

TADEUSZ KLUSS

513.7:516:526.4

Transformacje współrzędnych wykonywane na podstawie punktów łącznych

WYKAZ TREŚCI.	Str.
1. Wstęp	12
2. Transformacje bez nadliczbowej ilości punktów łącznych	
A. Konforemna transformacja liniowa	14
B. Konforemna transformacja 2-go rzędu	17
C. Transformacja afiniczna	22
3. Transformacje o nadliczbowej ilości punktów łącznych	
A. Konforemna transformacja liniowa	26
B. Konforemna transformacja 2-go rzędu	27
C. Transformacje niekonforemne 2-go rzędu	30
4. Transformacje współrzędnych geograficznych	
A. Wzory różniczkowe	31
B. Afiniczna transformacja współrzędnych geograficznych	35
5. Równoczesna transformacja współrzędnych	36
6. Usunięcie odchyłek na punktach łącznych	39
7. Transformacja współrzędnych różnych odwzorowań układów i systemów	
A. Transformacja współrzędnych lokalnych	40
B. Transformacja współrzędnych różnych systemów	43
C. Zamiana współrzędnych dwóch układów Gaussa-Krügera znajdujących się w dowolnej odległości południków	45
8. Transformacja afiniczna z elipsoidy Bessela na elipsoidę Krasowskiego	46
9. Łączenie sieci triangulacyjnych na większych obszarach	
A. Łączenie sieci triangulacyjnych o współrzędnych w różnych systemach	48
B. Łączenie sieci triangulacyjnych o współrzędnych w tym samym odwzorowaniu i układzie	49
10. Zniekształcenia odwzorowawcze oraz dokładność transformowanych współrzędnych	
A. Deformacje współrzędnych spowodowane transformacją afiniczną	51
B. Zniekształcenia odwzorowawcze	54
C. Średnie błędy przetransformowanych współrzędnych	57
11. Przykłady	62

1. Wstęp

Do transformacji tych zaliczamy zamiany współrzędnych (x, y) dowolnego odwzorowania, układu i systemu na współrzędne (u, v) innego odwzorowania układu i systemu. Na obszarze Polski posiadamy cztery różne odwzorowania, dwadzieścia układów współrzędnych, pięć systemów (Pułkowo, Borowo Góra, Rauenberg, Helmerturm, Hermanskogel) oraz kilkadziesiąt tysięcy punktów należących do triangulacji budowanych w okresie około 100 lat. Zamiana tak różnorodnych współrzędnych na jednolite wymagała, ze względu na ekonomię i dokładność przeliczeń współrzędnych, nie tylko dokonania korzystnego wyboru spośród znanych metod transformacji, lecz również opracowania nowych sposobów i umów dotyczących szczególnie dokładności współrzędnych przeliczonych punktów.

Do względnie prostych funkcji, które równocześnie mogły by rozwiązać omawiane zagadnienie należą konforemne i szeregu potęgowego funkcje 2-go rzędu, jednakże pracochłonność związana z użyciem tych funkcji, ustaleniem identyczności punktów łącznych i masowym przeliczeniem współrzędnych jest zwykle tak duża, że transformacje te wykonujemy zwykle etapami, sprowadzając najpierw współrzędne do tego samego odwzorowania i układu, a następnie używając konforemnej funkcji liniowej, której współczynniki wyznaczy się z nadliczbowej ilości punktów łącznych (metoda Helmerta). Ten sposób postępowania zwiększy wprawdzie pracochłonność obliczeń (sprowadzenie współrzędnych do tego samego odwzorowania i układu) w stosunku do transformacji przy użyciu funkcji 2-go rzędu, które w wielu wypadkach nie wymagają jednolitości odwzorowania i układu, równocześnie jednak pozwala ustalić identyczność punktów łącznych przy pomocy mniej pracochłonnej funkcji liniowej, jak również ułatwia transformację pozostałych punktów w ilości, jak wspomniano wyżej, wielu tysięcy punktów. Metody tej nie zawsze będzie można użyć. Ma to np. miejsce w transformacjach współrzędnych katastralnych w Małopolsce, które nie będąc odwzorowania matematycznego nie dają się sprowadzić do jednolitego odwzorowania, jak też współrzędnych odwzorowania stereograficznego z powodu pracochłonności przeliczeń tych współrzędnych do jednolitego odwzorowania i układu. W tych przypadkach korzystnym będzie użycie funkcji 2-go rzędu lub też innych podanych niżej metod.

Następnym zagadnieniem związanym z użyciem metody transformacji jest sprawa usunięcia odchyłek na punktach łącznych oraz określenie dokładności współrzędnych otrzymanych po usunięciu tych odchyłek. Ponieważ ściśle obliczenie błędu dziesiątek tysięcy punktów nie może być wykonywane ze względu na pracochłonność tych liczeń, użyte będą przybliżone wzory otrzymane z porównania ze ścisłym wzorem uzyskanym

z wyrównania poszczególnych punktów w oparciu o spostrzeżenia otrzymane ze współrzędnych Helmerta i przyjęciu znanych błędów tych spostrzeżeń.

Transformacje wykonywane na podstawie punktów łącznych znajdują zastosowanie nie tylko w przeliczeniu współrzędnych różnych systemów lecz również w łączeniu wielu niezależnie wyrównanych grup sieci triangulacyjnych o wspólnych punktach części obwodnicy, lub też posiadających wspólną sieć łączną wyższego rzędu wyrównaną jednolicie. Przykładem takiej sieci jest sieć wypełniająca łączna z siecią I-go rzędu. Rozwiązanie tak rozumianej transformacji (łączenia sieci) jest ułatwione, ponieważ nie zachodzi tu różność odwzorowań, układów i systemów, nie zachodzą tu również większe trudności w ustaleniu identyczności punktów łącznych. Tego rodzaju łączenie sieci triangulacyjnych zastępuje równoczesne wyrównanie, t. zn. jest przybliżonym wyrównaniem.

Transformacje na podstawie punktów łącznych stosować również można do łączenia sieci triangulacyjnych wielkich obszarów (np. sieci triangulacyjne przyległych państw.). W transformacjach takich używać będziemy współrzędnych geograficznych (φ, λ) odniesionych do różnych systemów.

Prócz tych zagadnień omówione zostaną również drobne transformacje sieci lokalnych (miasta itp.) na bardzo małych obszarach. Również i te transformacje wymagają użycia punktów łącznych chociaż ich rozwiązanie przebiegać może w odmienny niż wyżej naszkicowany sposób.

Poniżej omówione zostaną tylko takie funkcje, oraz metody, które mają znaczenia w transformacjach współrzędnych, a mianowicie:

1. Odwzorowanie wiernokątne o dwóch punktach łącznych,
2. „ „ trzech „ „
3. „ rzutowe „ „ „ (afinizm)
4. Funkcje odwzorowawcze złożone z szeregów potęgowych 2-go rzędu.
5. Wzory różniczkowe uwzględniające skręt, zmianę skali i zmianę elipsoid,
6. Transformacje oparte o redukcję skali,
7. Transformacje i inne metody mające na celu usunięcie odchylek na punktach łącznych.

Użyte wyżej oznaczenia systemu i układu współrzędnych rozumiane są następująco: systemem współrzędnych nazywamy współrzędne określone przyjętą elipsoidą i punktem wyjścia (np. współrzędne (φ, λ) na elipsoidzie Bessela o punkcie wyjścia Borowa Góra, w skrócie: system Borowej Góry), układem — współrzędne określone rodzajem odwzorowania na płaszczyźnie, której początek współrzędnych podany jest za pomocą współrzędnych geograficznych (φ_0, λ_0) w znanym systemie (np. współ-

rzędne Gaussa-Krügera na elipsoidzie Bessela o punkcie wyjściowym Borowej Góry, w skrócie — układ Gaussa-Krügera w systemie Borowej Góry). Natomiast układem lokalnym nazwiemy układ, którego początek nie jest podany za pomocą współrzędnych określonego systemu, jest to równoznaczne z brakiem odwzorowania współrzędnych należących do układu lokalnego.

Punktami łącznymi nazwiemy punkty triangulacyjne, o współrzędnych określonego systemu i układu otrzymanych z obliczeń triangulacji wykonanych w różnych okresach czasu.

2. Transformacje bez nadliczbowej ilości punktów łącznych

Do transformacji tych należą funkcje konforemne 1-go i 2-go rz. oraz funkcja rzutowa (afinizm).

A. Konforemne transformacje liniowe

Odwzorowanie konforemne wyraża się funkcją zmiennej zespolonej:

$$w = f(z), \quad (1)$$

gdzie:

$$w = u + iv, \quad z = x + iy.$$

Funkcję $f(z)$ tak obieramy, ażeby była praktyczna w użyciu, funkcją tą może być szereg potęgowy:

$$w = f(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + c_3 z^3 + \dots \quad (2)$$

lub też wielomian interpolacyjny Lagrange'a:

$$\begin{aligned} w = f(z) = & \frac{(z - z_2)(z - z_3)}{(z_1 - z_2)(z_1 - z_3)} w_1 + \frac{(z - z_1)(z - z_3)}{(z_2 - z_1)(z_2 - z_3)} w_2 + \\ & + \frac{(z - z_1)(z - z_2)}{(z_3 - z_1)(z_3 - z_2)} w_3 + \dots \end{aligned} \quad (3)$$

Jeżeli funkcja odwzorowawcza jest liniowa:

$$w = c_0 + c_1 z, \quad (4)$$

gdzie: $c_0 = a_0 + ib_0, \quad c_1 = a_1 + ib_1,$

to z (4) otrzymamy:

$$u + iv = a_0 + ib_0 + (a_1 + ib_1)(x + iy),$$

a stąd:

$$\begin{aligned} u &= a_0 + a_1 x - b_1 y \\ v &= b_0 + b_1 x + a_1 y \end{aligned} \quad (5)$$

Niewiadome a_0, b_0, b_1 wyznaczymy z czterech równań otrzymanych na podstawie punktów łącznych $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$:

$$\begin{aligned}u_1 &= a_0 + a_1 x_1 - b_1 y_1 \\v_1 &= b_0 + b_1 x_1 + a_1 y_1 \\u_2 &= a_0 + a_1 x_2 - b_1 y_2 \\v_2 &= b_0 + b_1 x_2 + a_1 y_2\end{aligned}\tag{6}$$

Ażeby w praktyce operować małymi cyframi, oraz obliczać współrzędne pc kolei z danych różnic współrzędnych wprowadzamy różnice współrzędnych, otrzymując z (5):

$$\begin{aligned}u_i &= u_{i-1} + a(x_i - x_{i-1}) - b(y_i - y_{i-1}) \\v_i &= v_{i-1} + b(x_i - x_{i-1}) + a(y_i - y_{i-1})\end{aligned}\tag{7}$$

gdzie $i = 1, 2, 3 \dots n$

Współczynniki wyznacza się z dwóch punktów łącznych o znanych współrzędnych z równań (7):

$$a = \frac{\Delta u \Delta x + \Delta v \Delta y}{\Delta x^2 + \Delta y^2}, \quad b = \frac{\Delta v \Delta x - \Delta u \Delta y}{\Delta x^2 + \Delta y^2}\tag{7a}$$

gdzie: $\Delta u, \Delta v, \Delta x, \Delta y$ są różnicami współrzędnych.

Jeżeli dwa punkty łączne przyjmiemy równoległe do osi x , tj. tak ażeby $y_1 = y_2$ oraz $x_1 > x_2$ wtedy odległość obu punktów będzie:

$$\Delta x = x_2 - x_1 = -s, \quad \Delta y = 0.$$

Podstawiając $\Delta x, \Delta y$ do wzorów na a, b otrzymamy:

$$a = -\frac{\Delta u}{s} = -\frac{u_2 - u_1}{s}, \quad b = -\frac{\Delta v}{s} = -\frac{v_2 - v_1}{s}\tag{7b}$$

Geometryczna interpretacja konforemnej funkcji liniowej. Przyjmując we wzorze (4):

$$w = c_0 + c_1 z$$

na współczynnik c_1 wartość:

$$c_1 = k e^{i\alpha}$$

gdzie k jest stałą, $e^{i\alpha} = (\cos \alpha + i \sin \alpha)$ otrzymamy:

$$u - iv = a_0 + ib_0 + k(\cos \alpha + i \sin \alpha)(x + iy),$$

skąd po porównaniu rzeczywistych i urojonych otrzymamy:

$$\begin{aligned}u &= a_0 + k(x \cos \alpha - y \sin \alpha) \\v &= b_0 + k(x \sin \alpha + y \cos \alpha)\end{aligned}\tag{8}$$

Podstawiając $a_1 = k \cos \alpha$ $b_1 = k \sin \alpha$ otrzymujemy poprzednie wzory (5).

Wzory (8) wyrażają zmiany jakie dozna figura układu (x, y) na skutek skreću o kąt α zmiany skali o wielkości k i przesunięcia równoległego a_0, b_0 . Transformacje wykonane tymi wzorami nazywamy transformacja-

mi podobnymi. Wzory (8) wyprowadzić również można w sposób geometryczny przy pomocy odcinka $\overline{AB}$ przedstawionego współrzędnymi (x, y) i (u, v) obu układów.

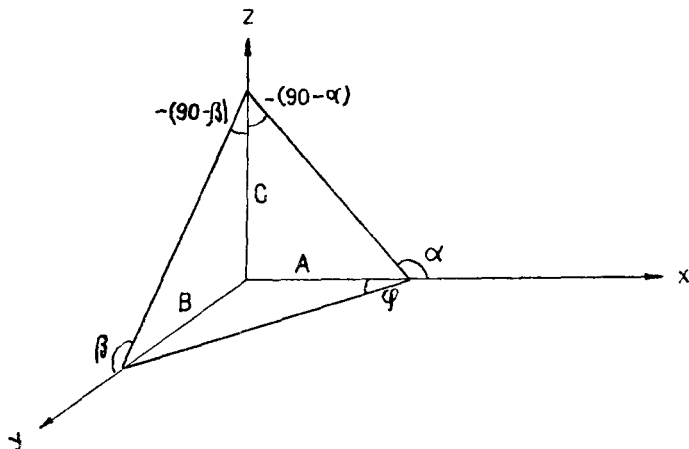
Odejmując po obu stronach równań (5) x i y otrzymamy w formie odchyłek:

$$\begin{aligned} dx &= u - x = (a_1 - 1)x - b_1 y + a_0 \\ dy &= v - y = b_1 x + (a_1 - 1)y + b_0 \end{aligned} \quad (9)$$

Przy zmieniających się wyrazach wolnych $(a_0 - dx)$, $(b_0 - dy)$ równania (9) przedstawiają dwie gromady prostych równoległych na płaszczyźnie (x, y) wyrażonej ogólnym wzorem:

$$z = ax + by + c \quad (10)$$

Wysokości dx, dy ponad płaszczyznę poziomą (x, y) określają wielkość przesunięcia jakiego dozna punkt w kierunku osi x lub y na skutek transformacji. Linie wysokości (warstwice) płaszczyzny transformacji



Rys. 1

są liniami równych dx, dy . Z równania (10) można obliczyć kąt φ pod którym biega warstwice (linie równych odchyłek), będzie bowiem:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{B}{A} = \frac{\frac{B}{c}}{\frac{A}{c}} = \frac{-\operatorname{tg}(90 - \beta)}{-\operatorname{tg}(90 - \alpha)} = \frac{\operatorname{ctg} \beta}{\operatorname{ctg} \alpha} = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \beta} = \frac{a}{b}.$$

Zastępując współczynniki a, b współczynnikami wzorów (9) otrzymamy:

$$\operatorname{tg} \varphi_x = -\frac{a_1 - 1}{b_1}, \quad \operatorname{tg} \varphi_y = \frac{b_1}{a_1 - 1} \quad (11)$$

Wzory te wyrażają, prostopadłość linii równych odchyłek.

B. Konforemne transformacje 2-go rzędu

Transformacji tych używamy w przypadkach, gdy współrzędne konforemne odwzorowania są różnego rodzaju (np. współrzędne Gaussa-Krügera i współrzędne stereograficzne), lub też układy tego samego odwzorowania konforemne są odległe (np. współrzędne Gaussa-Krügera w układach $\lambda_1 = 18^\circ$ i $\lambda_2 = 19^\circ 30'$), mogą też równocześnie zachodzić oba przypadki. Konforemną funkcję 2-go rzędu wyraża wzór [1]:

$$w = c_0 + c_1 z + c_2 z^2,$$

lub we współrzędnych kartezjańskich:

$$\begin{aligned} u &= a_0 + a_1 x - b_1 y + a_2(x^2 - y^2) - 2b_2 xy \\ v &= b_0 + a_1 y + b_1 x + b_2(x^2 - y^2) + 2a_2 xy \end{aligned} \quad (12)$$

Niewiadome współczynniki tych równań wyznacza się z sześciu równań o znanych współrzędnych dla trzech punktów łącznych. Prościej jednak rozwiązaniem jest użycie wielomianu interpolacyjnego Lagrange'a szczególnie dla przypadku, gdy punkty łączne 1, 2, 3 oberzemy równoległe do osi układu x .

Uporządkujemy w tym celu pierwszy wyraz wielomianu interpolacyjnego Lagrange'a 2-go rzędu:

$$\begin{aligned} w - z = \Delta z = & \frac{(z - z_2)(z - z_3)}{(z_1 - z_2)(z_1 - z_3)} \Delta z_1 + \frac{(z - z_1)(z - z_3)}{(z_2 - z_1)(z_2 - z_3)} \Delta z_2 + \\ & + \frac{(z - z_1)(z - z_2)}{(z_3 - z_1)(z_3 - z_2)} \Delta z_3 \dots \end{aligned} \quad (12a)$$

według zmiennej z , przekształćmy go i drogą cykliczną wykonajmy przekształcenia pozostałych dwóch wyrazów.

Uporządkowany w/g z pierwszy wyraz:

$$\frac{(z - z_2)(z - z_3)}{z_1 - z_2)(z_1 - z_3)} \Delta z_1 = \frac{\Delta z_1}{(z_1 - z_2)(z_1 - z_3)} (z_2 z_3 - (z_2 + z_3)z + z^2) \dots \quad (13)$$

Oznaczmy boki trójkąta interpolacyjnego 1, 2, 3 przez s_1, s_2, s_3 oraz azy-muty boków $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, wtedy otrzymamy z rysunku:

(dla przejrzystości rysunku wykreślono tylko bok s_3 trójkąta 1, 2, 3)

$$z_1 - z_2 = s_3 e^{i\alpha_3}; \quad z_1 - z_3 = s_2 e^{i\alpha_2}$$

Oznaczmy współrzędne biegunowe punktów 1, 2, 3 przez:

$$\begin{aligned} r_1, \varphi_1; \quad r_2, \varphi_2; \quad r_3, \varphi_3, \quad \text{to:} \\ z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}; \quad z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}; \quad z_3 = r_3 e^{i\varphi_3}. \end{aligned}$$

Wprowadźmy następnie oznaczenia:

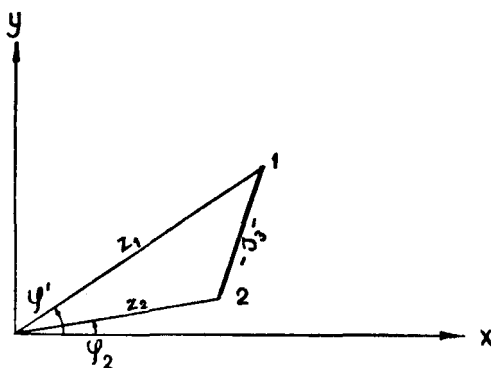
$$\operatorname{tg} \varepsilon_1 = \frac{\Delta y_1}{\Delta x_1}; \quad e_1 = \frac{\Delta y_1}{\sin \varepsilon_1} = \frac{\Delta x_1}{\cos \varepsilon_1},$$

to otrzymamy:

$$\Delta z_1 = \Delta x_1 + i \Delta y_1 = e_1 (\cos \varepsilon_1 + i \sin \varepsilon_1) = e_1 e^{i \varepsilon_1},$$

po podstawieniu tych wartości do (13) otrzymamy przekształcony pierwszy wyraz wielomianu Lagrange'a; oznaczmy ten wyraz przez A , to będzie:

$$A = \frac{e_1 e^{i \varepsilon_1}}{s_2 s_3 e^{i(\alpha_2 + \alpha_3)}} (r_2 r_3 e^{i(\varphi_2 + \varphi_3)} - (r_2 e^{i \varphi_2} + r_3 e^{i \varphi_3}) z + z^2)$$



Rys. 2

Oznaczmy następnie:

$$k_1 = \frac{e_1}{s_2 s_3}; \quad \psi = \varepsilon_1 - \alpha_2 - \alpha_3$$

to otrzymamy:

$$A = k_1 r_2 r_3 e^{i(\psi_1 + \varphi_2 + \varphi_3)} - (k_1 r_2 e^{i(\psi_2 + \varphi_2)} + k_1 r_3 e^{i(\psi_1 + \varphi_3)}) z + k_1 e^{i \psi_1} z, \quad (14)$$

Jeżeli podobnie postąpimy z wyrazem 2-im i 3-im równania (12a) — przy czym wystarczy tu cykliczna zamiana wskaźników — to po uporządkowaniu otrzymamy funkcję:

$$\Delta z = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 \quad (14a)$$

o następujących współczynnikach:

$$\begin{aligned} c_0 &= a_0 + i b_0 = k_1 r_2 r_3 e^{i(\psi_1 + \varphi_2 + \varphi_3)} + k_2 r_3 r_1 e^{i(\psi_2 + \varphi_3 + \varphi_1)} + k_3 r_1 r_2 e^{i(\psi_3 + \varphi_1 + \varphi_2)} \\ c_1 &= a_1 + i b_1 = -k_1 r_2 e^{i(\psi_1 + \varphi_2)} - k_1 r_3 e^{i(\psi_1 + \varphi_3)} - k_2 r_3 e^{i(\psi_2 + \varphi_2)} - k_2 r_1 e^{i(\psi_2 + \varphi_1)} - \\ &\quad - k_3 r_1 e^{i(\psi_3 + \varphi_1)} - k_3 r_2 e^{i(\psi_3 + \varphi_2)} \end{aligned} \quad (15)$$

$$c_2 = a_2 + i b_2 = k_1 e^{i \psi_1} + k_2 e^{i \psi_2} + k_3 e^{i \psi_3}.$$

Po porównaniu rzeczywistych i urojonych otrzymamy:

$$a_0 = r_1 r_2 r_3 \left\{ \frac{k_1}{r_1} \cos(\psi_1 + \varphi_2 + \varphi_3) + \frac{k_2}{r_2} \cos(\psi_2 + \varphi_3 + \varphi_1) + \frac{k_3}{r_3} \cos(\psi_3 + \varphi_2 + \varphi_1) \right\}$$

$$b_0 = r_1 r_2 r_3 \left\{ \frac{k_1}{r_1} \sin(\psi_1 + \varphi_2 + \varphi_3) + \frac{k_2}{r_2} \sin(\psi_2 + \varphi_3 + \varphi_1) + \frac{k_3}{r_3} \sin(\psi_3 + \varphi_2 + \varphi_1) \right\}$$

$$a_1 = - \{ k_1 (r_2 \cos(\psi_1 + \varphi_2) + r_3 \cos(\psi_1 + \varphi_3)) + k_2 (r_3 \cos(\psi_2 + \varphi_3) + r_1 \cos(\psi_2 + \varphi_1)) + k_3 (r_1 \cos(\psi_3 + \varphi_1) + r_2 \cos(\psi_3 + \varphi_2)) \}$$

$$b_1 = - \{ k_1 (r_2 \sin(\psi_1 + \varphi_2) + r_3 \sin(\psi_1 + \varphi_3)) + k_2 (r_3 \sin(\psi_2 + \varphi_3) + r_1 \sin(\psi_2 + \varphi_1)) + k_3 (r_1 \sin(\psi_3 + \varphi_1) + r_2 \sin(\psi_3 + \varphi_2)) \}$$

$$a_2 = k_1 \cos \psi_1 + k_2 \cos \psi_2 + k_3 \cos \psi_3$$

$$b_2 = k_1 \sin \psi_1 + k_2 \sin \psi_2 + k_3 \sin \psi_3$$

Otrzymane współczynniki podstawione do wzoru (14a) wyrażonego w formie

$$\begin{aligned} u - x &= dx = a_0 + a_1 x - by + a_2 (x^2 - y^2) - 2b_2 xy \\ v - y &= dy = b_0 + a_1 y + b_1 x + b_2 (x^2 - y^2) + 2a_2 xy \end{aligned} \quad (16)$$

rozwiązują omawiane zagadnienie.

Metodę powyższą dosyć uciążliwą w praktycznym zastosowaniu uprościć można w sposób następujący [2]:

Transformację przeprowadza się w dwóch częściach. W pierwszej kolejności wykonuje się konforemna transformację liniową na podstawie dwóch punktów łącznych, następnie wyznacza się wielkość odchyłki powstałej z tego powodu, że transformacja przez podobieństwo nie może sprowadzić do pokrycia się z punktem trzecim.

Postępowanie będzie następujące:

Przyjmijmy transformację wyrażoną związkiem:

$$w = f(z).$$

Wykonana transformacja przez podobieństwo uzgodni dwa punkty łączne, na punkt 3-ci nie otrzymamy punktu układu wtórnego „w” lecz jakiś punkt η . Konieczną poprawką będzie $d\eta$.

Ponieważ η zależne jest od funkcji odwzorowawczej, tj.:

$$\eta = f_1(z)$$

więc również będzie:

$$d\eta = f_2(z)$$

Przyczym $d\eta$ jest zmienną zespoloną: $d\eta = v_x + iv_y$.

Przyjmijmy na funkcję $f_2(z)$ wielomian interpolacyjny Lagrange'a. Na skutek transformacji przez podobieństwo odchyłki w punktach 1 i 2 będą:

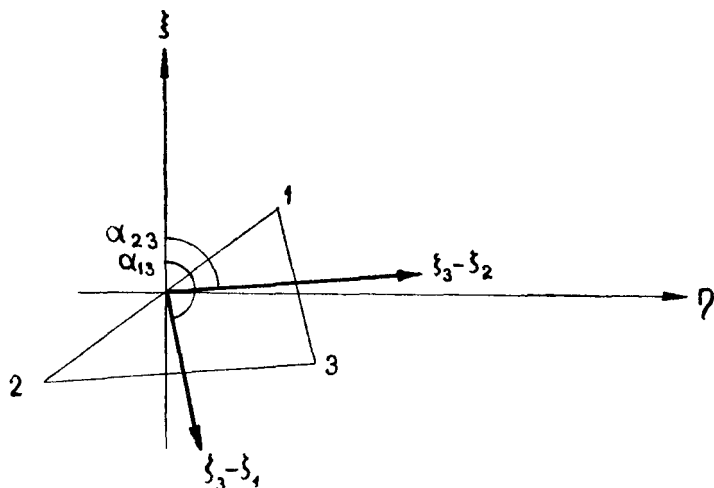
$$d\eta_1 = d\eta_2 = 0,$$

odpadną dwa wyrazy pierwszego wzoru Lagrange'a i pozostanie:

$$d\eta = \frac{(z - z_1)(z - z_2)}{(z_3 - z_1)(z_3 - z_2)} d\eta_3 \quad (17)$$

Celem ułatwienia rozwiązania przenieśmy równolegle początek układu z do punktu o współrzędnych (rys.):

$$\frac{x_1 + x_2}{2}, \quad \frac{y_1 + y_2}{2},$$



Rys. 3

tj. do środka odcinka 1, 2. Tę nową płaszczyznę oznaczmy przez ζ (ξ, η). W nowym układzie odchyłki wyrazi się wzorem:

$$d\eta = \frac{(\zeta - \zeta_1)(\zeta - \zeta_2)}{(\zeta_3 - \zeta_1)(\zeta_3 - \zeta_2)} d\eta_3, \quad (18)$$

w którym wg rys. $\zeta_1 = -\zeta_2$, stąd otrzymuje się:

$$d\eta = \frac{d\eta_3}{(\zeta_3 - \zeta_1)(\zeta_3 - \zeta_2)} (\zeta_2^2 - \zeta_1^2 \dots) \quad (19)$$

Z rysunku:

$$\zeta_3 - \zeta_1 = s_2 e^{i\alpha_{13}}; \quad \zeta_3 - \zeta_2 = s_1 e^{i\alpha_{23}}, \quad \zeta_1 = \frac{s_3}{2} e^{i\alpha_{21}}$$

Podstawiając te wyrazy do (19) otrzymuje się:

$$d\eta = \frac{d\eta_3}{s_1 s_2 e^{i(\alpha_{13} + \alpha_{23})}} \left(\zeta^2 - \frac{s_3^2}{4} e^{i2\alpha_{21}} \right) \quad (20)$$

Przyjmując następnie na rzędne punktów 1 i 2 $\eta_2 = \eta_1 = 0$ oraz na odcięte $\xi_1 = -\xi_2 = \frac{s}{2}$ otrzymuje się:

$$s, s_2 = \frac{s^2}{4}; \quad \alpha_{13} + \alpha_{23} = 180^\circ; \quad \alpha_{21} = 0$$

$$e^{i(\alpha_{13} + \alpha_{23})} = e^{i180^\circ} = -1; \quad e^{i2\alpha_{21}} = 1$$

Wartości te podstawione do (20) dadzą:

$$d\eta = d\eta_3 \cdot \frac{4}{s^2} \left(\zeta^2 - \frac{s^2}{4} \right)$$

Rozdzielając rzeczywiste od urojonych i uwzględniając, że

$$d\eta = v_x + iv_y; \quad d\eta_3 = v_{x_3} + iv_{y_3}$$

otrzymamy:

$$\begin{aligned} d\eta &= -\frac{4}{s^2} (v_{x_3} + iv_{y_3}) \left(\xi^2 - \eta^2 + 2i\xi\eta - \frac{s^2}{4} \right) \\ v_x &= -\frac{4}{s^2} v_{x_3} (\xi^2 - \eta^2) + v_{x_3} + 2\frac{4}{s^2} v_{y_3} \xi\eta. \\ v_y &= -\frac{4}{s^2} v_{y_3} (\xi^2 - \eta^2) + v_{y_3} - 2\frac{4}{s^2} v_{x_3} \xi\eta. \end{aligned} \quad (21)$$

załóżmy:

$$a_x = \frac{4}{s^2} V_{x_3}; \quad a_y = \frac{4}{s^2} V_{y_3}$$

i podstawmy w równanie (21), to otrzymamy ostatecznie:

$$\begin{aligned} v_x &= v_{x_3} + 2a_y \xi\eta - a_x (\xi^2 - \eta^2) \\ v_y &= v_{y_3} - 2a_y (\xi^2 - \eta^2) - 2a_x \xi\eta. \end{aligned} \quad (22)$$

Odchyłki v_{x_3} , v_{y_3} na punkcie 3-im są z założenia znane i równają się różnicy współrzędnych punktu 3-go w obu układach, t. zn.:

$$v_{x_3} = u_3 - x_3; \quad v_{y_3} = v_3 - y_3.$$

Nadając odchyłkom v_x , v_y w równaniu (21) stałe wartości otrzymamy równanie miejsc geometrycznych równych zmian współrzędnych. Równanie to przedstawia gromadę n hiperbol o wspólnym punkcie środkowym.

Transformacje wykonane wzorami (22) są praktyczne w użyciu, jak można się o tym przekonać na załączonym przykładzie.

C. Transformacje afiniczne

Ogólne odwzorowanie rzutowe określa się wzorem:

$$u = \frac{a_1 x + b_1 y + c_1}{a_3 x + b_3 y + 1}, \quad v = \frac{a_2 x + b_2 y + c_2}{a_3 x + b_3 y + 1} \quad (23)$$

Gdy $a_3 = b_3 = 0$ otrzymujemy szczególny wypadek odwzorowania afinicznego:

$$\begin{aligned} u &= a_1 x + b_1 y + c_1 \\ v &= a_2 x + b_2 y + c_2 \end{aligned} \quad (24)$$

lub w formie poprawek:

$$\begin{aligned} dx &= u - x = (a_1 - 1)x + b_1 y + c_1 \\ dy &= v - y = a_2 x + (b_2 - 1)y + c_2 \end{aligned} \quad (25)$$

Wzory (25) wyprowadzić również można rozpatrując odwzorowanie dowolnej płaszczyzny (x, y) na płaszczyznę (u, v) w sposób następujący: Ogólna zależność odwzorowawcza wyraża się wzorem

$$u = \varphi(x, y); \quad v = \psi(x, y);$$

gdzie φ i ψ są dowolnymi funkcjami różniczkowalnymi.

Obierając w pośrodku obszaru płaszczyzny (x, y) punkt x_0, y_0 tak ażeby

$$x = x_0 + \delta x, \quad y = y_0 + \delta y$$

otrzymuje się, jeżeli δ_x, δ_y są dostatecznie małe:

$$dx = u - x = \varphi(x_0, y_0) + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \delta x + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \delta y - (x_0 + \delta x)$$

$$dy = v - y = \psi(x_0, y_0) + \frac{\partial \psi}{\partial x} \delta x + \frac{\partial \psi}{\partial y} \delta y - (y_0 + \delta y)$$

Oznaczając:

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{\partial \varphi}{\partial x}, & b_1 &= \frac{\partial \varphi}{\partial y}, & c_1 &= \varphi(x_0, y_0) - x_0 \\ a_2 &= \frac{\partial \psi}{\partial x}, & b_2 &= \frac{\partial \psi}{\partial y}, & c_2 &= \psi(x_0, y_0) - y_0 \end{aligned}$$

otrzymuje się:

$$\begin{aligned} dx &= u - x = (a_1 - 1)\delta x + b_1 \delta y + c_1 \\ dy &= v - y = a_2 \delta x + (b_2 - 1)\delta y + c_2 \end{aligned}$$

Wzór ten zgadza się z wzorem (25). Z założenia, że $\delta x, \delta y$ są małe wynika, że odwzorowanie afiniczne jest tym dokładniejsze im mniejsze są boki trójkąta afinicznego.

Transformacja afiniczna jest określona trzema odpowiadającymi sobie punktami obu układów (u, v) , (x, y) . Znając odpowiadające sobie pary współrzędnych oblicza się z wzorów (24) niewiadome współczynniki w sposób następujący:

przyjmując oznaczenia:

$$A_1 = a_1 - 1, \quad B_1 = b_1, \quad A_2 = a_2, \quad B_2 = b_2 - 1$$

będzie:

$$\begin{aligned} dx &= u - x = A_1 x + B_1 y + c_1 \\ dy &= v - y = A_2 x + B_2 y + c_2 \end{aligned} \quad (26)$$

Dla określonego punktu np. punktu 1 będzie (podobnie dla punktu 2, 3):

$$\begin{aligned} dx_1 &= A_1 x_1 + B_1 y_1 + c_1 \\ dy_1 &= A_2 x_1 + B_2 y_1 + c_2 \end{aligned} \quad (27)$$

Odejmując (27) od (26) otrzymamy:

$$dx - dx_1 = A_1 (x - x_1) + B_1 (y - y_1)$$

podobnie

$$dx - dx_2 = A_1 (x - x_2) + B_1 (y - y_2)$$

$$dx - dx_3 = A_1 (x - x_3) + B_1 (y - y_3)$$

oraz odpowiednio:

$$dx_2 - dx_1 = A_1 (x_2 - x_1) + B_1 (y_2 - y_1)$$

$$dx_3 - dx_2 = A_1 (x_3 - x_2) + B_1 (y_3 - y_2)$$

Z ostatniego równania otrzymamy w formie wyznaczników:

$$A_1 = \frac{\begin{vmatrix} (dx_2 - dx_1) & (y_2 - y_1) \\ (dx_3 - dx_2) & (y_3 - y_2) \end{vmatrix}}{D} \quad B_1 = \frac{\begin{vmatrix} (x_2 - x_1) & (dx_2 - dx_1) \\ (x_3 - x_2) & (dx_3 - dx_2) \end{vmatrix}}{D}$$

podobnie otrzymamy:

$$A_2 = \frac{\begin{vmatrix} (dy_2 - dy_1) & (y_2 - y_1) \\ (dy_3 - dy_2) & (y_3 - y_2) \end{vmatrix}}{D} \quad B_2 = \frac{\begin{vmatrix} (x_2 - x_1) & (y_2 - y_1) \\ (x_3 - x_2) & (y_3 - y_2) \end{vmatrix}}{D}$$

gdzie:

$$D = \begin{vmatrix} (x_2 - x_1)(y_2 - y_1) \\ (x_3 - x_2)(y_3 - y_2) \end{vmatrix} \quad (28)$$

c_1 i c_2 wyznacza się z wzoru (26):

$$c_1 = dx_1 - A_1 x_1 - B_1 y_1, \quad c_2 = dy_1 - A_2 x_1 - B_2 y_1.$$

Dla kontroli oblicza się również c_1 i c_2 z równań (26) dla punktów 2 i 3.

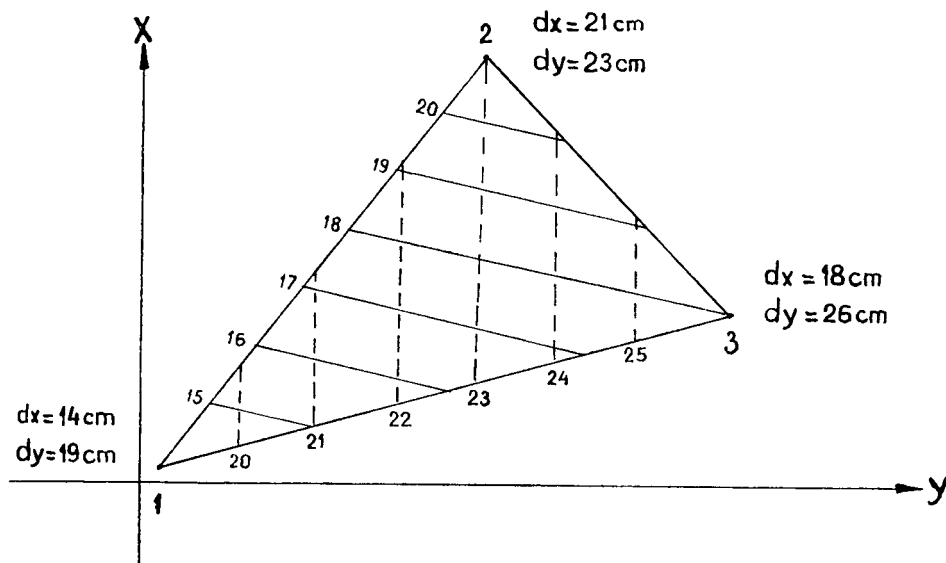
Transformacja graficzna

Jeżeli w równaniu (25) nadamy poprawkom dx , dy stałe wartości, to otrzymane równania:

$$(a_1 - 1)x + b_1 y + (c_1 - dx) = 0$$

$$a_2 x + (b_2 - 1)y + (c_2 - dy) = 0$$

przedstawiają dwie gromady prostych równoległych różniących się tylko wyrazami wolnymi. Mając trójkąt afiniczny, określony punktami 1, 2, 3, w którym znane są odchyłki dx , dy , wykreślimy proste równoległe dzielące boki trójkąta na równe części których ilość wyznaczymy z różnic $dx_1 - dx_2$, $dx_1 - dx_3$, $dx_2 - dx_3$ (podobnie dla y). Łącząc następnie



Rys. 4

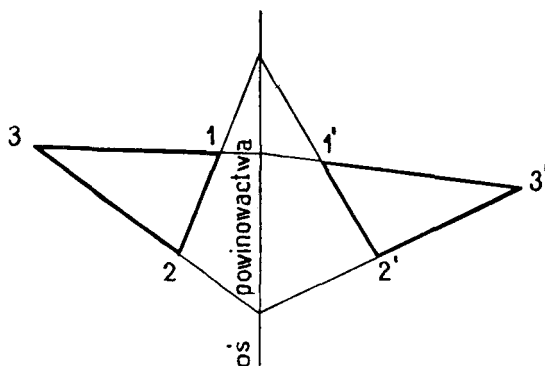
punkty o tej samej odchyłce dx i dy otrzymamy proste równoległe (linie równych odchyłek). Jeżeli wykres wykonano w znanym układzie współrzędnych, to możemy interpolować poprawki dx , dy dla dowolnie położonego punktu.

Traktując równanie (25) jako płaszczyzną transformacji — podobnie jak w metodzie konforemnej — można obliczyć kąt pod którym biegają linie równych odchyłek ze wzoru $\operatorname{tg} \varphi = a : b$. Dla transformacji afinicznej będzie:

$$\operatorname{tg} \varphi_x = \frac{a_1 - 1}{b_1}, \quad \operatorname{tg} \varphi_y = \frac{a_2}{b_2 - 1}$$

a więc w tej transformacji linie równych odchyłek są do siebie nachylone (w konforemnej transformacji liniowej linie te są prostopadłe). Proste te załamują się na bokach przyległych trójkątów afinicznych. Załamania będą tym mniejsze im więcej zgadzają się w poszczególnych trójkątach współczynniki a , b , c .

Załączony rysunek przedstawia linie równych poprawek dla podanych na punktach 1, 2, 3 odchyłek dx , dy .



Rys. 5

W geometrycznej interpretacji odwzorowanie afiniczne charakteryzuje się tym, że miejscem geometrycznym przecięcia się prostych, na których leżą odpowiadające sobie boki trójkąta jest prosta zwana osią powinowactwa.

Z geometrycznego przedstawienia odczytuje się następujące cechy odwzorowania afinicznego:

1. proste odwzorowują się jako proste,
2. równoległość odpowiadających sobie prostych obu odwzorowań zostaje zachowana,
3. stosunek podziału odcinków w obu odwzorowaniach zostaje zachowany,
4. stosunek obszarów płaskich w obu odwzorowaniach jest stały.

Cecha transformacji afinicznej, która trzem punktom jednej płaszczyzny jednoznacznie podporządkuje trzy punkty drugiej płaszczyzny zostanie, jak zobaczymy niżej, wykorzystana do usunięcia odchyłek, które pozostawiają wszystkie transformacje wykonywane na podstawie nadliczbowej ilości punktów łącznych (inny jeszcze sposób usunięcia wspomnianych odchyłek podaje się niżej). Zniekształcenia wywołane transformacją afiniczną podaje się na str. 57.

3. Transformacje o nadliczbowej ilości punktów łącznych

A. Konforemna funkcja liniowa (transformacja Helmerta)

Wyznaczenie niewiadomych współczynników funkcji liniowych i wyższego rzędu przeprowadza się na podstawie wyrównania. Żądamy, ażeby niewiadome przyjęły takie wartości, by suma kwadratów poprawek do spostrzeżeń była minimum. W rozważanych funkcjach spostrzeżeniami są współrzędne pierwotne (x, y) i wtórne (u, v) , niewiadomymi — $a_0, b_0, a, b, \dots$

Oznaczając w równaniu (9) $a_1 - 1 = a$; $b_1 = b$ otrzymamy:

$$\begin{aligned} u - x &= dx = ax - by + a_0 \\ v - y &= dy = bx + ay + b_0 \end{aligned} \quad (29)$$

Stąd równania błędów:

$$\begin{aligned} v_x &= ax - by + a_0 - (u - x) \\ v_y &= bx + ay + b_0 - (v - y) \end{aligned}$$

Przy nadliczbowej ilości punktów łącznych będzie:

$$\begin{aligned} v_{x_1} &= a_0 + ax_1 - by_1 - dx_1 \\ v_{x_2} &= a_0 + ax_2 - by_2 - dx_2 \\ v_{x_3} &= a_0 + ax_3 - by_3 - dx_3 \\ &\dots \dots \dots \\ v_{y_1} &= b_0 + ay_1 + bx_1 - dy_1 \\ v_{y_2} &= b_0 + ay_2 + bx_2 - dy_2 \\ v_{y_3} &= b_0 + ay_3 + bx_3 - dy_3 \end{aligned}$$

oraz równania normalne:

$$\begin{aligned} na_0 &+ [x]a & - [y]b & - [dx] = 0 \\ nb_0 &+ [y]a & + [x]b & - [dy] = 0 \\ ([x^2] + [y^2])a & & - [xdx] - [ydy] = 0 \\ & & ([x^2] + [y^2])b + [ydx] - [xdy] = 0 \end{aligned} \quad (30)$$

Celem uproszczenia rachunków przesuwamy równolegle początek obu układów do środka figury utworzonej z punktów dostosowania układów. Nowo utworzone współrzędne dadzą nam (dla przejrzystości zachowuje się poprzednie oznaczenia współrzędnych):

$$[u] = [v] = [x] = [y] = 0 \quad \text{oraz} \quad [dx] = [dy] = 0,$$

co podstawione do (30) da nam:

$$\begin{aligned} na_0 &= 0 \\ nb_0 &= 0 \\ ([x^2] + [y^2])a - [xdx] - [ydy] &= 0 \\ ([x^2] + [y^2])b + [ydx] - [xdy] &= 0 \end{aligned} \quad (30a)$$

skąd niewiadome:

$$\begin{aligned} a_0 &= b_0 = 0 \\ a &= \frac{[xdx] + [ydy]}{[x^2] + [y^2]}; \quad b = \frac{[xdy] - [ydx]}{[x^2] + [y^2]}. \end{aligned} \quad (31)$$

Średni błąd spostrzeżenia:

$$m_0 = \sqrt{\frac{v_x^2 + v_y^2}{2n - k}} \quad (31a)$$

We wzorze tym oznaczają:

$v_x = \bar{u} - u$; $v_y = \bar{v} - v$; wynika to z równań błędów:

$$v_x = a_0 + ax - by + x - u$$

gdzie, przy znanych już niewiadomych a_0 , a , b wyrażenie:

$$a_0 + ax - by + x = \bar{u} \quad (31b)$$

jest wielkością obliczoną $\bar{u}$, stąd:

$$v_x = \bar{u} - u; \quad \text{podobnie: } v_y = \bar{v} - v;$$

a więc v_x oraz v_y jest różnicą pomiędzy wielkością obliczoną a spostrzeżaną. Dalsze oznaczenia są: n — ilością punktów dostosowania, k — 4 ilością niewiadomych.

W układzie przesuniętym do środka ciężkości transformację przeprowadza się wzorami (29) używając współczynników a , b obliczonych wg (31). Chcąc operować współrzędnymi pierwotnymi należy najpierw obliczyć a_0 , b_0 dla środka ciężkości wg wzorów (29):

$$\begin{aligned} a_0 &= u_{sr.} - x_{sr.} - ax_{sr.} + by_{sr.} \\ b_0 &= v_{sr.} - y_{sr.} - bx_{sr.} - ay_{sr.}, \end{aligned} \quad (32)$$

a następnie, dla przeliczeń masowych, posługiwać się wzorami (29).

B. Konforemna funkcja 2-go rzędu.

Jeżeli dwa konforemne odwzorowania różnią się cechami (np. odwzorowanie Gaussa-Krügera i stereograficzne) lub też układy współrzędnych są bardzo odległe, to transformacja Helmerta wykaże tak duże błędy, że nie będzie można jej użyć. W przypadkach takich — o czym

będzie mowa niżej — można sprowadzić współrzędne do tego samego odwzorowania i układu, a następnie użyć transformacji Helmerta, lub też można zastosować konforemną transformację 2-go rzędu. Wybór zależy będzie od pracochłonności liczeń uwarunkowanej zwykle ilością masowych przeliczeń.

Konforemna funkcja 2-go rz., wzory (12) jest:

$$\begin{aligned} dx &= u - x = a_0 + a_1 x - b_1 y + a_2 (x^2 - y^2) - 2b_2 xy \\ dy &= v - y = b_0 + a_1 y + b_1 x + 2a_2 xy + b_2 (x - y) \end{aligned}$$

Z równań tych układamy następujące równania błędów:

$$\begin{aligned} v_{x_1} &= a_0 + a_1 x_1 + b_1 y_1 + a_2 (x_1^2 - y_1^2) - 2b_2 x_1 y_1 - (u_1 - x_1) \\ v_{x_2} &= a_0 + a_1 x_2 + b_1 y_2 + a_2 (x_2^2 - y_2^2) - 2b_2 x_2 y_2 - (u_2 - x_2) \\ v_{x_3} &= a_0 + a_1 x_3 + b_1 y_3 + a_2 (x_3^2 - y_3^2) - 2b_2 x_3 y_3 - (u_3 - x_3) \\ &\dots \dots \dots (32a) \\ v_{y_1} &= b_0 + a_1 y_1 + b_1 x_1 + 2a_2 x_1 y_1 - b_2 (x_1^2 - y_1^2) - (v_1 - y_1) \\ v_{y_2} &= b_0 + a_1 y_2 + b_1 x_2 + 2a_2 x_2 y_2 - b_2 (x_2^2 - y_2^2) - (v_2 - y_2) \\ v_{y_3} &= b_0 + a_1 y_3 + b_1 x_3 + 2a_2 x_3 y_3 - b_2 (x_3^2 - y_3^2) - (v_3 - y_3) \\ &\dots \dots \dots \end{aligned}$$

Jeżeli współrzędne (x, y) , (u, v) odniesiemy do środka ciężkości figury utworzonej z punktów łącznych, to z nowych współrzędnych (x', y') otrzymamy równania normalne (w równaniach normalnych pozostawiano poprzednie oznaczenia współrzędnych (x, y))

$$\begin{aligned} na - [2xy] b_2 - [dx] &= 0 \\ nb + [x^2 - y^2] b_2 - [dy] &= 0 \\ ([x^2] + [y^2]) a_1 + ([x(x^2 - y^2)] + [2xy^2]) a_2 - ([2x^2 y] + [y(x^2 - y^2)]) b_2 - \\ &\quad - [xdx] - [ydy] = 0 \\ ([x^2] + [y^2]) b_1 - ([y(x^2 - y^2)] + [2x^2 y]) a_2 + ([2xy^2] + [x(x^2 - y^2)]) b_2 + \\ &\quad + [ydx] - [xdy] = 0 \\ ([x^2 - y^2] + [2xy^2]) a_2 - [(x^2 - y^2) dx] - [2xydy] &= 0 \\ [(2xy^2) + [x^2 - y^2]) b_2 + [2xydx] - [(x^2 - y^2) dy] &= 0 \end{aligned}$$

W praktyce układu się równania normalne bezpośrednio z liczbowych wartości równań błędów. Ponieważ po przejściu do układu środka ciężkości operowaliśmy zmienionymi współrzędnymi, stąd ostateczne, szukane współrzędne $(\bar{u}, \bar{v})$ będą:

$$\bar{u} = x' + \frac{[u]}{n} + dx; \quad \bar{v} = y' + \frac{[v]}{n} + dy,$$

gdzie $(\bar{u}, \bar{v})$ — współrzędne obliczone (dla punktów łącznych współrzędne obliczone różnią się od współrzędnych danych (u, v)),

(x', y') — współrzędne odniesione do środka ciężkości,

$\frac{[u]}{n}, \frac{[v]}{n}$ — współrzędne środka ciężkości

dx, dy — poprawki obliczone z równań (12)

Otrzymane współrzędne $(\bar{u}, \bar{v})$ porównane na punktach łącznych ze współrzędnymi danymi (u, v) dadzą odchyłki v_x, v_y , stąd:

$$m_0 = \sqrt{\frac{v_x^2 + v_y^2}{2n - k}}$$

gdzie n — ilość punktów łącznych, $k = 6$ — ilość niewiadomych. W załączonym przykładzie użyto do transformacji sześć punktów łącznych o współrzędnych Gaussa-Krügera odniesionych do dwóch sąsiednich południków 3-stopniowych. Współrzędne punktów łącznych obu układów (u, v) , (x, y) obliczono ze współrzędnych geograficznych (φ, λ) . Na podstawie 12 równań błędów przeliczono współrzędne i otrzymano następujące odchyłki (różnice pomiędzy współrzędnymi danymi i obliczonymi):

$v_1 = 0.1 \text{ mm}$	$v_7 = 1.5 \text{ mm}$
$v_2 = -0.4 \text{ „}$	$v_8 = -4.7 \text{ „}$
$v_3 = 4.1 \text{ „}$	$v_9 = 1.9 \text{ „}$
$v_4 = -5.5 \text{ „}$	$v_{10} = 3.5 \text{ „}$
$v_5 = 4.4 \text{ „}$	$v_{11} = 0.7 \text{ „}$
$v_6 = -4.0 \text{ „}$	$v_{12} = -3.9 \text{ „}$

oraz średni błąd:

$$m_0 = \pm 4.8 \text{ mm.}$$

Rozwiązując omawiany przykład przy pomocy funkcji liniowej (transformacji Helmerta) otrzymalibyśmy:

$$m_0 = \pm 1.5 \text{ m,}$$

a więc wynik bezwartościowy.

Oczywistym jest, że funkcji 2-go rzędu nie będziemy używać do transformacji współrzędnych Gaussa-Krügera w południkach 3-stopniowych, ponieważ posiadamy wygodniejsze wzory tej zamiany. Przykład użyto jedynie ze względu na łatwe sprawdzenie wyników.

Natomiast z korzyścią możemy użyć funkcji 2-go rzędu do zamiany współrzędnych stereograficznych na współrzędne Gaussa-Krügera, szczególnie z tego powodu, że oba odwzorowania są konforemne.

Bezpośrednia transformacja współrzędnych stereograficznych na współrzędne Gaussa-Krügera byłaby bardzo pracochłonna. Użycie funkcji 2-go rzędu przy użyciu tylko trzech punktów łącznych (wzory (22)), czy też przy nadliczbowej ilości punktów łącznych jest o wiele ekono-

miczniejsze. W ogólności, należy przyjąć zasadę, że konforemną funkcję 2-go rzędu używa się do transformacji współrzędnych konforemnych. Niekonforemne współrzędne, np. Soldnera należy najpierw zamienić na współrzędne Gaussa-Krügera, uwzględniając poprawkę $y^3 : 6r^2$ do rzędnych y , a następnie dopiero transformować je na współrzędne Gaussa-Krügera.

C. Transformacje niekonforemne (szereg potęgowy 2-go rzędu)

W szczególnych wypadkach, gdy współrzędne są nieznanego lub nie matematycznego odwzorowania, korzystamy z szeregu potęgowego 2-go rzędu:

$$\begin{aligned} u &= x + x_0 + ax + by + cxy + dx^2 + ey^2 \\ v &= y + y_0 + Ax + By + Cxy + Dx^2 + Ey^2 \end{aligned} \quad (34)$$

stąd równania błędów:

$$\begin{aligned} v_x &= x_0 + ax + by + cxy + dx^2 + ey^2 - (u - x) \\ v_y &= y_0 + Ax + By + Cxy + Dx^2 + Ey^2 - (v - y) \end{aligned} \quad (34a)$$

Obliczenie niewiadomych $a, b, c, \dots A, B, C, \dots$ przeprowadza się tak jak w transformacji konforemnej 2-go rzędu z tą różnicą, że równania normalne układu się oddzielnie z równań błędów v_x i v_y . Transformacji tej użyto do zamiany współrzędnych katastralnych w Małopolsce na współrzędne Gaussa-Krügera. Współrzędne katastralne charakteryzują się tym, że obliczone z nich boki zgodne są w przybliżeniu z bezpośrednio pomierzonymi w terenie. Transformację tę wykonano na obszarze ok. 30 na 60 km przy użyciu 11 punktów łącznych. Wyniki tej transformacji wyrażone w odchyłkach przedstawiają się następująco:

v_x	v_y	v_x	v_y	
- 1.11 m.	- 0.33 m.	- 0.17 m.	- 0.88 m	
0.33	- 0.65	- 0.31	- 0.11	
- 0.89	0.26	0.30	- 0.65	$m_0 = \pm 0.9 \text{ m}$
0.21	- 0.52	1.37	0.20	$m_{x,y} = 0.92 = \pm 1.3$
0.38	0.33	0.42	1.06	
- 0.55	- 0.14			

Dla przeciętnej długości boku $s = 15 \text{ km}$ (przeciętna odległość punktów łącznych tworzących szereg przyległych trójkątów) otrzymuje się przybliżony błąd względny:

$$m_w = \frac{1.3}{15\,000} = \frac{1}{12\,000}$$

Większe ponad 1 : 20 000 dokładności transformacji współrzędnych katastralnych na współrzędne Gaussa-Krügera — jak wykazuje praktyka — nie są możliwe do osiągnięcia.

Transformacja Helmerta zastosowana do współrzędnych katastralnych i Gaussa-Krügera w pobliżu południka 21° i 24° da również małe odchyłki z następującej prostej przyczyny: figury utworzone ze współrzędnych obu odwzorowań są podobne do figury terenu — jedna, jak wyżej wspomniano ponieważ należy do układu katastralnego, druga (Gaussa-Krügera), ponieważ znajduje się w pobliżu południka początkowego. Im dalej od południków początkowych tym niezgodności będą większe, w tym przypadku tylko funkcja 2-go rzędu rozwiązuje zagadnienie.

4. Transformacje współrzędnych geograficznych

A. Wzory różniczkowe

Podane funkcje liniowe i drugiego rzędu używać można do transformacji współrzędnych prostokątnych na względnie małych obszarach. Na obszarach wielu setek tysięcy km² przeprowadzamy transformacje we współrzędnych geograficznych, na elipsoidzie, na podstawie skrętu, zmiany skali i przesunięcia. Jeżeli mamy do czynienia z różnymi elipsoidami, to dochodzi jeszcze zmiana osi i spłaszczenie elipsoidy. Metodę tę zastosowano na obszarze Polski do transformacji współrzędnych geograficznych danych w różnych systemach (Helmertturm, Rauenberg, Hermanskogel) na współrzędne geograficzne w systemie Borowej Góry. Przetransformowane współrzędne 1-go rzędu stały się podstawą (punktami łącznymi) do następnych transformacji współrzędnych prostokątnych, sieci niższego rzędu, około 30 000 punktów.

Zasadnicze wzory różniczkowe linii geodezyjnej podał Helmert [3]. Użycie tych wzorów jest jednak bardzo pracochłonne. O wiele wygodniejsze są szeregi potęgowe podane przez W. Hristowa [4].

$$\begin{aligned} d\varphi = & d\varphi_0 + \left[-\frac{3}{\varrho} t_0 (\eta_0^2 + \eta_0^4) d\varphi_0 + \left(dp - \frac{da}{a} \right) + \cos^2 \varphi_0 \left(2 - t_0 + \eta_0^2 + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{7}{2} t_0^2 \eta_0^2 - \frac{1}{2} t_0^4 \eta_0^2 - \frac{1}{4} \eta_0^4 - \frac{15}{8} t_0^2 \eta_0^4 + \frac{3}{2} t_0^4 \eta_0^4 + \frac{1}{8} t_0^6 \eta_0^4 \right) d\alpha \right] \Delta\varphi + \\ & + \left[-\frac{1}{\varrho} \cos \varphi_0 (1 + \eta_0^2) dA_0 \right] l + \left[-\frac{3}{2\varrho^2} (\eta_0^2 - t_0^2 \eta_0^2) d\varphi_0 - \frac{3}{2\varrho} t_0 \eta_0^2 \left(dp - \frac{da}{a} \right) - \right. \\ & \left. - \frac{3}{2\varrho} \cos^2 \varphi_0 t_0 (2 - 3\eta_0^2 + 2t_0^2 \eta_0^2) d\alpha \right] \Delta\varphi^2 + \left[-\frac{3}{2\varrho^2} \cos \varphi_0 t_0 \eta_0^2 dA_0 \right] \Delta\varphi l + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left[-\frac{1}{2\varrho^2} \cos^2 \varphi_0 (1 + t_0^2 + \eta_0^2) d\varphi_0 - \frac{1}{2\varrho} \cos^2 \varphi_0 t_0 (1 + \eta_0^2) \left(dp - \frac{da}{a} \right) + \right. \\
& + \frac{1}{2\varrho} \cos^4 \varphi_0 t_0 \left(t_0^2 + \frac{1}{2} t_0^2 \eta_0^2 + \frac{1}{2} t_0^4 \eta_0^2 \right) d\alpha \Big] l^2 + \left[-\frac{1}{3\varrho^2} \cos^2 \varphi_0 \left(dp - \frac{da}{a} \right) + \right. \\
& + \frac{1}{3\varrho^2} \cos^4 \varphi_0 (1 + 4t_0^2 - 9t_0^4) d\alpha \Big] \Delta\varphi l^2 + \left[\frac{1}{6\varrho^3} \cos^3 \varphi_0 (1 + t_0^2) dA_0 \right] l^3 \quad (35a)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d\lambda = d\lambda_0 + & \left[\frac{1}{\varrho \cos \varphi_0} (1 - \eta_0^2 + \eta_0^4) dA_0 \right] \Delta\varphi + \left[\frac{1}{\varrho} t_0 (1 - \eta_0^2 + \eta_0^4) d\varphi_0 + \right. \\
& + \left(dp - \frac{da}{a} \right) - \cos^2 \varphi_0 \left(t_0^2 - \frac{1}{2} t_0^2 \eta_0^2 + \frac{1}{2} t_0^4 \eta_0^2 + \frac{3}{8} t_0^2 \eta_0^4 - \frac{3}{4} t_0^4 \eta_0^4 - \right. \\
& - \frac{1}{8} t_0^6 \eta_0^4 \Big) d\alpha \Big] l + \left[\frac{1}{\varrho^2} \frac{1}{\cos \varphi_0} t_0 \left(1 - \frac{1}{2} \eta_0^2 \right) dA_0 \right] \Delta\varphi^2 + \left[\frac{1}{\varrho^2} \left(1 + t_0^2 - \eta_0^2 - \right. \right. \\
& - 2t_0^2 \eta_0^2 \Big) d\varphi_0 + \frac{1}{\varrho} t_0 (1 - \eta_0^2) \left(dp - \frac{da}{a} \right) - \frac{1}{\varrho} \cos^2 \varphi_0 t_0 \left(t_0^2 - \frac{3}{2} t_0^2 \eta_0^2 + \right. \\
& + \frac{1}{2} t_0^4 \eta_0^2 \Big) d\alpha \Big] \Delta\varphi l + \left[-\frac{1}{2\varrho^2} \cos \varphi_0 t_0 dA_0 \right] l^2 + \left[\frac{1}{3\varrho^3} \frac{1}{\cos \varphi_0} (1 + 3t_0^2) dA_0 \right] \Delta\varphi^3 + \\
& + \left[\frac{1}{\varrho^3} t_0 (1 + t_0^2) d\varphi_0 + \frac{1}{3\varrho^2} (2 + 3t_0^2) \left(dp - \frac{da}{a} \right) - \frac{1}{3\varrho^2} \cos^2 \varphi_0 (2t_0^2 + 3t_0^4) d\alpha \right] \Delta\varphi^2 l + \\
& + \left[-\frac{1}{2\varrho^3} \cos \varphi_0 (1 + t_0^2) dA_0 \right] \Delta\varphi l^2 + \left[-\frac{1}{6\varrho^2} \cos^2 \varphi_0 t_0 (1 + t_0^2) d\varphi_0 - \right. \\
& - \frac{1}{6\varrho^2} \cos^2 \varphi_0 t_0^2 \left(dp - \frac{da}{a} \right) + \frac{1}{6\varrho^2} \cos^4 \varphi_0 t_0^4 d\alpha \Big] l^3 \quad (35b)
\end{aligned}$$

Oznaczenia:

$d\varphi = \varphi - \varphi'$, $d\lambda = \lambda - \lambda'$ — różnice współrzędnych obu systemów,
 φ_0, λ_0 — punkt główny (przyjęte współrzędne w pobliżu środka obszaru),

$\Delta\varphi = \varphi_0 - \varphi_i$

$l = \lambda_0 - \lambda_i$ — różnice współrzędnych pomiędzy punktem bieżącym a głównym,

$d\varphi_0, d\lambda_0$ — przesunięcia w punkcie głównym,

$dp = \frac{ds}{s}$, dA_0 — zmiana skali i skręt,

$\frac{da}{a}$, $d\alpha$ — zmiana osi i spłaszczanie,

$$t_0 = \operatorname{tg} \varphi_0, \quad \eta_0 = e' \cos \varphi_0.$$

We wzorach (35) poprawki $d\varphi$ i $d\lambda$ są funkcją $\Delta\varphi$, l oraz współczynników, w których nieznane są $d\varphi_0, d\lambda_0, dp, dA_0$ ($\frac{da}{a}$, $d\alpha$ są znane z elementów

elipsoid). Niewiadome oblicza się porządkując wzory (35) według tych niewiadomych i wyznaczając następnie z nadliczbowej ilości spostrzeżeń szukane wielkości.

Uporządkowane równania przedstawiają się następująco:

$$d\varphi = [1 - (1)A_{\varphi} - (3)A_{\varphi}^2 - (6)l^2]d\varphi_0 + [A_{\varphi} - (4)A_{\varphi}^2 - (7)l^2 - (8)A_{\varphi}l^2]dp + \\ + [- (2)l + (5)A_{\varphi}l + (9)l^3]dA_0 + [-A_{\varphi} - (23)A_{\varphi}^2 + (24)l^2 + (25)A_{\varphi}l^2]\frac{da}{a} + \\ + [(26)A_{\varphi} - (27)A_{\varphi}^2 + (28)l^2 + (29)A_{\varphi}l^2]d\alpha \dots \quad (36a)$$

$$d\lambda = d\lambda_0 + [(12)l + (14)A_{\varphi}l + (18)A_{\varphi}^2l - (21)l^3]d\varphi_0 + [l + (15)A_{\varphi}l + \\ + (19)A_{\varphi}^2l - (22)l^3]dp + [(11)A_{\varphi} + (13)A_{\varphi}^2 - (16)l^2 + (17)A_{\varphi}l^3 - \\ - (20)A_{\varphi}l^2]dA_0 + [-l - (30)A_{\varphi}l - (31)A_{\varphi}^2l + (32)l^3]\frac{da}{a} + \\ + [(33)l + (34)A_{\varphi}l - (35)A_{\varphi}^2l + (36)l^3]d\alpha \dots \quad (36b)$$

lub w formie uproszczonej:

$$d\varphi = \varphi - \varphi' = d\varphi_0 + A_1l\varphi + B_1l + C_1A_{\varphi}^2 + D_1A_{\varphi}l + El^2 + F_1A_{\varphi}l^2 + Gl^3 \dots \quad (35A)$$

$$d\lambda = \lambda - \lambda' = d\lambda_0 + A_1A_{\varphi} + B_1l + C_1A_{\varphi}^2 + D_1A_{\varphi}l + E_1l^2 + F_1A_{\varphi}l^3 + \\ + G_1A_{\varphi}^2l + H_1A_{\varphi}l^2 + I_1l^3 \dots \quad (35B)$$

oraz

$$d\varphi = \varphi - \varphi' = A'd\varphi_0 + B'dp + C'dA_0 + D'\frac{da}{a} + E'd\alpha \quad (36A)$$

$$d\lambda = \lambda - \lambda' = d\lambda_0 + A'_1d\varphi_0 + B'_1dp + C'_1dA_0 + D'_1\frac{da}{a} + E'_1d\alpha \quad (36B)$$

Z wzorów (36A, B) otrzymuje się równania błędów:

$$v_{\varphi} = A'd\varphi_0 + B'dp + C'dA_0 + L_1 \\ v_{\lambda} = d\lambda_0 + A'_1d\varphi_0 + B'_1dp + C'_1dA_0 + L_2 \quad (37)$$

gdzie:

$$L_1 = -(\varphi - \varphi') + D'\frac{da}{a} + E'd\alpha, \quad L_2 = -(\lambda - \lambda') + D'_1\frac{da}{a} + E'_1d\alpha$$

Wyznaczone z równań (36A, B) niewiadome podstawione do współczynników równań (35a, b) wyrażą te współczynniki w wartościach liczbowych $A, B, C, \dots G, A_1, B_1, C_1 \dots G_1$ w formie równań (35A, B). Te ostatnie równania służą do masowych przeliczeń współrzędnych jednego systemu na system drugi.

Współczynniki równań (36a, b):

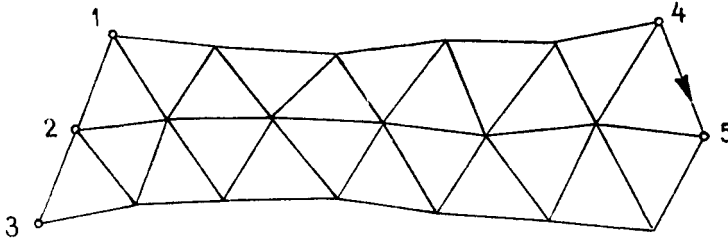
$$\begin{aligned}
 (1) &= \frac{3}{\varrho} t_0 (\eta_0^2 - \eta_0^4), & (2) &= \frac{\cos \varphi_0}{\varrho} (1 + \eta_0^2), & (3) &= \frac{3}{2\varrho^2} (\eta_0^2 - t_0^2 \eta_0^2) \\
 (4) &= \frac{3}{2\varrho} t_0 \eta_0^2, & (5) &= \frac{3}{\varrho^2} \cos \varphi_0 t_0 \eta_0^2, & (6) &= \frac{1}{2\varrho} \cos^2 \varphi_0 (1 + t_0^2 + \eta_0^2) \\
 (7) &= \frac{1}{2\varrho} \cos^2 \varphi_0 t_0 (1 + \eta_0^2), & (8) &= \frac{1}{3\varrho^2} \cos^2 \varphi_0, & (9) &= \frac{1}{6\varrho^3} \cos \varphi \\
 (11) &= \frac{1}{\varrho \cos \varphi_0} (1 - \eta_0^2 - \eta_0^4), & (12) &= \frac{t_0}{\varrho} (1 - \eta_0^2 + \eta_0^4), \\
 (13) &= \frac{1}{\varrho^2 \cos \varphi_0} t_0 \left(1 - \frac{1}{2} \eta_0^2\right), & (14) &= \frac{1}{\varrho^2} (1 + t_0^2 - \eta_0^2 - 2t_0^2 \eta_0^2), \\
 (15) &= \frac{t_0}{\varrho} (1 - \eta_0^4), & (16) &= \frac{1}{2\varrho^2} \sin \varphi_0, & (17) &= \frac{1}{3\varrho^3 \cos \varphi_0} (1 + 3t_0^2), \\
 (18) &= \frac{t_0}{\varrho^3} (1 + t_0^2), & (19) &= \frac{1}{3\varrho^2} (2 + 3t_0^2), & (20) &= \frac{1}{2\varrho^3 \cos \varphi_0}, \\
 (21) &= \frac{1}{6\varrho^3} t_0, & (22) &= \frac{1}{6\varrho^2} \sin^2 \varphi_0.
 \end{aligned}$$

Podobnie zestawia się z równań (35a, b) współczynniki od 23 do 35 przy $\frac{da}{a}$ i $d\alpha$.

Wzory różniczkowe W. Hristowa podają prócz równań (36A, B) również i równania na różnicę azymutów:

$$dA = A - A' = A'_2 d\varphi_0 + B'_2 dp + C'_2 dA_0 + \dots \quad (36c)$$

W przypadkach, gdy punkty łączne transformowanego obszaru są jednostronnie rozmieszczone (punkty 1, 2, 3), możemy wprowadzić równanie azymutalne (36c) jako łączne, wraz z równaniami (36A, B), wyko-



Rys. 6

nując w punkcie 4 pomiary astronomiczne (A^a , λ^a). Otrzymany stąd azymut Laplace'a

$$A_L = A^a - (\lambda^a - \lambda) \sin \varphi, \quad (38)$$

równy będzie azymutowi A w systemie (φ, λ) , jeżeli znane będą współrzędne (φ, λ) punktu 4. Współrzędne te otrzymać można z przenoszenia współrzędnych punktów 1, 2 systemu (φ, λ) do punktu 4 przy pomocy kątów obliczonych ze współrzędnych systemu (φ', λ') zamiast ze współrzędnych systemu (φ, λ) . Powstałe stąd różnice są dla omawianego zagadnienia zaniedbywalne. Rozwiązanie takie wzmacnia konstrukcję punktów łącznych (azymutów może być i więcej), tj. umieszcza transformowany obszar wewnątrz punktów łącznych. Rozumie się, że w omawianym przykładzie azymuty Laplace'a należy projektować w odległości nie mniejszych, niż obowiązuje to w wyrównaniu sieci triangulacyjnych.

B. Transformacja afiniczna współrzędnych geograficznych

Na mniejszych obszarach nie używamy poprzedniej metody z powodu pracochłonności obliczeń współczynników lecz transformację afiniczną, tj. płaską zamiast na elipsoidzie. O możliwości stosowania tej metody podają wyniki badań [5], które przedstawiają się następująco: Poprawki współrzędnych geograficznych transformowanego punktu mogą być traktowane jako funkcje liniowe tych współrzędnych w założeniu, że poprawki te nie przekraczają $\pm 3''$, wydłużenie i skręt spełniają warunki:

$\frac{dL}{L} \leq 0.000\ 01$, $\frac{d\alpha}{\varrho} \leq 0.000\ 01$, obszar transformacji zawarty jest w granicach, dla obszaru Polski, $49^\circ < \varphi < 55^\circ$, wreszcie, jeżeli błędy określenia współrzędnych geograficznych nie przekraczające dla szerokości 0.0044 (0.13 m) oraz dla długości 0.0043 (0.08 m) mogą być uważane za zaniedbywalne.

Wyznaczenie współczynników wzorów afinicznych na podstawie nadliczbowej ilości punktów łącznych przeprowadza się w sposób następujący: analogicznie do wzorów (35A) będzie:

$$p_1 = \varphi_1 - \varphi'_1 = a \varphi'_1 + b \lambda'_1 + c; \quad q_1 = \lambda_1 - \lambda'_1 = A \varphi'_1 + B \lambda'_1 + C$$

. (39)

$$p_n = \varphi_n - \varphi'_n = a \varphi'_n + b \lambda'_n + c; \quad q_n = \lambda_n - \lambda'_n = A \varphi'_n + B \lambda'_n + C$$

$$\frac{[p]}{n} = a \frac{[\varphi']}{n} + b \frac{[\lambda']}{n} + c; \quad \frac{[q]}{n} = A \frac{[\varphi']}{n} + B \frac{[\lambda']}{n} + C \quad (40)$$

odejmując średnią (40) od poszczególnych równań otrzymuje się:

$$p_1 - \frac{[p]}{n} = a \left(\varphi'_1 - \frac{[\varphi']}{n} \right) + b \left(\lambda'_1 - \frac{[\lambda']}{n} \right); \quad q_1 - \frac{[q]}{n} = A \left(\varphi'_1 - \frac{[\varphi']}{n} \right) + B \left(\lambda'_1 - \frac{[\lambda']}{n} \right)$$

.

$$p_n - \frac{[p]}{n} = a \left(\varphi'_n - \frac{[\varphi']}{n} \right) + b \left(\lambda'_n - \frac{[\lambda']}{n} \right); \quad q_n - \frac{[q]}{n} = A \left(\varphi'_n - \frac{[\varphi']}{n} \right) + B \left(\lambda'_n - \frac{[\lambda']}{n} \right),$$

przyjmując oznaczenia:

$$\bar{p}_i = p_i - \frac{[p]}{n}; \quad \bar{q}_i = q_i - \frac{[q]}{n}; \quad \bar{\varphi}_i = \varphi'_i - \frac{[\varphi']}{n}; \quad \bar{\lambda}_i = \lambda'_i - \frac{[\lambda']}{n}$$

będzie:

$$\begin{aligned} \bar{p}_1 &= a \bar{\varphi}_1 + b \bar{\lambda}_1; & \bar{q}_1 &= A \bar{\varphi}_1 + B \bar{\lambda}_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \bar{p}_n &= a \bar{\varphi}_n + b \bar{\lambda}_n; & \bar{q}_n &= A \bar{\varphi}_n + B \bar{\lambda}_n \end{aligned} \quad (41)$$

Żądając, by suma kwadratów poprawek p i q była minimum otrzymuje się równania błędów, normalne oraz niewiadome współczynniki a , b , c , A , B , C :

$$\begin{aligned} v_1 &= a \bar{\varphi}_1 + b \bar{\lambda}_1 - \bar{p}_1, & v_1 &= A \bar{\varphi}_1 + B \bar{\lambda}_1 - \bar{q}_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ v_n &= a \bar{\varphi}_n + b \bar{\lambda}_n - \bar{p}_n, & v_n &= A \bar{\varphi}_n + B \bar{\lambda}_n - \bar{q}_n \end{aligned} \quad (41a)$$

stąd równania normalne:

$$\begin{aligned} a[\bar{\varphi}\bar{\varphi}] + b[\bar{\varphi}\bar{\lambda}] - [\bar{\varphi}\bar{p}] &= 0; & A[\bar{\varphi}\bar{\varphi}] + B[\bar{\varphi}\bar{\lambda}] - [\bar{\varphi}\bar{q}] &= 0 \\ a[\bar{\varphi}\bar{\lambda}] + b[\bar{\lambda}\bar{\lambda}] - [\bar{\lambda}\bar{p}] &= 0; & A[\bar{\varphi}\bar{\lambda}] + B[\bar{\lambda}\bar{\lambda}] - [\bar{\lambda}\bar{q}] &= 0 \end{aligned} \quad (41b)$$

Niewiadome c oraz C wyznacza się z równań (40). Do przeliczeń masowych używa się wzorów

$$\begin{aligned} \varphi &= \varphi' + a \varphi' + b \lambda' + c \\ \lambda &= \lambda' + A \varphi' + B \lambda' + C \end{aligned} \quad (41c)$$

5. Równoczesna transformacja współrzędnych

Dotychczas przyjmowaliśmy, że transformację przeprowadzamy pomiędzy współrzędnymi dwóch sieci. Ustalenie wzorów transformacyjnych polegało na obliczeniu współczynników na podstawie punktów łącznych tych sieci. Zdarza się jednak, że więcej niż dwie sieci stykają się i zachodzi potrzeba ujednolicenia współrzędnych kilku sieci. Przyjmijmy, że współrzędne sieci różnią się tylko skrętem, skalą i przesunięciem. Jako przykład przyjmijmy trzy sieci i , k , s , z których sieć s jest stała. Sieci te posiadają punkty łączne pomiędzy sieciami (i, k) , (i, s) , (k, s) .

Transformację możemy przeprowadzić metodą kolejnych przybliżeń, lub równocześnie.

Przyjmijmy na wyniki równoczesnej transformacji sieci „i” oraz sieci „k” współrzędne obliczone $(\bar{x}_i, \bar{y}_i)$ oraz $(\bar{x}_k, \bar{y}_k)$. Wyniki te będą różne. Przyjmijmy na wartości wyrównanych współrzędnych:

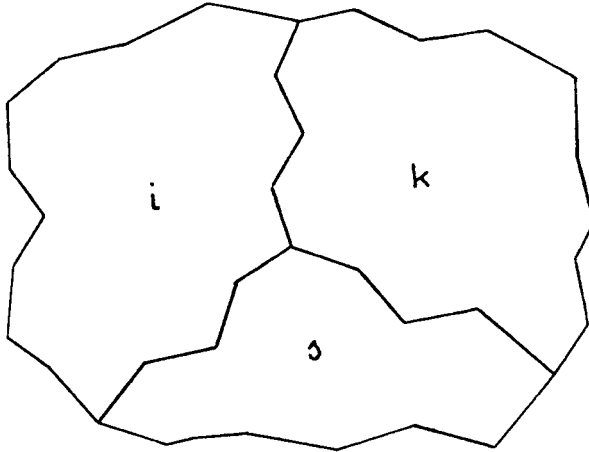
$$x = \frac{\bar{x}_i + \bar{x}_k}{2}$$

oraz $x = \bar{x}_i + v_i^x; \quad x = \bar{x}_k + v_k^x$

stąd:

$$v_i^x = x - \bar{x}_i = \frac{\bar{x}_i + \bar{x}_k}{2} - \bar{x}_i = \frac{\bar{x}_k}{2} - \frac{\bar{x}_i}{2}$$

$$v_k^x = x - \bar{x}_k = \frac{\bar{x}_i + \bar{x}_k}{2} - \bar{x}_k = \frac{\bar{x}_i}{2} - \frac{\bar{x}_k}{2}$$



Rys. 7

odejmując otrzymamy:

$$v_x = v_k^x - v_i^x = \bar{x}_i - \bar{x}_k \quad (42)$$

podobnie dla y :

$$v_y = v_k^y - v_i^y = \bar{y}_i - \bar{y}_k,$$

gdzie współrzędnymi są wg założenia współrzędne obliczone:

$$\begin{aligned} \bar{x}_i &= x_i + a_i^0 + a_i x_i - b_i y_i; & \bar{y}_i &= y_i + b_i^0 + b_i x_i + a_i y_i \\ \bar{x}_k &= x_k + a_k^0 + a_k x_k - b_k y_k; & \bar{y}_k &= y_k + b_k^0 + b_k x_k + a_k y_k \end{aligned} \quad (43)$$

Podstawiając (43) do (42) otrzymamy równania błędów:

$$v_x = \bar{x}_i - \bar{x}_k = a_i^0 - a_k^0 + a_i x_i - a_k x_k - b_i y_i + b_k y_k + (x_i - x_k)$$

podobnie dla y : (44)

$$v_y = \bar{y}_i - \bar{y}_k = b_i^0 - b_k^0 + a_i y_i - a_k y_k + b_i x_i - b_k x_k + (y_i - y_k)$$

Jeżeli jedna z sieci, np. sieć s jest siecią stałą, to równanie błędów sieci (i, s) podobnie sieci (k, s) będą:

$$\begin{aligned} v_x &= a_i^0 + a_i x_i - b_i y_i + (x_i - x_s) \\ v_y &= b_i^0 + b_i x_i + a_i y_i + (y_i - y_s) \end{aligned} \quad (45)$$

Poniższa, schematyczna tablica podaje równania błędów sieci i, k, s

	a_i^0	a_k^0	b_i^0	b_k^0	a_i	a_k	b_i	b_k	L
v_x^{ik}	1	-1			x_i	$-x_k$	$-y_i$	y_k	$(x_i - x_k)$
v_y^{ik}			1	-1	y_i	$-y_k$	x_i	$-x_k$	$(y_i - y_k)$
v_x^{is}	1				x_i		$-y_i$		$(x_i - x_s)$
v_y^{is}			1		y_i		x_i		$(y_i - y_s)$
v_x^{ks}		1				x_k		$-y_k$	$(x_k - x_s)$
v_y^{ks}			1			y_k		x_k	$(y_k - y_s)$

Wyrównanie powyższe, w praktyce dosyć uciążliwe, zastąpić można transformacją kolejnych przybliżeń o następującej kolejności postępowania. Uważając sieć „ s ” za stałą dostosowuje się sieć „ i ” do sieci „ s ” oraz sieć „ k ” do sieci „ s ”.

Współrzednymi 1-go przybliżenia będą średnie współrzedne styku sieci „ i, k ”. Następnie dostosowuje się sieć „ i ” do sieci „ s ” oraz otrzymanych współrzednych 1-go przybliżenia „ i, k ”, stąd obliczy się współrzedne 2-go przybliżenia „ i, k ”.

W podobny sposób postąpić można ponownie. Zgodność kolejnych średnich na styku „ i, k ” informować będzie o potrzebie dalszych przybliżeń. Jak niejednokrotnie podkreślano omawiane transformacje odnoszą się przede wszystkim do sieci o dużych dokładnościach (np. sieci wypełniające i sieci I-go rzędu), otóż takie sieci wymagają zwykle użycia dwóch przybliżeń.

Transformacje sieci o małej ilości punktów łącznych, sieci niesymetrycznych i małej dokładności nie mogą dać poprawnych wyników, a przedstawione metody należy stosować tylko analogicznie.

6. Usunięcie odchyłek powstałych na punktach łącznych po wykonaniu dostosowania przeprowadzonego na podstawie nadliczbowej ilości punktów łącznych

W ogólności, transformacje stosuje się do dwóch obliczonych z niezależnych wyrównań sieci triangulacyjnych o wspólnych punktach łącznych oraz współrzędnych tego samego odwzorowania i układu. Jeżeli współrzędne obu sieci nie są tego samego odwzorowania i układu, należy najpierw przeprowadzić jednolitość odwzorowań i układów a następnie wykonać transformację. Odchyłki, które pozostawia transformacja przypisuje się błędom pomiarów i wyrównań sieci.

Ponieważ ze względów formalnych obowiązują współrzędne „katalogowe”, a nie współrzędne otrzymane z dostosowania, stąd należy ustalić sposób postępowania celem usunięcia odchyłek, tj. przejścia ze współrzędnych otrzymanych z dostosowania do współrzędnych katalogowych. Sposobem tym może być metoda wyrównania współrzędnych otrzymanych z dostosowania, lub transformacja afiniczna.

Wyrównanie współrzędnych Helmertowskich

W metodzie tej [6] żądamy, ażeby suma kwadratów poprawek kierunków łączących punkt o współrzędnych Helmertowskich z punktem nawiazania (łącznym) wraz z sumą kwadratów poprawek długości łączących ten punkt z punktami nawiazania — była minimum:

$$[dk \cdot dk] + \left[\frac{dl}{l} \cdot \frac{dl}{l} \right] = \text{minim.} \quad (46)$$

Znane równania błędów dla kierunków i długości są:

$$\begin{aligned} dk_i &= B_i dx - A_i dy - B_i g_i + A_i h_i \\ \frac{dl}{l} &= A_i dx - B_i dy + A_i g_i + B_i h_i \end{aligned} \quad (47)$$

gdzie dx , dy są szukanymi poprawkami współrzędnych Helmertowskich, g , h znanymi poprawkami (odchyłkami) na punktach łącznych;

$$A_i = \frac{\cos k_i}{l_i}, \quad B_i = \frac{\sin k_i}{l_i}.$$

Z równań normalnych otrzymuje się niewiadome:

$$\begin{aligned} dx &= \frac{g_1 (A_1^2 + B_1^2) + g_2 (A_2^2 + B_2^2) + \dots}{A_1^2 + B_1^2 + A_2^2 + B_2^2 + \dots} \\ dy &= \frac{h_1 (A_1^2 + B_1^2) + h_2 (A_2^2 + B_2^2) + \dots}{A_1^2 + B_1^2 + A_2^2 + B_2^2 + \dots} \end{aligned}$$

przy czym okazuje się, że $A_i^2 + B_i^2 = \frac{l}{l^2}$, stąd niewiadome przedstawiają się prostym wzorem:

$$dx = \frac{[pg]}{[p]}, \quad dy = \frac{[ph]}{[p]}, \quad (48)$$

gdzie $p = \frac{\text{Const.}}{l^2}$. Odległości, a raczej wagi, otrzymuje się bezpośrednio ze szkicu sieci, odczytując je z podziałki funkcyjnej funkcji $\frac{\text{Const.}}{l^2}$. Stąd ostateczne (katalogowe) współrzędne są:

$$u = \bar{u} + dx, \quad v = \bar{v} + dy \quad (49)$$

Przy wyprowadzeniu wzorów (47) i (48) nie stawiano żadnych warunków co do odchyłek g i h , żądano jedynie spełnienia warunku (46)-go. Ponieważ, jak z wyprowadzenia wypadło, odchyłki g i h znalazły się we wzorach (47) i (48) oraz, odchyłki te możemy obliczyć w podwójny sposób: jako różnice pomiędzy współrzędnymi pierwotnymi (x, y) a współrzędnymi wtórnymi (katalogowymi) (u, v) lub jako różnice pomiędzy (x, y) a współrzędnymi Helmertowskimi ($\bar{u}, \bar{v}$), to należy zastanowić się które z tych odchyłek należy użyć do wzorów (48). Ponieważ występujące w równaniach błędów (47) wyrazy wolne są funkcją odchyłek g, h , a od wielkości wyrazów wolnych (spozrzeżeń) zależą wyniki wyrównania, stąd wniosek, że odchyłki g, h należy obliczać ze współrzędnych Helmertowskich, które dają jak najmniejsze odchyłki na punktach łącznych. Jeszcze mniejsze odchyłki na punktach łącznych otrzymać można używając zamiast konforemnej funkcji liniowej, funkcje drugiego rzędu. Dokładności współrzędnych otrzymanych w zależności od poprzedniego użycia funkcji 1-go, czy też 2-go rzędu omówione zostaną w końcowym rozdziale.

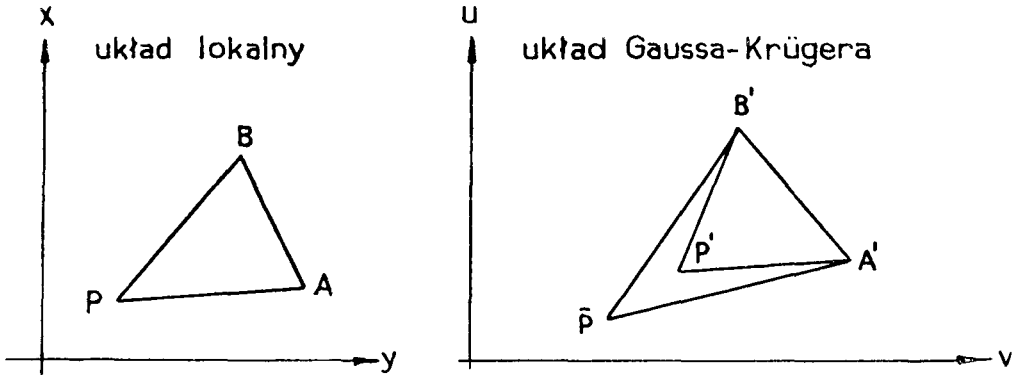
Drugim sposobem usunięcia odchyłek jest użycie funkcji afinicznej. Również i w tym przypadku należy sprowadzić do minimum odchyłki na punktach łącznych za pomocą dostosowania. Dokładności współrzędnych otrzymanych po usunięciu odchyłek przy użyciu obu metod podaje się w końcowym rozdziale.

7. Transformacje współrzędnych różnych odwzorowań układów i systemów

A. Transformacje współrzędnych lokalnych na układ Gaussa-Krügera

Rozpatrywany układ lokalny obejmuje małe obszary, a tym samym charakteryzuje się brakiem zniekształceń. Długości obliczone ze współrzędnych układu lokalnego są równe długościom w terenie. Transformację tych współrzędnych na układ Gaussa-Krügera przeprowadza się w dwóch

etapach. W pierwszym etapie przeprowadza się transformację przez podobieństwo (wydłużenie, skręt i przesunięcie) na podstawie dwóch punktów łącznych A, B , i A', B' obu układów. Na skutek tej transformacji każdy punkt bieżący P otrzyma w układzie Gaussa-Krügera współrzędne tym-



Rys. 8

czasowe (rys. 8.) Punkty P, A, B układu lokalnego utworzą na płaszczyźnie Gaussa-Krügera figurę $\bar{P}, A', B'$ podobną do figury P, A, B układu lokalnego, figura ta będzie różną od figury odpowiednich punktów P', A', B' układu Gaussa-Krügera.

W drugim etapie poprawiamy współrzędne tymczasowe punktu $\bar{P}$ tak, ażeby punkt $\bar{P}$ zidentyfikował się z punktem P' . Jak widzimy postępowanie to jest podobne do przedstawionego na str. 17 odwzorowania konforemnego 2-go rzędu, jednakże wykonanie przeprowadzono na zupełnie innej drodze [7].

Etap 1.

Transformację przez podobieństwo przeprowadza się przy pomocy przyrostów współrzędnych wg wzorów (7), (7a):

$$\Delta u = a \Delta x - b \Delta y$$

$$\Delta v = a \Delta y + b \Delta x$$

gdzie

$$a = \frac{\Delta u \Delta x + \Delta v \Delta y}{\Delta x^2 + \Delta y^2}, \quad b = \frac{\Delta v \Delta x - \Delta u \Delta y}{\Delta x^2 + \Delta y^2}$$

Etap 2.

Oznaczając długości układu lokalnego przez PA , układu Gaussa-Krügera przez $P'A'$ oraz długości odwzorowane w pierwszym etapie przez $\bar{P}A$ otrzymamy na podstawie geometrycznego podobieństwa figur:

$$\bar{P}A = PA \cdot \frac{A'B'}{AB}; \quad \bar{P}B = PB \cdot \frac{A'B'}{AB} \quad (50)$$

Ze wzoru na skalę w odwzorowaniu Gaussa-Krügera:

$$d_{G.-Kr.} = d \left(1 + \frac{y_i^2 + y_k^2 + y_i \cdot y_k}{6r^2} \right)$$

otrzymamy:

$$A' B' = AB \left(1 + \frac{v_A^2 + v_B^2 + v_A v_B}{6r^2} \right).$$

Podstawiając w (50) otrzymamy:

$$\bar{P}A = PA \left(1 + \frac{v_A^2 + v_B^2 + v_A v_B}{6r^2} \right)$$

$$\bar{P}B = PB \left(1 + \frac{v_A^2 + v_B^2 + v_A v_B}{6r^2} \right).$$

Długości w układzie Gaussa-Krügera są:

$$P' A' = PA \left(1 + \frac{v_A^2 + v_P^2 + v_A \cdot v_P}{6r^2} \right); \quad P' B' = PB \left(1 + \frac{v_B^2 + v_P^2 + v_B v_P}{6r^2} \right)$$

stąd poprawka:

$$f_{PA} = P' A' - \bar{P}A = PA \frac{(v_A^2 + v_P^2 + v_A v_P) - (v_A^2 + v_B^2 + v_A v_B)}{6r^2}$$

po przekształceniach otrzymamy:

$$\begin{aligned} f_{PA} &= \frac{PA}{6r^2} (v_P - v_B)(v_A + v_B + v_P) \\ f_{PB} &= \frac{PB}{6r^2} (v_P - v_A)(v_A + v_B + v_P) \end{aligned} \quad (51)$$

Otrzymane wielkości są poprawkami do długości tymczasowych celem przejścia na długości Gaussa-Krügera. Ażeby przejść z poprawek długości na poprawki współrzędnych w płaszczyźnie Gaussa-Krügera należy obliczyć różniczki zupełne wielkości:

$$PA = \sqrt{(u_A - u_P)^2 + (v_A - v_P)^2} \quad (52)$$

Po obliczeniu różniczek zupełnych i przekształceniach otrzymuje się następujące poprawki do współrzędnych:

$$\begin{aligned} u - u' &= du = \sum \frac{v}{6r^2} (\Delta u_{PB} \Delta v_{PA} + \Delta u_{PA} \Delta v_{PB}) \\ v - v' &= dv = \sum \frac{v}{6r^2} (\Delta v_{PA} \Delta v_{PB} - \Delta u_{PA} \Delta u_{PB}) \end{aligned} \quad (53)$$

gdzie (u, v) — współrzędne ostateczne, (u', v') — współrzędne otrzymane z 1-go etapu, $\sum v = v_A + v_B + v_P$, $\Delta u_{PA} = u_A - u'_P$, $\Delta v_{PA} = v_A - v'_P$.

Wzory transformacji odwrotnej, tj. z układu Gaussa-Krügera na układ lokalny wyprowadza się w sposób podobny.

Wzory na transformację przez podobieństwo pozostają te same, natomiast we wzorach na du , dv zmieni się znak z powodu odwrócenia skal, będzie:

$$\begin{aligned} du &= \frac{\sum v}{6r^2} (-\Delta u_{PA} \Delta v_{PB} - \Delta u_{PB} \Delta v_{PA}) \\ dv &= \frac{\sum v}{6r^2} (\Delta u_{PA} \Delta u_{PB} - \Delta v_{PA} \Delta v_{PB}) \end{aligned} \quad (54)$$

Zagadnienie powyższe rozwiązać również można w sposób podany niżej w p. B szczególnie w tym przypadku, gdy ma się do czynienia z masowymi przeliczeniami setek punktów i wieloma punktami łącznymi, których identyczność, jak niejednokrotnie podkreślano powinna być w każdej transformacji w odpowiednim etapie pracy zbadana.

B. Transformacje współrzędnych różnych odwzorowań, układów i systemów

Do zagadnienia tego należy poprzedni oraz, więcej skomplikowany, następujący przykład: przetransformować współrzędne Soldnera systemu Rauenberg na współrzędne Gaussa-Krügera systemu Pułkowo. Rozwiązanie przeprowadzić można przy użyciu funkcji 1-go lub 2-go rzędu.

Transformacja Helmerta

a) Sprowadzenie współrzędnych Soldnera do odwzorowania Gaussa-Krügera przez dodanie do rzędnej Soldnera poprawki $y^3 : 6N^2$ (odcięte pozostają bez zmiany).

b) Przeliczenie otrzymanych współrzędnych układu Gaussa-Krügera systemu Rauenberg, np. $\lambda = 19^\circ 10'$ do układu wtórnego np. $\lambda = 18^\circ$ systemu Pułkowo. Po wykonaniu tych czynności współrzędne pierwotne i wtórne będą tego samego odwzorowania i układu w systemie Rauenberg, pozostanie jedynie różnica systemów powodująca skręt, zmianę skali i przesunięcie, którą usuwa transformacja Helmerta pozostawiając jedynie odchyłki na punktach łącznych. Następną czynnością będzie więc:

c) transformacja Helmerta z użyciem nadliczbowej ilości punktów łącznych, oraz

d) usunięcie odchyłek na punktach łącznych. Przeliczenie współrzędnych z układu pierwotnego do układu wtórnego (czynność b) (wymaga następującego wyjaśnienia. Początki układów Soldnera (w Polsce jest ich około 20) różnią się od początków układów Gaussa-Krügera, zachodzi więc

potrzeba zamiany układów o nierównej odległości. Zamianę taką podaje się niżej.

Transformacja Helmerta służy dwom celom: sprawdza identyczność punktów łącznych oraz sprowadza do minimum odchyłki na punktach łącznych, co jest koniecznym warunkiem prawidłowego ich usunięcia. Punkty łączne wykazujące większe odchyłki niż trzykrotna wielkość średniego błędu transformacji uważa się za nie identyczne. Punkty takie należy wyłączyć i transformację powtórzyć. Odchyłki usuwa się metodą wyrównania współrzędnych (str. 39) lub metodą afiniczną. Pierwsza metoda przyjmuje zasadę minimum do usunięcia błędów przypadkowych, druga — wychodzi z założeń odwzorowawczych, określa warunki użycia metody oraz określa wielkości zniekształceń odwzorowawczych, które zawsze dają się obliczyć (str. 57).

Praktycznie, wyniki obu metod można uważać za równowarte. Ważniejszą jest jednak sprawa pracochłonności. W dawniejszych czasach metoda afiniczna, szczególnie w jej graficznej postaci, okazywała się bardziej praktyczną w przeliczeniach tysięcy punktów, obecnie, gdy dysponujemy nowoczesnymi maszynami rachunkowymi metoda wyrównania współrzędnych jest ekonomiczniejszą i tę metodę zaleca się używać.

Konforemna funkcja 2-go rzędu

Dla poprzedniego przykładu czynności przedstawiają się następująco:

a) sprowadzenie współrzędnych Soldnera do odwzorowania Gaussa-Krügera (jak poprzednio),

b) zastosowanie do otrzymanych współrzędnych Gaussa-Krügera systemu Rauenberg i współrzędnych Gaussa-Krügera systemu Pułkowo konforemnej funkcji 2-go rzędu. Jak widzieliśmy w przykładzie, w którym użyto tę funkcję do przeliczenia współrzędnych Gaussa-Krügera dwóch układów tego samego systemu odległych o $\lambda = 3^\circ$ — wyniki otrzymane są zadawalające (śr. odchyłka ok. 5 mm). Przykład obecny różni się więc od podanego tylko różnicą systemów (Rauenberg i Pułkowo), a więc skrętem, skalą i przesunięciem, co uwzględnia transformacja konforemna. Trzecią czynnością jest, jak poprzednio:

c) usunięcie odchyłki na punktach łącznych.

Podana metoda wymaga następującego wyjaśnienia. Wprawdzie w metodzie tej odpada konieczność sprowadzenia współrzędnych do jednolitego układu (czynność b) metody pierwszej), jednakże wzrasta pracochłonność na skutek użycia funkcji 2-go rzędu. Również pracochłonniesze jest sprawdzenie identyczności punktów (sprawdzenie to zawsze jest konieczne) za pomocą funkcji 2-go rzędu. Jeżeli jednak uwzględnimy, że w nowoczesnych maszynach rachunkowych zanika różnica pracochłonności (użycie

funkcji liniowej lub 2-go rzędu) w masowych przeliczeniach, to można przyjąć, że metoda druga jest ekonomiczniejszą.

Do omawianej transformacji nadaje się również konforemna funkcja 2-go rzędu o trzech punktach łącznych (wzory (22) i przykład). Obie funkcje nadają się szczególnie do transformacji współrzędnych stereograficznych na współrzędne Gaussa-Krügera, a to ze względu na trudności sporządzenia tych współrzędnych do jednolitego odwzorowania, co byłoby konieczne w metodzie Helmerta.

Trzecią metodą jest użycie szeregu potęgowego jako funkcji odwzorowawczej:

3. Szereg potęgowy 2-go rzędu.

Funkcji tej używamy tylko do transformacji współrzędnych nie matematycznego odwzorowania współrzędnych katastralnych w Małopolsce. Szczegóły tego odwzorowania podano na str. 30.

C. Zamiana współrzędnych dwóch układów Gaussa-Krügera o nierównej 3 — stopniom odległości południków początkowych

W czynnościach wyżej podanych nie omówioną została czynność b), tj. zamiana współrzędnych Gaussa-Krügera w przypadku, gdy oba układy odległe są o zmienną ilość stopni. Dla stałej np. 3-stopniowej odległości układów posiadamy wygodne tablice. Dla nierównych odległości, które zawsze występują dla współrzędnych Soldnera i innych o znanych początkach układów (φ_0, λ_0) obliczenia oparte o znane odwzorowanie Gaussa-Krügera przedstawiają się następująco:

Zamianę współrzędnych Gaussa-Krügera z układu (x, y) na układ (x', y') przeprowadza się wg wzoru:

$$x' = x_0 + \Delta x', \quad y' = -y_0 + \Delta y', \quad (55)$$

gdzie x_0, y_0 są współrzędnymi punktu P_0 przecięcia się południka środkowego $\lambda_0 = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2}$ z równoleżnikiem o szerokości, w przybliżeniu, φ_0 dla środka transformowanego obszaru; λ_1, λ_2 są początkami obu układów (patrz przykład). $\Delta x', \Delta y'$ oblicza się wg wzorów [3], które w ujęciu krakowianowym mają następującą postać:

$$(\Delta y', \Delta x') = \begin{pmatrix} k_2, & k_1 \\ k_1, & -k_2 \\ 2k_3, & -2k_4 \\ k_4, & k_3 \\ k_5, & -k_6 \\ k_6, & k_5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x \cdot 10^{-5} \\ \Delta y \cdot 10^{-5} \\ \Delta x \cdot \Delta y \cdot 10^{-10} \\ (\Delta x^2 - \Delta y^2) 10^{-10} \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \quad (56)$$

Oznaczenia: $\Delta x = x - x_0, \Delta y = y - y_0$.

Współczynniki $k_1, k_2, k_3, k_4, k_5, k_6$ oblicza się wg:

$$k_1 = \cos 2\gamma, \quad k_2 = \sin 2\gamma, \quad k_3 = g_2 \cdot 10^6, \\ k_4 = h_2 \cdot 10^6, \quad k_5 = g_3 \cdot 10^9, \quad k_6 = h_3 \cdot 10^9,$$

$$\log \gamma = \log \varrho \operatorname{tg} \gamma - \frac{\mu}{3} \operatorname{tg}^2 \gamma + \frac{13}{90} \mu \operatorname{tg}^4 \gamma,$$

$$\log \operatorname{tg} \gamma = \log \operatorname{tg} l \sin \varphi_0 + v_2$$

$$g_2 = -\frac{3l^2}{N_0 \varrho^2} \cos^2 \varphi_0 t_0 (1 + \eta_0^2)$$

$$h_2 = \frac{l}{N_0 \varrho} \cos \varphi_0 (1 + \eta_0^2) - \frac{l^3}{6N_0 \varrho^3} \cos^3 \varphi_0 (1 + 31 t_0^2)$$

$$g_3 = -\frac{1}{3} \frac{1}{N_0^2} \cdot \frac{l^2}{\varrho^2} \cos^2 \varphi_0 (3 - 4t_0^2)$$

$$h_3 = -\frac{1}{3} \frac{1}{N_0^2} \frac{l}{\varrho} \cos \varphi_0 t_0 (1 + \eta_0^2),$$

$$v_2 = (6 + 4\eta_0^2) v_1; \quad v_1 = \frac{\mu}{6} 10^7 \eta_0^2 \sin^2 l \cos^2 \varphi_0$$

$$t_0 = \operatorname{tg} \varphi_0, \quad l = \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{2}$$

φ_0 przyjmuje się w pobliżu środka transformowanego obszaru, λ_1, λ_2 są początkowymi południkami sąsiednich układów, $\lambda_0 = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2}$

$\mu = 0.4342945$, η, N oblicza się dla argumentu φ_0 z tablic [3],

$$c_1 = (3\Delta x^2 \Delta y - \Delta y^3), \quad c_2 = (\Delta x^3 - 3\Delta x \Delta y^2)$$

Obliczenia współczynników przeprowadza się dla bezwzględnych wartości wyrazów $\cos 2\gamma, \sin 2\gamma, g_2, h_2, g_3, h_3$, natomiast znaki współczynników $k_1 \dots k_6$ przyjmuje się nast.: przy przejściu od układu zachodniego do wschodniego obowiązują znaki:

$$y_0, \quad k_1, \quad k_2, \quad -k_3, \quad k_4, \quad k_5, \quad -k_6,$$

przy przejściu od układu wschodniego do zachodniego:

$$-y_0, \quad k_1, \quad -k_2, \quad -k_3, \quad -k_4, \quad k_5, \quad k_6.$$

Przebieg rachunku podaje przykład.

8. Transformacja afiniczna z elipsoidy Bessela na elipsoidę Krasowskiego

Dla przeprowadzenia transformacji z elipsoidy Bessela na elipsoidę Krasowskiego przyjęto na punkty łączne współrzędne fikcyjne, tj. współrzędne geograficzne o tych samych wartościach na obu elipsoidach. Przy-

jęte współrzędne nazwano fikcyjnymi dlatego, że realnie współrzędne takie- jako odpowiednie na obu elipsoidach — w geodezji nie występują. Realne, odpowiadające sobie współrzędne geograficzne dane na dwóch elipsoidach różnią się z kilku przyczyn: różne wymiary elipsoid, różne odchyłki pionów w punktach wyjściowych, oraz w praktyce, różne błędy pomiarów i wyrównań sieci triangulacyjnych elipsoid Bessela i Krasowskiego.

Wyniki spowodowane ostatnimi różnicami mogą wywołać wrażenie, że transformacja afiniczna, wykazująca duże odchyłki z powodu tych różnic, nie powinna być użyta. Współrzędne fikcyjne — jak wykaże również przykład — usuwają tę niewygodę.

Przyjęte fikcyjne współrzędne geograficzne przeliczono na współrzędne Gaussa-Krügera obu elipsoid. W ten sposób otrzymano trójkąt afiniczny, o przeciętnej długości boków afinicznych około 60 km, oraz wewnątrz trójkąta punkty kontrolne 1, 2, 3 o znanych współrzędnych elipsoid Bessela i Krasowskiego. Ułożonymi wzorami afinicznymi przeliczono współrzędne 1, 2, 3 z elipsoidy Bessela na elipsoidę Krasowskiego i porównano ze znanymi — poprzednio przeliczonymi — współrzędnymi elipsoidy Krasowskiego. Otrzymane wyniki orientują o dokładności wykonanej transformacji.

Na podstawie współrzędnych punktów łącznych A, B, C, (kol. 3 i 4 podanej niżej tabeli) otrzymano następujące wzory transformacyjne:

$$\begin{aligned}\bar{x} &= 1,0001\ 31864\ x' + 0,0000\ 00030\ y' + 698,998 \\ \bar{y} &= 0,0000\ 00060\ x' + 1,0001\ 38997\ y' + 0,002\end{aligned}\tag{57}$$

Punkty 1, 2, 3 przeliczone wzorami (57) podano w kolumnie 5-tej. Porównanie współrzędnych (kol. 4 i 5) wykazuje przeciętną różnicę współrzędnych 3 mm (max. 6 mm). Wyniki te stwierdzają, że transformacja afiniczna wykonana we współrzędnych wolnych od błędów pomiarowych może być użyta do transformacji z jednej elipsoidy na drugą przy założeniu, że współrzędne Gaussa-Krügera obliczone będą w tym samym pośrodku.

Przykład powyższy przeliczono również metodą afiniczną, we współrzędnych otrzymanych z wyrównania sieci triangulacyjnej (kol. 6), tj. współrzędnych danych z triangulacji elipsoid Krasowskiego i Bessela. Wszystkie współrzędne odnoszą się do punktów poprzedniego przykładu. Współrzędne otrzymane z tej transformacji podane są w kol. 7. Porównanie ze współrzędnymi z wyrównania (kol. 6 i 7) wykazuje różnicę 6 cm. (max. 12 cm). Tak duże różnice pochodzą — jak wspomniano wyżej — z błędów współrzędnych punktów łącznych danych w różnych triangulacjach (różnice pochodzące z pomiarów i wyrównań różnych sieci triangulacyjnych). Słuszne więc było przyjęcie współrzędnych fikcyjnych, ponie-

Zestawienie współrzędnych i wyników transformacji

Pkt	Współrzędne fikcyjne	Elipsoida		Z transformacji afinicznej	Elipsoida Krasowskiego (z wyrównania)	Z transformacji afinicznej
		Bessela	Krasowskiego			
		x' y'	x y	x y	x'' y''	x' y'
1	2	3	4	5	6	7
<i>A</i>	52 24 25.9514 15 16 57.7611	8093.69 19237.02	8793.756 19239.693		8681.391 19228.548	
<i>B</i>	52 52 50.0893 15 48 01.0058	61026.61 53869.60	61733.657 53877.090		61614.890 53862.137	
<i>C</i>	52 25 30.2574 16 11 38.4769	10961.50 81208.53	11661.946 81219.817		11548.717 81201.116	
1	52 35 17.2210 15 43 26.9094	28430.97 49071.90	29133.723 49078.717	...3.718 ...8.721	29018.870 49064.151	... 8.752 ... 4.091
2	52 40 57.5656 15 49 02.9382	39017.14 55277.84	39721.286 55285.521	...1.285 ...5.523	39605.116 55270.249	... 5.041 ... 70.221
3	52 28 13.3835 15 47 36.6080	15381.27 53916.09	16082.300 53923.577	...2.298 ...3.583	15968.795 53908.333	... 8.794 ... 8.256

waż operując współrzędnymi realnymi można by wysunąć mylny wniosek, że transformacja afiniczna nie nadaje się do przeliczeń z jednego systemu na system drugi.

Metodę tę użyto do przeliczeń współrzędnych kilku sieci triangulacyjnych z elipsoidy Bessela na elipsoidę Krasowskiego. Ponieważ transformacje te posiadały wiele punktów kontrolnych o bardzo dużej dokładności istniała możliwość przekonania się o dokładności przeliczeń. Stwierdzono w ten sposób wielkość przeciętnych odchylek w granicy poniżej ± 1 cm.

9. Łączenie sieci triangulacyjnych na większych obszarach

A. Łączenie sieci triangulacyjnych o współrzędnych różnych systemów

Łączeniem sieci nazywamy sprowadzenie do jednolitości współrzędnych sieci znajdujących się w różnych systemach. Jest to zagadnienie, podobne do rozpatrywanego na str. 43, w zastosowaniu do wielkich obszarów.

Sieci triangulacyjne np. kilku sąsiednich państw łączących się na obwodnicy punktami I-go rzędu (w braku części lub wszystkich punktów łącznych należy wykonać pomiary uzupełniające), lub sieci jednego państwa, składające się z wielu fragmentów sieci można sprowadzić do jednolitości wyrównując ponownie, w oparciu o bezpośrednie pomiary, całość złożoną z kilku sieci lub na drodze transformacji współrzędnych w następujący sposób:

1. Projektujemy z pomierzonych kątów sieci obszarów przyległych sieć I-go rzędu, tak jak uczyniono to np. w zachodniej Europie (sieć Z.E.N.). Sieci niższorzędne częściowo wyrównuje się w oparciu o bezpośrednie spostrzeżenia a częściowo transformuje współrzędne w oparciu o uzyskane punkty łączne.

2. Drugi sposób polega na użyciu nie kątów lecz transformacji współrzędnych sieci obszarów przyległych. W odróżnieniu do małych obszarów transformacje wykonujemy we współrzędnych geograficznych, natomiast sieci niższorzędne transformuje się na podstawie uzyskanych punktów łącznych we współrzędnych płaskich, jak podano to na str. 40—46. Ponieważ szczegółowe przedstawienie transformacji sieci wielkich obszarów przekracza ramy niniejszej pracy, poprzestaje się na kilku uwagach dotyczących tego zagadnienia.

Geograficzne współrzędne sąsiednich obszarów różnią się systemami, tj. elipsoidami i punktami przyłożenia, a więc skretem sieci, skalą i przesunięciem. Sprowadzenie do jednolitości systemów polegać będzie na przyjęciu wzorów transformacyjnych uwzględniających wymienione elementy, wyznaczeniu tych elementów na podstawie punktów łącznych, oraz w końcu na transformacji współrzędnych poszczególnych obszarów na podstawie uzyskanych wzorów transformacyjnych dla poszczególnych sieci. Jest to więc znane zagadnienie transformacji na płaszczyźnie, różnica polega na wykonaniu transformacji na elipsoidzie. Transformację możemy wykonać równocześnie dla kilku sieci lub też drogą kolejnych przybliżeń jak podano to na str. 36—38.

Celem jak najlepszego związania elipsoidy z geoidą koniecznym będzie użycie azymutów Laplace'a obliczonych w jednym przyjętym systemie, tak jak podano to na str. 34.

Do omawianej transformacji najwygodniej użyć różniczkowych wzorów W. Hristowa, z których układa się równania błędów, równania normalne w końcu równania transformacyjne dla poszczególnych sieci [8].

B. Łączenie sieci triangulacyjnych o współrzędnych tego samego odwzorowania i układu

Jako następny przykład łączenia niezależnie wyrównanych sieci triangulacyjnych podaje się sieć wypełniającą założoną na obszarze Polski.

Sieć ta posiada punkty łączne z państwową siecią I-go rzędu. Ścisłe wyrównanie sieci wypełniającej o około 6 tysiącach punktów w nawiązaniu do ok. 400 punktów sieci I-go rzędu przy braku nawiązań kątowych obu sieci i założeniu niezmienności punktów I-go rzędu przedstawia tak duże trudności, że zdecydowano się na użycie przybliżonej metody rozwiązania, tj. metody łączenia sieci triangulacyjnych.

Zasady rozwiązania przedstawiają się następująco: Sieć dzieli się na kilkadziesiąt grup (grupy od 100 do 500 punktów w zależności od rozmieszczenia punktów nawiązania I-go rzędu), każdą grupę wyrównuje się niezależnie. Po obliczeniu współrzędnych Gaussa-Krügera punktów każdej grupy w układach odpowiadających układom punktów I-go rzędu przeprowadza się transformację Helmertowską każdej grupy.

Na punkty łączne transformacji nie przyjęto punktów sieci wypełniającej lecz punkty sieci I-go rzędu. Uczyniono to z tej przyczyny, że uzgadnianie styków sieci wypełniających wymagałoby użycia równoczesnej transformacji kilkunastu grup, co byłoby bardzo pracochłonne. Z tego powodu, po usunięciu odchyłek na punktach łącznych I-go rzędu, pozostają jeszcze różnice (odchyłki) współrzędnych na punktach stykowych sieci wypełniających. Różnice te o przeciętnej wielkości 4 cm usunięto biorąc średnie współrzędne na stykach sieci wypełniających.

Metoda dostosowania współrzędnych w zastosowaniu transformacji sieci wypełniających do współrzędnych sieci I-go rzędu wymaga następującego wyjaśnienia: w kilku wypadkach transformacja Helmerta wykazała odchyłki na punktach łącznych dochodzące do 1-go metra.

Stwierdzono również, że tak duże odchyłki nie są skutkiem nieidentyczności punktów łącznych. Należało raczej domniemywać, że przyczyna tkwi w dostosowywanych sieciach, które czy to z powodu użytych redukcji, wyrównań czy też kształtu sieci lub innych przyczyn nie są tak podobne, ażeby po transformacji Helmerta pozostały tylko małe odchyłki równe przypadkowym błędom pomiarów.

Wymienione wyżej przyczyny mogą być następujące: obie sieci posiadają zupełnie różny kształt, sieć państwowa składa się częściowo z łańcuchów, tworzą się z tego powodu tzw. „oczka”, które wypełnia powierzchnia sieć wypełniająca. Obie sieci posiadają różny układ baz i punktów Laplace'a (sieci wypełniające w zasadzie nie posiadają tych elementów na obwodnicy sieci), redukcję kątów na elipsoidę uwzględniono tylko w sieci państwowej.

Z analizy wyrównań sieci wiadomem jest, że niezależnie wyrównane sieci wykazują na obwodnicy największe błędy [9], jest to również zrozumiałe z punktu widzenia statyki sieci. Zjawisko temu może zaradzić celowe zaprojektowanie baz i punktów Laplace'a.

Jeżeli projekt taki nie został wykonany możemy się spodziewać, co potwierdza praktyka, takich niezgodności jakie wykazuje transformacja Helmerta na obwodnicy (punktach łącznych) obu sieci.

Fakt występowania dużych odchyłek na punktach łącznych stał się przyczyną użycia takich funkcji, które zmniejszają wielkości wspomnianych odchyłek. Funkcją taką może być konforemna funkcja 2-go rzędu lub też szereg potęgowy 2-go rzędu. Te funkcje użyto do pewnego konkretnego przykładu, osiągając ponad dwukrotne zmniejszenie odchyłek na punktach łącznych na obwodnicy sieci (wewnątrz sieci odchyłki zmniejszyły się tylko nieznacznie). Użycie funkcji 2-go rzędu, a więc zmniejszenie odchyłek na punktach łącznych, miało na uwadze uzyskanie „lepszego” wyniku w końcowym etapie obliczeń, tj. w etapie usunięcia odchyłek na punktach łącznych za pomocą metod podanych wyżej (str. 39). Inaczej: spodziewano się, że zmniejszenie się odchyłek na punktach łącznych spowoduje mniejsze błędy współrzędnych ostatecznych. Pomijając nasuwające się, aprioryczne wyjaśnienia, które można by na ten temat wypowiedzieć, rozstrzygających sprawdzeniem obu metod (użycie dostosowania Helmerta, czy też funkcji 2-go rzędu) będzie obliczenie błędów współrzędnych ostatecznych otrzymanych z obu metod. Obliczenie tych błędów podaje się w końcowym rozdziale.

10. Zniekształcenia odwzorowawcze oraz dokładności transformowanych współrzędnych

A. Deformacje współrzędnych Gaussa-Krügera spowodowane transformacją afiniczną

W transformacji afinicznej proste odwzorowują się jako proste, a stosunek podziału odcinków pozostaje ten sam. W odwzorowaniu konforemnym prawa odwzorowania są inne: konforemne obrazy części łuku koła wielkiego kuli na płaszczyznę wykazują odchyłki — podłużną ξ i poprzeczną η . Różnice odpowiadających sobie wielkości ξ i η w dwóch układach Gaussa-Krügera będą więc miarą zniekształceń współrzędnych Gaussa-Krügera transformowanych za pomocą funkcji afinicznej zamiast konforemnej [10].

Odchyłkę poprzeczną otrzymuje się, z zaniedbaniem wyrazów 2-go rzędu, ze wzoru [3]:

$$\eta = \frac{\xi(s - \xi) 3y_m \cos t}{6r^2} \quad (58)$$

gdzie ξ , η odnoszą się do układu, w którym cięciwa jest odciętą, a środkiem układu jest jeden z końców cięciwy.

Oznaczenia:

s — długość cięciwy, t — kąt kierunkowy,
 y — rzędne środka cięciwy, r — promień kuli.

Maks. wyrażenia (58) otrzyma się dla $\xi = s/2$:

$$\eta_{\text{maks.}} = \frac{s^2 y_m \cos t}{8r^2}.$$

Dla dwóch różnych odwzorowań otrzymuje się: η_{m_1} , η_{m_2} . Różnica $\eta_{m_1} - \eta_{m_2}$ będzie poprzeczną odchyłką w środku cięciwy:

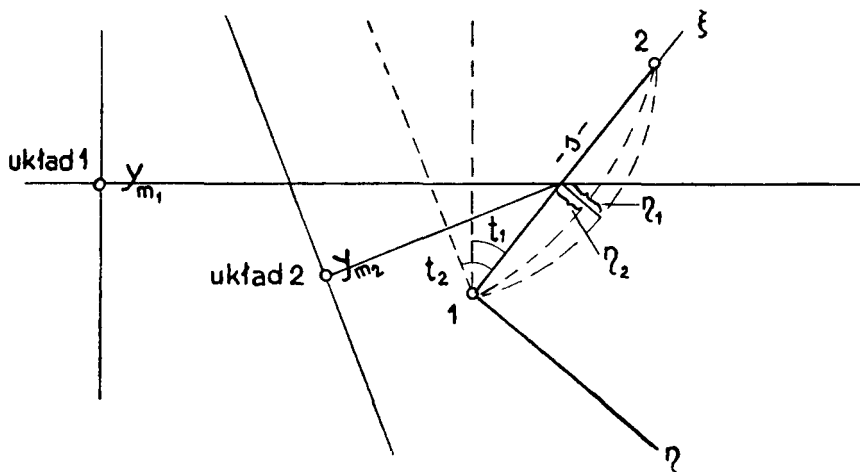
$$\eta_m = \eta_{m_1} - \eta_{m_2} = \frac{s^2}{8r^2} (y_m \cos t_1 - y_m \cos t_2)$$

Przyjmując w przybliżeniu $t_1 = t_2$ będzie:

$$\eta_m = \frac{s^2 (y_{m_1} - y_{m_2})}{8r^2} \cos t \quad (59)$$

Wzór na odchyłkę podłużną:

$$s - S = \frac{y_2^3 - y_1^3}{6r^2 \sin t} \quad (60)$$



Rys. 9

gdzie s — długość odwzorowana, S — długość sferyczna, y_1 , y_2 rzędne końców łuku. Dla obu połówek łuku będzie:

$$\left(\frac{s}{2}\right)_1 - \frac{S}{2} = \frac{y_m^3 - y_1^3}{6r^2 \sin t}$$

$$\left(\frac{s}{2}\right)_2 - \frac{S}{2} = \frac{y_2^3 - y_m^3}{6r^2 \sin t}$$

Podłużne przesunięcie w środku łuku równe będzie połowie różnicy obu wielkości:

$$\xi = \frac{\left(\frac{s}{2}\right)_2 - \left(\frac{s}{2}\right)_1}{2} = \frac{y_1^3 + y_2^3 - 2y_m^3}{12r^2 \sin t}$$

ponieważ $y_1 = y_m - \frac{s}{2} \sin t$, $y_2 = y_m + \frac{s}{2} \sin t$,

stąd:

$$\xi = \frac{y_m s^2 \sin t}{8r^2}.$$

Ponieważ łuk odwzorowuje się w dwóch różnych układach, więc otrzymuje się dwa różne przesunięcia podłużne punktu środkowego:

$$\xi_1 = \frac{y_{m_1} s^2 \sin t}{8r^2}; \quad \xi_2 = \frac{y_{m_2} s^2 \sin t}{8r^2}.$$

Różnica $\xi_m = \xi_1 - \xi_2$ będzie wielkością, o którą przesunięty zostanie punkt środkowy w kierunku podłużnym:

$$\xi_m = \frac{(y_{m_1} - y_{m_2}) s^2 \sin t}{8r^2}. \quad (61)$$

Wypadkowa będzie:

$$\varrho = \sqrt{\xi_m^2 + \eta_m^2} = \frac{y_{m_1} - y_{m_2}}{8r^2} s^2. \quad (62)$$

Wyrażenie to, otrzymane z różnicy odwzorowań w dwóch sąsiednich układach, jest wielkością zniekształcenia współrzędnych Gaussa-Krügera spowodowanego transformacją afiniczną.

Z poprzedniego otrzymuje się:

$$s = 2r \sqrt{\frac{2\varrho}{y_{m_1} - y_{m_2}}}. \quad (63)$$

Koło o promieniu s przedstawia obszar wewnątrz którego na skutek afinizmu zachodzą przesunięcia o wielkości ϱ . Z wzoru (62) można obliczyć zniekształcenie ϱ dla danej różnicy $(y_{m_1} - y_{m_2})$ i wielkości boku z trójkąta afinicznego, podobnie ze wzoru (63) można obliczyć wielkość boku trójkąta afinicznego s dla danej różnicy $(y_{m_1} - y_{m_2})$ i zniekształcenia ϱ .

Tak np. dla $s = 10$ km, $y_{m_1} - y_{m_2} = 200$ km otrzymuje się ze wzoru (62) $\varrho = 0.06$ m. Podobnie otrzymuje się dla $\varrho = 0.005$ m i $y_{m_1} - y_{m_2} = 200$ km ze wzoru (63) wielkość boku trójkąta afinicznego $s = 3$ km. W konkretnych sytuacjach wzory te służą do zorientowania się o znie-

kształceniach spowodowanych transformacją afiniczną użytą do zamiany współrzędnych Gaussa-Krügera.

B. Zniekształcenia odwzorowawcze

Każda transformacja liniowa, czy też 2-go rzędu wykonana o nadliczbowej ilości punktów łącznych pozostawia na tych punktach odchyłki, które należy usunąć ze znanych przyczyn. Do funkcji odwzorowawczych, które odchyłki te usuwają należy funkcja afiniczna (funkcje 2-go rzędu, bez nadliczbowej ilości punktów łącznych, nie są brane pod uwagę ze względu na ich pracochłonność). Prócz funkcji odwzorowawczych używa się również i podanej poprzednio metody wyrównania. Obie metody operują współrzędnymi Helmertowskimi ($\bar{u}$, $\bar{v}$) oraz współrzędnymi „katalogowymi” (u , v), tj. funkcją ogólną: $u = f(\bar{u}, \bar{v})$, $v = f(\bar{u}, \bar{v})$. Dla transformacji afinicznej obliczyć można zniekształcenie $\frac{ds}{s}$, natomiast z wyrównania daje się obliczyć błąd m_u , m_v współrzędnych (u , v). Oba kryteria, nie będąc jednoznaczne, odpowiadają we właściwy tym metodom sposób na pytanie o dokładności przeliczanych współrzędnych. Obliczone niżej zniekształcenia funkcji odwzorowawczych podających związki pomiędzy innymi współrzędnymi, np. $\bar{u} = f(x, y)$, $\bar{v} = f(x, y)$ interesować mogą tylko w niektórych praktycznych zagadnieniach.

Ponieważ na obszarze Polski ponad 80% punktów wyznaczono przy pomocy transformacji, stąd sprawa dokładności współrzędnych ostatecznych (katalogowych) jest poważnym zagadnieniem.

W obu przypadkach: a) afinizmu b) wyrównania współrzędnych — obliczyć można ogólny, przybliżony błąd sieci wg wzoru: $m_0 = \sqrt{[vv] : n - k}$, gdzie $v = \alpha_v - \alpha_0$ (α_v — kąt obliczony ze współrzędnych wyrównanych, α_0 — kąt obserwowany, n — ilość spostrzeżeń, k — ilość niewiadomych w całej sieci). W metodzie afinicznej oblicza się zniekształcenie (błąd względny) $\frac{ds}{s}$ w ramach poszczególnych trójkątów, metoda wyrównania podaje błędy poszczególnych punktów. Jednakże obliczenie błędów w metodzie wyrównania jest tak pracochłonne (ma się tu na uwadze masowe przeliczenia tysięcy punktów), że w praktyce rezygnuje się z tej możliwości, próbując, w zastępstwie, ustalić takie mniej pracochłonne wzory, któreby w przybliżeniu podawały poszukiwaną dokładność. Poniżej podaje się wyniki wstępnej analizy, na ograniczonym fragmencie jednego trójkąta, mające na celu wyjaśnienie omawianego problemu. W szczególnych przypadkach, gdy zależeć będzie na podaniu dokładności z większą pewnością (np. miasta, w których pojedyncze punkty posiadać będą specjalne znaczenie) obliczy się żądane dokładności w sposób ścisły odpowiadający metodzie wyrównania współrzędnych.

W odwzorowaniach z płaszczyzny na płaszczyznę ze względu na to, że wielkości podstawowe wyrażają się bardzo prostymi wzorami [11]:

$$E = G = 1, \quad P = E', \quad Q = F', \quad R = G', \quad F = 0,$$

otrzymuje się na skale i zniekształcenia następujące wzory:

1. skale wzdłuż linii parametrowych:

$$m_x = \sqrt{E'}, \quad m_y = \sqrt{G'}.$$

2. skale ekstremalne:

$$a_e = \frac{1}{2} \left(\sqrt{E' + G'} + 2 \sqrt{E' G' - F'^2} + \sqrt{E' + G' - 2 \sqrt{E' G' - F'^2}} \right)$$

$$b_e = \frac{1}{2} \left(\sqrt{E' + G'} + 2 \sqrt{E' G' - F'^2} - \sqrt{E' + G' - 2 \sqrt{E' G' - F'^2}} \right) \quad (64)$$

3. Skale wzdłuż dowolnego kierunku:

$$m_\alpha^2 = E' \cos^2 \alpha + F' \sin 2\alpha + G' \sin^2 \alpha$$

4. Wartość kąta kierunkowego linii ekstremalnych na płaszczyźnie obrazu:

$$\operatorname{tg} 2\alpha' = \frac{2F'}{E' - G'}$$

5. Zniekształcenie kąta kierunkowego:

$$\operatorname{tg}(\alpha - \alpha') = \frac{E' - F' \operatorname{tg} \alpha - \sqrt{E' G' - F'^2}}{E' \operatorname{ctg} \alpha - F' + \operatorname{tg} \alpha \sqrt{E' G' - F'^2}}$$

Oznaczenia:

$m = ds : dS$, ds — element długości na płaszczyźnie obrazu,
 dS — element długości na płaszczyźnie oryginału.

$$E' = u_x^2 + v_x^2, \quad F' = u_x u_y + v_x v_y, \quad G' = u_y^2 + v_y^2.$$

u_x, v_x, u_y, v_y — pochodne funkcji $u = f_1(x, y)$, $v = f_2(x, y)$

α — kąt kierunkowy na płaszczyźnie oryginału,

α' — kąt kierunkowy na płaszczyźnie obrazu.

1. Odwzorowania konforemne

a. Funkcja liniowa

$$u = ax - by + c_1$$

$$v = bx + ay + c_2$$

Dla funkcji tej otrzymuje się:

$$\begin{aligned} E' = G' = a^2 + b^2, \quad F' = 0, \\ m_x = m_y = a_e = b_e = m_\alpha = \sqrt{a^2 + b^2}. \\ \operatorname{tg} 2\alpha = 0, \quad \operatorname{tg}(\alpha - \alpha') = 0, \quad \alpha = \alpha'. \end{aligned} \quad (65)$$

W odwzorowaniu tym stwierdza się stałość skali, która jest niezależna od położenia punktu i kierunku, oraz niezmiennosć kątów. Wyniki te są zrozumiałe, ponieważ z geometrycznej interpretacji wiemy, że ma się tu do czynienia ze skrętem, stałą zmianą skali i przesunięciem. Otrzymane wzory w praktyce mają małe zastosowanie.

b. Konforemna funkcja 2-go rzędu

$$\begin{aligned} u &= a_0 + x + a_1 x - b_1 y + a_2(x^2 - y^2) - 2b_2 xy \\ v &= b_0 + y + a_1 y + b_1 x + 2a_2 xy + b_2(x^2 - y^2) \end{aligned}$$

Dla funkcji tej otrzymamy:

$$\begin{aligned} u_x &= 1 + a_1 + 2a_2 x - 2b_2 y, & v_x &= b_1 + 2a_2 y + 2b_2 x \\ u_y &= -(b_1 + 2a_2 y + 2b_2 x), & v_y &= 1 + a_1 + 2a_2 x - 2b_2 y \end{aligned}$$

stąd:

$$\begin{aligned} E' &= (1 + a_1 + 2a_2 x - 2b_2 y)^2 + (b_1 + 2a_2 y + 2b_2 x)^2 \\ G' &= (-b_1 - 2a_2 y - 2b_2 x)^2 + (1 + a_1 + 2a_2 x - 2b_2 y)^2 \\ F' &= 0, \quad E' = G'. \end{aligned}$$

Odwzorowanie to przedstawia konforemność.

W szczególności, obliczając w/g wzorów 1—5 otrzymuje się:

$$\begin{aligned} 1. \quad m_x = m_y = \sqrt{E'}, & \quad 2. \quad a_e = b_e = \sqrt{E'}, \\ 3. \quad m_\alpha = \sqrt{E'}, & \quad 4. \quad \operatorname{tg} 2\alpha = 0, \\ 5. \quad \operatorname{tg}(\alpha - \alpha') = 0, & \quad \alpha = \alpha'. \end{aligned}$$

Jak widać, stałe skale są funkcją położenia punktu, kąty odwzorowują się bez zniekształceń.

2. Transformacja afiniczna

$$\begin{aligned} u &= a_1 x + b_1 y + c_1 \\ v &= a_2 x + b_2 y + c_2 \end{aligned}$$

Dla funkcji tej otrzymuje się:

$$E' = a_1^2 + a_2^2, \quad G' = b_1^2 + b_2^2, \quad F' = a_1 b_1 + a_2 b_2.$$

Obliczając wg wzorów 1—5 będzie:

$$\begin{aligned}
 1. \quad m_x &= \sqrt{a_1^2 + a_2^2}, & m_y &= \sqrt{b_1^2 + b_2^2} \\
 2. \quad a_e &= \frac{1}{2} (\sqrt{(a_1 + b_2)^2 + (a_2 - b_1)^2} + \sqrt{(a_2 + b_1)^2 + (a_1 - b_2)^2}) \\
 b_e &= \frac{1}{2} (\sqrt{(a_1 + b_2)^2 + (a_2 - b_1)^2} - \sqrt{(a_2 + b_1)^2 + (a_1 - b_2)^2}) \\
 3. \quad m_\alpha^2 &= (a_1^2 + a_2^2) \cos^2 \alpha + (a_1 b_1 + a_2 b_2) \sin 2\alpha + (b_1^2 + b_2^2) \sin^2 \alpha \\
 4. \quad \operatorname{tg} 2\alpha' &= \frac{2(a_1 b_1 + a_2 b_2)}{(a_1^2 + a_2^2) - (b_1^2 + b_2^2)} \\
 5. \quad \operatorname{tg}(\alpha - \alpha') &= \frac{(a_1^2 + a_2^2) + (a_1 b_1 + a_2 b_2) \operatorname{tg} \alpha - (a_1 b_2 - a_2 b_1)}{(a_1^2 + a_2^2) \operatorname{ctg} \alpha - (a_1 b_1 + a_2 b_2) + (a_1 b_2 - a_2 b_1) \operatorname{tg} \alpha}
 \end{aligned} \tag{67}$$

W transformacji tej skale nie są zależne od położenia punktu, natomiast zależne są od kierunku, podobnie zależne są od kierunku i zmniejszania kątów.

Z przykładu otrzymano nast. współczynniki trans. afinicznej:

$$\begin{aligned}
 a_1 &= 0.999\,996\,259, & b_1 &= 0.000\,000\,464 \\
 a_2 &= 0.000\,000\,463, & b_2 &= 1.000\,003\,248
 \end{aligned}$$

Stąd otrzymuje się:

$$\begin{aligned}
 a_e &= 1.000\,0033, & ds:s &= 1:303\,000 \\
 b_e &= 0.999\,996\,259, & ds:s &= 1:270\,000
 \end{aligned}$$

C. Średnie błędy transformowanych współrzędnych

1. Średnie błędy współrzędnych ($\bar{u}$, $\bar{v}$) otrzymanych z transformacji Helmerta.

Konforemna funkcja liniowa:

$$\begin{aligned}
 \bar{u} &= a_0 + (a + 1)x - by \\
 \bar{v} &= b_0 + (a + 1)y + bx
 \end{aligned} \tag{68}$$

jest zależną od niewiadomych a_0 , b_0 , a , b otrzymanych z wyrównania oraz współrzędnych pierwotnych (x , y). Suma kwadratów błędów funkcji (68) ze względu na współrzędne (x , y) oraz niewiadome będzie poszukiwanym błędem współrzędnych ($\bar{u}$, $\bar{v}$). [12]

Błąd funkcji niewiadomych otrzymuje się wg:

$$m_F^2 = m_0^2 f(\underline{a}^2)^{-1} f$$

Z równań normalnych (30a):

$$(a^2)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{n} & & & \\ & \frac{1}{n} & & \\ & & \frac{1}{[x^2 + y^2]} & \\ & & & \frac{1}{[x^2 + y^2]} \end{pmatrix}$$

oraz z równań (68):

$$\underline{f}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ x \\ -y \end{pmatrix} \quad \underline{f}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ y \\ x \end{pmatrix}$$

Średnie błędy ze względu na x, y obliczy się bezpośrednio z (68), sumując będzie:

$$m_u^2 = (a+1)^2 m_x^2 + b^2 m_y^2 + m_0^2 \left(\frac{1}{n} + \frac{x_i^2 + y_i^2}{[x^2 + y^2]} \right).$$

Podobny wzór otrzyma się dla m_v ; Kładąc $m_x = m_y = m$ będzie:

$$m_u^2 = m_v^2 = ((a+1)^2 + b^2) m^2 + m_0^2 \left(\frac{1}{n} + \frac{x_i^2 + y_i^2}{[x^2 + y^2]} \right) \quad (69)$$

gdzie: $m_0 = \sqrt{\frac{[v v]}{2n - k}}$ otrzymano z dostosowania.

Kładąc we wzorach (69) za stałą wartość $[x^2 + y^2] = C$, oraz zmienną: $x_i^2 + y_i^2 = r_i^2$ otrzymuje się, pomijając wpływ błędów współrzędnych pierwotnych (x, y) :

$$m_{u,v} = m_0 \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{r_i^2}{C}} \quad (70)$$

Dla punktu w pobliżu środka ciężkości jest $r_i = 0$, stąd:

$$m_{u,v} = m_0 \sqrt{\frac{1}{n}}. \quad (71)$$

Punkty o wzrastającej odległości od środka ciężkości będą miały większe błędy. Na obwodzie koła o promieniu r_0 będzie:

$$C = (x_1^2 + y_1^2) + (x_2^2 + y_2^2) + \dots = r_0^2 + r_0^2 + \dots = nr_0^2$$

stąd:

$$r_0^2 = \frac{C}{n}.$$

Dla punktów na obwodzie koła należy przyjąć $r_i = r_0$, dla tych punktów otrzyma się ze wzoru (70):

$$m_{u,v} = m_0 \sqrt{\frac{2}{n}} \quad (72)$$

A więc punkty znajdujące się na obwodzie koła posiadają około 1.5 krotnie większe błędy. Z wykonanych przykładów podaje się następujące wyniki:

Dane z przykładu:

$$C = [x^2 + y^2] = 3701 \cdot 10^6, \quad m_0 = \pm 0.15 \text{ m}, \quad n = 3$$

Dla punktów znajdujących się w pobliżu środka ciężkości będzie:

$$m_{u,v} = \frac{0.15}{\sqrt{3}} = \pm 0.09 \text{ m} \quad (73)$$

Dla punktów łącznych i pozostałych znajdujących się na obwodnicy otrzymamy wg (72):

$$m_{u,v} = 0.15 \sqrt{0.6} = \pm 0.12 \text{ m}.$$

Dla punktów znajdujących się w dowolnym miejscu, np. punktu 2 otrzymamy wg (70):

$$m_{u,v} = 0.15 \sqrt{\frac{1}{3} + \frac{420}{3701}} = \pm 0.10 \text{ m}.$$

Jak widzimy, błąd ten liczy się w sposób nie pracochłonny, a więc w praktyce może być używany.

Obliczenie średniego błędu współrzędnych (u, v) otrzymanych po usunięciu odchyłki na punktach łącznych

Ostateczne współrzędne otrzymuje się wg (49):

$$u = \bar{u} + dx, \quad v = \bar{v} + dy,$$

gdzie:

$$dx = \frac{[pg]}{[p]}, \quad dy = \frac{[ph]}{[p]}.$$

Poprawki te otrzymano z równań błędów:

$$\begin{aligned} v &= \frac{\sin \sigma}{l} dx - \frac{\cos \sigma}{l} dy - \frac{\sin \sigma}{l} g + \frac{\cos \sigma}{l} h \\ dl &= -\cos \sigma dx - \sin \sigma dy + \cos \sigma g + \sin \sigma h \end{aligned} \quad (73a)$$

Równania te wyprowadzić również można wg ogólnych zasad wcięcia wstecz:

$$\sigma_p + d\sigma = \sigma_0 + v,$$

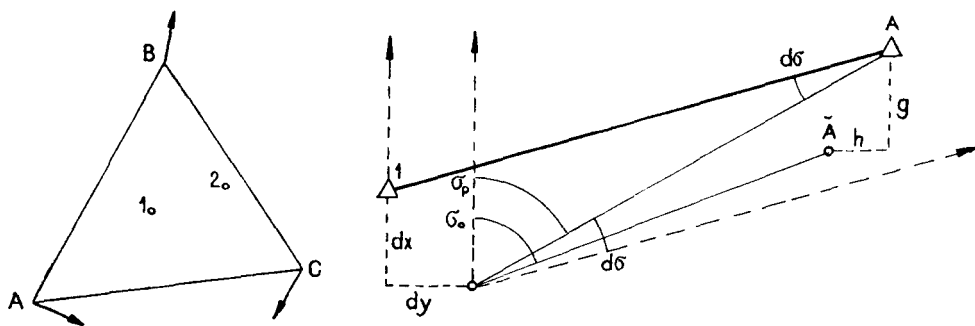
skąd równania błędów:

$$v = d\sigma + (\sigma_p - \sigma_0),$$

gdzie σ_p , σ_0 są azymutami przybliżonymi i „obserwowanymi”, $d\sigma$ i v poprawkami azymutów przybliżonych i „obserwowanych”. Azymuty przybliżone σ_p obliczy się ze współrzędnych punktu wcinanego $\bar{I}(\bar{u}, \bar{v})$ oraz danego $A(u, v)$, azymuty „obserwowane” σ_0 ze współrzędnych Helmertowskich $\bar{I}(\bar{u}, \bar{v})$ oraz $\bar{A}(\bar{u}, \bar{v})$. Wyrazy wolne obliczać można z różnic $l = \sigma_p - \sigma_0$ lub też ze wzoru

$$l_1 = -\frac{\sin \sigma}{l} g + \frac{\cos \sigma}{l} ; \quad l_2 = g \cos \sigma + h \sin \sigma$$

Charakterystycznym dla tego wcięcia jest brak niewiadomej orientacyjnej z , co jest zrozumiałe, ponieważ operujemy tu azymutami „obserwowanymi” a nie spostrzeganymi kierunkami. W rozważanym wcięciu „spostrzeżeniami” są elementy otrzymane ze współrzędnych Helmertowskich, które podlegają wyrównaniu.



Rys. 10

Na rysunku interpretacja wcięcia podana jest geometrycznie. Punkt $\bar{I}(\bar{u}, \bar{v})$ oraz $\bar{A}(\bar{u}, \bar{v})$ są punktami o współrzędnych Helmertowskich, punkt $A(u, v)$ jest punktem o współrzędnych „katalogowych”. Punkt $\bar{I}(\bar{u}, \bar{v})$ jest równocześnie punktem wcinanym. Po wyrównaniu współrzędne tego punktu będą $l(u, v)$.

Podobna interpretacja odnosi się również do długości l_p — przybliżonej, i l_0 — „obserwowanej”. Błędy m_l spostrzeżeń długości przyjmuje się z wyrównania (błędy współrzędnych Helmertowskich $m_{\bar{u}, \bar{v}}$ — wzory (70)), stąd dla azymutów:

$$m_\sigma = \frac{m_l}{l} \varrho. \quad (73b)$$

Przykład wyrównania punktu podano w załączniku Lp. 7.

Ponieważ przedstawionego wyrównania ze względu na pracochłonność liczeń nie możemy przeprowadzać dla każdego punktu, pozostaje jedynie możliwość przybliżonej oceny błędu drogą porównań z innymi mniej pracochłonnymi obliczeniami.

Obliczmy i porównajmy w tym celu nast. błędy względne:

1. Błąd otrzymany z wyrównania (przykład zał. Lp. 7):

$$m_u = m_v = \pm 0.063 \text{ m.}$$

stąd:

$$m_p = \sqrt{m_u^2 + m_v^2} = \pm 0.09 \text{ m.}$$

Dla średniej odległości $1-A$, $1-B$, $1-C$ równej $s = 35 \text{ km}$ otrzymuje się błąd względny $ds : s = 1 : 350\,000$

2. Z obliczeń błędu z dostosowania otrzymano (73)

$$m_u = m_v = 0.09 \text{ m,}$$

stąd dla tej samej przeciętnej odległości $s = 35 \text{ km}$ będzie:

$$ds : s = 1 : 280\,000$$

3. Z transformacji afinicznej otrzymano zniekształcenia

$$ds : s = 1 : 270\,000 \text{ (maks.)}$$

$$1 : 300\,000 \text{ (min.)}$$

W przykładzie podanym posługiwano się błędem względnym z konieczności celem uzyskania możliwości porównania z błędem $ds : s$ otrzymanym z afinizmu. Wprawdzie przejście z błędów m_x, y na błędy względne jest przybliżeniem zakłada się jednak, że w granicach praktycznie dozwolonych. Przykład powyższy wskazuje, że błędy względne obliczone w 2) i 3) są w przybliżeniu równe natomiast obliczenie pierwsze daje około 20% większą dokładność.

Powyższe stwierdzenie można by wykorzystać do obliczenia błędów punktów sieci transformowanych na podstawie wyrównania przy pomocy błędów otrzymanych w 2) oraz zastosowaniu współczynnika ustalonego empirycznie na podstawie porównań błędów wielu punktów sieci o znacznej ilości punktów łącznych, tj. sieci występujących w praktyce. Podany przykład w odniesieniu do jednego trójkąta uważa się jedynie za ilustrację omawianego zagadnienia.

Natomiast błędy punktów sieci, które zostały transformowane afinicznie powinny być obliczone wzorem (67/2), który odpowiada tej transformacji.

W tym wypadku charakterystyka dokładności odnosić się będzie do poszczególnych trójkątów afinicznych.

Proponowany sposób podawałby więc dokładności jednych sieci w formie m_x, m_y , innych — w formie $ds : s$. Uzyskanie jednolitej dokładności

wymaga przejścia z błędów $m_{x,y}$, na $ds : s$ (lub odwrotnie), tak jak wyżej to przedstawiono.

Następnym zagadnieniem jest problem przedstawiony na str. 49 (łączenie sieci triangulacyjnych ...), tj. zagadnienie użycia właściwej funkcji celem uzyskania min. sumy kwadratów odchyłek na punktach łącznych. Jak podano tam, użyte do transformacji funkcje 2-go rzędu wykazują około 3-krotnie mniejsze odchyłki na punktach łącznych, niż funkcja liniowa (dostosowanie Helmerta). Zrozumiałe więc jest pytanie, która z obu funkcji powinna być używana do dostosowania. W zagadnieniu tym zwraca się uwagę na następujące. Powstałe po transformacji Helmerta odchyłki są skutkiem błędów przypadkowych i systematycznych, ich sumą. Po użyciu funkcji 2-go rzędu stwierdza się przybliżoną zgodność odchyłek na całym obszarze sieci, tj. wewnętrznych i zewnętrznych punktach łącznych sieci, z czego wysuwa się wniosek, że pozostałe odchyłki są charakteru przypadkowego, do których może być zastosowana podana wyżej metoda wyrównania. Uważa się natomiast, że użycie wyrównania do łącznych odchyłek, tj. sumy składającej się z błędów przypadkowych i systematycznych, które pozostawia transformacja Helmerta jest gorszym wyborem. Powyższe możnaby uzupełnić propozycją użycia do transformacji funkcji 3-go rzędu, po której otrzymanoby jeszcze mniejsze odchyłki, co skłaniać by mogło do uważania tej funkcji za najwłaściwszą. Aprioryczne uzyskanie kryterium, która z trzech funkcji (liniowa, 2-go i 3-go rzędu), w sensie metody najmniejszych kwadratów, jest najwłaściwszą nie jest zagadnieniem prostym. Wydaje się, że zagadnienie to rozwiązać można na drodze empirycznej, wykonując transformacje (dostosowania) liniową i drugiego rzędu. Po obliczeniu współrzędnych $(\bar{u}, \bar{v})$ i $(\bar{u}', \bar{v}')$ z transformacji Helmerta i 2-go rzędu obliczy się współrzędne ostateczne (po usunięciu odchyłek) (u, v) i (u', v') , a następnie ich błędy m_u, m_v i $m_{u'}, m_{v'}$, w podany wyżej sposób. Porównane wielkości błędów ostatecznych, otrzymanych po użyciu obu funkcji, stwierdzą, która z funkcji powinna być używana do dostosowania.

11. Objaśnienia do przykładów

1. Konforemna transformacja 2-go rzędu

W przykładzie punkty A, B, C obrano na prostej równoległej do osi x . Dla przyjętych współrzędnych (x, y) punktów A, B, C obliczono współrzędne geograficzne (φ, λ) oraz dla tych ostatnich współrzędne układu wtórnego (u, v) .

Po przeprowadzeniu transformacji liniowej z układu (x, y) na układ

(u, v) wg wzorów (7) otrzymuje się współrzędne $(\bar{u}, \bar{v})$ punktu B oraz przeliczanych punktów 1, 2, 3. Poprawkę V_{x_B}, V_{y_B} oblicza się wg:

$$v_{x_B} = u_B - \bar{u}_B, \quad v_{y_B} = v_B - \bar{v}_B.$$

Dalsze obliczania wykonuje się wg wzoru (21).

2. *Konforemna transformacja 2-go rzędu o nadliczbowej ilości punktów łącznych*

Przykład podaje transformację współrzędnych Gaussa-Krügera z układu 21° do układu 18° . Współrzędne punktów łącznych i punktów kontrolnych 7, 8, 9 otrzymano z przeliczeń współrzędnych geograficznych (φ, λ) na współrzędne Gaussa-Krügera obu układów. Równania błędów układu się dla współrzędnych odniesionych do środka ciężkości wg wzorów podanych w tekście. Dokładność transformacji wynosi około 5m/m.

W praktyce transformacji 1, 2 używano do przeliczeń współrzędnych stereograficznych na układ Gaussa-Krügera.

3. *Transformacja współrzędnych katastralnych w Małopolsce*

Transformację przeprowadza się we współrzędnych odniesionych do środka ciężkości. Równania błędów i normalne układu się osobno dla x i y . Współczynniki obu równań normalnych są te same, różne są tylko kolumny wyrazów wolnych L_x, L_y .

Dokładność transformacji, ze względu na niematematyczne odwzorowanie współrzędnych katastralnych, wynosi około 1 : 15 000.

4. *Transformacja afiniczna z systemu (φ', λ') do systemu (φ, λ)*

Transformację wykonano wzorami (41). Ze względów rachunkowych pomnożono (φ, λ) przez 10^{-4} . Otrzymane odchyłki wynoszą w szerokości 9 m/m, w długości 26 m/m, wielkości te mieszczą się w granicach błędów przypadkowych obu systemów.

5. *Transformacja współrzędnych Gaussa-Krügera do układu sąsiedniego*

Podaną transformację używa się tylko w przypadku gdy układy współrzędnych odległe są o nierówną ilość stopni. Dla typowych odległości $\lambda = 3^\circ, \lambda = 6^\circ$ współczynniki wzorów transformacyjnych są stałe. Transformację wykonano z układu wschodniego do układu zachodniego.

Na środek obszaru przyjęto $\varphi_0 = 52^\circ 25', \lambda_0 = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} = 17^\circ 05' 12''. 0298$.

Dla tych wartości oblicza się (x_0, y_0) . Znaki współczynników przyjmuje się wg wyjaśnienia podanego na str. 46. Transformację punktów pojedynczych wykonuje się wg wzorów (56).

6. *Transformacja współrzędnych lokalnych*

Tabela A podaje współrzędne przybliżone punktów 1, 2:

$$u' = u + a \Delta x - b \Delta y; \quad v' = v + a \Delta y + b \Delta x,$$

a, b oblicza się wg wzorów (7a).

Tabela B podaje obliczenie współrzędnych ostatecznych (u, v):

$$u = u' + du, \quad v = v' + dv.$$

du, dv podają wzory (53), $k = 409 \times 10^{-8} \Sigma v$.

Transformacja ta nadaje się do przeliczeń niewielkiej ilości punktów. Dla masowych przeliczeń korzystniejsze są, ze względów ekonomicznych, metody podane w tekście.

7. Wyrównanie współrzędnych punktu

Przykład podaje wyrównanie oraz obliczenie błędu punktu l o współrzędnych $(\bar{u}, \bar{v})$ otrzymanych z transformacji liniowej (Helmerta). Z transformacji tej podaje się jedynie $m_{(\bar{u}, \bar{v})_1}, m_{(\bar{u}, \bar{v})_{A,B,C}}$ celem obliczenia m_l, m_n wg wzoru (73b). Równania błędów układu się wg (73a).

Wyrównane współrzędne: $u = u' + dx, v = v' + dy$, błędy wyrównanych współrzędnych: $m_0 = \pm 0.98, m_u = m_v = \pm 0.063 \text{ m}$.

LITERATURA

- [1] Bauer J.: Verschiebung eines Triangulationsnetzes. Zeitschrift für Vermessungswesen. 1881. Berlin.
Marszałek K.: Dostosowanie sieci lokalnych do sieci państwowej. Przegląd Mierniczy. 1932. Warszawa.
- [2] Hunger F.: Die Übertragung von Gauss- Kruger- Koordinaten. Z. f. V. 1938. Berlin.
- [3] Jordan-Eggert.: Handbuch der Vermessungskunde. III B. 1941.
- [4] Christov, V. K.: Zeitschr. f. Verm. 1942. Berlin.
- [5] Hausbrandt S.: Transformacja współrzędnych geograficznych. G. I. N. B. 1947. 1947. Warszawa.
- [6] Hausbrandt S.: W jaki sposób stosować transformację Helmerta ... Biuletyn W. A. T. VIII. XIV, 1959. Warszawa.
- [7] Hausbrandt S.: Transformacja układów lokalnych. Przegląd Geodezyjny. 1947, Warszawa.
- [8] Kluss T.: Zamiana współrzędnych Katastralnych ... Geodezja i Kartografia. t. II. 1952. Warszawa.
- [9] Hausbrandt S.: Analiza porównawcza dokładności sieci triangulacyjnych. G. I. N. B. t. III. 1955. Warszawa.
- [10] Lüdecke H.: Die Einrechnung von Festpunkten. Geodätischer Dienst. Leipzig 1957.
- [11] Biernacki F.: Teoria odwzorowań powierzchni. G. I. N. B. 1949. Warszawa.
- [12] Kubaček L.: Geodetickij a Kartografickij Obzor. 1962. Bratislava.

Recenzował: Doc. inż. Błażej Dulian

Rękopis złożono w Redakcji we wrześniu 1963 r.

ТАДЕУШ КЛЮСС

ТРАНСФОРМАЦИЯ КООРДИНАТ ВЫПОЛНЕННАЯ НА ОСНОВЕ СОВМЕСТНЫХ ПУНКТОВ

Р е з ю м е

Описанные в тексте проблемы трансформации показывают методы и формулы, соответствующие проблемам трансформации и уравнивания триангуляционной сети в Польше. Основной сетью Польши является сеть со сторонами около 30 км, частично сплошная, с количеством пунктов около 500. Остальные пункты сети, в количестве около 10-тысяч пунктов II и III рядов, были независимо уравнены в группах по 100-500 пунктов, а вычисленные координаты из независимого уравнивания были трансформированы на основную сеть. Этот метод был применён в связи с трудоёмкостью одновременного уравнивания около 10 тысяч пунктов. Как видим, здесь была применена трансформация вместо классического метода уравнивания сети низших рядов привязанных к ести I ряда.

Второй вид проблемы трансформации охватывает трансформацию старых триангуляционных систем отнесенных к различным эллипсоидам при разных проекциях и системах.

Имеется несколько десятков тысяч таких пунктов.

Работа выясняет способы использования известных методов, а также вводит новые, имея в виду экономику вычислений и применимость методов для вычислений на современных счётных машинах. Кроме того, была принята во внимание необходимость исправления невязок в совместных пунктах, а также расчёт точности координат, полученных после устранения невязок.

В качестве основы была принята трансформация координат отнесенных к тем же самым проекциям и системам, в связи с чем можно было использовать конформную линейную функцию. Правда, эта функция требует предварительного приведения координат к общим проекциям и системам, однако, с другой стороны, является экономич-

чной при применении и облегчает при этом проверку идентичности совместных пунктов.

Трансформация стереографических координат на координаты Гаусса — Крюгера была проведена при помощи конформной функции II-го ряда (раздел 2В, 3В), минуя таким образом способ кропотливых пересчётов на одинаковые проекции. На больших территориях при разных эллипсоидах были применены степенные прогрессии, описанные В. Христовым, или афинические формулы (41), (57), (63). К координатам нематематической проекции были применены степенные прогрессии II-го ряда (34). Менее пригодными оказались формулы, основанные на редукции элементов (раздел 7А), в связи с трудоёмкостью их применения при массовых вычислениях.

Следующей проблемой является устранение невязок в совместных пунктах после трансформации, т. е. приведение к единым координатам на совместных пунктах. Для удаления этой невязки был принят афинический метод, а также более пригодных для этой цели метод выравнивания (раздел 6), в связи с большими выгодами его применения на современных счётных машинах.

В разделе 10 поданы расчёты деформации, а также расчёт ошибок координат, полученных при первой и второй трансформации. Для этой второй трансформации деформации являются афиническими и охватывают пункты внутри треугольника или ошибки пунктов, полученные при выравнивании координат первой трансформации. Определение ошибок координат, полученных при второй трансформации, в связи с трудоёмкостью расчётов предлагается проводить только для пунктов, имеющих важное значение.

Для общей характеристики точности были приняты единичные ошибки, полученные при сравнении измеряемых углов с углами, полученными из координат при второй трансформации, а также величины остаточных невязок в пунктах.

Средняя точность, полученная при помощи трансформации десятков тысяч пунктов новых и старых сетей колеблется в границах от 1 : 150 000 до 1 : 100 000, а для сетей нематематической проекции равняется 1 : 20 000.

TADEUSZ KLUSS

THE TRANSFORMATION OF CO-ORDINATES BASED ON JOINT POINTS

S u m m a r y

The problems of transformation, which are dealt with in this paper, present methods and formulae suitable to the problems of transformation and adjustment of the triangulation networks in Poland. The primary network of Poland consists of several chains and partially forms a continuous covering net of large area; it has about 500 points and the side lengths are of about 30 km. The remaining points, about 10 thousand of them, of II and III order were adjusted independently in groups of 100 to 500 points each, and the co-ordinates calculated from these independent adjustments were transformed into the system of primary network. This method was used in consideration of difficulties resulting from the simultaneous adjustment of about 10 thousand points. As can be seen, there was applied the transformation instead of classical method of adjustment of lower order points tied up to the I order network.

Another kind of transformation problems covers the transformation of old triangulation networks related to different ellipsoids, in different projections and systems. We have several thousand of such points.

The paper deals with known methods and introduces new ones, in regard to the economy of computations and adaptability of such methods to the modern computers. Besides the necessity of elimination of discrepancies in the joint points and the computation of the co-ordinates precision after this elimination were taken into account.

Principally the transformation of co-ordinates related to the same projection and system was accepted, with a possibility of applying a conform linear function. This function, to be sure, requires previous reduction of co-ordinates to the common projection and system, but it is economic in use and enables the identity control of joint points.

The transformation of stereographic co-ordinates into the ones of Gauss-Krueger was performed by means of a conform function of second order (Chapters 2B, 3B), avoiding in this manner troublesome computations. In case of greater areas and in presence of different ellipsoids the power series given by W. Hristow, or affinic formulae were applied (41, 57, 63). To the co-ordinates of non-mathematical projections the power series of second power (34) were used. The formulae based on the elements reduction (Chap. 7,A) proved less suitable, in regard to the cumbersome application to mass computations.

Further problem forms the elimination of discrepancies remaining in the joint points after the transformation, i.e. bringing to the unique co-ordinates of the joint points. The elimination of this discrepancy was made by the affine method and a more comfortable adjustment method (Chap. 6), in regard of application of modern electronic computers.

In Chapter 10 the computation of deformations and of co-ordinates errors from the first and second transformation are given. In the second transformation there are affine deformations comprising the points in the area of a triangle, or the errors from the co-ordinates adjustment of first transformation. Definition of co-ordinates errors from second transformation, in regard of great amount of work, is proposed for the important points only.

For the general characteristics of precision the unit errors received from the comparison of measured angles and the ones computed from the co-ordinates after second transformation and the values of remaining discrepancies on the joint points were accepted.

Average precision, obtained by transformation of several thousand points in the new and old networks is ranged between 1 : 150 000 and 1 : 100 000, in the non-mathematical projection nets it amounts to 1 : 20 000.