

ZOFIA MAJDANOWA

528.021.6 : (083.57)

Nomogramy do obliczenia wskaźnika refrakcji dla zakresu mikrofalowego

Celem pracy jest uproszczenie rachunków związanych z obliczeniem współczynnika załamania powietrza czyli t. zw. wskaźnika refrakcji „n” dla fal radiowych o zakresie centymetrowym. Współczynnik ten służy do redukcji odległości mierzonych geodezyjnymi dalmierzami radiowymi przy założeniu prędkości światła w próżni $C = 299792,5 \pm 0,4$ km/sek do warunków jakie panowały w momencie wykonywania obserwacji.

Zagadnieniem powyższym zajmowało się wielu autorów rozwiązując je bądź w postaci nomogramów bądź tablic. Jako wzór wyjściowy do obliczenia współczynnika n przyjmuje się formułę Essena i Froome'a, zaleconą przez XII Kongres MUGG w Helsinkach w 1960 r.

Najdokładniejszym rozwiązaniem tego zagadnienia jest ułożenie tablic za pomocą których można wyznaczyć współczynnik załamania powietrza z dokładnością 0,1 Q. Dokładność spotykanych nomogramów jest mniejsza ze względu na stosowanie dużych uproszczeń we wzorach wyjściowych.

Przy pewnego rodzaju przekształceniu wzoru Essena i Froome'a można jednak wykonać nomogram, którego dokładność będzie niewiele różniła się od dokładności tablic.

Wskaźnik refrakcji obliczany jest na podstawie odczytanych w czasie pomiaru linii warunków meteorologicznych, a więc

t — temperatury wskazywanej przez termometr suchy

t' — temperatury termometru zwilżonego

p — ciśnienia atmosferycznego.

Wzór na wskaźnik refrakcji przedstawiony jest w literaturze w następującej formie:

$$Q = (n - 1) \cdot 10^6 = \frac{103,49}{T} (p - e) + \frac{86,26}{T} \left(1 + \frac{5748}{T}\right) \cdot e \quad (1)$$

Q — tzw. liczba załamania

n — współczynnik załamania powietrza

p — ciśnienie atmosferyczne w mm Hg

e — ciśnienie pary wodnej w powietrzu w mm Hg

Wzór (1) można napisać w postaci

$$Q = \frac{103,49}{T} \cdot p + \left(\frac{86,26 \cdot 5748}{T^2} - \frac{17,23}{T} \right) \cdot e \quad (2)$$

Gdy wprowadzimy do tego wzoru $T = 273,16 + t$, oraz wyniesiemy przed nawias wartości stałe, otrzymamy

$$Q = \frac{103,49}{273,16} \left(\frac{1}{1 + \frac{t}{273,16}} \right) \cdot p + \left\{ \frac{1}{273,16} \left(\frac{1}{1 + \frac{t}{273,16}} \right) \cdot \left[\left(\left(\frac{86,26 \cdot 5748}{273,16} \right) \cdot \left(\frac{1}{1 + \frac{t}{273,16}} \right) \right) - 17,23 \right] \right\} \cdot e \quad (3)$$

W ten sposób przekształcone wyrażenie można rozwinąć w szereg potęgowy:

$$Q = \frac{103,49}{273,16} \left(1 - \frac{t}{273,16} + \frac{t^2}{273,16^2} - \frac{t^3}{273,16^3} + \frac{t^4}{273,16^4} - \dots \right) \cdot p +$$

$$+ \left\{ \frac{1}{273,16} \cdot \left(1 - \frac{t}{273,16} + \frac{t^2}{273,16^2} - \frac{t^3}{273,16^3} + \frac{t^4}{273,16^4} - \dots \right) \cdot \left[\left(\left(\frac{86,26 \cdot 5748}{273,16} \right) \cdot \left(1 - \frac{t}{273,16} + \frac{t^2}{273,16^2} - \frac{t^3}{273,16^3} + \frac{t^4}{273,16^4} - \dots \right) \right) - 17,23 \right] \right\} \cdot e$$

Po obliczeniu stałych współczynników: $\frac{103,49}{273,16}$, $\frac{86,26 \cdot 5748}{273,16}$, $\frac{1}{273,16}$,

$\left(\frac{1}{273,16}\right)^2$, $\left(\frac{1}{273,16}\right)^3$, $\left(\frac{1}{273,16}\right)^4$ i wprowadzeniu ich do powyższego

wyrażenia, otrzymamy wzór na wskaźnik refrakcji w postaci:

$$\begin{aligned}
 Q = & [0.37866\ 22053 - 0.00138\ 69608\ t + 0.00000\ 50775\ t^2 - \\
 & - 0.00000\ 00186\ t^3 + 0.00000\ 00001\ t^4] \cdot p + [6.58187\ 75473 - \\
 & - 0.04842\ 16230\ t + 0.00026\ 63173\ t^2 - 0.00000\ 13038\ t^3 + \\
 & + 0.00000\ 00060\ t^4] \cdot e
 \end{aligned} \quad (4)$$

Już w tej formie wzór może być przedstawiony w postaci nomogramu, jako funkcja czterech zmiennych $F(Q, t, p, e)$, przedtym jednak należy przeprowadzić analizę wpływu na wskaźnik refrakcji błędów poszczególnych zmiennych.

Różniczkując wzór (1), otrzymamy:

$$\begin{aligned}
 \frac{\delta Q}{\delta T} &= \frac{103,49}{T} \\
 \frac{\delta Q}{\delta e} &= \frac{17,23}{T} + \frac{495822}{T^2} \\
 \frac{\delta Q}{\delta T} &= \frac{103,49 \cdot p + 17,23 \cdot e}{T^2} - \frac{991644}{T^3}
 \end{aligned}$$

Podstawiając odpowiednio: $p = 1$ mm Hg, $e = 1$ mm Hg, $t = 1^\circ\text{C}$ otrzymamy dla $T = 273^\circ$, $p = 720$ mm Hg, $e = 4,6$ mm Hg

$$\begin{aligned}
 \Delta Q_T &= 1,04 & \Delta Q_p &= 0,38 & \Delta Q_e &= 6,53 \\
 \text{dla } T &= 298^\circ & p &= 720 \text{ mm Hg} & e &= 23,8 \text{ mm Hg} \\
 \Delta Q &= 0,87 & \Delta Q_p &= 0,35 & \Delta Q_e &= 5,52
 \end{aligned}$$

Z obliczenia tego wynika, że największy wpływ na błąd wskaźnika refrakcji ma błąd określenia ciśnienia pary wodnej w powietrzu (δe).

Wartość e oblicza się na podstawie tablic psychrometrycznych z dokładnością 0,1—0,2 mm, a to może spowodować dla odległości większych od 10 km dodatkowy błąd rzędu centymetrów.

Gdy wprowadzimy wyrażenie na e do wzoru na wskaźnik refrakcji, unikniemy konieczności korzystania z tablic psychrometrycznych.

Wzór psychrometryczny, dla wyznaczenia e jest następujący:

$$e = E' - A(t - t') \cdot p$$

gdzie E — ciśnienie pary wodnej nasyconej w temperaturze t

A — stała psychrometryczna.

Stała psychrometryczna A jest wielkością zależną od wentylacji, charakterystyczną dla danego przyrządu. Jest to wielkość wprost proporcjonalna do ilości ciepła dochodzącego do kulki termometru wskutek przewodnictwa cieplnego jego osłony, oraz odwrotnie proporcjonalna do pojemności masy powietrza przepływającego w otoczeniu termometru wilgot-

nego. Dla używanego zwykle psychrometru Assmanna, wzór do obliczenia ciśnienia pary wodnej w powietrzu, ma postać:

$$e = \left[E' - A(t - t') \frac{p}{750} \right] \text{ mm Hg} = E' - 0.0006623(t - t') \cdot p$$

Jest to wzór Sprunga. Po podstawieniu tego wyrażenia do wzoru (4) i wykonaniu przekształceń, otrzymamy:

$$\begin{aligned} Q = & [(0,37886\ 22053 - 0,00574\ 58224\ t + 0,00003\ 71448\ t^2 - \\ & - 0,00000\ 01950\ t^3 + 0,00000\ 00010\ t^4) + (0,00435\ 88616 - \\ & - 0,00003\ 20673\ t + 0,00000\ 01764\ t^2 - 0,00000\ 00009\ t^3) \cdot t'] \cdot p \\ & + (6,58187\ 75473 - 0,04842\ 16230\ t + 0,00026\ 63173\ t^2 - \\ & - 0,00000\ 13038\ t^3 + 0,00000\ 00060\ t^4) \cdot E' \end{aligned}$$

E' jest funkcją temperatury termometru wilgotnego — t' , i może być obliczona z tablic, lub też obliczone na podstawie wzoru np. „Goff-Gratch'a”:

$$\begin{aligned} \log_{10} E' = & -7,90298(T_s/T - 1) + 5,02808 \log_{10}(T_s/T) - \\ & - 1,3816 \cdot 10^{-7} (10^{11,334} 1^{-T/T_s} - 1) + 8,1328 \cdot (10^{-3,49149(T_s/T-1)} - 1) + \\ & + \log_{10} E'_s \end{aligned}$$

$$T_s = 373,16^{\circ} K$$

$$E'_s = 1 \text{ atm} = 1013,246 \text{ mb.}$$

Po pewnym przegrupowaniu wzoru (5) można wykonać tablice jak również i nomogramy.

Wzór (5) jest funkcją czterech zmiennych: Q, t, t', p , możemy go napisać w postaci:

$$Q = A + B \cdot p$$

Otrzymamy dwie funkcje składowe $F_1(t, t', A)$ i $F_2(t, t', p, B)$, które można przedstawić w postaci nomogramów. Dla funkcji F_1 i F_2 wykonano nomogramy siatkowe prostokątne. Zaletą nomogramów siatkowych, jest to że deformacje płaszczyzny rysunku nie mają wpływu na błąd odczytanych wyników.

Wzór roboczy, według którego obliczono wartości krzywych nomogramów jest:

$$\begin{aligned} A = & (6,58187\ 75473 - 0,04842\ 16230\ t + 0,00026\ 63173\ t^2 - \\ & - 0,00000\ 13038\ t^3 + 0,00000\ 00060\ t^4) \cdot f(t') \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B = & (0,37886\ 22053 - 0,00574\ 58224\ t + 0,00003\ 71448\ t^2 - \\ & - 0,00000\ 01950\ t^3 + 0,00000\ 00010\ t^4) + (0,00435\ 88616 - \\ & - 0,00003\ 20673\ t + 0,00000\ 01764\ t^2 - 0,00000\ 00009\ t^3) \cdot t' \end{aligned}$$

Nomogramy wykonano dla zakresów:

$$- 10^{\circ} \text{C} \leq t \leq + 40^{\circ} \text{C}$$

$$680 \text{ mm Hg} \leq p \leq 780 \text{ mm Hg}$$

$$\Delta t = t - t' = 15^{\circ}$$

Ze względu na szybki wzrost funkcji A wraz ze wzrostem temperatur t, t' co powoduje nierównomierną dokładność nomogramu, wykonano dwie części wykresu dla A . Pierwszy nomogram dla A w zakresie $- 10^{\circ} \leq t' \leq + 15^{\circ}$, drugi w zakresie $+ 15^{\circ} \leq t' \leq + 25^{\circ}$. W każdym z nich zostały tak przyjęte moduły dla skali t' , aby dokładność nomogramów była jednakowa.

Dla drugiej części wzoru $B \cdot p = c$ wykonano nomogram siatkowy złożony z dwóch nomogramów, o wspólnej rodzinie linii B . Suma odczytanych wartości A i c jest szukaną niewiadomą Q . Analizę dokładności nomogramów przeprowadzono na podstawie porównania wartości obliczonych ze wzoru ścisłego z wartościami odczytanymi z wykresów. Otrzymano różnice w zakresie 0,1—0,3 Q , co w przypadku redukcji odległości do 10 km może spowodować maksymalny błąd 0,3 cm. Sposób korzystania z nomogramów jest prosty i wyjaśniony na schematach pomocniczych.

LITERATURA

- [1] Laurila S.: Electronic Surveying and Mapping. The Ohio State University 1960.
- [2] Dąbski R.: Hydrologia kontynentalna. cz. II, Warszawa 1959.
- [3] Edge R. C. A.: Report of IAG Special Study Group No 19 on Electronic Distance Measurement. Helsinki 1960.
- [4] Rojecki A.: Tablice psychrometryczne. Warszawa 1959.
- [5] Smithsonian Meteorological Tables. Sixth Revised Edition. Washington 1951
- [6] Bakkelid S.: Preliminary Results of Studies of Some Tellurometer Problems. Oslo-Norway 1962.
- [7] Konorski B. Krywicki W.: Nomografia. Warszawa 1956.
- [8] Łukaszewicz J. Warnus M.: Metody numeryczne i graficzne. Warszawa 1956.
- [9] Newskij B. A.: Sprawoznaczaj kniga po nomografii. Moskwa 1951.

Recenzował: Sam. Prac. Nauk.-Bad. Wojciech Krzemiński

Złożono w Redakcji w marcu 1964 r.

ЗОФЬЯ МАЙДАНОВА

НОМОГРАММЫ ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ КОЭФФИЦИЕНТА
ПРЕЛОМЛЕНИЯ ВОЗДУХА ДЛЯ ВОЛН САНТИМЕТРОВОГО
ДИАПАЗОНА

Резюме

Исходной формулой для вычисления коэффициента преломления воздуха для волн сантиметрового диапазона принято формулу Эссен-Фрума рекомендованную XXII Ассамблеей М. А. Г. и Г. (Хельсинки 1960 г.)

$$Q = (n - 1) 10^6 = \frac{103,49}{T} (p - e) + \frac{86,26}{T} \left(1 + \frac{5748}{T}\right) e$$

Q — т. н. „преломляющее” число

n — коэффициент преломления воздуха

p — атмосферное давление

e — давление водяного пара в воздухе в мм ртутного столба.

Эти формулы после преобразований можно довести к форме, которая дает возможность составить для вычисления коэффициента преломления номограммы.

$$Q = A + B \cdot p$$

где

$$A = (6,58187 75473 - 0,04842 16230 t + 0,0026 63173 t^2 - \\ - 0,00000 13038 t^3 + 0,00000 00060 t^5) f(t')$$

$$B = (0,37886 22053 - 0,00574 58224 t + 0,00003 71448 t^2 - \\ - 0,00000 01950 t^3 + 0,00000 00010 t^4) + (0,00435 88616 - \\ - 0,00003 20673 t + 0,00000 01764 t^2 - 0,00000 00009 t^3) t'$$

t — температура по сухому термометру

t' — температура по влажному термометру

Номограммы составлено для предела

$$- 10^{\circ}\text{C} \leq t \leq + 40^{\circ}\text{C}$$

$$680 \text{ mm Hg} \leq p \leq 780 \text{ mm Hg}$$

$$\Delta t = t - t' = 15^{\circ}\text{C}$$

Коэффициент преломления воздуха определяется графически, исходя из снятых на местности значений температур t и t' из психрометра Ассмана и давления p из альтиметра Паулина. Точность номограмм при редуцировании расстояния до 10 мм порядка 1 см.

ZOFIA MAJDANOWA

NOMOGRAMS FOR COMPUTATION OF AIR REFRACTION
INDEX FOR MICROWAVE RANGE

S u m m a r y

As an initial formula of computation of air refraction index for microwave range, the formula of Essen and Froome is recommended by XII Congress M.M.G.G. (Helsinki 1960)

$$Q = (n - 1) 10^6 = \frac{103,49}{T} (p - e) + \frac{86,26}{T} \left(1 + \frac{5748}{T} \right) e$$

in which

Q is so called refraction number

n is air refraction index

p is atmospheric pressure

e is steam pressure in the air in mm Hg

This formula after transformation may be written in the form enabling the use of nomograms for computation of the air refraction. Thus

$$Q = A + B \cdot p$$

in which

$$A = (6,58187\ 75473 - 0,04842\ 16230\ t + 0,0026\ 63173\ t^2 - \\ - 0,00000\ 13038\ t^3 + 0,00000\ 00060\ t^4) f(t')$$

$$B = (0,37886\ 22053 - 0,00574\ 58224\ t + 0,00003\ 71448\ t^2 - \\ - 0,00000\ 01950\ t^3 + 0,00000\ 00010\ t^4) + (0,00435\ 88616 - \\ - 0,00003\ 20673\ t + 0,00000\ 01764\ t^2 - 0,00000\ 00009\ t^3) \cdot t'$$

t is temperature of dry thermometer

t' is temperature of moistened thermometer.

Nomograms were prepared for ranges

$$- 10^{\circ}\text{C} \leq t \leq + 40^{\circ}\text{C}$$

$$680 \text{ mm Hg} \leq p \leq 780 \text{ mm Hg}$$

$$\Delta t = t - t' = 15^{\circ}\text{C}$$

Air refraction index is determined graphically on the base of field values namely: temperatures t and t' measured by Assmann psychrometer, pressure p measured by Paulin altimeter. The accuracy of nomograms when reducing distances to 10 km is about 1 cm.