial W_0}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial^2 W_0}{\partial y \partial x} dx + \frac{\partial^2 W_0}{\partial y \partial y} dy + \dots + \frac{\partial^2 W_0}{\partial y \partial u} du + \frac{\partial W_0}{\partial y} &= 0 \\ \dots & \dots \dots \dots \dots \\ \frac{\partial^2 W_0}{\partial u \partial x} dx + \frac{\partial^2 W_0}{\partial u \partial y} dy + \dots + \frac{\partial^2 W_0}{\partial u \partial u} du + \frac{\partial W_0}{\partial u} &= 0 \end{aligned} \quad (9)$$

Układ ten jest równoważny oczywiście układowi równań normalnych:

$$\begin{aligned} [aa]dx + [ab]dy + \dots + [aq]du + [al] &= 0 \\ [ba]dx + [bb]dy + \dots + [bq]du + [bl] &= 0 \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots & \\ [qa]dx + [qb]dy + \dots + [qq]du + [ql] &= 0 \end{aligned} \tag{10}$$

gdzie $a_i, b_i \dots q_i$ są współczynnikami zaś l_i wyrazami wolnymi równań poprawek

$$v_i = a_i dx + b_i dy + \dots + q_i du + l_i \quad i = 1, 2 \dots n \tag{11}$$

powstałych przez sprowadzenie równań (2) do postaci liniowej.

Dla wykazania związku istniejącego między współczynnikami i wyrazami wolnymi układu równań normalnych oraz pochodnymi cząstkowymi funkcji W przedstawimy tę funkcję w postaci:

$$W = [vv] = [(adx + bdy + \dots + qdu + l)^2] \tag{12}$$

Obliczając pierwsze pochodne cząstkowe otrzymamy kolejno:

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial x} &= 2[a(adx + bdy + \dots + qdu + l)], \\ \frac{\partial W}{\partial y} &= 2[b(adx + bdy + \dots + qdu + l)], \\ \dots & \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ \frac{\partial W}{\partial u} &= 2[q(adx + bdy + \dots + qdu + l)], \end{aligned}$$

W punkcie $(x_0, y_0 \dots u_0)$ przyrosty $dx, dy \dots du$ są równe zeru, mamy zatem:

$$\frac{\partial W_0}{\partial x} = 2[al], \quad \frac{\partial W_0}{\partial y} = 2[bl] \dots \frac{\partial W_0}{\partial u} = 2[ql] \tag{13}$$

Z kolei obliczając drugie pochodne cząstkowe otrzymamy:

$$\frac{\partial^2 W_0}{\partial x \partial x} = 2[aa], \quad \frac{\partial^2 W_0}{\partial x \partial y} = 2[ab] \text{ itd.} \tag{14}$$

Udowodnimy teraz, że funkcja W osiąga rzeczywiście minimum w punkcie, dla którego jej pierwsze pochodne są równe zeru. Przeprowadzenie dowodu sprowadza się do wykazania, że dla dowolnych wartości $dX, dY \dots dU$ w obszarze otaczającym punkt $X, Y \dots U$ spełniona jest nierówność:

$$W(X + dX, Y + dY \dots U + dU) > W(X, Y \dots U), \tag{15}$$

gdzie $(X, Y \dots U)$ — punkt, dla którego pierwsze pochodne są równe zeru.

Na podstawie wzoru (6) napiszemy od razu:

$$W(X+dX, Y+dY \dots U+dU) = W(X, Y \dots U) + \frac{1}{2} \mathbf{dX} \cdot \mathbf{W}'' \cdot \mathbf{dX}$$

Tak więc, aby wykazać słuszność nierówności (15) należy udowodnić, że wyrażenie $\mathbf{dX} \cdot \mathbf{W}'' \cdot \mathbf{dX}$ jest dodatnie dla przyrostów $dX, dY \dots dU$ nie równych jednocześnie zeru.

Krakowian \mathbf{W}'' , podobnie jak i krakowian współczynników układu równań normalnych, posiada pierwiastek o elementach rzeczywistych, możemy zatem napisać:

$$\mathbf{dX} \cdot \mathbf{W}'' \cdot \mathbf{dX} = \mathbf{dX}(\sqrt{\overline{\mathbf{W}''}} \cdot \sqrt{\overline{\mathbf{W}''}}) \mathbf{dX}.$$

Stosując kolejno twierdzenie dysocjatywne i asocjatywne otrzymamy:

$$\mathbf{dX}_\tau \sqrt{\overline{\mathbf{W}''}} \sqrt{\overline{\mathbf{W}''}} \mathbf{dX} = (\mathbf{dX}_\tau \sqrt{\overline{\mathbf{W}''}})(\mathbf{dX}_\tau \sqrt{\overline{\mathbf{W}''}}) = (\mathbf{dX}_\tau \sqrt{\overline{\mathbf{W}''}})^2$$

Jak widać, wyrażenie $\mathbf{dX} \cdot \mathbf{W}'' \cdot \mathbf{dX}$ jest kwadratem krakowianu jednokolumnowego i jest wobec tego dodatnie, co należało wykazać.

Na zakończenie podamy kilka wzorów wyrażających minimalną wartość funkcji W . Wzory te uzyskamy łatwo wychodząc z wzoru (6) i uwzględniając równanie (8):

$$W_{min.} = W_0 - \frac{1}{2} \mathbf{dx} \cdot \mathbf{W}'_0 \cdot \mathbf{dx} \quad (16)$$

$$W_{min.} = W_0 + \frac{1}{2} \mathbf{W}'_0 \cdot \mathbf{dx} \quad (17)$$

$$W_{min.} = W_0 - \frac{1}{2} \mathbf{W}'_0 (\mathbf{W}'_0)^{-1} \mathbf{W}'_0 \quad (18)$$

3. Obliczanie pierwszych i drugich pochodnych funkcji W

Wprowadzone w poprzednim rozdziale wzory pozostaną tak długo wzorami o charakterze wyłącznie teoretycznym, dopóki nie będą podane sposoby obliczania pierwszych i drugich pochodnych funkcji W . Zagadnieniem obliczania tych pochodnych zajmiemy się obecnie.

Jak wiadomo, pierwszą pochodną cząstkową funkcji $F = F(x, y \dots u)$ względem jednej ze zmiennych, np. x definiuje się jako granicę stosunku przyrostu funkcji do przyrostu zmiennej niezależnej:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{F(x+\Delta, y \dots u) - F(x, y \dots u)}{\Delta}$$

Analogicznie definiuje się drugie pochodne cząstkowe: są to granice stosunków przyrostów pierwszych pochodnych do przyrostu zmiennej niezależnej.

Przy dostatecznie małym przyroście Δ pochodne cząstkowe mogą być obliczane bezpośrednio jako stosunki przyrostu funkcji bądź pochodnych do przyrostu zmiennej niezależnej. Tego rodzaju obliczenie pochodnych cząstkowych funkcji W w punkcie $(x_0, y_0, z_0 \dots u_0)$ opiera się na obliczeniu szeregu wartości tej funkcji dla wartości zmiennych niezależnych powstałych z wartości $x_0, y_0, z_0 \dots u_0$ przez dodawanie bądź odejmowanie przyrostu Δ . Wprowadźmy następujące oznaczenia:

$$\begin{aligned} W_x &= W(x_0 + \Delta, y_0, z_0 \dots u_0), & W_y &= W(x_0, y_0 + \Delta, z_0 \dots u_0) \text{ itd.} \\ W_{\bar{x}} &= W(x_0 - \Delta, y_0, z_0 \dots u_0), & W_{\bar{y}} &= W(x_0, y_0 - \Delta, z_0 \dots u_0) \text{ itd.} \\ W_{xy} &= W(x_0 + \Delta, y_0 + \Delta, z_0 \dots u_0), & W_{xz} &= W(x_0 + \Delta, y_0, z_0 + \Delta, \dots u_0) \text{ itd.} \end{aligned}$$

Tak więc przez W_x bądź $W_{\bar{x}}$ będziemy rozumieli wartości funkcji W obliczone na podstawie $x = x_0 + \Delta$ bądź $x = x_0 - \Delta$ przy niezmiennych wartościach pozostałych zmiennych niezależnych $y_0, z_0 \dots u_0$, analogicznie przez W_{xy} będziemy rozumieli wartość funkcji W obliczoną na podstawie $x = x_0 + \Delta, y = y_0 + \Delta$ przy niezmiennych wartościach pozostałych zmiennych niezależnych $z_0 \dots u_0$ itd.

Pamiętając o tych oznaczeniach, jak również o stosowanym już uprzednio oznaczeniu $W_0 = W(x_0, y_0, z_0 \dots u_0)$ będziemy mogli napisać interesujące nas wzory na pochodne cząstkowe funkcji $W = [v]$ w postaci:

$$\frac{\partial W_0}{\partial x} = \frac{W_x - W_{\bar{x}}}{2\Delta}, \quad \frac{\partial W_0}{\partial y} = \frac{W_y - W_{\bar{y}}}{2\Delta} \text{ itd.} \quad (19)$$

$$\frac{\partial^2 W_0}{\partial x \partial x} = \frac{(W_x - W_0) - (W_0 - W_{\bar{x}})}{\Delta^2} \text{ itd.} \quad (20)$$

$$\frac{\partial^2 W_0}{\partial x \partial y} = \frac{(W_{xy} - W_y) - (W_x - W_0)}{\Delta^2} \text{ itd.} \quad (21)$$

Słuszność tych wzorów wynika bezpośrednio z definicji pochodnych cząstkowych pierwszego i drugiego rzędu.

Weźmy pod uwagę dla przykładu wyrównanie układu n obserwacji z 2 niewiadomymi. W tym przypadku należy obliczyć 2 pochodne cząstkowe pierwszego rzędu wg wzoru (19) oraz 3 pochodne cząstkowe drugiego rzędu wg wzorów (20) i (21):

$$\frac{\partial W_0}{\partial x}, \quad \frac{\partial W_0}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2 W_0}{\partial x \partial x}, \quad \frac{\partial^2 W_0}{\partial y \partial y}, \quad \frac{\partial^2 W_0}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 W_0}{\partial y \partial x}.$$

Dla obliczenia 5 podanych pochodnych cząstkowych niezbędne jest obliczenie 5 wartości funkcji W (nie licząc wartości W_0):

$$W_x, W_y, W_{\bar{x}}, W_{\bar{y}}, W_{xy}.$$

Ogólnie rzecz biorąc, na podstawie n wartości funkcji W można obliczyć n pochodnych cząstkowych.

Wartość Δ należy wybierać z przedziału $\Delta_{min.} < \Delta < \Delta_{max.}$, przy czym należy się kierować podanymi poniżej wskazówkami.

1. Górna granica przedziału $\Delta_{max.}$ wynika z utożsamiania w trakcie rachunku przyrostów funkcji z ich różniczkami zupełnymi. Przy ustalaniu tej granicy można się posługiwać wzorami J. Panasiuka [18].

2. Dolna granica przedziału $\Delta_{min.}$ wynika z wymagań odnośnie dokładności rachunku. Wraz ze wzrostem Δ zwiększa się ilość cyfr znaczących w przyrostach funkcji W występujących we wzorach (19) — (21) i tym samym rośnie dokładność rachunku.

W praktyce ustalanie wartości Δ nie sprawia żadnych kłopotów, ze względu na znaczną dokładność rachunku maszyn elektronowych.

Wzory (19) — (21) są niewątpliwie dość kłopotliwe w realizacji praktycznej. Obliczanie wartości funkcji $W = [vv]$ sprowadzające się do wielokrotnego obliczania poprawek v według wzoru (2)

$$v_i = L_i(x, y \dots u) - l_i^{obs.}$$

wymaga wykonywania wielu operacji rachunkowych. W związku z tym należy się zastanowić, czy stosowanie wzorów (19) — (21) jest celowe.

Zauważmy najpierw, że we wzorach tych występują różnice wartości funkcji $W = [vv]$, co pozwala na ograniczenie ilości obliczanych poprawek v_i : wystarczy obliczać tylko te poprawki, które są zależne od modyfikowanej zmiennej, np. obliczając różnice $W_x - W_{\bar{x}}$, $W_x - W_0$ wystarczy obliczać poprawki zależne od zmiennej x .

Istotne zmniejszenie pracochłonności uzyskamy jednak dopiero przez zastosowanie wyprowadzonych dalej wzorów ułatwiających obliczanie poprawek podstawowych obserwacji geodezyjnych.

4. Wyrównanie funkcji obserwacji

Niech dany będzie układ obserwacji $L_i^{obs.}$ ($i = 1, 2 \dots n$) o błędach średnich m_i . Wykażemy, że wyrównanie tego układu metodą najmniejszych kwadratów jest równoważne wyrównaniu układu funkcji obserwacji

$$F_i(L_i^{obs.}) \text{ o błędach średnich } M_i = \frac{dF_i}{dL_i} \cdot m_i.$$

Wyrównanie danego układu obserwacji niejednakowo dokładnych sprowadza się do wyrównania układu obserwacji jednakowo dokładnych o poprawkach $\frac{v_i}{m_i}$. Możemy zatem napisać dla każdego z układów:

$$\frac{v_i}{m_i} = \frac{L_i(x, y \dots u) - L_i^{obs.}}{m_i} = \frac{L_i - L_i^{obs.}}{m_i}, \quad (22)$$

$$\frac{V_i}{M_i} = \frac{F_i(L_i) - F_i(L_i^{obs.})}{\frac{dF_i}{dL_i} m_i}, \quad (23)$$

gdzie v_i oraz V_i są odpowiednio poprawkami obserwacji oraz funkcji obserwacji.

Wyrównanie tych układów będzie równoważne, tzn. będzie prowadziło do tych samych wyników, jeśli ilorazy $\frac{v_i}{m_i}$ oraz $\frac{V_i}{M_i}$ będą sobie równe. Rzeczywiście, dla niewielkich poprawek $v_i = L_i - L_i^{obs.}$ przyrost funkcji $F_i(L_i) - F_i(L_i^{obs.})$ występujący w liczniku wzoru (23) możemy zastąpić różniczką $\frac{dF_i}{dL_i}(L_i - L_i^{obs.})$, wobec czego $\frac{V_i}{M_i} = \frac{v_i}{m_i}$. (Oczywiście zakłada się tu, że pochodne $\frac{dF_i}{dL_i}$ istnieją).

Podane powyżej dość interesujące twierdzenie pozwala na zastąpienie wyrównania obserwacji wyrównaniem ich funkcji, np. zamiast wyrównania kątów można by wprowadzić wyrównanie funkcji trygonometrycznych, przy czym należało by wówczas mówić o „równaniach poprawek funkcji trygonometrycznych” itd. Aby jednak nie wprowadzać nowych i chyba zbędnych terminów zauważmy, że zagadnienie sprowadza się de facto do sposobu obliczenia przyrostów zmiennej L , który polega tu na zastosowaniu zależności różniczkowej:

$$\Delta L = \frac{\Delta F}{\frac{dF}{dL}} \quad (24)$$

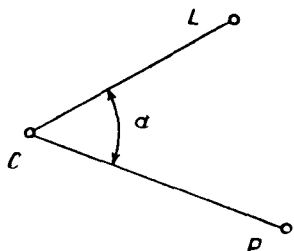
Z zależności tej będziemy korzystać przedstawiając równania poprawek obserwacji geodezyjnych w postaci dogodnej do wielokrotnego obliczania wartości funkcji $W = [vv]$.

5. Równania poprawek podstawowych obserwacji geodezyjnych

Równanie poprawki obserwacji kątowej. Przypuśćmy, że kąt α pomierzony został na punkcie C , przy czym celowano na

punkt L położony na lewym ramieniu kąta oraz na punkt P położony na prawym ramieniu tegoż kąta.

Równanie poprawki kąta α zapiszemy w postaci:



$$v_a = \arctg \frac{f_1}{f_2} - \alpha, \quad (25)$$

gdzie

$$f_1 = \Delta x_L \Delta y_P - \Delta x_P \Delta y_L,$$

$$f_2 = \Delta x_L \Delta x_P + \Delta y_L \Delta y_P,$$

zaś

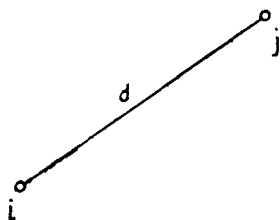
$$\Delta x_L = x_L - x_C, \quad \Delta y_L = y_L - y_C, \quad \Delta x_P = x_P - x_C, \quad \Delta y_P = y_P - y_C.$$

Powyższe równanie łatwo przekształcimy na podstawie zależności (24):

$$v_a = \begin{cases} \frac{\frac{f_1}{f_2} - \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} & \text{gdyn} |\operatorname{tg} \alpha| < 1 \\ \frac{\frac{f_2}{f_1} - \operatorname{ctg} \alpha}{-(1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha)} & \text{gdyn} |\operatorname{tg} \alpha| \geq 1 \end{cases} \quad (26)$$

Jak widać, realizując wielokrotnie wzór (26) dla różnych wartości współrzędnych, obliczamy ilorazy $\frac{f_1}{f_2}$ bądź $\frac{f_2}{f_1}$, natomiast realizacja wzoru (25) wymaga obliczania wartości $\arctg \frac{f_1}{f_2}$, co jest znacznie bardziej pracochłonne.

Równanie poprawki obserwacji liniowej. Pomędzy punktami i, j pomierzono odległość d . Poprawka tej odległości wyraża się wzorem:



$$v_d = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2} - d$$

Wykorzystując zależność (24) dla $F = d^2$ napiszemy od razu:

$$v_d = \frac{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 - d^2}{2d} \quad (27)$$

Na podstawie równania (27) poprawki v_d otrzymujemy bez obliczania pierwiastka kwadratowego.

Równanie poprawki obserwacji kierunkowej. Przy-
 puśćmy, że na punkcie i pomierzone zostały z jednakową dokładnością
 kierunki na punkty $1, 2 \dots n$.
 Oznaczmy przez β pomierzone
 wartości kierunków, zaś przez
 φ — azymuty (kąty kierun-
 kowe).

Wyrównaną wartość pomie-
 rzanego kierunku $\beta_k + v_k$ mo-
 żemy przedstawić w postaci
 różnicy azymutów (patrz rysun-
 nek):

$$\beta_k + v_k = \varphi_k - \varphi_1 \quad k = 1, 2 \dots n$$

i wobec tego:

$$v_k = (\varphi_k - \beta_k) - \varphi_1 \quad (28)$$

Sumując równania (28) utworzone dla wszystkich pomierzonych
 na punkcie i kierunków otrzymamy:

$$[v] = [\varphi - \beta] - n\varphi_1$$

Uwzględniając warunek $[v] = 0$ i odejmując podzielone przez n rów-
 nanie sumowe od równań (28) będziemy mieli:

$$v_k = (\varphi_k - \beta_k) - \frac{[\varphi - \beta]}{n} \quad (29)$$

Załóżmy teraz, że kierunki β zostały „zorientowane” na podstawie
 przybliżonej wartości azymutu pierwszego kierunku, tj. że zostały obli-
 czone wartości

$$\varphi'_k = \beta_k + \varphi_1^{\text{przybl.}} \quad (30)$$

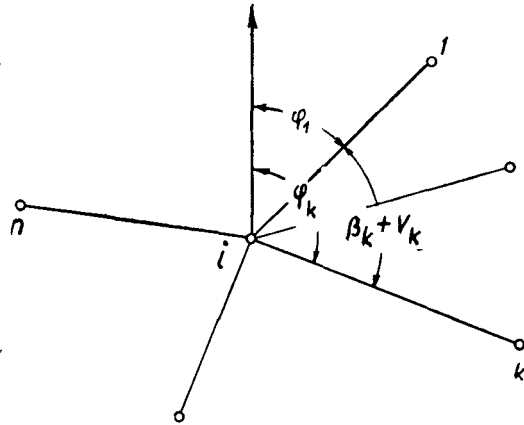
Łatwo sprawdzić, że równanie (29) jest spełnione również dla kierun-
 ków zorientowanych:

$$v_k = (\varphi_k - \varphi'_k) - \frac{[\varphi - \varphi']}{n} \quad (31)$$

Aby uniknąć wielokrotnego obliczania azymutów ze współrzędnych
 wg wzoru:

$$\varphi_k = \text{arctg} \frac{y_k - y_i}{x_k - x_i},$$

należy stosować do obliczenia różnic $\varphi_k - \varphi'_k$ wzór następujący:



$$\varphi_k - \varphi'_k = \begin{cases} \frac{y_k - y_i - \operatorname{tg} \varphi'_k}{x_k - x_i} & \text{gd}y |\operatorname{tg} \varphi'_k| < 1 \\ \frac{x_k - x_i - \operatorname{ctg} \varphi'_k}{y_k - y_i} & \text{gd}y |\operatorname{tg} \varphi'_k| \geq 1 \end{cases} \quad (32)$$

Jak z tego widać rachunek poprawek v_k wygodnie jest wykonywać w następującej kolejności:

a) obliczenie na podstawie wzoru (32) różnic $\varphi_k - \varphi'_k$ dla wszystkich kierunków pomierzonych na punkcie i ,

b) utworzenie średniej arytmetycznej z tych różnic,

c) odjęcie utworzonej średniej arytmetycznej od różnic $\varphi_k - \varphi'_k$ zgodnie z wzorem (31).

6. Metody iteracyjne

Wzory (19) — (21) pozwalają na obliczanie pierwszych i drugich pochodnych funkcji $W = [vv]$, co jest równoznaczne z obliczeniem współczynników i wyrazów wolnych równań normalnych, przy czym pominięty zostaje przejściowy i nieistotny etap rachunku, jakim jest utworzenie układu równań poprawek doprowadzonych do postaci liniowej:

$$v_i = a_i dx + b_i dy + \dots + q_i du + l_i \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Jednakże zarówno algorytm ułożenia jak i rozwiązania układu równań normalnych jest dość skomplikowany, w związku z czym na szczególną uwagę zasługują metody iteracyjne, które w oparciu o wzory (19) — (21) sprowadzają całość zadania wyrównawczego do wielokrotnego obliczania wartości funkcji $W = [vv]$ *).

Iteracja pojedynczych niewiadomych. Iteracja ta polega na znalezieniu minimum funkcji wielu zmiennych:

$$[vv] = W(x_1, x_2, \dots, x_r) = \min.$$

poprzez wielokrotne obliczanie minimum tej funkcji jako funkcji jednej

*) Opisywanych tu metod nie należy stosować do wyrównania obserwacji niwelacyjnych i grawimetrycznych, charakteryzujących się szczególnie prostą postacią równań poprawek. Iteracyjne wyrównanie tych sieci przedstawione zostało w jednej z poprzednich prac autora [10].

tylko zmiennej: najpierw zmiennej x_1 , potem zmiennej x_2 itd., wreszcie zmiennej x_r , przy czym pozostałe zmienne traktuje się jako stałe:

$$\begin{aligned} [vv] &= W(x_1 \dots \dots) = \min. \\ [vv] &= W(\dots x_2 \dots) = \min. \\ &\dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ [vv] &= W(\dots \dots x_r) = \min. \end{aligned} \tag{33}$$

W procesie iteracyjnym zakłada się pewne początkowe przybliżenia niewiadomych:

$$x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \quad x_r^{(0)},$$

a potem oblicza się kolejno na podstawie cyklicznie realizowanych warunków (33) —

- pierwsze przybliżenia $x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \dots x_r^{(1)}$,
- drugie przybliżenia $x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, \dots x_r^{(2)}$,
- dalej przybliżenia $x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots x_r^{(k)}$,
- oraz przybliżenia $x_1^{(k+1)}, x_2^{(k+1)} \dots x_r^{(k+1)}$ itd. itd.

Przebieg rachunku iteracyjnego przedstawiony jest podanymi niżej wzorami wynikającymi z warunków (33) i wzoru (8):

$$x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} + dx_i^{(k)}, \tag{34}$$

$$dx_i^{(k)} = - \frac{\frac{\partial W^{(k)}}{\partial x_i}}{\frac{\partial^2 W^{(k)}}{\partial x_i \partial x_i}}, \quad i = 1, 2 \dots r \tag{35}$$

gdzie przez $\frac{\partial W^{(k)}}{\partial x_i}$, $\frac{\partial^2 W^{(k)}}{\partial x_i \partial x_i}$ oznaczyliśmy pochodne cząstkowe funkcji W obliczone na podstawie wartości:

$$x_1^{(k+1)}, \dots x_{i-1}^{(k+1)}, \dots x_i^{(k)}, \dots x_r^{(k)} \tag{36}$$

tj. obliczone dla ostatnio uzyskanych przybliżeń; dla początkowych $i - 1$ niewiadomych są to już przybliżenia $(k + 1)$, dla pozostałych niewiadomych — przybliżenia (k) .

Przy realizacji wzoru (35) korzystamy z wzorów (19) i (20), w oparciu o nie możemy napisać:

$$dx_i^{(k)} = \frac{\Delta}{2} \frac{W_{x_i}^{(k)} - W_{x_i}^{(k)}}{W_{x_i}^{(k)} - 2W_{0_i}^{(k)} + W_{x_i}^{(k)}} \tag{37}$$

gdzie przez $W_{x_i}^{(k)}$, $W_{x_i}^{(k)}$, $W_{0_i}^{(k)}$, oznaczyliśmy wartości funkcji $W = [vv]$ obliczone na podstawie ostatnio uzyskanych przybliżeń niewiadomych (36):

$$\begin{aligned} W_{x_i}^{(k)} &= W(x_1^{(k+1)}, \dots, x_{i-1}^{(k+1)}, x_i^{(k)} + \Delta, \dots, x_r^{(k)}) \\ W_{\bar{x}_i}^{(k)} &= W(x_1^{(k+1)}, \dots, x_{i-1}^{(k+1)}, x_i^{(k)} - \Delta, \dots, x_r^{(k)}) \\ W_{0_i} &= W(x_1^{(k+1)}, \dots, x_{i-1}^{(k+1)}, x_i^{(k)}, \dots, x_r^{(k)}) \end{aligned}$$

Obliczenie kolejnych przybliżeń prowadzi się aż do momentu, gdy z dostateczną dokładnością otrzymamy

$$dx_i^{(k)} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, r$$

co jest równoznaczne, jak to widać z wzoru (35), ze spełnieniem warunków istnienia minimum funkcji $W = [vv]$:

$$\frac{\partial W}{\partial x_i} = 0.$$

Przedstawione postępowanie odpowiada iteracji Gaussa-Seidla stosowanej do rozwiązywania układów równań normalnych.

I t e r a c j a p u n k t o w a. Poprawki typowych obserwacji geodezyjnych: kąta, kierunku i długości zależą od położenia punktów wyznaczających te obserwacje, a więc zależą zawsze od par niewiadomych, jakimi są współrzędne płaskie x, y punktów sieci. Okoliczność ta jest bardzo istotna w programowaniu i kodowaniu danych początkowych, uwzględniając ją możemy np. zrezygnować całkowicie z numeracji niewiadomych i posługiwać się wyłącznie numeracją punktów, przy czym przez punkt będziemy rozumieli wówczas parę współrzędnych.

Specyficznemu charakterowi sieci kątowno-liniowych najbardziej odpowiada iteracja, w której oblicza się jednocześnie przybliżenia dwóch niewiadomych, a mianowicie współrzędnych x, y punktu sieci. W iteracji tej określa się przybliżone położenia punktów — i stąd jej nazwa: iteracja punktowa. Oczywiście, w analogiczny sposób można rozważać iterację większych grup niewiadomych.

Iteracja punktowa polega na znalezieniu minimum funkcji współrzędnych r punktów:

$$[vv] = W(x_1, y_1, x_2, y_2, \dots, x_r, y_r) = \min.$$

poprzez wielokrotne obliczenie minimum tej funkcji jako funkcji współrzędnych x, y jednego tylko punktu: najpierw punktu 1, potem punktu 2 itd., wreszcie punktu r , przy czym współrzędne pozostałych punktów traktuje się jako stałe:

$$\begin{aligned} [vv] &= W(x_1, y_1, \dots) = \min. \\ [vv] &= W(\dots, x_2, y_2, \dots) = \min. \\ &\dots \quad \dots \quad \dots \\ [vv] &= W(\dots, x_r, y_r) = \min. \end{aligned} \tag{38}$$

W procesie iteracyjnym zakłada się pewne początkowe przybliżenia współrzędnych

$$x_1^{(0)}, y_1^{(0)}, x_2^{(0)}, y_2^{(0)} \dots x_r^{(0)}, y_r^{(0)},$$

a potem oblicza się na podstawie cyklicznie realizowanych warunków (38) kolejne przybliżenia:

$$\begin{aligned} & x_1^{(1)}, y_1^{(1)}, x_2^{(1)}, y_2^{(1)} \dots x_r^{(1)}, y_r^{(1)}, \\ & x_1^{(2)}, y_1^{(2)}, x_2^{(2)}, y_2^{(2)} \dots x_r^{(2)}, y_r^{(2)}, \\ & \dots \dots \dots \dots \dots \\ & x_1^{(k)}, y_1^{(k)}, x_2^{(k)}, y_2^{(k)} \dots x_r^{(k)}, y_r^{(k)}, \\ & x_1^{(k+1)}, y_1^{(k+1)}, x_2^{(k+1)}, y_2^{(k+1)} \dots x_r^{(k+1)}, y_r^{(k+1)} \end{aligned}$$

Przebieg rachunku przedstawiony jest podanymi poniżej wzorami, analogicznymi do wzorów (34) — (35):

$$\begin{Bmatrix} x_i^{(k+1)} \\ y_i^{(k+1)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x_i^{(k)} \\ y_i^{(k)} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} dx_i^{(k)} \\ dy_i^{(k)} \end{Bmatrix}, \tag{39}$$

$$\begin{Bmatrix} dx_i^{(k)} \\ dy_i^{(k)} \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} \frac{\partial W^{(k)}}{\partial x_i} \\ \frac{\partial W^{(k)}}{\partial y_i} \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2 W^{(k)}}{\partial x_i \partial x_i} & \frac{\partial^2 W^{(k)}}{\partial y_i \partial x_i} \\ \frac{\partial^2 W^{(k)}}{\partial x_i \partial y_i} & \frac{\partial^2 W^{(k)}}{\partial y_i \partial y_i} \end{Bmatrix}^{-1}, \tag{40}$$

gdzie przez $\frac{\partial W^{(k)}}{\partial x_i}, \frac{\partial^2 W^{(k)}}{\partial x_i \partial x_i}$ itd. oznaczyliśmy pochodne cząstkowe funkcji W obliczone na podstawie wartości:

$$x_1^{(k+1)}, y_1^{(k+1)}, \dots, x_{i-1}^{(k+1)}, y_{i-1}^{(k+1)}, x_i^{(k)}, y_i^{(k)}, \dots, x_r^{(k)}, y_r^{(k)},$$

tj. obliczone dla o s t a t n i o uzyskanych przybliżeń; dla początkowych $i - 1$ punktów są to już przybliżenia $(k + 1)$, dla pozostałych punktów — przybliżenia (k) .

Występujące we wzorze (40) pochodne cząstkowe obliczamy stosując wzory (19) — (21). Rachunek uważamy za skończony, gdy spełnione są już z dostateczną dokładnością warunki: $dx_i^{(k)} = 0, dy_i^{(k)} = 0$.

Zauważmy, że występujące we wzorach (40) i (35) drugie pochodne cząstkowe możemy uważać za wartości stałe, o ile tylko współrzędne przybliżone punktów są dostatecznie bliskie poszukiwanym współrzędnym wyrównanym. Wydaje się jednak, że wskazane jest obliczanie tych pochodnych w każdej iteracji, ze względu na:

- a) wynikającą stąd kontrolę rachunku,
- b) uproszczenie algorytmu,
- c) oszczędność miejsc pamięci,
- d) możliwość wyrównania pojedynczych punktów i mocno nawiąza-

nych grup punktów (szybka zbieżność!) przy mało dokładnych współrzędnych przybliżonych, np. odczytanych na mapie:

Przyspieszanie zbieżności procesów iteracyjnych. Iteracja pojedyncza niewiadomych opierająca się na metodzie Gaussa-Seidla jest zawsze zbieżna, podobnie zresztą jak iteracja grup niewiadomych [8], której szczególnym przypadkiem jest iteracja punktowa. Jednakże w pewnych przypadkach wyrównanie sieci geodezyjnych powyższymi metodami wymaga obliczenia wielu przybliżeń — rzędu kilkuset i więcej, co jest oczywiście nie do przyjęcia ze względów praktycznych. W literaturze podaje się wiele różnorodnych sposobów przyspieszania procesów iteracyjnych. Bodajże najprostszym, a jednocześnie bardzo skutecznym, jest sposób zwany nadrelaksacją [17].

W sposobie tym zamiast wzorów (34) i (39), odnoszących się odpowiednio do iteracji pojedynczych niewiadomych oraz iteracji punktowej, stosujemy wzory:

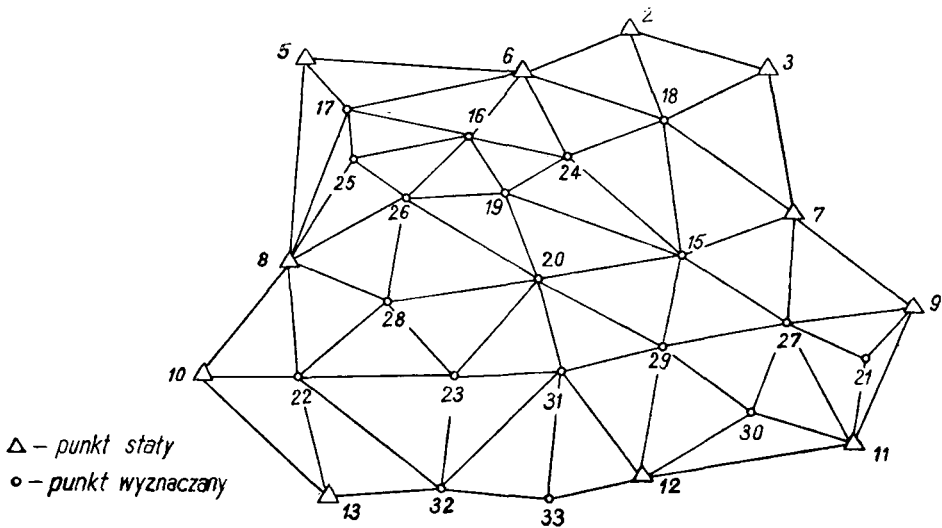
$$x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} + \beta dx_i^{(k)}, \quad (41)$$

$$\begin{Bmatrix} x_i^{(k+1)} \\ y_i^{(k+1)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x_i^{(k)} \\ y_i^{(k)} \end{Bmatrix} + \beta \begin{Bmatrix} dx_i^{(k)} \\ dy_i^{(k)} \end{Bmatrix} \quad (42)$$

gdzie β jest współczynnikiem spełniającym nierówność

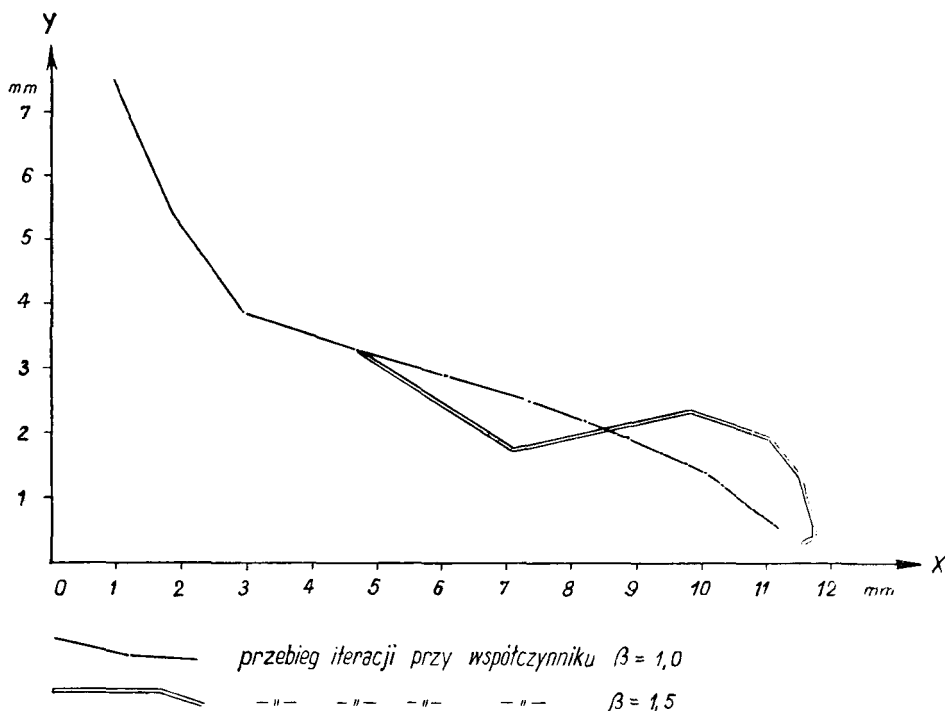
$$1 < \beta < 2.$$

Dla każdej sieci geodezyjnej można dobrać pewną optymalną wartość współczynnika β , przy której proces iteracyjny przebiega najszybciej. W przeprowadzonych eksperymentach autor *) uzyskiwał dobre rezultaty



*) Prace obliczeniowe wykonane zostały przy współdziałaniu mgra inż. W. Gedymina.

stosując w początkowych przybliżeniach współczynnik $\beta = 1,0$ oraz w dalszych — współczynnik $\beta = 1,5$. Jako przykład może służyć przedstawiona na rysunku sieć triangulacyjna o 19 punktach wyznaczanych, którą wyrównano na maszynie UMC 1 metodą iteracji punktowej w dwóch wariantach. W pierwszym z tych wariantów obliczono 18 przybliżeń przy współczynniku $\beta = 1,0$ uzyskując współrzędne wyrównane z dokładnością rzędu 0,5 mm. W drugim wariantcie jako współrzędne przybliżone przyjęto trzecie przybliżenia z pierwszego wariantu; w dalszym rachunku zastosowano współczynnik $\beta = 1,5$ otrzymując współrzędne z dokładnością tego samego rzędu co uprzednio, już w 7 przybliżeniu. Załączony rysunek przedstawia zmiany położenia punktu 16 w trakcie iteracji ze współczynnikiem $\beta = 1,0$ oraz $\beta = 1,5$.



Przedstawione w tej pracy wzory iteracyjne opierające się na metodzie spoprzeżeń pośrednich powinny być używane dla sieci dość mocno nawiązanych do punktów stałych, czym więcej jest punktów stałych w sieci i czym równomierniej są one rozłożone, tym szybciej będzie przebiegał proces iteracyjny. Typowym przykładem sieci triangulacyjnej w pełni nadającej się do wyrównania metodami iteracyjnymi jest polska sieć triangulacji zagęszczającej. Wyrównanie tej sieci metodą iteracji punktowej nie powinno wymagać obliczenia więcej niż kilku przybliżeń, nawet przy współczynniku $\beta = 1,0$.

Zastosowanie metod iteracyjnych w tego rodzaju przypadkach przyniesie istotne korzyści ekonomiczne wynikające ze skrócenia i uproszczenia całego cyklu obliczeniowego, poczynając od przygotowania danych początkowych, a kończąc na poprawianiu wyników rachunku, po ewentualnym wykryciu błędów w tych danych. Prócz tego metody iteracyjne pozwalają na przeprowadzenie w sposób uzasadniony ekonomicznie wyrównania sieci niższych klas na dużych obszarach, bez sztucznego podziału na grupy wyrównawcze, niejednokrotnie praktykowanego przy stosowaniu metod klasycznych.

Jedną z najbardziej istotnych zalet metod iteracyjnych podanych w niniejszej pracy jest oszczędność miejsc pamięci uzyskana zarówno przez skrócenie programu, jak i przez zminimalizowanie liczby zapamiętywanych wyników przejściowych. Tak na przykład, przy wyrównaniu sieci kątowych metodą iteracji punktowej*) w pamięci maszyny przechowuje się wyłącznie:

a) wartości kątów α i ich błędów średnich m_α (stosując wzory (26) zastępujemy te wartości na początku rachunku wartościami $\operatorname{tg} \alpha, (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha) m_\alpha$ bądź $\operatorname{ctg} \alpha, -(1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha) m_\alpha$),

b) numery punktów wyznaczających kąty: L, P, C ,

c) współrzędne przybliżone punktów sieci, które w trakcie procesu iteracyjnego przekształcają się na współrzędne wyrównane,

d) współrzędne punktów stałych sieci.

Pewną wadą metod iteracyjnych jest natomiast brak skutecznych, a jednocześnie prostych rachunkowo wzorów na obliczenie błędów średnich niewiadomych i ich funkcji. W przypadku iteracji punktowej istnieje możliwość obliczania błędów średnich współrzędnych pojedynczych punktów, co przy wyrównaniu większych sieci odpowiada założeniu, że wszystkie punkty otaczające punkt o obliczanych błędach średnich współrzędnych są punktami stałymi.

Jeśli jednak konieczne jest obliczanie błędów średnich niewiadomych bądź ich funkcji, celowe jest zastosowanie podanej dalej metody obliczania odwrotności krakowianów symetrycznych.

7. Obliczanie odwrotności krakowianów symetrycznych

Jedną z najbardziej rozpowszechnionych metod obliczania odwrotności krakowianów symetrycznych jest metoda opierająca się na zastosowaniu wzoru:

$$[(\sqrt{\mathbf{a}})^{-1}]^2 = \mathbf{a}^{-1} \quad (43)$$

*) W Instytucie Geodezji i Kartografii opracowano programy wyrównania sieci kątowych metodą iteracji punktowej dla maszyn UMC 1 oraz UMC 10, obecnie przygotowuje się dalsze programy tego typu.

Jak widać, metoda ta polega na kolejnym obliczaniu:

- a) pierwiastka krakowianowego z danego krakowianu symetrycznego \mathbf{a} ,
- b) odwrotności pierwiastka krakowianowego,
- c) kwadratu odwrotności pierwiastka krakowianowego.

Metoda ta, podobnie jak i inne metody stosowane w rachunku arytmetycznym, nie jest odpowiednia dla maszyn elektronowych, m. in. z uwagi na różnorodność wzorów, które należy zaprogramować. Zastanówmy się nad opracowaniem algorytmu nie posiadającego tej wady. Jako punkt wyjścia obierzemy wzór (43), na podstawie którego możemy napisać wzór następujący:

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{a} & \tau \\ \tau & \mathbf{0} \end{Bmatrix} - \{\sqrt{\mathbf{a}} (\sqrt{\mathbf{a}})^{-1}\}^2 = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{a}^{-1} \end{Bmatrix} \quad (44)$$

gdzie $\mathbf{0}$ — krakowian utworzony z elementów zerowych,
 τ — krakowian jednostkowy.

Wzór (44) określa sposób przekształcenia krakowianu blokowego utworzonego z krakowianów \mathbf{a} , τ , $\mathbf{0}$:

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{a} & \tau \\ \tau & \mathbf{0} \end{Bmatrix}$$

na krakowian blokowy utworzony z krakowianów \mathbf{a}^{-1} i $\mathbf{0}$:

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{a}^{-1} \end{Bmatrix}$$

Przekształcenie to polega na odjęciu od krakowianu danego, kwadratu krakowianu blokowego utworzonego z pierwiastka krakowianowego i jego odwrotności:

$$\{\sqrt{\mathbf{a}} (\sqrt{\mathbf{a}})^{-1}\}^2$$

Odejmowanie kwadratu krakowianu daje się zastąpić odejmowaniem kwadratów kolejnych n wierszy tego krakowianu; możemy zatem przekształcenie ujęte wzorem (44) przedstawić w postaci następującej:

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{a} & \tau \\ \tau & \mathbf{0} \end{Bmatrix} - (\mathbf{B}^{(1)})^2 - (\mathbf{B}^{(2)})^2 \dots - (\mathbf{B}^{(n)})^2 = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{a}^{-1} \end{Bmatrix},$$

gdzie $\mathbf{B}^{(k)}$ oznacza k -ty wiersz krakowianu

$$\mathbf{B} = \{\sqrt{\mathbf{a}} (\sqrt{\mathbf{a}})^{-1}\}$$

Wprowadzając nowe oznaczenia:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{b}^{(1)} &= \begin{Bmatrix} \mathbf{a} & \tau \\ \tau & \mathbf{0} \end{Bmatrix} \\
 \mathbf{b}^{(2)} &= \mathbf{b}^{(1)} - (\mathbf{B}^{(1)})^2 \\
 \mathbf{b}^{(3)} &= \mathbf{b}^{(2)} - (\mathbf{B}^{(2)})^2 \\
 &\dots \quad \dots \quad \dots \\
 \mathbf{b}^{(k+1)} &= \mathbf{b}^{(k)} - (\mathbf{B}^{(k)})^2 \\
 &\dots \quad \dots \quad \dots
 \end{aligned} \tag{45}$$

będziemy mogli opisywane przekształcenie traktować jako utworzenie ciągu krakowianów

$$\mathbf{b}^{(1)}, \mathbf{b}^{(2)}, \dots, \mathbf{b}^{(n+1)},$$

gdzie, jak widać

$$\mathbf{b}^{(n+1)} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{a}^{-1} \end{Bmatrix} \tag{46}$$

Po odjęciu od krakowianu $\mathbf{b}^{(1)}$ kwadratów $k-1$ wierszy krakowianu \mathbf{B} otrzymujemy symetryczny krakowian $\mathbf{b}^{(k)}$, charakteryzujący się tym, że w jego $k-1$ początkowych wierszach i $k-1$ początkowych kolumnach znajdują się wyłącznie zera. Łatwo zatem sprawdzić, że elementy wiersza $\mathbf{B}^{(k)}$ można obliczyć na podstawie elementów pierwszego niezerowego wiersza krakowianu $\mathbf{b}^{(k)}$ (tzn. wiersza k) w analogiczny sposób jak oblicza się elementy pierwszego wiersza pierwiastka krakowianowego:

$$\mathbf{B}^{(k)} = \left\{ 0, \dots, 0, \sqrt{b_{k,k}^{(k)}}, \frac{b_{k+1,k}^{(k)}}{\sqrt{b_{k,k}^{(k)}}}, \dots, \frac{b_{k+n,k}^{(k)}}{\sqrt{b_{k,k}^{(k)}}}, 0, \dots, 0 \right\} \quad (k = 1, 2, \dots, n) \tag{47}$$

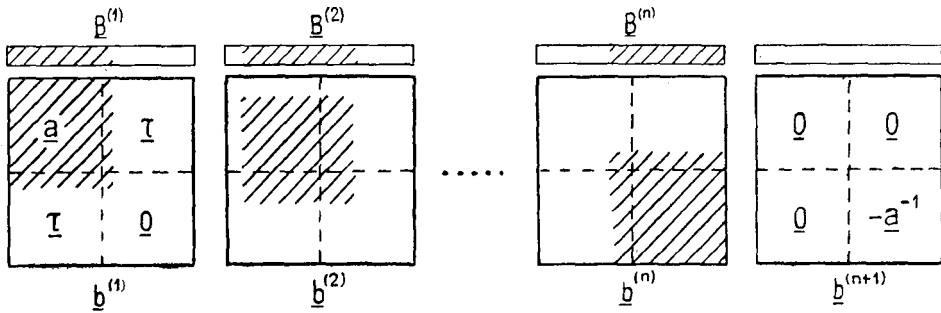
W ten sposób przekształcenie ujęte wzorem (44) przedstawiliśmy w postaci jednolitego i łatwego do zaprogramowania procesu rachunkowego podanego wzorami (45) — (47).

Zastanówmy się teraz nad liczbą miejsc pamięci niezbędnych dla przeprowadzenia rachunku. W tym celu zauważmy, co następuje:

a) krakowiany $\mathbf{b}^{(1)}, \mathbf{b}^{(2)}, \dots, \mathbf{b}^{(n)}, \mathbf{b}^{(n+1)}$ są krakowianami symetrycznymi i wobec tego mogą być pominięte elementy tych krakowianów położone poniżej głównej przekątnej,

b) w trakcie przekształcenia krakowianu $\mathbf{b}^{(k)}$ na krakowian $\mathbf{b}^{(k+1)}$ obliczenie prowadzi się wyłącznie na elementach położonych w $n+1$ kolumnach i $n+1$ wierszach (patrz rysunek przedstawiający elementy, na których wykonuje się obliczenia),

c) jednowierszowe krakowiany $\mathbf{B}^{(k)}$ utworzone są z $n+1$ elementów niezerowych, pozostałe elementy tych krakowianów są równe zero.



Powyższe spostrzeżenia wskazują na możliwość przeprowadzenia rachunku w obrębie jednej tabeli trójkątnej o $n + 1$ kolumnach i wierszach, przy czym dodatkowo należy zapisywać $n + 1$ elementów wiersza $\mathbf{B}^{(k)}$. Wpisując elementy nowo obliczone na miejsca elementów uzyskanych w toku poprzedniego przekształcenia będziemy mogli znacznie ograniczyć ilość miejsc pamięci niezbędnych dla obliczenia odwrotności.

Dla przeprowadzenia tego rodzaju rachunku utworzymy ciąg krakowianów o $n + 1$ kolumnach i $n + 1$ wierszach:

$$\mathbf{c}^{(1)}, \mathbf{c}^{(2)} \dots \mathbf{c}^{(n)}, \mathbf{c}^{(n+1)},$$

gdzie

$$\mathbf{c}^{(1)} = \begin{pmatrix} & & & & 1 \\ & & & & 0 \\ & & & & \vdots \\ & & & & 0 \\ & & & & 0 \\ \mathbf{a} & & & & 0 \end{pmatrix}$$

(krakowiany $\mathbf{c}^{(k)}$ są symetryczne; elementy tych krakowianów położone poniżej głównej przekątnej nie są pisane).

Przekształcenia krakowianów $\mathbf{c}^{(k)}$ dokonuje się według poniższych wzorów, wynikających bezpośrednio z wzorów (45) — (47):

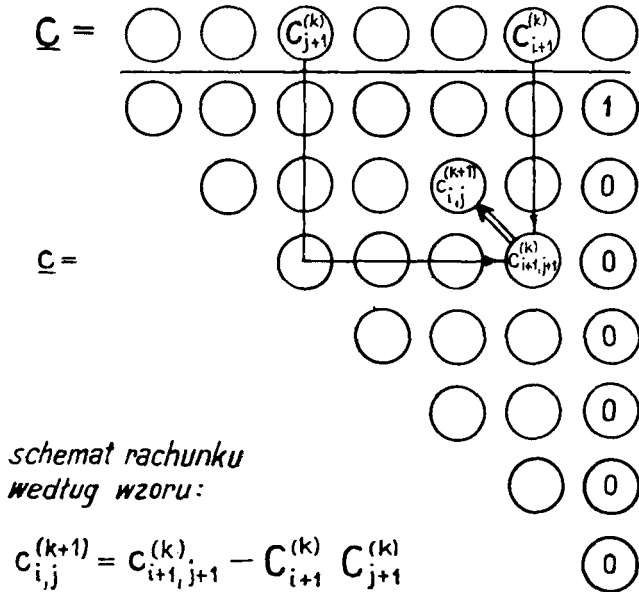
$$c_{i,j}^{(k+1)} = c_{i+1,j+1}^{(k)} - C_{i+1}^{(k)} C_{j+1}^{(k)} \quad (i, j = 1, 2 \dots n) \quad (48)$$

$$C_1^{(k)} = \sqrt{c_{1,1}^{(k)}}, \quad C_{i+1}^{(k)} = \frac{c_{i+1,1}^{(k)}}{C_1^{(k)}} \quad (i \geq j) \quad (49)$$

W wyniku rachunku otrzymujemy:

$$\mathbf{c}^{(n+1)} = \begin{pmatrix} & & & & 1 \\ & & & & 0 \\ & & & & \vdots \\ & & & & 0 \\ & & & & 0 \\ -\mathbf{a}^{-1} & & & & 0 \end{pmatrix}$$

Istotną cechą wzoru (48) jest zapisywanie obliczonego elementu $c_{i,j}^{(k+1)}$ z lewej strony nad elementem przekształcanym $c_{i+1,j+1}^{(k)}$, schemat tego rachunku pokazuje zamieszczony obok rysunek. W trakcie kolejnych przekształceń elementy ostatniej kolumny nie ulegają zmianie.



Elementy wiersza $\underline{C}^{(k)}$ są równe elementom pierwszego wiersza pierwiastka z krakowianu $\underline{c}^{(k)}$. Przekształcenie krakowianu $\underline{c}^{(k)}$ na krakowian $\underline{c}^{(k+1)}$ dokonujemy kolejno wierszami, poczynając od pierwszego wiersza.

Przykład. Obliczyć odwrotność krakowianu a:

$$a = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 8 \end{pmatrix}$$

Stosując wzory (48) — (49) będziemy obliczali kolejno:

$$\underline{C}^{(1)} = \{ \underline{1} \ -2 \ 1 \}, \quad \underline{C}^{(2)} = \{ \underline{2} \ 1 \ \frac{1}{2} \}$$

$$\underline{c}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ & 8 & 0 \\ & & 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{c}^{(2)} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ & -1 & 0 \\ & & 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{c}^{(3)} = \begin{pmatrix} -2 & -\frac{1}{2} & 1 \\ & -\frac{1}{4} & 0 \\ & & 0 \end{pmatrix}$$

W ten sposób otrzymaliśmy:

$$a^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix},$$

W powyższym przykładzie wypisaliśmy wszystkie tabele $\mathbf{c}^{(k)}$ i $\mathbf{C}^{(k)}$. Należy jednak pamiętać o tym, że w rachunku na maszynie elektronicznej elementy nowo obliczone wpisuje się na miejsca elementów obliczonych uprzednio.

Ze względów praktycznych wygodnie jest niekiedy obliczać iloczyn $-\alpha^2 \mathbf{a}^{-1}$, gdzie α jest odpowiednio dobraną stałą, np. 10^P . Iloczyn taki uzyskamy bezpośrednio, wpisując stałą α na miejsce jedności w ostatniej kolumnie krakowianu $\mathbf{c}^{(1)}$.

Wzory (48) — (49) wymagają uzupełnienia krakowianu \mathbf{a} kolumną utworzoną z jedności i n zer, co może być niekiedy niewygodne w zastosowaniach. Podane dalej wzory, nieco bardziej skomplikowane od wzorów (48) — (49), umożliwiają przeprowadzenie rachunku bez tej dodatkowej kolumny.

Dla obliczenia odwrotności symetrycznego krakowianu \mathbf{a} o n kolumnach utworzymy ciąg krakowianów:

$$\mathbf{a}^{(1)}, \mathbf{a}^{(2)} \dots \mathbf{a}^{(n)}, \mathbf{a}^{(n+1)},$$

gdzie $\mathbf{a}^{(1)} = \mathbf{a}$, zaś $\mathbf{a}^{(n+1)} = -\mathbf{a}^{-1}$.

Obliczenia prowadzi się według wzorów:

$$a_{i,j}^{(k+1)} = a_{i+1,j+1}^{(k)} - A_{i+1}^{(k)} A_{j+1}^{(k)} \quad (i, j = 1, 2 \dots n-1 \quad i \geq j) \quad (50)$$

$$a_{n,j}^{(k+1)} = -\frac{1}{A_1^{(k)}} A_{j+1}^{(k)}, \quad a_{n,n} = -\left(\frac{1}{A_1^{(k)}}\right)^2$$

$$A_1^{(k)} = \sqrt{a_{1,1}^{(k)}}, \quad A_{i+1}^{(k)} = \frac{a_{i+1,1}^{(k)}}{A_1^{(k)}} \quad (51)$$

Wzory te wynikają bezpośrednio ze wzorów (48) — (49).

P r z y k ł a d. Obliczyć odwrotność krakowianu \mathbf{a} podanego w poprzednim przykładzie.

Stosując wzory (50) — (51) otrzymamy:

$$\mathbf{A}^{(1)} = \{ \underline{1} \quad \underline{-2} \}, \quad \mathbf{A}^{(2)} = \{ \underline{2} \quad \underline{1} \}$$

$$\mathbf{a}^{(1)} = \mathbf{a} = \begin{Bmatrix} 1 & -2 \\ & 8 \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{a}^{(2)} = \begin{Bmatrix} 4 & 2 \\ & -1 \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{a}^{(3)} = -\mathbf{a}^{-1} = \begin{Bmatrix} -2 & -\frac{1}{2} \\ & -\frac{1}{4} \end{Bmatrix}$$

Podane powyżej wzory (48) — (49) i (50) — (51) mogą być również użyte do bezpośredniego obliczania niewiadomych układu równań liniowych, przy czym zarówno w obliczeniu niewiadomych, jak i w obliczeniu odwrotności możliwe jest zastosowanie kontroli sumowych.

Weźmy pod uwagę układ równań normalnych w metodzie spozrzezeń pośrednich i utwórzmy krakowian o podanym niżej kształcie:

$$\left\{ \begin{array}{cccccc} [aa] & [ab] & \dots & [aq] & [al] & [as] & 1 \\ & [bb] & \dots & [bq] & [bl] & [bs] & 1 \\ & & \dots & & & & \dots \\ & & & [qq] & [ql] & [qs] & 1 \\ & & & & [ll] & [ls] & 0 \\ & & & & & [ss] & 0 \\ & & & & & & 0 \end{array} \right\} \quad (52)$$

Podstawiając ten krakowian na miejsce krakowianu a we wzorach (48) — (49), bądź analogicznie we wzorach (50) — (51), otrzymamy po n przekształceniach następujący krakowian (n — liczba niewiadomych):

$$\left\{ \begin{array}{cccccc} [vv][vv] & [x] & x_1 & \dots & x_n \\ [vv] & [x] & -n & x_1-1 & \dots & x_n-1 \\ & -[Q_{i,j}] & -[Q_{1,j}] & \dots & -[Q_{n,j}] \\ & & -Q_{1,1} & \dots & -Q_{n,1} \\ & & & \dots & \\ & & & & -Q_{n,n} \end{array} \right\} \quad (53)$$

$[vv]$ — suma kwadratów poprawek,

x_i — niewiadome,

$Q_{i,j}$ — elementy odwrotności krakowianu współczynników w równaniach normalnych, tzw. współczynniki wagowe.

Wpisanie w krakowianie (52) kolumny sumowej $[as]$, $[bs]$, ... $[ss]$ dostarczyło nam kontroli w obliczeniu $[vv]$ oraz niewiadomych (wyrażenia $x_i - 1$), natomiast przez dopisanie kolumny utworzonej z n jedynek i 3 zer uzyskaliśmy kontrolę sumową obliczenia niewiadomych i odwrotności:

$[x]$ — suma niewiadomych,

$[Q_{i,j}]$ — suma wszystkich elementów odwrotności,

$[Q_{1,j}]$, $[Q_{2,j}]$... $[Q_{n,j}]$ — sumy elementów odwrotności położonych w poszczególnych kolumnach (równe sumom elementów położonych w wierszach).

Analogiczny schemat rachunkowy może być oczywiście stosowany przy rozwiązywaniu symetrycznych układów równań liniowych nie związanych z metodą najmniejszych kwadratów, lecz posiadających pierwiastko-

walny krakowian współczynnikowy. W tym przypadku zakładamy $[ll] = 0$ i wyliczamy sumy kontrolne odpowiadające kolumnom wyrazów wolnych i sumowych. W rezultacie uzyskujemy na miejscach $[vv]$ trzy liczby równe sobie w granicach dokładności rachunku.

Dla wykazania słuszności opisanego postępowania wystarczy podstawić krakowian (52) na miejsce krakowianu a we wzorze (44) i wykonać działania nakazane tym wzorem.

P r z y k ł a d. Obliczyć $[vv]$, niewiadome oraz odwrotność krakowianu współczynników w równaniach normalnych dla następującego układu równań poprawek:

$$\begin{aligned} v_1 &= \sqrt{2} x_1 + \sqrt{2} x_2 \\ v_2 &= \sqrt{3} x_2 + \frac{7}{\sqrt{3}} \\ v_3 &= -\sqrt{2} x_1 - \frac{6}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

Zastosujemy tu wzory (48) — (49). Ułożymy najpierw tabelę współczynników, wyrazów wolnych i sumowych równań poprawek, po czym obliczymy krakowian $c^{(1)}$.

a	b	l	s
$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	0	$2\sqrt{2}$
0	$\sqrt{3}$	$\frac{7}{\sqrt{3}}$	$\frac{10}{\sqrt{3}}$
$-\sqrt{2}$	0	$-\frac{6}{\sqrt{2}}$	$-\frac{8}{\sqrt{2}}$

$$c^{(1)} = \begin{pmatrix} [aa] & [ab] & [al] & [as] & 1 & 1 \\ & [bb] & [bl] & [bs] & 1 & 0 \\ & & [ll] & [ls] & 0 & 0 \\ & & & [ss] & 0 & 0 \\ & & & & 0 & 0 \\ & & & & & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 6 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 4 & 2 & 6 & 12 & 1 & 1 \\ 5 & 7 & 14 & 1 & 0 & \\ \frac{103}{3} & \frac{142}{3} & 0 & 0 & & \\ & \frac{220}{3} & 0 & 0 & & \\ & & 0 & 0 & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

Pamiętając o schemacie rachunkowym przedstawionym na rysunku (str. 106) wykonamy kolejno 2 przekształcenia otrzymując:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{C}^{(2)} &= \left\{ \begin{array}{cccccc} 2 & 2 & 4 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{array} \right\} \\
 \mathbf{c}^{(2)} &= \left\{ \begin{array}{cccccc} 4 & 4 & 8 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \\ \frac{76}{3} & \frac{88}{3} & -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & 0 & \\ & \frac{112}{3} & -3 & -3 & 0 & \\ & & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 0 & \\ & & & -\frac{1}{4} & 0 & \\ & & & & 0 & \end{array} \right\} \\
 \mathbf{c}^{(3)} &= \left\{ \begin{array}{cccccc} [vv] & [vv] & [x] & x_1 & x_2 & 1 \\ & [vv] & [x] - 2 & x_1 - 1 & x_2 - 1 & 0 \\ & & -[Q_{ij}] & -[Q_{1j}] & -[Q_{2j}] & 0 \\ & & & -Q_{1,1} & -Q_{2,1} & 0 \\ & & & & -Q_{2,2} & 0 \\ & & & & & 0 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{cccccc} \frac{64}{3} & \frac{64}{3} & -2 & -1 & -1 & 1 \\ & \frac{64}{3} & -4 & -2 & -2 & 0 \\ & & -\frac{5}{16} & -\frac{3}{16} & -\frac{2}{16} & 0 \\ & & & -\frac{5}{16} & \frac{2}{16} & 0 \\ & & & & -\frac{4}{16} & 0 \\ & & & & & 0 \end{array} \right\}
 \end{aligned}$$

Podstawiając dla kontroli obliczone wartości niewiadomych $x_1 = -1$ oraz $x_2 = -1$ do układu równań poprawek otrzymamy:

$$v_1 = -2\sqrt{2},$$

$$v_2 = \frac{4}{\sqrt{3}},$$

$$v_3 = \frac{4}{\sqrt{2}},$$

a stąd $[vv] = \frac{64}{3}$.

Na zakończenie zauważmy, że wzorom (48)—(49) oraz (50)—(51) można nadać nieco inną postać. Weźmy dla przykładu wzory (48)—(49). Podstawiając wyrażenia (49) do wzoru (48) możemy napisać:

$$c_{i,j}^{(k+1)} = c_{i+1,j+1}^{(k)} - \left(\frac{c_{i+1,1}^{(k)}}{c_{1,1}^{(k)}} \right) c_{j+1,1}^{(k)} \quad (i, j = 1, 2, \dots, n \quad i \geq j) \quad (54)$$

Realizując ten wzór wykonuje się operacje znane z algorytmu K. Gaussa rozwiązywania układów równań symetrycznych. Przy porównywaniu

wzoru (54) z wzorami (48) — (49) wywodzącymi się z algorytmu pierwiastka krakowianowego, należy brać pod uwagę większy wpływ błędów zaokrągleń w algorytmie Gaussa [4], [15], co jest szczególnie istotne w maszynach stałoprzecinkowych.

L I T E R A T U R A

- [1] *Abramow A. A., Chubiarowa S. L.*: O reszenji iteracyjnymi sposobami liniowych algebraicznych urawnienji... Trudy Centralnowo Nauczno-Issledowatielskiewo Institutu Geodezji, Aerosjemki i Kartografii. Wyp. 135. Moskwa 1960.
- [2] *Banachiewicz T.*: Rachunek krakowianowy. Warszawa 1959.
- [3] *Bieriezin I. S., Zidkow N. P.*: Metody wycislenji. T. II. Moskwa 1962.
- [4] *Burmistrow G. A.*: Osnowy sposobu najmniejszych kwadratow. Moskwa 1963.
- [5] *Dymarskij J. C.* i in.: Sprawocznik programmista. T. I. Leningrad 1963.
- [6] *Faddiejewa W. N.*: Metody numeryczne algebry liniowej. Warszawa 1955.
- [7] *Gajdajew P. A.*: Urawniwanie triangulacji. Moskwa 1960.
- [8] *Gajdajew P. A. i Fomin M. P.*: Urawniwanie triangulacji pribliżeniami. Moskwa 1962.
- [9] *Gaździcki J.*: Wyrównanie sieci triangulacyjnych na maszynach elektronicznych. Prace Instytutu Geodezji i Kartografii. T. X, zeszyt 2. Warszawa 1962.
- [10] *Gaździcki J.*: Programy rozwiązywania zadań geodezyjnych na polskiej uniwersalnej maszynie cyfrowej UMC 1. Prace Instytutu Geodezji i Kartografii. T. IX, zeszyt 1. Warszawa 1962.
- [11] *Hausbrandt St.*: Rachunki geodezyjne. Warszawa 1953.
- [12] *Kamela Cz.*: Geodezja. Warszawa 1952.
- [13] *Kitow A. i Krynicki N.*: Elektroniczne maszyny cyfrowe oraz programowanie. Warszawa 1963.
- [14] *Lance G. N.*: Numerical Methods for High Speed Computers. London 1960.
- [15] *Łarcezenko E.*: Analiz toczności reszenja sistem normalnych urawnienji. Izwiestia wysszych uczebnych zawiedienji. Geodezja i Aerofotosjemka. Wyp. 1. Moskwa 1960.
- [16] *Łukaszewicz J. i Warmus M.*: Metody numeryczne i graficzne. Warszawa 1956.
- [17] Nowoczesna matematyka dla inżynierów. Praca zbiorowa pod redakcją *E. F. Beckenbacha*. Warszawa 1962.
- [18] *Panasiuk J.*: Dopuszczalna dokładność współrzędnych przybliżonych w przypadku wyrównania obserwacji metodą spostrzeżeń pośrednich. Geodezja i Kartografia. T. III, zeszyt 4.
- [19] *Pogorzelski W.*: Analiza matematyczna. Warszawa 1953.
- [20] *Southwell R. V.*: Relaxations Methods in Engineering Science. Oxford 1951.

Recenzował: Prof. dr Stefan Hausbrandt

Rękopis złożono w Redakcji w czerwcu 1964 r.

НЕСКОЛЬКО ЧИСЛЕННЫХ МЕТОДОВ СВЯЗАННЫХ С УРАВНИВАНИЕМ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ СЕТЕЙ НА ЭЛЕКТРОННЫХ МАШИНАХ

Резюме

В статье излагается несколько численных методов связанных с уравнением геодезических сетей. Общей чертой этих методов является их применимость к вычислениям на электронных машинах.

Во 2-ом разделе указывается, что систему нормальных уравнений можно представить по формуле (9), в которой коэффициенты являются вторыми частными производными функции $W = \left[\frac{vv}{mm} \right] = [pvv]$, а свободные члены первыми производными этой же функции. Раздел 3 и 4 содержит изложение способов вычисления тех производных на основе приращений функции W .

Для облегчения вычислений в 5-ом разделе приводятся уравнения поправок основных геодезических наблюдений: угла, длины и направления в виде пригодным для электронных машин [26]—[32].

В 6-ом разделе приводятся итерационные методы, которые сводят все уравнение к многократному вычислению значения функции $W = [pvv]$. Излагается здесь итерацию отдельных неизвестных, соответствующей итерации Гаусса-Зейделя, а также т. н. пунктовую итерацию, в которой вычисляется одновременно координаты x, y определяющие положение уравниваемых пунктов на плоскости.

Приведено пример уравнивания триангуляционной сети содержащей 19 определяемых пунктов. Применяя надрелаксацию, сеть эту уравнивается после вычисления всего 10 приближений.

Существенным преимуществом изложенных итерационных методов является сбережение мест памяти, которое возникает так из-за сжатости и простоты программы, как и из возможности минимализации числа помещенных в памяти промежуточных результатов. Так

нпр. при уравнивании угловой сети в памяти машины достаточно сохранить только:

- а) наблюдаемые углы и их средние квадратические ошибки,
- б) номера пунктов определяющих углы,
- в) приближенные координаты пунктов сети, которые в процессе итерации преобразуются в уравненные координаты,
- г) координаты твердых пунктов сети.

Кажется, что эти методы могут применяться с хорошими результатами к уравниванию сетей низших классов.

В 7-ом разделе выводятся формулы, которые дают возможность вычисления краковяна обратного данному.

Эти формулы [48]—[51] выделяются своей несложностью и возможностью разнообразных применений, нпр. к непосредственному решению систем нормальных уравнений.

JERZY GAZDZICKI

SOME NUMERICAL METHODS FOR THE ADJUSTMENT OF GEODETICAL NETWORKS USING COMPUTERS

S u m m a r y

Some numerical methods are presented in this paper combined with the geodetic networks adjustment. Common feature of these methods is their application to the computers.

In the chapter 2 it is shown that normal equations system may be represented in the form [9], in which coefficients are second partial derivatives of the function $W = \left[\frac{vv}{mm} \right] = [pvv]$, but residual terms are first derivatives of the same function. Chapters 3 and 4 contain the discussing of the computation ways of these derivatives on the base of increments of the function W .

To facilitate computations, fundamental observation equations are given in the chapter 5: those of an angle, of a distance and of a direction, in the form suitable for computers [26] — [32].

In the chapter 6 iteration methods are presented which are reducing all the task to the manifold calculation of the function value $W = [pvv]$. Here are discussed: the iteration of individual unknowns corresponding to the Gauss-Seidel's iteration and the so called point iteration, where pairs of coordinates x, y are calculated, determining positions of adjusted points on the plane. An example of the adjustment of a triangulation network composed of 19 points is presented. By means of overrelaxation this network was adjusted by 10 successive approximations.

The essential advantage of the represented iteration methods is the economy of memory, arising alike from the concise and simple programme and from the possibility of minimizing of a number of transitional results which shall be remembered. Thus e.g. when adjusting angular networks, it is sufficient to preserve in memory the following values only:

- a) observed angles and their mean square errors,
- b) numbers of points determining angles,
- c) approximate coordinates of points, which are transformed into adjusted coordinates during iteration process,
- d) coordinates of fixed points.

These methods seem to be very useful for the adjustment of triangulation of lower orders.

In the chapter 7, formulas are derivated enabling computation of cracovian (matrix) inverses.

Formulas [48] — [51] are very simple and may be used to several purposes, e.g. for the direct solution of normal equation systems.

D Z I A Ł T E C H N I C Z N Y

Od Redakcji

W Zeszycie Nr 1/23, tom XI Prac Instytutu Geodezji i Kartografii, zamieszczona była na str. 152 uwaga redakcyjna dotycząca pracy Witolda Gedymina pt. „Wyrównanie na elektronowej maszynie UMC-1 sieci triangulacyjnej zaobserwowanej metodą kierunkową”. Uwagę tę należy uzupełnić w następujący sposób:

- 1. W skład zespołu programującego wchodził: dr inż. Jerzy Gaździcki, mgr inż. Janusz Orzechowski i mgr inż. Zbigniew Zorski. Udział pozostałych osób wymienionych w notatce miał charakter pomocniczy.*
- 2. Podstawowe opracowanie numeryczne wykonał mgr inż. Janusz Orzechowski, opierając się na pozycjach literatury [1] i [4].*

Ponadto wykaz literatury, zamieszczonej na str. 160 należy uzupełnić pozycją [4] Pranis-Pranievicz I. Ju.: Rukowodstwo po urawnitielnym wyczislenijam triangulacji, Moskwa, 1956 r.

