

## Wyrównanie sieci triangulacyjnych na maszynach elektronowych

### Wstęp

Stosując maszynę elektronową do rozwiązania określonego problemu rachunkowego powinniśmy dążyć do maksymalnego wyeliminowania pracy ludzkiej — do wykonywania na maszynie całości obliczeń związanych z tym problemem. Powyższa zasada odnosi się w szczególności do wyrównania sieci triangulacyjnych metodą najmniejszych kwadratów. Udział maszyny elektronowej w wyrównaniu ograniczony był na ogół do wykonania jednego z najbardziej pracochłonnych etapów rachunku: rozwiązania układu równań normalnych. Niewspółmiernie większe korzyści osiągniemy wykonując na maszynie całość dość różnorodnych obliczeń wyrównawczych.

Oplacalność stosowania wspólnie budowanych maszyn cyfrowych, przeznaczonych do obliczeń naukowych i technicznych, jest na ogół tym większa, im większy jest stosunek ilości działań wykonywanych przez maszynę do ilości danych początkowych i wyników końcowych. Wynika to z faktu, że szybkość pracy urządzeń wejściowo-wyjściowych jest z reguły zbyt mała w porównaniu do szybkości pracy samej maszyny.

Rozwiązując wyłącznie układ równań normalnych musimy wyperforować, sprawdzić i wprowadzić do pamięci maszyny dużą ilość danych początkowych; np. dla rozwiązania układu 100 równań należy wprowadzić kilka tysięcy współczynników. Natomiast przy wykonywaniu na maszynie całości obliczeń wyrównawczych mamy znacznie mniejszą ilość danych początkowych: współrzędne punktów stałych, wartości obserwacji i pewne dodatkowe informacje określające położenie obserwacji w sieci.

Przystępując do opracowania programów wyrównania sieci triangulacyjnych należy w pierwszym rzędzie ustalić metodę rachunku. Różnego rodzaju metody przybliżone, których zadaniem było zmniejszenie pracochłonności rachunku arytmometrycznego, w epoce techniki elektronowej z reguły przestają być aktualne. Możliwość wyboru ogranicza się zatem do dwóch podstawowych metod: zawarunkowanej i pośredniczącej. Niewątpliwie bardziej dogodną jest tutaj metoda pośrednicząca, odznaczająca się jednolitością wzorów. Natomiast istotną wadą metody zawarunkowanej jest różnorodność równań warunkowych, znacznie komplikująca budowę programów.

Po ustaleniu metody rachunku należy dodatkowo określić, jakiego rodzaju obserwacje podlegają wyrównaniu, na jakiej powierzchni prowadzi się obliczenia, jakiej wielkości sieci mają być wyrównane itd.

W niniejszej publikacji przedstawiono koncepcję programów umożliwiających całkowite wyrównanie sieci triangulacyjnych dowolnego kształtu, w których pomierzone zostały kąty. Uwzględnienie innych obserwacji w wyrównaniu tymi programami, może być dokonane po ręcznym obliczeniu odpowiednich równań poprawek, ewentualnie po zastosowaniu dodatkowych programów. Jako powierzchnię odniesienia przyjęto płaszczyznę — całkowicie wystarczającą dla wyrównania nawet dużych sieci, jeśli rachunek zostanie przeprowadzony jednocześnie na kilku płaszczyznach odwzorowawczych [13].

Przedstawione dalej koncepcje są ogólne. Zrealizowano je wyłącznie na maszynie UMC 1 \*) i tylko dla sieci kątowych, jednakże nie sprawia większych trudności opracowanie analogicznych programów dla innych maszyn i dla innego rodzaju sieci, np. kątowno-liniowych, czy też kierunkowych.

Przy użyciu opisywanych programów przeprowadzono na maszynie UMC 1 wyrównanie szeregu sieci triangulacyjnych nie zawierających więcej niż 50—60 punktów wyznaczanych. Wyrównanie takich sieci wymaga rozwiązania układów kilkuset równań poprawek o ilości niewiadomych dochodzących do 100—120, co przy niewielkich możliwościach technicznych maszyny UMC 1 (pojemność pamięci 4096 słów, szybkość ok. 100 operacji/sek.) można osiągnąć tylko przy zastosowaniu odpowiednich programów.

Myślą przewodnią opracowania tych programów było maksymalne wyeliminowanie w toku całego wyrównania zarówno zbędnych zapisów elementów zerowych do pamięci (oszczędność miejsc pamięci), jak też zbędnych działań na tych elementach (skrócenie czasu rachunku).

Specyficzna budowa programów umożliwiała wyrównanie bardzo dużych sieci w oparciu o odpowiednio dostosowaną do rachunku automatycznego ideę Pranis-Praniewicza. W r. 1962 przeprowadzono wyrównanie sieci składającej się z 542 punktów wyznaczanych. Przebieg wyrównania oraz opis zastosowanych metod przedstawiony jest w dalszych częściach niniejszego artykułu.

Całkowite wyrównanie sieci triangulacyjnych na maszynach elektro- nowych jest obecnie problemem niezmiernie aktualnym w obliczeniach geodezyjnych. Literatura dotycząca tego problemu jest jednak bardzo uboga, co wynika zapewne z ciągle jeszcze niewielkiego rozpowszech-

---

\*) Opis tej maszyny znajdzie Czytelnik w pracach [19] i [8].

nienia maszyn elektronowych oraz braku kwalifikowanych programistów wśród geodetów.

W Związku Radzieckim W. A. Kougija [16] opracował program wyrównania metodą zawarunkowaną niewielkich sieci triangulacyjnych na maszynie „STRIEŁA”. Do rozwiązania układu równań warunkowych utworzonego na podstawie pomierzonych kierunków zastosowano metodę kolejnych przybliżeń. Maksymalna ilość punktów wyznaczanych wynosi 17. Podjęcie prac z tego zakresu sygnalizował również T. F. Aleksandrow [1].

Wyrównaniem sieci triangulacyjnych na maszynie ZRA 1 zbudowanej w Niemieckiej Republice Demokratycznej zajął się K. Näser [21]. Opracowane przez niego programy umożliwiają wyrównanie metodą pośredniczącą sieci kierunkowych, w których ilość punktów nie przekracza 25—30.

Programy wyrównania małych sieci triangulacyjnych opisywali również E. Gotthardt [10] — dla maszyny ZUSE 22 i F. Höllrigl [14] — dla maszyny IBM 650.

Wszystkie te programy mogą służyć do wyrównania wyłącznie małych sieci, co jest ich poważną wadą.

\*

Problem wyrównania sieci triangulacyjnych na maszynie elektronicznej jest zadaniem dość złożonym. Szczegółowe opisanie wszystkich programów zajęłoby dużo miejsca i byłoby nużące dla Czytelnika. Zwłaszcza podawanie list rozkazów i pełnych schematów blokowych miałyby się z celem w tego rodzaju publikacji, która powinna przedstawiać zasadniczą myśl budowy zespołu programów. Z tego względu opisane zostały szerzej tylko te momenty, które mają charakter ogólny i mogą być interesujące zarówno dla programisty opracowującego analogiczne programy dla innego typu maszyny elektronicznej, jak też dla użytkownika — geodety interesującego się metodami rachunku automatycznego.

Pod względem użytkowym można wydzielić następujące programy:

1. określenie kształtu tabeli równań normalnych,
  2. obliczenie i perforacja równań poprawek,
  3. obliczenie równań normalnych,
  4. rozwiązanie równań normalnych wraz z ewentualnym obliczeniem błędów średnich niewiadomych,
  5. obliczenie współrzędnych wyrównanych oraz kontrola ostateczna.
- Każdy z tych programów składa się z szeregu podprogramów, np.

program 2. wykorzystuje podprogramy: a) obliczenia równań poprawek, b) perforacji równań poprawek, c) obliczenia wartości funkcji  $\text{arc tg } \frac{a}{b}$

Poza wymienionymi programami mogą być stosowane dodatkowo oddzielne programy kontroli danych początkowych, kontroli sumowych, perforacji i druku wyników przejściowych, np. tabeli równań normalnych, obliczenia nietypowych równań poprawek itp.

## 1. Wyrównanie pojedynczych grup

### 1.1. Przygotowanie danych początkowych

Danymi początkowymi dla rachmistrza wyrównującego sieć triangulacyjną są: a) współrzędne punktów stałych, b) wartości obserwacji (kąty), c) szkic sieci.

Te same informacje muszą być dostarczone maszynie elektronicznej w odpowiednio zakodowanej postaci.

Założymy dla uproszczenia, że współrzędne przybliżone punktów wyznaczanych są również dane; do obliczenia ich mogą być użyte oddzielne programy, np. wcięcia w przód lub wstecz, jednakże w większości przypadków współrzędne te są znane *à priori*. Prócz tego przyjmujemy, że kąty zredukowane zostały na płaszczyznę.

Przy tych założeniach dane początkowe powinny zawierać: a) współrzędne przybliżone i stałe, b) wartości kątów zredukowanych na płaszczyznę, c) zbiór dodatkowych informacji zastępujących szkic sieci.

W przedstawianych programach przyjęto system kodowania danych początkowych sprowadzający się do sporządzenia 3 wykazów:

- a) wykazu współrzędnych zawierającego na początku współrzędne przybliżone  $p$  punktów wyznaczanych oraz na końcu — współrzędne  $s$  punktów stałych,
- b) wykazu kątów pomierzonych  $\alpha_k$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) zredukowanych na płaszczyznę,
- c) wykazu numerów punktów  $L_k P_k C_k$  ułożonego w kolejności wykazu kątów, gdzie:

$L_k$  — numer punktu na lewym ramieniu kąta  $\alpha_k$

$P_k$  — numer punktu na prawym ramieniu kąta  $\alpha_k$

$C_k$  — numer punktu na którym pomierzono kąt  $\alpha_k$ .

Podana w tym wykazie numeracja punktów musi być zgodna z kolejnością współrzędnych w wykazie a).

Dla przykładu pokażemy, w jaki sposób należy sporządzić powyższe wykazy dla sieci przedstawionej na rys. 2

a) Wykaz współrzędnych  $x, y$ 

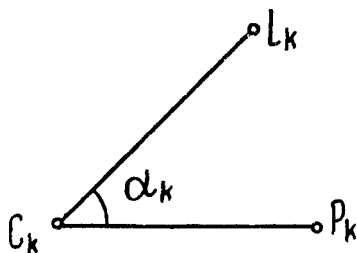
$x_1$	$y_1$
$x_2$	$y_2$
$x_3$	$y_3$
$x_4$	$y_4$

b) Wykaz kątów  $\alpha_k$ 

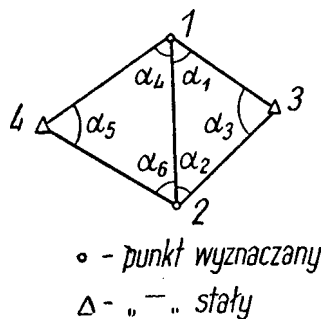
$\alpha_1$
$\alpha_2$
$\alpha_3$
$\alpha_4$
$\alpha_5$
$\alpha_6$

c) Wykaz numerów  $L_k P_k C_k$ 

3	2	1
1	3	2
2	1	3
2	4	1
1	2	4
4	1	2



Rys. 1



Rys. 2

W przypadku, gdy obserwacje zostały wykonane z różną dokładnością powyższe wykazy należy uzupełnić wykazem błędów średnich obserwacji  $m_i$ . Sposób uwzględniania w wyrównaniu obserwacji bazowych i azy-mutalnych podany zostanie w dalszym ciągu niniejszej publikacji.

### 1.2. Określenie kształtu tabeli równań normalnych

Jak wiadomo, układy równań normalnych tworzone w trakcie wyrównania sieci triangulacyjnych charakteryzują się występowaniem znacznej liczby współczynników zerowych, przy czym obserwujemy grupowanie się większości współczynników niezerowych wokół głównej przekątnej. W pracy [7] opisany został program rozwiązywania tego rodzaju układów równań normalnych. Program ten nie zajmuje miejsc pamięci na elementy zerowe pierwiastka krakowianowego, jak również nie wykonuje na nich zbędnych działań, co stwarza możliwości rozwiązywania stosunkowo dużych układów przy jednoczesnym, poważnym skróceniu czasu rachunku

Jako dane początkowe służą: a) elementy tabeli równań normalnych wpisane do pamięci z pominięciem początkowych  $z_i$  elementów zerowych  $i$ -tej kolumny, b) wartości  $z_i$ . Przez początkowe elementy zerowe kolumny rozumie się tu elementy zerowe tej kolumny położone ponad pierwszym różnym od zera elementem kolumny. Jeśli w kolumnie  $i$  elementy  $a_{i,1}, a_{i,2}, \dots, a_{i,r}$  są równe zeru, a następny z kolei element  $a_{i,r+1}$  jest różny od zera, to  $z_i = r$ . Elementy tabeli zapisuje się kolumnami, przy czym z uwagi na symetrię, elementy poniżej głównej przekątnej są również pomijane.

Dla przykładu podamy sposób zapisu z pominięciem początkowych elementów zerowych symetrycznej tabeli o 4 kolumnach:

	tabela	kolejność zapisu do pamięci
8	0 0 0	
0	9 0 -1	
0	0 +1 0	8, 9, 1, -1, 0, 8
0	-1 0 8	
$i = 1$	2 3 4	
$z_i = 0$	1 2 1	

Z powyższych uwag wynika, że przed obliczeniem i zapisaniem do pamięci współczynników równań normalnych muszą być znane wartości  $z_i$  ustalające położenie tych współczynników w pamięci.

Wartości  $z_i$  mogą być jednoznacznie określone na podstawie numerów *LPC*. Podnosząc do kwadratu wiersz współczynników przy niewiadomych w równaniu poprawki:

$$v = adx_L + bdy_L + cdx_p + ddy_p + edx_c + fdy_c + l \quad (1)$$

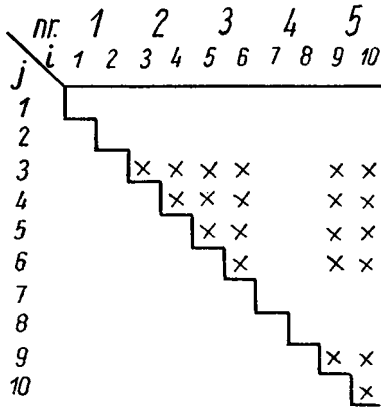
otrzymamy  $6 \times 6 = 36$  elementów. Zakładając, że  $L = 3$ ,  $P = 2$ ,  $C = 5$  będziemy mogli przykładowo przedstawić położenie tych elementów krzyżkami na rys. 3. (elementy poniżej głównej przekątnej zostały pominięte).

Jak widać, równanie poprawki dostarcza nam informacji o wartościach  $z_i$  dla kolumn odpowiadających niewiadomym  $dx, dy$  punktów *LPC*.

W rozważanym przypadku wiadomo już, że wartości  $z_i$  dla  $i = 3, 4, 5, 6, 9, 10$  mogą być co najwyżej równe 2. Wartości te będą równe 2, jeżeli w wyniku analogicznego badania pozostałych numerów *LPC* nie wykryjemy elementów niezerowych kolumn 3, 4, 5, 6, 9, 10 położonych w pierwszych 2 wierszach.

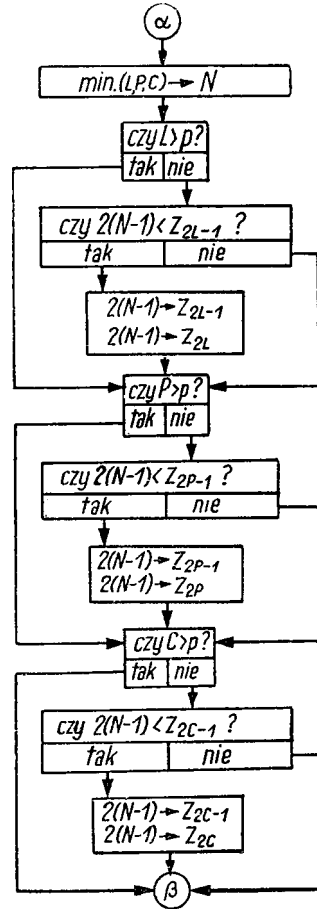
W ten sposób dochodzimy do algorytmu obliczenia wartości  $z_i$ . Przyjmijmy na początku  $z_i = 2p$  ( $i = 1, 2, \dots, 2p$ ).

Badajmy kolejno trójki numerów  $LPC$  określając za każdym razem wynikające stąd wartości  $z_r$ . Załóżmy, że po zbadaniu  $k$  trójek ustaliliśmy wartość  $z'_r$  oraz, że w  $k + 1$  trójce otrzymujemy wartość  $z''_r$ . Jeżeli  $z''_r < z'_r$ , to należy podstawić na miejsce dawnej wartości  $z_r$  nową:  $z''_r \rightarrow z'_r$ , w przeciwnym przypadku ustalona uprzednio wartość  $z_r$  nie ulega zmianie. Po wykonaniu badań wszystkich trójek otrzymujemy właściwe wartości  $z_r$ .



nr - numer punktu  
*i* - " " kolumny  
*j* - " " wiersza

Rys. 3



Rys. 4

Na rys. 4 podano fragment schematu blokowego odpowiadającego temu postępowaniu. Zauważmy, że dołączone zostało jeszcze jedno badanie: czy numer punktu nie jest większy od  $p$ , tzn. czy punkt nie jest punktem stałym, nie wpływającym na kształt tabeli. Przez min. ( $L, P, C$ ) oznaczone zostało symbolicznie wybranie najmniejszej spośród liczb  $L, P, C$ .

## 1.3. Obliczenie równań poprawek

Współczynniki równania poprawki (1) obliczane są według następujących wzorów:

$$\begin{aligned}
 a &= \frac{\Delta y_L}{\Delta x_L^2 + \Delta y_L^2} \varrho^{cc} \\
 b &= -\frac{\Delta x_L}{\Delta x_L^2 + \Delta y_L^2} \varrho^{cc} \\
 c &= -\frac{\Delta y_P}{\Delta x_P^2 + \Delta y_P^2} \varrho^{cc} \\
 d &= \frac{\Delta x_P}{\Delta x_P^2 + \Delta y_P^2} \varrho^{cc} \\
 e &= \left[ \frac{\Delta y_P}{\Delta x_P^2 + \Delta y_P^2} - \frac{\Delta y_L}{\Delta x_L^2 + \Delta y_L^2} \right] \varrho^{cc} \\
 f &= \left[ -\frac{\Delta x_P}{\Delta x_P^2 + \Delta y_P^2} + \frac{\Delta x_L}{\Delta x_L^2 + \Delta y_L^2} \right] \varrho^{cc}
 \end{aligned} \tag{2}$$

gdzie:

$$\begin{aligned}
 \Delta x_L &= x_L - x_c, & \Delta y_L &= y_L - y_c \\
 \Delta x_P &= x_P - x_c, & \Delta y_P &= y_P - y_c
 \end{aligned}$$

zaś  $\varrho^{cc} = 636\,620^{cc}$

Wyraz wolny  $l$  jest różnicą między wartością obserwowaną kąta i przybliżoną, obliczoną ze współrzędnych przybliżonych:

$$l = \alpha - \text{arc tg} \frac{\Delta x_L \Delta y_P - \Delta x_P \Delta y_L}{\Delta x_L \Delta x_P + \Delta y_L \Delta y_P} \tag{3}$$

Dla kontroli dalszych obliczeń tworzy się sumę kontrolną  $s = a + b + c + d + e + f + l$ .

Po wykonaniu rachunku współczynniki, wyraz wolny i sumowy oraz numery LPC drukowane są i perforowane na taśmie dalekopisowej w postaci umożliwiającej powtórne wprowadzenie ich do pamięci maszyny, co jest niezbędne przy wyrównaniu większych sieci, z uwagi na niewielką pojemność pamięci.

Na rys. 5 przedstawiono równanie poprawki nr 1 wydrukowane przez maszynę UMC 1. W pierwszym wierszu drukowany jest nr równania, w drugim — numery punktów LPC, w trzecim — współczynniki  $a, b, c, d, e, f$ , zaś w czwartym — wyraz wolny i sumowy. Znaki dodatkowe „v” i „,” drukuje się zgodnie z kodem wprowadzania liczb do maszyny UMC 1.

Przy obliczaniu współczynników bada się: czy  $L > p$ ? czy  $P > p$ ? czy  $C > p$ ? tzn. bada się, czy któryś z punktów LPC nie jest punktem



stałym. W przypadku natrafienia na punkt stały, w miejsce odpowiadających temu punktowi współczynników wstawia się zero. W podanym przykładzie punkt 19 jest punktem stałym.

W podobny sposób można przedstawić równania innych obserwacji występujących niekiedy w kątowych sieciach triangulacyjnych. Obser-

```
001
v+019. +009. +001.
v+0000000. +0000000. -0104316. -0029669. -0008813. +0046175.
v+0324547. +0227922.
```

Rys. 5

wacje liniowe, kierunkowe i azymutalne wiążą ze sobą współrzędne tylko dwóch punktów: początkowego  $I$  oraz końcowego  $K$ , co może być zapisane ogólnie w postaci:

$$adx_I + bdy_I + cdx_K + ddy_K + l = v \quad (4)$$

Równania te, zależnie od ich ilości wyliczane oddzielnymi programami, lub ręcznie, traktuje się dalej jako szczególny przypadek równań poprawek obserwacji kątowych odpowiadający założeniu, że jeden z punktów  $LPC$  jest punktem stałym. Analogicznie można uzmiennić współrzędne punktów nawiązania.

#### 1.4. Obliczanie równań normalnych

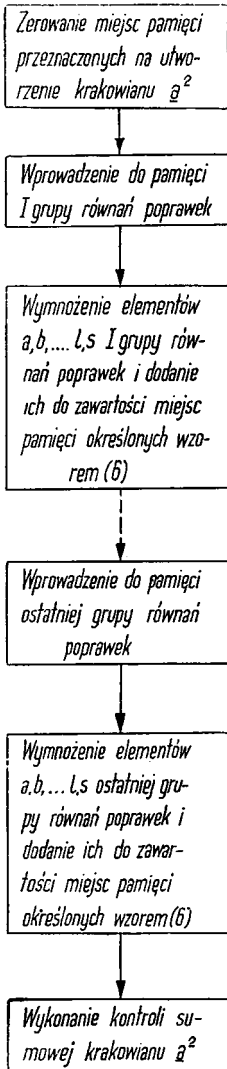
Rachmistrz układający równania normalne przywykł do obliczenia na arytmometrze iloczynów poszczególnych kolumn. Postępowanie takie nie jest wygodne w rachunku na maszynie elektronicznej, ponieważ wymaga wprowadzenia do pamięci maszyny wszystkich elementów krakowianu a utworzonego z tabeli współczynników w równaniach poprawek, kolumny wyrazów wolnych  $l$  i kolumny sum kontrolnych  $s$ .

Znacznie wygodniej jest obliczać poszukiwany krakowian  $a^2$  przez tworzenie iloczynów elementów pojedynczego wiersza krakowianu  $a$ :

$$\{a \ b \ c \ d \ e \ f \ l \ s\}^2 = \begin{Bmatrix} aa & ba & ca & \dots & la & sa \\ ab & bb & cb & \dots & lb & sb \\ ac & bc & cc & \dots & lc & sc \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ al & bl & cl & \dots & ll & sl \\ as & bs & cs & \dots & ls & ss \end{Bmatrix}$$

i dodawanie ich do odpowiednich sum poprzednio już obliczonych iloczynów.

Na specjalną uwagę zasługuje tu sposób odnajdywania w pamięci miejsca, w którym tworzy się element krakowianu  $a^2$  położony w  $i$ -tej kolumnie i  $j$ -tym wierszu. Adres tego miejsca pamięci będziemy oznaczać przez  $l_{i,j}$ . Przy jego obliczaniu należy pamiętać o tym, że do pamięci nie wprowadza się elementów położonych poniżej głównej przekątnej oraz początkowych elementów zerowych.



Rys. 6

Podobnie jak w programie rozwiązywania układów równań normalnych, opisywanym w pracy [7], również i w programie układania równań normalnych wygodnie jest posługiwać się adresami pierwszych różnych od zera elementów poszczególnych kolumn. Adresy te obliczane są przez maszynę wzorem rekurencyjnym na podstawie danych wartości  $z_i$ :

$$L_i = L_{i-1} + i - 1 - z_{i-1} \quad (5)$$

gdzie:  $L_i$  — adres pierwszego różnego od zera elementu  $i$ -tej kolumny. Łatwo wykazać, posługując się choćby rysunkiem nr. 3, że adresy  $l_{i,j}$  mogą być obliczane przy użyciu następującego wzoru:

$$l_{i,j} = \begin{cases} L_i - z_i + j - 1 & \text{jeśli } j \leq i \\ L_j - z_j + i - 1 & \text{jeśli } j > i \end{cases} \quad (6)$$

Wartości wskaźników  $i, j$  określane są bezpośrednio na podstawie numerów LPC. Konieczność rozróżnienia 2 przypadków w powyższym wzorze wynika z braku uporządkowania współczynników równania poprawki w kolejności numerów kolumn krakowianu  $a$ .

Działanie tego programu można przedstawić schematem blokowym przedstawionym na rys. 6.

W przypadku wyrównania obserwacji niejednakowo dokładnych, elementy  $a, b \dots l, s$  po wprowadzeniu ich do pamięci są mnożone przez odwrotności odpowiednich błędów średnich. Do tego celu używany jest oddzielny program.

### 1.5. Rozwiązanie układu równań normalnych

Do rozwiązywania układu równań normalnych stosowany jest program opisany dość szczegółowo w pracy [7]. Program ten wykorzystujący wzory metody pierwiastka krakowianowego może być używany w 2 wariantach. W pierwszym z nich obliczane są:

- a) niewiadome  $dx$ ,  $dy$ ,
- b) niewiadome kontrolne  $dx - 1$ ,  $dy - 1$ ,
- c) elementy kontrolne:

$$[ll] - [LL] = [sl] - [SL] = [ss] - [SS] \quad (7)$$

równe, jak wiadomo  $[vv]$ .

W drugim wariancie oblicza się dodatkowo błąd średni pojedynczego spostrzeżenia  $m_o$  oraz błędy średnie niewiadomych  $m_x$ ,  $m_y$ .

### 1.6. Obliczenia końcowe

Piąty z kolei — i ostatni — program oblicza kolejno:

- a) współrzędne wyrównane:

$$x_{wyr.} = x + dx, \quad y_{wyr.} = y + dy;$$

- b) poprawki  $v$ , przez podstawienie niewiadomych  $dx$ ,  $dy$  do równań poprawek;
- c) kąty wyrównane ze współrzędnych wyrównanych:

$$\alpha_{wyr.} = \arctg \frac{\Delta x_L \Delta y_P - \Delta x_P \Delta y_L}{\Delta x_L \Delta x_P + \Delta y_L \Delta y_P}$$

- d) sumę kwadratów poprawek:  $[vv]$ .

Prócz tego dla każdego z kątów wykonywana jest kontrola:

$$\alpha_{wyr.} - \alpha - v = 0 \quad (8)$$

Maksymalne odchyłki wynoszą 0,02<sup>cc</sup>.

### 1.7. Dane techniczne programów opracowanych dla maszyny UMC 1

Opisane powyżej programy wczytywane są kolejno, tak aby jak najwięcej miejsc pamięci pozostało na dane początkowe i wyniki rachunku. Program 1 zajmuje ogółem 327 miejsc pamięci, program 2 — 509, program 3 — 320, program 4 — 320 (bez obliczenia błędów średnich) lub 550 (z obliczeniem błędów średnich), zaś program 5 — 537. Znaczną ilość miejsc zajmują tu podprogramy druku.

Czas wyrównania (bez obliczenia błędów średnich) sieci zawierającej około 300 kątów i około 50 punktów wyznaczanych zajmuje około 20—25 godzin. Koszt wyrównania wynosi ok. 20% kosztu pracy ręcznej.

## 2. Wyrównanie wielogrupowe i wielostopniowe

### 2.1. Celowość stosowania wyrównania wielogrupowego

Pranis-Praniewicz [23] przedstawiając metodę wyrównania wielogrupowego, jako podstawową zaletę tej metody wysuwał możliwość jednoczesnego zatrudnienia wielu rachmistrzów przy układaniu równań normalnych i eliminowaniu t. zw. niewiadomych właściwych. Metoda Pranis-

Praniewiczza stosowana w technice rachunku arytmometrycznego dawała istotne korzyści natury organizacyjnej, a jednocześnie pozwalała na znaczne skrócenie czasu wyrównania, co było niezwykle ważne w przypadku dużych sieci.

W technice elektronicznej przyspieszenie pracy przez jednoczesne użycie wielu maszyn nie jest na ogół potrzebne i praktycznie rzecz biorąc dla obecnie wyrównywanych sieci nie wchodzi w rachubę\*). Pomimo tego, metoda Pranis-Praniewiczza nie traci nic ze swej aktualności. Maszyny elektroniczne używane w obliczeniach geodezyjnych posiadają stosunkowo niewielką pojemność pamięci ograniczającą wielkość układu równań normalnych. Podział na grupy jest w tych warunkach najwłaściwszą metodą ułożenia i rozwiązania układów równań nie mieszczących się w pamięci maszyny. Jako dodatkowe względy przemawiające za stosowaniem metody Pranis-Praniewiczza wymienić należy:

- a) większą skuteczność kontroli danych początkowych i wyników pośrednich rachunku,
- b) możliwość łatwiejszego poprawienia wyników obliczeń po wykryciu błędów w danych początkowych, czy też błędów w rachunku,
- c) różnego rodzaju usprawnienia w organizacji pracy obliczeniowej.

## 2.2. Pierwiastek krakowianu blokowego

W wyrównaniu wielogrupowym, zwłaszcza przy użyciu maszyny elektronicznej, odczuwa się wyraźnie potrzebę operowania tabelami liczbowymi; wzory w których występują pojedyncze liczby są w tym przypadku trudniejsze do wyprowadzenia i objaśnienia. W związku z tym autor uważa za użyteczne wprowadzenie pojęcia pierwiastka krakowianu blokowego.

Niech dany będzie krakowian  $\mathbf{a}$ . Podzielmy tabelę tego krakowianu na  $m \cdot n$  prostokątnych części prowadząc  $m - 1$  linii pionowych i  $n - 1$  linii poziomych. Otrzymamy w ten sposób  $m$  pasów pionowych — kolumn blokowych i  $n$  pasów poziomych — wierszy blokowych. Krakowian o tabeli znajdującej się w  $i$ -tej kolumnie blokowej i  $j$ -tym wierszu blokowym nazywa się blokiem i oznacza  $\mathbf{a}_{i,j}$  [2]. Krakowian utworzony z bloków nazywa się krakowianem blokowym.

$$\mathbf{a} = \left\{ \begin{array}{cccc} \mathbf{a}_{1,1} & \mathbf{a}_{2,1} & \dots & \mathbf{a}_{m,1} \\ \mathbf{a}_{1,2} & \mathbf{a}_{2,2} & \dots & \mathbf{a}_{m,2} \\ \mathbf{a}_{1,n} & \mathbf{a}_{2,n} & \dots & \mathbf{a}_{m,n} \end{array} \right\} \quad (9)$$

\*) Jednoczesne użycie kilku maszyn może okazać się niezbędne przy wyrównaniu sieci, które dotychczas nie były wyrównywane w całości ze względu na swą wielkość. Jako przykład może tu służyć polska sieć triangulacji wypełniającej.

Należy tu zwrócić uwagę na wprowadzoną dla uniknięcia nieporozumień różnicę oznaczeń elementu i bloku: element oznacza się zwykłą czcionką  $a_{i,j}$ , blok — półgrubą czcionką  $\mathbf{a}_{i,j}$ .

Założmy teraz, że  $\mathbf{a}$  jest krakowianem symetrycznym posiadającym  $m$  kolumn blokowych i  $m$  wierszy blokowych, przy czym ilość kolumn w  $i$ -tej kolumnie blokowej równa jest ilości wierszy w  $i$ -tym wierszu blokowym.

$$\mathbf{a} = \begin{Bmatrix} \mathbf{a}_{1,1} & \mathbf{a}_{2,1} & \dots & \mathbf{a}_{m,1} \\ \mathbf{a}_{1,2} & \mathbf{a}_{2,2} & \dots & \mathbf{a}_{m,2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{a}_{1,m} & \mathbf{a}_{2,m} & \dots & \mathbf{a}_{m,m} \end{Bmatrix} \quad (10)$$

Przy tych założeniach bloki  $\mathbf{a}_{i,j}$  są krakowianami symetrycznymi, zaś  $\mathbf{a}_{i,j} = \tau \mathbf{a}_{j,i}$ .

Przypuśćmy dalej, że krakowian  $\mathbf{a}$  posiada pierwiastek trójkątny  $\mathbf{A}$ , tzn., że  $\mathbf{A}^2 = \mathbf{a}$ , co można zapisać w postaci  $\mathbf{A} = \sqrt{\mathbf{a}}$ . Wyodrębnijmy w pierwiastku  $\mathbf{A}$  bloki o identycznych wymiarach z odpowiednimi blokami krakowianu  $\mathbf{a}$ :

$$\mathbf{A} = \begin{Bmatrix} \mathbf{A}_{1,1} & \mathbf{A}_{2,1} & \dots & \mathbf{A}_{m,1} \\ & \mathbf{A}_{2,2} & \dots & \mathbf{A}_{m,2} \\ & & \dots & \dots \\ & & & \mathbf{A}_{m,m} \end{Bmatrix} \quad (11)$$

Opierając się na równaniu  $\mathbf{A}^2 = \mathbf{a}$  łatwo możemy wprowadzić wzory określające dowolny blok pierwiastka. Mnożąc  $i$ -tą kolumnę blokową pierwiastka przez  $i$ -tą otrzymamy:

$$\mathbf{A}_{i,1}^2 + \mathbf{A}_{i,2}^2 + \dots + \mathbf{A}_{i,i-1}^2 + \mathbf{A}_{i,i}^2 = \mathbf{a}_{i,i},$$

a stąd:

$$\mathbf{A}_{i,i} = \sqrt{\mathbf{a}_{i,i} - \sum_{k=1}^{i-1} \mathbf{A}_{i,k}^2}, \quad (12)$$

we wzorze tym, podobnie jak w następnym, gdy górna granica sumowania jest mniejsza od dolnej, należy przyjąć, że suma równa się zeru.

Mnożąc z kolei  $i$ -tą kolumnę blokową pierwiastka przez  $j$ -tą ( $i > j$ ) otrzymamy:

$$\mathbf{A}_{i,1} \cdot \mathbf{A}_{j,1} + \mathbf{A}_{i,2} \cdot \mathbf{A}_{j,2} + \dots + \mathbf{A}_{i,j-1} \cdot \mathbf{A}_{j,j-1} + \mathbf{A}_{i,j} \cdot \mathbf{A}_{j,j} = \mathbf{a}_{i,j},$$

a zatem:

$$\mathbf{A}_{i,j} \cdot \mathbf{A}_{j,j} = \mathbf{a}_{i,j} - \sum_{k=1}^{j-1} \mathbf{A}_{i,k} \cdot \mathbf{A}_{j,k}, \quad (13)$$

skąd łatwo możemy obliczyć  $\mathbf{A}_{i,j}$ , ponieważ  $\mathbf{A}_{j,j}$  jako pierwiastek krakowianowy jest krakowianem trójkątnym. Opierając się na definicji dzielenia podanej przez prof. T. Banachiewicza \*) napiszemy wyrażnie:

$$\mathbf{A}_{i,j} = \left( \mathbf{a}_{i,j} - \sum_{k=1}^{j-1} \mathbf{A}_{i,k} \cdot \mathbf{A}_{j,k} \right) : \tau \mathbf{A}_{j,j} \quad (14)$$

Przykład.

Obliczmy pierwiastek krakowianu blokowego:

$$\mathbf{a} = \begin{Bmatrix} \mathbf{a}_{1,1} & \mathbf{a}_{2,1} \\ \mathbf{a}_{1,2} & \mathbf{a}_{2,2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 & -1 & \vdots & -1 & 3 & 0 \\ -1 & 5 & \vdots & 5 & -3 & 2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & 5 & \vdots & 6 & -4 & 2 \\ 3 & -3 & \vdots & -4 & 19 & -3 \\ 0 & 2 & \vdots & 2 & -3 & 18 \end{Bmatrix}$$

Mamy kolejno:

$$\begin{aligned} \{\mathbf{A}_{1,1} \ \mathbf{A}_{2,1}\} &= \begin{Bmatrix} 1 & -1 & \vdots & -1 & 3 & 0 \\ & 2 & \vdots & 2 & 0 & 1 \end{Bmatrix}, \\ \mathbf{a}_{2,2} - \mathbf{A}_{2,1}^2 &= \begin{Bmatrix} 6 & -4 & 2 \\ -4 & 19 & -3 \\ 2 & -3 & 18 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 5 & -3 & 2 \\ -3 & 9 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 10 & -3 \\ 0 & -3 & 17 \end{Bmatrix}, \\ \mathbf{A}_{2,2} &= \sqrt{\mathbf{a}_{2,2} - \mathbf{A}_{2,1}^2} = \begin{Bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ & 3 & -1 \\ & & 4 \end{Bmatrix}, \end{aligned}$$

a zatem

$$\mathbf{A} = \begin{Bmatrix} \mathbf{A}_{1,1} & \mathbf{A}_{1,2} \\ & \mathbf{A}_{2,2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 & -1 & \vdots & -1 & 3 & 0 \\ & 2 & \vdots & 2 & 0 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & & 1 & -1 & 0 \\ & & & & 3 & -1 \\ & & & & & 4 \end{Bmatrix}$$

\*) Równanie krakowianowe  $\mathbf{x} \tau \mathbf{a} = \mathbf{l}$  może być zapisane w postaci  $\mathbf{x} = \mathbf{l} : \mathbf{a}$  i wówczas  $\mathbf{x}$  nazywa się ilorzem krakowianów  $\mathbf{l}$  i  $\mathbf{a}$ . Dzielenie może być wykonane bezpośrednio, jeżeli krakowian  $\mathbf{a}$  jest trójkątny. Np.: stosując metodę pierwiastka krakowianowego do rozwiązywania układu równań liniowych obliczamy, w znany sposób, kolejno jeden za drugim, elementy kolumny wyrazów wolnych  $\mathbf{L}$  pierwiastka  $\mathbf{A}$ . Opieramy się przy tym na równaniu  $\mathbf{L}\mathbf{A} = \mathbf{l}$ , gdzie  $\mathbf{l}$  jest kolumną wyrazów wolnych układu danego. Wykonywane tu działania prowadzą do obliczenia ilorazu  $\mathbf{L} = \mathbf{l} : \tau \mathbf{A}$ .

Z wzorów (12) i (14), umożliwiających obliczenie bloków pierwiastka  $\mathbf{A}$ , łatwo otrzymamy odpowiadające im wzory na elementy pierwiastka krakowianowego, jeśli zastąpimy oznaczenia bloków oznaczeniami elementów.

### 2.3. Wyrównanie wielogrupowe

Niech dany będzie układ równań poprawek:

$$\mathbf{x} \tau \mathbf{a}' + \mathbf{l} = \mathbf{v} \quad (15)$$

gdzie  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{l}$ ,  $\mathbf{v}$  są odpowiednio kolumnami niewiadomych, wyrazów wolnych i poprawek, zaś  $\mathbf{a}'$  krakowianem współczynników.

Utwórzmy krakowian  $\mathbf{a} = \{\mathbf{a}' \mathbf{l} \mathbf{s}\}$ , w którym  $\mathbf{s} = \mathbf{a}'_1 + \mathbf{a}'_2 + \dots + \mathbf{a}'_m + 1$  jest kolumną sumową i obliczmy pierwiastek  $\mathbf{A}$  z kwadratu tego krakowianu:

$$\mathbf{a}^2 = \begin{Bmatrix} \mathbf{a}'^2 & \mathbf{l} \mathbf{a}' & \mathbf{s} \mathbf{a}' \\ \mathbf{a}' \mathbf{l} & \mathbf{l}^2 & \mathbf{s} \mathbf{l} \\ \mathbf{a}' \mathbf{s} & \mathbf{l} \mathbf{s} & \mathbf{s}^2 \end{Bmatrix} \quad (16)$$

$$\mathbf{A} = \sqrt{\mathbf{a}^2} = \begin{Bmatrix} \mathbf{A}' & \mathbf{L} & \mathbf{S} \\ & \sqrt{\mathbf{v}^2} & \sqrt{\mathbf{v}^2} \\ & & 0 \end{Bmatrix} \quad (17)$$

gdzie  $\mathbf{A}' = \sqrt{\mathbf{a}'^2}$ ,  $\mathbf{L}$  — kolumna wyrazów wolnych pierwiastka,

$\mathbf{S}$  — kolumna sumowa,

zaś  $\mathbf{v}^2$  jest krakowianowym zapisem  $[\mathbf{v}\mathbf{v}]$ .

W dalszym ciągu rozważań obliczenie pierwiastka  $\mathbf{A}$  będziemy traktowali jako praktycznie równoznaczne z rozwiązaniem danego problemu wyrównawczego. Rzeczywiście: krakowiany  $\mathbf{A}$  i  $\mathbf{L}$  pozwalają na łatwe obliczenie niewiadomych,  $[\mathbf{v}\mathbf{v}]$  — na obliczenie błędu średniego pojedynczego spostrzeżenia, przy czym ostatnia kolumna krakowianu  $\mathbf{A}$  dostarcza niezbędnych kontroli. Przedstawmy teraz krakowian  $\mathbf{a}$  w postaci blokowej:

$$\mathbf{a} = \begin{Bmatrix} \mathbf{a}_{1,1} & \mathbf{a}_{2,1} & \dots & \mathbf{a}_{m,1} \\ \mathbf{a}_{1,2} & \mathbf{a}_{2,2} & \dots & \mathbf{a}_{m,2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{a}_{1,n} & \mathbf{a}_{2,n} & \dots & \mathbf{a}_{m,n} \end{Bmatrix} \quad (18)$$

Ostatnia kolumna blokowa  $\mathbf{a}_m$  zawiera tu między innymi kolumnę  $\mathbf{l}$  i  $\mathbf{s}$ .  
 Interesować nas będzie szczególnego kształtu krakowian  $\mathbf{a}$ :

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_{1,1} & & \mathbf{a}_{m+1,1} \\ & \mathbf{a}_{2,2} & \mathbf{a}_{m+1,2} \\ & \dots & \dots \\ & & \mathbf{a}_{m,m} & \mathbf{a}_{m+1,m} \end{pmatrix} \quad (19)$$

Krakowian ten zawiera  $m$  wierszy blokowych i  $m + 1$  kolumn blokowych, a jego cechą charakterystyczną jest to, że współczynniki niezerowe występują wyłącznie w blokach ostatniej kolumny, lub też w blokach położonych na głównej przekątnej.

Obliczmy kwadrat krakowianu (19):

$$\mathbf{a}^2 = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_{1,1}^2 & & \mathbf{a}_{m+1,1} \cdot \mathbf{a}_{1,1} \\ & \mathbf{a}_{2,2}^2 & \mathbf{a}_{m+1,2} \cdot \mathbf{a}_{2,2} \\ & \dots & \dots \\ & & \mathbf{a}_{m,m}^2 & \mathbf{a}_{m+1,m} \cdot \mathbf{a}_{m,m} \\ \dots & \dots & \dots & \sum_{i=1}^m \mathbf{a}_{m+1,i}^2 \end{pmatrix} \quad (20)$$

Na podstawie wzorów (12) i (14) napiszemy wzory pozwalające na łatwe obliczenie bloków krakowianu  $\mathbf{A} = \sqrt{\mathbf{a}^2}$ .

Dla pierwszych  $m$  wierszy słuszne są wzory:

$$\mathbf{A}_{i,i} = \sqrt{\mathbf{a}_{i,i}^2}, \quad (21)$$

$$\mathbf{A}_{m+1,i} = (\mathbf{a}_{m+1,i} \cdot \mathbf{a}_{i,i}) : \tau \mathbf{A}_{i,i}, \quad (i=1,2 \dots m),$$

natomiast dla ostatniego elementu przekątnej — wzór:

$$\mathbf{A}_{m+1,m+1} = \sum_{i=1}^m \mathbf{a}_{m+1,i}^2 - \sum_{i=1}^m \mathbf{A}_{m+1,i}^2, \quad (22)$$

który może być przepisany w postaci:

$$\mathbf{A}_{m+1,m+1} = \sqrt{\sum_{i=1}^m (\mathbf{a}_{m+1,i}^2 - \mathbf{A}_{m+1,i}^2)} \quad (23)$$

Idea wyrównania wielogrupowego opiera się na spostrzeżeniu, że bloki  $\mathbf{A}_{j,i}$  oraz  $\mathbf{A}_{m+1,i}$  określone wzorami (21), jak również różnice krakowianów  $\mathbf{a}_{m+1,i}^2 - \mathbf{A}_{m+1,i}^2$  występujące we wzorze (23) mogą być obliczane w sposób niezależny, oddzielnie dla każdego z  $m$  wierszy blokowych



krakowianu  $\mathbf{a}$ . Pomijając bloki zerowe,  $i$ -ty wiersz blokowy możemy zapisać jako krakowian  $\mathbf{c}$  dwóch blokach:

$$\{\mathbf{a}_i, i \quad \mathbf{a}_{m+1}, i\}, \quad (24)$$

którym przyporządkujemy jednokolumnowe bloki niewiadomych:

$$\mathbf{x}_i = \begin{Bmatrix} \mathbf{x}_{i_1} \\ \mathbf{x}_{i_2} \\ \dots \\ \mathbf{x}_{i_r} \end{Bmatrix} \quad \mathbf{x}_{m+1} = \begin{Bmatrix} \mathbf{x}_{m+1_1} \\ \mathbf{x}_{m+1_2} \\ \dots \\ \mathbf{x}_{m+1_t} \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (25)$$

W bloku  $\mathbf{x}_{m+1}$  jedność odpowiada kolumnie wyrazów wolnych, a zero — kolumnie sumowej \*).

Przy tych oznaczeniach częściowy układ równań poprawek o tabeli (24) może być przedstawiony w postaci:

$$\mathbf{x}_i \cdot \tau \mathbf{a}_i, i + \mathbf{x}_{m+1} \cdot \tau \mathbf{a}_{m+1}, i = \mathbf{v}_i, \quad (26)$$

gdzie  $\mathbf{v}_i$  jest jednokolumnowym blokiem odpowiednich poprawek. Blok niewiadomych  $\mathbf{x}_{m+1}$  występujący we wszystkich  $m$  „równaniach blokowych poprawek” (26) będziemy nazywali blokiem wiążącym, a niewiadome tego bloku — wiążącymi.

Blok niewiadomych  $\mathbf{x}_i$  występujący tylko w  $i$ -tym równaniu, będziemy nazywali blokiem względnie niezależnym, a niewiadome tego bloku — względnie niezależnymi lub właściwymi. Bloki  $\mathbf{x}_i$  mogą być obliczane niezależnie od siebie po podstawieniu niewiadomych wiążących do odpowiednich równań.

Przedstawiona powyżej metoda, podana przez Pranis — Praniewicza w symbolice Gaussa, pozwala na zastąpienie rachunku na podstawie jednej dużej tabeli równań poprawek typu (19), rachunkiem na podstawie  $m$  częściowych tabel typu (24). Jednakże, w niektórych przypadkach metoda Pranis — Praniewicza w jej pierwotnej wersji nie wystarcza. Przy wyrównaniu wielkich sieci o charakterze powierzchniowym

\*) Przyporządkowując odwrotnie — kolumnie wyrazów wolnych zero, a kolumnie sumowej jedność, t. zn. zastępując układ (15):

$$\mathbf{x} \tau \mathbf{a}' + \mathbf{I} = \mathbf{v}$$

układem

$$\mathbf{y} \tau \mathbf{a}' + \mathbf{s} = \mathbf{w}$$

otrzymamy niewiadome  $y_i = x_i - 1$  oraz poprawki  $w_i = v_i$ , co może być wykorzystane do kontroli rachunku. Dla sprawdzenia słuszności tych związków wystarczy podstawić niewiadome  $y_i$  do układu równań normalnych i układu równań poprawek zawierających zamiast kolumn wyrazów wolnych — kolumny sumowe.

występuje duża ilość niewiadomych wiążących w stosunku do niewiadomych właściwych, w związku z czym wielkość końcowego bloku  $\mathbf{A}_{m+1, m+1}$  może przekroczyć pojemność pamięci maszyny elektronicznej. Znajduje wówczas zastosowanie przedstawiona w następnym punkcie metoda wyrównania wielostopniowego \*).

#### 2.4. Wyrównanie wielostopniowe

Weźmy pod uwagę krakowian współczynników, wyrazów wolnych i sumowych w równaniach poprawek  $\{a' l s\}$ , o podanym poniżej kształcie:

$$\{a b c d\} = \begin{Bmatrix} a_{1,1} & \dots & b_{j,1} & \dots & c_{k,1} & \dots & d_1 \\ & a_{2,2} & \dots & b_{j,2} & \dots & c_{k,2} & \dots & d_2 \\ & & \dots & & & & & \\ & & & & & & & \\ & & & & a_{m,m} & \dots & b_{j,m} & \dots & c_{k,m} & \dots & d_m \end{Bmatrix}, \quad (27)$$

gdzie  $j = m + 1, m + 2 \dots m + p, k = m + p + 1, m + p + 2 \dots m + p + q$

Mamy tu  $m$  wierszy blokowych i  $m + p + q + 1 = r$  kolumn blokowych, z czego  $m$  kolumn znajduje się w części krakowianu znakowanej literą  $a$ ,  $p$  — w części znakowanej literą  $b$ ,  $q$  — w części znakowanej literą  $c$ , zaś jedna kolumna znakowana jest literą  $d$ .

Przyporządkujemy jednokolumnowe bloki niewiadomych

$$\mathbf{x}_{ai}, \mathbf{x}_{bj}, \mathbf{x}_{ck}, \mathbf{x}_d$$

kolumnom  $\mathbf{a}_i, \mathbf{b}_j, \mathbf{c}_k, \mathbf{d}$  krakowianu (27).

Bloki niewiadomych  $\mathbf{x}_{ai}$  są względnie niezależne, ponieważ mogą być niezależnie obliczone po podstawieniu niewiadomych  $\mathbf{x}_{bj}, \mathbf{x}_{ck}$ , i  $\mathbf{x}_d$  do odpowiednich równań.

Założmy, że względnie niezależne są również bloki niewiadomych  $\mathbf{x}_{bj}$  i  $\mathbf{x}_{ck}$ , tzn. że,

a) podstawienie niewiadomych  $\mathbf{x}_{ck}$  i  $\mathbf{x}_d$  umożliwia niezależne obliczenie  $p$  bloków niewiadomych  $\mathbf{x}_{bj}$ ,

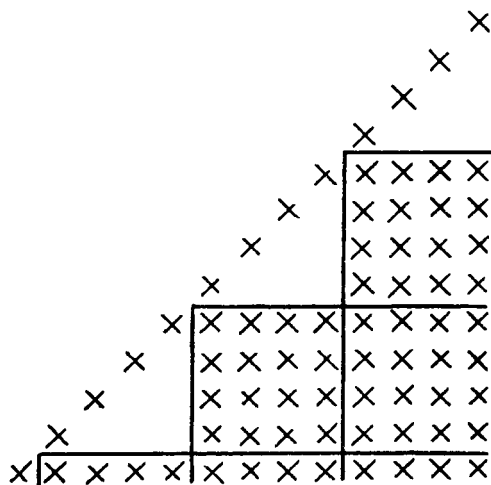
b) podstawienie niewiadomych  $\mathbf{x}_d$  umożliwia niezależne obliczenie  $q$  bloków niewiadomych  $\mathbf{x}_{ck}$ .

Bloki niewiadomych  $\mathbf{x}_{ai}$  będziemy nazywali względnie niezależnymi I stopnia, bloki  $\mathbf{x}_{bj}$  — względnie niezależnymi II stopnia, bloki  $\mathbf{x}_{ck}$  —

\*) Tego rodzaju metodę mgr inż. St. Kasperek proponował zastosować do wyrównania polskiej sieci triangulacji wypełniającej. Projekt wyrównania znajduje się w Instytucie Geodezji i Kartografii.



wianu (27). W pierwiastku tym dadzą się wydzielić kolejno zespoły  $m$ ,  $p$ ,  $q$  wierszy blokowych. W wierszach pierwszego zespołu mogą występować co najwyżej 4 bloki niezerowe odpowiadające niewiadomym  $\mathbf{x}_{ai}$ ,  $\mathbf{x}_{bj}$ ,  $\mathbf{x}_{ck}$ ,  $\mathbf{x}_d$ , w wierszach drugiego zespołu — 3 bloki niezerowe odpowiadające niewiadomym  $\mathbf{x}_{bj}$ ,  $\mathbf{x}_{ck}$ ,  $\mathbf{x}_d$  wreszcie w wierszach trzeciego zespołu — 2 bloki niezerowe odpowiadające niewiadomym  $\mathbf{x}_{ck}$ ,  $\mathbf{x}_d$ .



Rys. 7

(Inaczej mówiąc w dowolnym wierszu może występować co najwyżej jeden blok niezerowy przy niewiadomych  $\mathbf{x}_{ai}$  — jeden przy  $\mathbf{x}_{bj}$  i — jeden przy  $\mathbf{x}_{ck}$ ). Każdy z wierszy danego zespołu może być przy tym obliczany niezależnie od pozostałych wierszy zespołu. Tego rodzaju pierwiastek przedstawiono schematycznie na rys. 7; bloki niezerowe, lub te, które mogą być niezerowe, zakreślono, natomiast bloki zerowe nie zostały oznaczone.

Na podstawie wyprowadzonych uprzednio wzorów (12) i (14) wypiszemy wzory pozwalające na obliczenie pierwiastka z kwadratu krakowianu (27). Bloki tego pierwiastka będziemy oznaczali w następujący sposób:

$$\sqrt{\{\mathbf{a} \mathbf{b} \mathbf{c} \mathbf{d}\}^2} = \{\mathbf{A} \mathbf{B} \mathbf{C} \mathbf{D}\} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{i,i} & \mathbf{B}_{j,i} & \mathbf{C}_{k,i} & \mathbf{D}_i \\ & \mathbf{B}_{j,j} & \mathbf{C}_{k,j} & \mathbf{D}_j \\ & & \mathbf{C}_{k,k} & \mathbf{D}_k \\ & & & \mathbf{D}_r \end{pmatrix} \quad (29)$$

gdzie:  $i = 1, 2 \dots m$ ;  $j = m + 1 \dots m + p$ ;  $k = m + p + 1 \dots m + p + q$ ;  
 $r = m + p + q + 1$ .

Mamy kolejno — dla pierwszych  $m$  wierszy:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{i,i} &= \sqrt{\mathbf{a}_{i,i}^2} \\ \mathbf{B}_{j,i} &= (\mathbf{b}_{j,i} \cdot \mathbf{a}_{i,i}) : \tau \mathbf{A}_{i,i}, \\ \mathbf{C}_{k,i} &= (\mathbf{c}_{k,i} \cdot \mathbf{a}_{i,i}) : \tau \mathbf{A}_{i,i}, \\ \mathbf{D}_i &= (\mathbf{d}_i \cdot \mathbf{a}_{i,i}) : \tau \mathbf{A}_{i,i}, \end{aligned} \quad (30)$$

— dla następnych  $p$  wierszy:

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_{j,j} &= \sum_{i=1}^m (\mathbf{b}_{j,i}^2 - \mathbf{B}_{j,i}^2), \\ \mathbf{C}_{k,j} &= \sum_{i=1}^m (\mathbf{c}_{k,i} \cdot \mathbf{b}_{j,i} - \mathbf{C}_{k,i} \cdot \mathbf{B}_{j,i}) : \tau \mathbf{B}_{j,j}, \\ \mathbf{D}_j &= \sum_{i=1}^m (\mathbf{d}_i \cdot \mathbf{b}_{j,i} - \mathbf{D}_i \cdot \mathbf{B}_{j,i}) : \tau \mathbf{B}_{j,j}, \end{aligned} \quad (31)$$

— dla dalszych  $q$  wierszy:

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_{k,k} &= \sqrt{\sum_{i=1}^m (\mathbf{c}_{k,i}^2 - \mathbf{C}_{k,i}^2) - \sum_{j=m+1}^{m+p} \mathbf{C}_{k,j}^2}, \\ \mathbf{D}_k &= \left[ \sum_{i=1}^m (\mathbf{d}_i \cdot \mathbf{c}_{k,i} - \mathbf{D}_i \cdot \mathbf{C}_{k,i}) - \sum_{j=m+1}^{m+p} \mathbf{D}_j \cdot \mathbf{C}_{k,j} \right] : \tau \mathbf{C}_{k,k}, \end{aligned} \quad (32)$$

i wreszcie dla ostatniego bloku:

$$\mathbf{D}_r = \sqrt{\sum_{i=1}^m (\mathbf{d}_i^2 - \mathbf{D}_i^2) - \sum_{j=m+1}^{m+p} \mathbf{D}_j^2 - \sum_{k=m+p+1}^{m+p+q} \mathbf{D}_k^2} \quad (33)$$

Z kształtu tych wzorów i specyfiki zdania wynika opisany poniżej, dogodny ze względu na organizację procesu rachunkowego, tok operacji.

1. Utworzenie  $m$  wierszy blokowych krakowianu współczynników, wyrazów wolnych i sumowych równań poprawek:

$$\{ \mathbf{a}_{i,i} \quad \mathbf{b}_{j,i} \quad \mathbf{c}_{k,i} \quad \mathbf{d}_i \} \quad (34)$$

2. Podniesienie każdego z tych wierszy oddzielnie do kwadratu:

$$\left\{ \begin{array}{cccc} \mathbf{a}_{i,i}^2 & \mathbf{b}_{j,i} \cdot \mathbf{a}_{i,i} & \mathbf{c}_{k,i} \cdot \mathbf{a}_{i,i} & \mathbf{d}_i \cdot \mathbf{a}_{i,i} \\ & \mathbf{b}_{j,i}^2 & \mathbf{c}_{k,i} \cdot \mathbf{b}_{j,i} & \mathbf{d}_i \cdot \mathbf{b}_{j,i} \\ & & \mathbf{c}_{k,i}^2 & \mathbf{d}_i \cdot \mathbf{c}_{k,i} \\ & & & \mathbf{d}_i^2 \end{array} \right\} \quad (35)$$

3. Obliczenie  $m$  krakowianów o następujących blokach:

$$\left\{ \begin{array}{cccc} \mathbf{A}_{i,i} & \mathbf{B}_{j,i} & \mathbf{C}_{k,i} & \mathbf{D}_i \\ & \mathbf{b}_{j,i}^2 - \mathbf{B}_{j,i}^2 & \mathbf{c}_{k,i} \cdot \mathbf{b}_{j,i} - \mathbf{C}_{k,i} \cdot \mathbf{B}_{j,i} & \mathbf{d}_i \cdot \mathbf{b}_{j,i} - \mathbf{D}_i \cdot \mathbf{B}_{j,i} \\ & & \mathbf{c}_{k,i}^2 - \mathbf{C}_{k,i}^2 & \mathbf{d}_i \cdot \mathbf{c}_{k,i} - \mathbf{D}_i \cdot \mathbf{C}_{k,i} \\ & & & \mathbf{d}_i^2 - \mathbf{D}_i^2 \end{array} \right\} \quad (36)$$

4. Utworzenie  $p$  krakowianów o blokach, które są sumami bloków uprzednio obliczonych wzorem (36):

$$\left\{ \sum_{i=1}^m (\mathbf{b}_{j,i}^2 - \mathbf{B}_{j,i}^2), \sum_{i=1}^m (\mathbf{c}_{k,i} \cdot \mathbf{b}_{j,i} - \mathbf{C}_{k,i} \cdot \mathbf{B}_{j,i}), \sum_{i=1}^m (\mathbf{d}_i \cdot \mathbf{b}_{j,i} - \mathbf{D}_i \cdot \mathbf{B}_{j,i}) \right\} \quad (37)$$

5. Obliczenie  $p$  krakowianów o następujących blokach:

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbf{B}_{j,j} & \mathbf{C}_{k,j} & \mathbf{D}_j \\ & -\mathbf{C}_{k,j}^2 & -\mathbf{D}_j \cdot \mathbf{C}_{k,j} \\ & & -\mathbf{D}_j^2 \end{array} \right\} \quad (38)$$

6. Utworzenie  $q$  krakowianów o blokach, które są sumami bloków uprzednio obliczonych wzorami (36) — (38):

$$\left\{ \sum_{i=1}^m (\mathbf{c}_{k,i}^2 - \mathbf{C}_{k,i}^2) - \sum_{j=m+1}^{m+p} \mathbf{C}_{k,j}^2, \sum_{i=1}^m (\mathbf{d}_i \cdot \mathbf{c}_{k,i} - \mathbf{D}_i \cdot \mathbf{C}_{k,i}) - \sum_{j=m+1}^{m+p} \mathbf{D}_j \cdot \mathbf{C}_{k,j} \right\} \quad (39)$$

7. Obliczenie  $q$  krakowianów o następujących blokach:

$$\left\{ \begin{array}{cc} \mathbf{C}_{k,k} & \mathbf{D}_k \\ & -\mathbf{D}_k^2 \end{array} \right\} \quad (40)$$

8. Utworzenie krakowianu, który jest sumą bloków uprzednio obliczonych wzorami (36) — (40):

$$\left\{ \sum_{i=1}^m (\mathbf{d}_i^2 - \mathbf{D}_i^2) - \sum_{j=m+1}^{m+p} \mathbf{D}_j^2 - \sum_{k=m+p+1}^{m+p+q} \mathbf{D}_k^2 \right\} \quad (41)$$

9. Obliczenie ostatniego bloku pierwiastka:

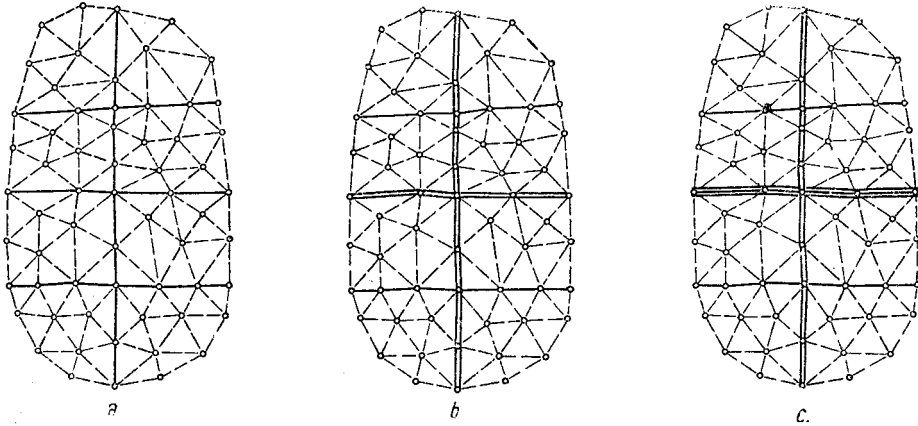
$$\{ \mathbf{D}_r \} \quad (42)$$

Jak widać, problem wyrównania wielostopniowego sprowadzony tu został do wykonania szeregu jednorodnych i powtarzających się operacji na blokach, których wielkość może być dostosowana do możliwości rachunkowych maszyny elektronicznej.

Przejdźmy do sposobu ustalenia podziału niewiadomych występujących w sieciach geodezyjnych na względnie niezależne różnych stopni i wiązace.

Dla przykładu weźmy sieć pokazaną na rys. 8. W pierwszym rzędzie podzielimy tę sieć na osiem ( $m = 8$ ) fragmentów, które będziemy nazywali grupami I stopnia; obserwacjom każdej z tych grup przyporządkujemy jeden wiersz blokowy krakowianu  $\{\mathbf{a} \ \mathbf{b} \ \mathbf{c} \ \mathbf{d}\}$ . Niewiadome występujące łącznie w wierszu blokowym  $i$ -tej grupy tworzą względnie niezależny blok niewiadomych I stopnia tej grupy. Na rys. 8a niewiadome względnie niezależnych bloków I stopnia są poprawkami współrzędnych punktów znajdujących się wewnątrz grup I stopnia; pozostałe niewiadome są poprawkami współrzędnych punktów znajdujących się na pojedynczych liniach ciągłych.

Z grup I stopnia, łącząc je po kilka, utworzymy analogicznie cztery ( $p = 4$ ) grupy II stopnia. Niewiadome odpowiadające punktom znajdującym się jednocześnie na granicy grup I stopnia i wewnątrz grup II stopnia tworzą cztery ( $p = 4$ ) względnie niezależne bloki niewiadomych II stopnia. Na rys. 8b niewiadome tych bloków są poprawkami współrzędnych punktów znajdujących się na pojedynczych liniach ciągłych.



Rys. 8

Analogicznie łącząc grupy II stopnia otrzymamy dwa ( $q = 2$ ) grupy III stopnia i dwa ( $q = 2$ ) względnie niezależne bloki niewiadomych III stopnia. Na rys. 8c niewiadome tych bloków są poprawkami współrzędnych punktów znajdujących się na podwójnych liniach ciągłych, natomiast punktom znajdującym się na potrójnej linii ciągłej odpowiadają niewiadome wiążące.

### 3. Opis wielostopniowego wyrównania dużej sieci triangulacyjnej

#### 3.1. Charakterystyka sieci

W miesiącach listopadzie i grudniu 1962 r. w Instytucie Geodezji i Kartografii \*) wyrównana została sieć triangulacji wypełniającej zawierająca ogółem 566 punktów, z czego 542 punkty wyznaczane i 24 stałe. W sieci tej pomierzono 3328 kątów, 7 baz i 1 azymut astronomiczny. Powyższym obserwacjom w wyrównaniu przyporządkowano odpowiednie błędy średnie.

\*) Prace przygotowawcze i obliczeniowe wykonał zespół pracowników Ośrodka Obliczeniowego Instytutu w składzie: inż. inż. J. Chodowicz, J. Deryło-Stępnik, J. Gaździcki, J. Orzechowski, R. Podgórski, Z. Zorski i H. Jeznach przy współudziale inż. inż. St. Kasperka, St. Pachelskiej, M. Rynkiewicza i A. Skórczyńskiego.

Wszystkie obliczenia przeprowadzono na maszynie UMC 1 stosując wyrównanie czterostopniowe. Sieć podzielona została na 15 grup I stopnia, z których utworzono: 4 grupy II stopnia, 2 grupy III stopnia i 1 grupę IV stopnia.

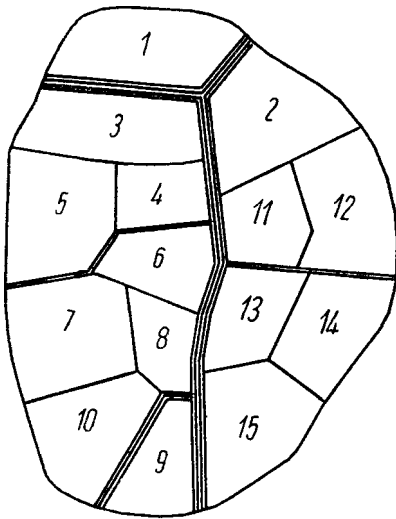
Grupy wyższych stopni składały się z następujących grup niższych stopni (patrz szkic sieci):

1	grupa II stopnia	składała się z	3, 4 i 5	grupy I stopnia
2	" "	" "	6, 7, 8 i 10	" " "
3	" "	" "	2, 11 i 12	" " "
4	" "	" "	13, 14 i 15	" " "
1	" III	" "	1 i 2	" II "
2	" "	" "	3 i 4	" " "
1	" IV	" "	1 grupy III stopnia	i 9 grupy I stopnia

przy czym 1 grupa I stopnia i 2 grupa III stopnia mogą być tu traktowane jako równorzędne grupom IV stopnia.

15 względnie niezależnych bloków niewiadomych I stopnia zawierało ogółem 846 niewiadomych, 4 bloki II stopnia — 96, 2 bloki III stopnia — 50, 1 blok IV stopnia — 20, zaś blok wiążący — 72 niewiadome; całkowita liczba niewiadomych wynosiła 1084.

Sposób podzielenia sieci na grupy uzależniony był z jednej strony pojemnością pamięci maszyny UMC 1 (4096 słów), z drugiej zaś — względami natury organizacyjnej.



Rys. 9

### 3.2. Prace przygotowawcze

Dla każdej z 15 grup I stopnia przygotowano następujące wykazy danych początkowych (patrz punkt 1.1):

- wykaz współrzędnych przybliżonych i stałych,
- wykaz kątów pomierzonych,
- wykaz numerów punktów LPC.

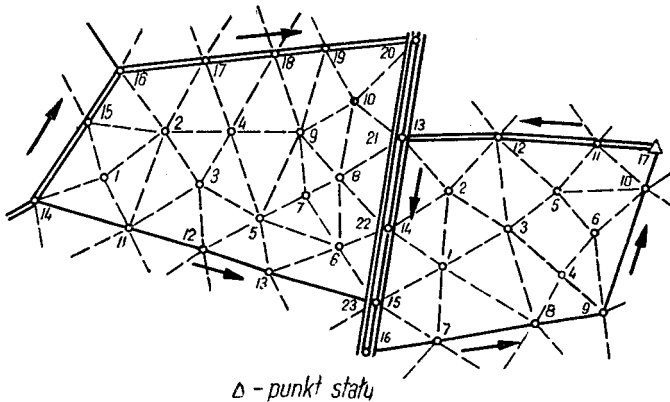
Na uwagę zasługuje sposób numeracji punktów danej grupy. Numeracja ta została wykonana zgodnie z podaną niżej kolejnością:

1,2... $n_1$  — numery punktów znajdujących się wewnątrz grupy I stopnia,



- $n_1 + 1 \dots n_2$  — numery punktów znajdujących się na granicy grup I stopnia  
 $n_2 + 1 \dots n_3$  — numery punktów znajdujących się na granicy grup II stopnia  
 $n_3 + 1 \dots n_4$  — numery punktów znajdujących się na granicy grup III stopnia,  
 $n_4 + 1 \dots n_5$  — numery punktów znajdujących się na granicy grup IV stopnia,  
 $n_5 + 1 \dots n_6$  — numery punktów stałych danej grupy.

Punkty na granicy dwóch grup otrzymały numery w obydwóch grupach, przy czym należało zachować jednakowy kierunek numeracji. Na ilustrującym sposób numeracji rys. 10 kierunki te oznaczone zostały strzałką.



Rys. 10

Punkty leżące na styku 3 lub 4 grup otrzymały odpowiednie numery w każdej z tych grup.

Dane początkowe wyperforowano na taśmie dalekopisowej, sprawdzono, usunięto błędy przez reperforację, po czym powtórnie sprawdzono.

### 3.3. Prace obliczeniowe

Wyrównanie przeprowadzono przy użyciu szeregu programów, składających się zasadniczo z tych samych podprogramów, których działanie zostało już opisane w pierwszej części niniejszej pracy.

Dodatkowo zastosowano następujące programy:

1. Program obliczania krakowianów blokowych typu (36),
2. Program obliczania krakowianów blokowych typu (38), (40),
3. Program sumowania krakowianów:  $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{c}$ , gdzie  $\mathbf{a}$  znajduje się w pamięci maszyny, zaś wyperforowany na taśmie krakowian  $\mathbf{b}$  jest odczytywany przez maszynę, suma  $\mathbf{c}$  jest bezpośrednio wpisywana na miejsce  $\mathbf{a}$ .

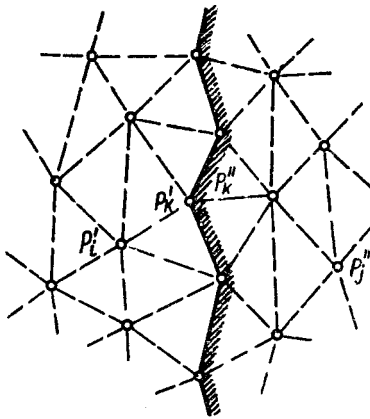
We wszystkich używanych programach eliminowano działania na zbędnych elementach zerowych.


Prace obliczeniowe można podzielić na przedstawione poniżej fazy:

1. Określenie kształtu 15 tabel równań normalnych (patrz punkt 1.2),
2. Obliczenie i perforacja na taśmie 15 krakowianów typu (34) zawierających współczynniki, wyrazy wolne i sumowe równań poprawek (patrz punkt 1.3).

Ze względu na duże rozmiary sieci obliczenie równań poprawek przeprowadzono w 2 sąsiednich pasach odwzorowania Gaussa — Krügera stosując cenną metodę, podaną przez prof. dra St. Hausbrandta. Zgodnie z zasadami tej metody sieć podzielona została na 2 części linią przebiegającą wzdłuż boków trójkątów położonych w pobliżu granicy między

pasami odwzorowanymi (w danym przypadku najwygodniejsze było przeprowadzenie linii podziału wzdłuż granicy między grupami IV stopnia).



 — linia podziału sieci

Rys. 11

Dla wszystkich punktów  $P'$  zachodniej części sieci obliczone zostały współrzędne przybliżone  $x'$ ,  $y'$  w zachodnim pasie odwzorowawczym, analogicznie współrzędne przybliżone  $x''$ ,  $y''$  punktów  $P''$  części wschodniej obliczone zostały we wschodnim pasie odwzorowawczym (rys. 11).

Współrzędne punktów leżących na linii podziału obliczono w jednym pasie na drodze rachunku trygonometrycznego, po czym przeliczono je na współrzędne w drugim pasie odwzorowawczym. W ten sposób spełniony był warunek metody, wed

dług którego punkty stykowe  $P'$  ( $x'$ ,  $y'$ ),  $P''$  ( $x''$ ,  $y''$ ) muszą być obrazami tego samego punktu na elipsoidzie odniesienia.

Równania poprawek obserwacji leżących w części zachodniej obliczone zostały na podstawie współrzędnych  $x'$ ,  $y'$  pasa zachodniego, natomiast równania poprawek obserwacji leżących w części wschodniej —

na podstawie współrzędnych  $x''$ ,  $y''$  pasa wschodniego. Równania te zawierały zarówno poprawki do współrzędnych przybliżonych  $dx'$ ,  $dy'$  pasa zachodniego jak i poprawki do współrzędnych przybliżonych  $dx''$ ,  $dy''$  pasa wschodniego. Dla punktów stykowych poprawki powyższe spełniają związki funkcyjne podane wzorem \*)

$$(dx', dy') = \begin{vmatrix} dx'' & dy'' \\ -C & 1 \end{vmatrix}_{1,2} \quad (43)$$

lub wzorem:

$$(dx'', dy'') = \begin{vmatrix} dx' & dy' \\ C & 1 \end{vmatrix}_{1,2} \quad (44)$$

gdzie  $C = S \sin \varphi$ , przy czym  $S$  jest szerokością pasa odwzorowawczego wyrażoną w radianach, a  $\varphi$  — szerokością geograficzną punktu.

Opierając się na wzorze (44) wyrugowano z układu równań poprawek części wschodniej zmienne  $dx''$ ,  $dy''$ .

W rezultacie powstał układ równań poprawek zawierający wyłącznie wzajemnie niezależne zmienne; układ taki mógł być już podstawą do ułożenia równań normalnych.

Uzasadnienie metody wyrównania sieci geodezyjnych rozciągniętych na wiele pasów odwzorowania Gaussa — Krügera, jak również szczegóły dotyczące techniki rachunkowej tej metody znajdzie Czytelnik w pracy prof. dra St. Hausbrandta [13].

3. Obliczenie i perforacja na taśmie 15 krakowianów typu (35) zawierających współczynniki, wyrazy wolne i sumowe równań normalnych (patrz punkt 1.4).
4. Obliczenie i perforacja na taśmie 15 krakowianów typu (36).
5. Obliczenie i perforacja na taśmie 15 względnie niezależnych bloków niewiadomych I stopnia przy założeniu, że wszystkie pozostałe niewiadome są równe zero. Obliczenie na tej podstawie wstępnie wyrównanych współrzędnych i wykonanie wstępnej kontroli ułożenia równań poprawek (patrz punkt 1.6). Kontrola ta pozwala również na wykrycie błędów w danych początkowych.
6. Obliczenie i perforacja na taśmie 4 krakowianów typu (37), obliczenie i perforacja na taśmie 4 krakowianów typu (38) itd., aż do obliczenia wszystkich bloków pierwiastka krakowianowego, wówczas następuje:

\*) Zastosowano tu pomocnicze symbole rachunkowe prof. dra St. Hausbrandta.

$$\text{Symbol } (x, y) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}_{1,2}$$

oznacza, że  $x = ad - bc$ , zaś  $y = ac + bd$

7. Kolejne obliczenie i perforacja na taśmie wszystkich niewiadomych  $x$  i — dla kontroli — wszystkich niewiadomych  $y = x - 1$ , otrzymanych po zastąpieniu kolumny wyrazów wolnych kolumną sumową.
8. Obliczenie współrzędnych wyrównanych i wykonanie kontroli ostatecznej (patrz punkt 1.6).

### 3.4. Wyniki wyrównania

Dokładność uzyskanych wyników należy uznać za całkowicie wystarczającą dla celów geodezyjnych. Świadczą o tym przeprowadzone kontrole rachunkowe.

Kontrola sumowa w wierszach pierwiastka krakowianowego nie wykazała większych odchyłek od kilkudziesięciu jednostek na siódmym miejscu po przecinku, przy elementach przekątnych większych od jedności. Analogiczne odchyłki otrzymywano w kontroli obliczenia niewiadomych  $y = x - 1$  (niewiadome wyrażone były w decymetrach).

Dla  $\sqrt{[pvv]}$  otrzymano następujące wartości:

- a) na podstawie algorytmu pierwiastka krakowianowego

$$\sqrt{[pll]} - [LL] = 233,785266,$$

$$\sqrt{[pls]} - [LS] = 233,785262,$$

$$\sqrt{[pss]} - [SS] = 233,785265,$$

- b) na podstawie poprawek obserwacji

$$\sqrt{[pvv]} = 233,77$$

W kontroli ostatecznej uzyskiwano odchyłki nie przekraczające  $0,02^{\text{cc}}$ .

Na podkreślenie zasługują korzyści ekonomiczne, jakie osiągnięto w wyrównaniu tak dużej sieci triangulacyjnej na maszynie elektronicznej: wielokrotnie skrócono czas i koszty obliczeń.

### LITERATURA

- [1] Aleksandrow T. F.: Primienienije elektronno — szcottonych maszin w geodezicheskich wycislenijach. Izwiestia Wysszich Uczebnych Zawiedienij. Geodezija i Kartografija. 1960, zesz. 1.
- [2] Banachiewicz T.: Rachunek krakowianowy. Warszawa, 1959.
- [3] Czebotariew A. S.: Sposob najmniejszych kwadratow s osnovami teorii wierojatnostiej. Moskwa, 1958.
- [4] Mc. Craken D. D.: Programowanie maszyn cyfrowych. Warszawa, 1962.
- [5] Faddiejewa W. N.: Metody numeryczne algebry liniowej. Warszawa, 1955.

- [6] *Gaździcki J.*: Niektóre zastosowania pojęcia eliminacji w obliczeniach geodezyjnych. Zeszyty Naukowe Politechniki Warszawskiej. 1962, zes. 7.
- [7] *Gaździcki J.*: Rozwiązywanie układów równań normalnych na maszynach elektronowych. Prace Instytutu Geodezji i Kartografii. 1962, zes. 2.
- [8] *Gaździcki J.*: Programy rozwiązywania zadań geodezyjnych na polskiej uniwersalnej maszynie UMC 1. Prace Instytutu Geodezji i Kartografii, 1962, zes. 1.
- [9] *Gaździcki J.*: Rozwiązanie układu 739 równań normalnych na maszynie UMC 1. Przegląd Geodezyjny. 1962, zes. 7.
- [10] *Gotthardt E.*: Geodätisches Rechnen mit der Rechenanlage ZUSE 22. Zeitschrift für Vermessungswesen. 1960, zes. 1.
- [11] *Hausbrandt St.*: Metoda wyrównania grupowego Pranis — Praniewicza w ujęciu krakowianowym. Geodezja i Kartografia, 1955.
- [12] *Hausbrandt St.*: Rachunki Geodezyjne. Warszawa, 1953.
- [13] *Hausbrandt St.*: Wyrównanie metodą najmniejszych kwadratów kątowo-liniowych sieci wypełniających, rozciągniętych na wiele Gauss — Krügerowskich obszarów odwzorowawczych. Geodezja i Kartografia, 1956, zes. 1.
- [14] *Höllrigl F.*: Rationalisierung im österreichischen Bundesvermessungsdienst durch den Einsatz des Lochkartenverfahrens für geodätische Berechnungen. Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen. 1960, zes. 2.
- [15] *Kamela Cz.*: Geodezja. Warszawa, 1951.
- [16] *Kougija W. A.*: Programma obrabotki niebolszych sietiej triangulacji na elektronnoj wycislitelnoj maszinie „Strieła”. Geodezija i Kartografija. 1961, zes. 5.
- [17] *Lance G. N.*: Numerical Methods for High Speed Computers. London 1960.
- [18] *Łarczenko E. G.*: Analiz tocznosti rieszenija sistem normalnych urawnienij. Izwiestia Wysszich Uczebnych Zawiedienij. Geodezija i Kartografija. 1960, zes. 1.
- [19] *Łazarkiewicz A., Balasiński W.*: A Simple Experimental Computer with Negative Basis. Mathematics of Computation, 1961, July.
- [20] *Mazmiszwili A. I., Bielajew B. I.*: Sposob najmieszich kwadratow. Moskwa, 1959.
- [21] *Näser K.*: Trigonometrische Punktgruppeneinschaltung mit dem ZRA 1. Vermessungstechnik. 1962, zes. 8 i 9.
- [22] *Näser K., Wegener H.*: Zu einigen aktuellen Fragen der Rechentechnik. Vermessungstechnik. 1962, zes. 9.
- [23] *Pranis-Pranievicz I. J.*: Rukowodstwo po urawnitielnym wycislenijam triangulacji. Moskwa, 1956.

Rękopis złożono w Redakcji w lutym 1963 r.

## УРАВНИВАНИЕ ТРИАНГУЛЯЦИОННЫХ СЕТЕЙ НА ЭЛЕКТРОННЫХ МАШИНАХ

### Резюме

Работа состоит из трех следующих частей:

1. Уравнивание отдельных групп.
2. Многогрупповое и многостепенное уравнивание.
3. Описание многостепенного уравнивания большой триангуляционной сети.

В первой части описаны программы, позволяющие на комплексное уравнивание триангуляционных сетей. Эти программы были разработаны для небольшой счетной машины УМС 1, находящейся в Институте Геодезии и Картографии. Их особенностью является максимально возможное исключение в течение всего уравнивания лишних операций на нулевых элементах, что позволяет сократить время расчета и дает возможность уравнивать большее число систем при той же ёмкости памяти машины.

С точки зрения использования, программы разделяются на следующие части:

- а) определение формы таблицы нормальных уравнений,
- б) расчет и перфорация уравнений поправок,
- в) расчет нормальных уравнений,
- г) решение системы нормальных уравнений вместе с возможным расчетом средней ошибки,
- д) расчет уравнинных координат и окончательный контроль.

Начальными данными являются измеренные углы, номера пунктов, определяющих положение углов в сети, а также постоянные и приближенные координаты.

В части 2 даны формулы метода многогруппового уравнивания (Пранис-Праневича) и её обобщения — метода многостепенного уравнивания. Формулы эти вводятся на основании алгоритма корня блочного краковяна, в котором применяемый до настоящего времени расчет на элементах — отдельных числах — замещен более удобным в автоматических вычислениях расчетом на блоках — составах чисел.

Метод многостепенного уравнивания позволяет на уравнивание больших геодезических сетей даже в тех случаях, когда употребляемые для вычислений электронные машины имеют память с малой ёмкостью.

Часть 3 содержит описание четырехстепенного уравнивания поверхности триангуляционной сети, которое было проведено на машине УМС 1 снабженной барабанной памятью с ёмкостью 4096 слов. Сеть эта содержала в общем 566 пунктов, в том числе 542 определяемых и 24 твердых. Включенные для уравнивания наблюдения содержали 3328 углов, 7 базисов и 1 астрономический азимут. Результаты уравнивания подтвердили целесообразность применения метода многостепенного уравнивания в автоматических вычислениях.

ADJUSTMENT OF THE TRIANGULATION NETS ON THE  
ELECTRONIC COMPUTERS

S u m m a r y

The paper is divided in 3 parts:

1. Adjustment of single groups
2. Multi-group and multi-step adjustment
3. Description of a multi-step adjustment of a large triangulation net.

The first part contains the description of the programs for the complex adjustment of the triangulation nets. These programs were elaborated for a medium — size digital computer UMC 1, installed in the Institute of Geodesy and Cartography. The main feature of these programs are the maximal elimination of the needless operations on the zero-elements during the whole procedure of adjustment, which enables to shorten the time of computation and to adjust larger blocks with the same capacity of the memory of the machine.

With regard to their use the programs are divided in the following parts:

- a) the determination of the form of the table of normal equations,
- b) the setting-up and perforation of the correction equations,
- c) the setting-up of the normal equations,
- d) the solution of the system of normal equations with the computation of the standard errors,
- e) the computation of the adjusted coordinates and the final control.

The initial data are : the measured angles, the numbers of points, which defines the position of angles in the net, the definite and approximate coordinates.

In the second part are given the formulas of the multi-group adjustment of Pranis Pranievicz and of its generalization — the method of multi-step adjustment. These formulas are deduced, basing on the algorithmus of the root of the block Cracovian, in which the calculus on the elements — the simple numbers — is replaced by the calculus on the blocks — ensembles of numbers — more convenient in the automatic computations.

The method of the multi-step adjustment enables the adjustment of the large geodetic nets even in these cases, where the electronic computers to be used have the memory of a small capacity.



The third part contains the description of the four-steps adjustment of the triangulation net, performed on the UMC 1 computer, fitted with a drum memory of the capacity of 4096 words. This net was consisted of 566 points : 24 given points and 542 points to be determined. The observations included to the adjustment consisted from 3328 angles, 7 bases and 1 astronomic azimuth. The results of adjustment confirmed completely the fitness of use of multi-step adjustment in the automatic computation.