

### Uwagi o obliczaniu wartości geopotencjalnych

W związku z problematyką związaną z systemami wysokości duże znaczenie ma zagadnienie wyznaczenia t. zw. wartości geopotencjalnych.

Pojęcie wartości geopotencjalnych (cote géo-potentielle w języku francuskim, geopotential number — w angielskim) ustalone zostało przez Międzynarodową Komisję europejskiej sieci niwelacyjnej na Zebraniu we Florencji ([13], [12]), w oparciu o ogólne zalecenia X Zgromadzenia Ogólnego Międzynarodowej Asocjacji Geodezji w Rzymie [11].

Wartość geopotencjalna reprezentuje pracę powstałą wskutek przejścia masy jednostkowej pod działaniem siły ciężkości w polu jednorodnym z powierzchni poziomowej odniesienia do powierzchni rozważanej [13].

Każda z powierzchni poziomowych może więc być scharakteryzowana w stosunku do wyjściowej powierzchni poziomowej (przyjmowanej za powierzchnię odniesienia np. w stosunku do powierzchni geoidy) wartością geopotencjalną.

Wartość geopotencjalna punktu  $A$  jest więc różnicą potencjałów siły ciężkości: geoidy — jako powierzchni wyjściowej oraz powierzchni poziomej przechodzącej przez ten punkt.

Ponieważ wartość geopotencjalną oznacza się przez  $c$  uzyskujemy więc zależność:

$$c_A = W_O - W_A$$

w której  $W$  jest potencjałem siły ciężkości Ziemi.

Wartość ta jest niezależna od drogi przejścia od wyjściowej powierzchni poziomowej  $W_O$  do powierzchni poziomowej  $W_A$ . Dla obliczeń  $c$  przyjmuje się drogę po fizycznej powierzchni Ziemi wzdłuż linii niwelacyjnej łączącej punkt wyjściowy położony na powierzchni poziomowej  $W_O$  z rozważanym punktem  $A$  (rys. 1).

W związku z tym

$$c_A = -(W_A - W_O) = \int_O^A g \cdot dh \quad (1)$$

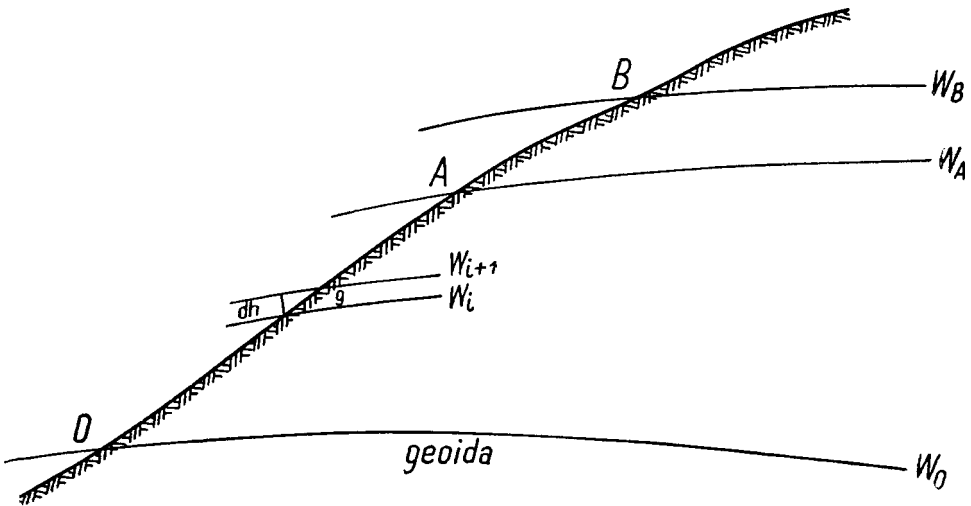
Analogicznie dla różnicy wartości geopotencjalnej  $\Delta c$  pomiędzy dwoma punktami  $A$  i  $B$  wzór przedstawia się następująco:

$$\Delta c_{A-B} = \int_A^B g \cdot dh \quad (2)$$

Praktycznie do obliczeń wzór (2) można zastąpić wzorem:

$$\Delta c_{A-B} = \sum_A^B (g_{i, i+1} \cdot \Delta h_{i, i+1}) \dots \quad (2a)$$

We wzorze tym  $\Delta h_{i, i+1}$  stanowi bezpośredni wynik niwelacji elementarnego odcinka  $i, i + 1$ , a  $g_{i, i+1}$  średnią wartość przyspieszenia siły ciężkości na fizycznej powierzchni Ziemi dla tego elementarnego odcinka (rys. 1).



Rys. 1

Przy obliczaniu wartości geopotencjalnych ustalono przyjmować wartości przyspieszenia siły ciężkości w kilogalach ( $1 \text{ Kgal} = 1 \cdot 10^3 \text{ gal} = 1 \cdot 10^3 \text{ cm} \cdot \text{sek}^{-2}$ ), a wartości niwelowane  $dh$  (a praktycznie  $\Delta h$ ) w metrach [13]. Jednostka wartości geopotencjalnej  $1 \text{ Kgal} \times 1 \text{ m}$  oznaczona jest przez u.g.p. (unites géopotentielles [13], lub przez g.p.u. w języku angielskim (geo-potential units) [1].

$$1 \text{ u.g.p.} = 1 \text{ Kgal} \times 1 \text{ m} = 1 \cdot 10^6 \text{ mgal} \cdot \text{m} = 1 \cdot 10^8 \text{ cm}^2 \text{ sek}^{-2}.$$

Wartość geopotencjalna  $c$  oraz jej różnice  $\Delta c$  są głównym czynnikiem wzorów wysokości  $H$  lub jej różnic  $\Delta H$  dla różnych systemów wysokości. Ogólnie występuje zależność  $H = \frac{c}{g}$  (lub  $\Delta H = \frac{c}{g}$ ), gdzie  $\bar{g}$  przyjmuje się zależnie od systemu wysokości według innych założeń.

Należy także zaznaczyć, że wartość geopotencjalna jest o około 2% liczbowo mniejsza w jednostkach u.g.p. od wysokości  $H$  wyrażonej w metrach.

Wzajemne przeliczenie wysokości z jednego systemu na inny system opiera się na wartości geopotencjalnej. Szereg naukowców, jak np. Baeschlin [1], Bodemüller [2], Ramsayer [8] podają praktyczne wzory dla tych przeliczeń.

Istotnym zagadnieniem, które chcemy rozważyć, jest obliczanie wartości geopotencjalnych z możliwie największą dokładnością w warunkach naszego kraju.

Praktycznie obliczenia będą realizowały wzór (2a). Podstawą do obliczeń są więc pomiary niwelacyjne  $\Delta h$  oraz wartości przyspieszenia siły ciężkości  $g$  wzdłuż niwelowanej linii.

Elementarny składnik ( $\Delta h_{i,i+1} \cdot g_{i,i+1}$ ) powinien odnosić się do elementarnego odcinka  $i, i + 1$ .

Teoretycznie słuszne byłoby wyznaczanie tych iloczynów dla wszystkich odcinków pomiędzy sąsiednimi stanowiskami łat niwelacyjnych podczas przeprowadzania pomiaru niwelacyjnego. Praktycznie jest to jednak mało realne i nieekonomiczne.

Odcinek  $i, i + 1$  powinien być odcinkiem o jednolitym charakterze profilu pionowego fizycznej powierzchni Ziemi wzdłuż linii niwelacyjnej oraz o liniowej zmianie wartości przyspieszenia siły ciężkości pomiędzy punktem  $i$  oraz punktem  $i + 1$  na profilu niwelacyjnym.

Jako odcinek elementarny  $i, i + 1$  przyjąć więc można praktycznie odcinek pomiędzy sąsiednimi znakami wysokościowymi linii niwelacyjnej pod warunkiem jednak, że te odcinki odpowiadają tym właśnie kryteriom. Z reguły będzie można w ten sposób postępować dla linii położonych w rejonach równinnych i częściowo w rejonach podgórskich.

Natomiast dla obszarów górskich i niektórych obszarów podgórskich zagadnienie komplikuje się i w poszczególnych przypadkach należy przeprowadzić wstępną analizę. Rozważmy przykładowo odcinek 1—2, przedstawiony na rys. 2, na którym pomiędzy sąsiednimi reperami 1 i 2 występuje lokalne wzniesienie (w punkcie  $P$ ). Traktując odcinek 1—2 jako elementarny oblicza się różnicę  $\Delta c_{1-2}$  na podstawie danych punktów 1 i 2. Różnica wartości geopotencjalnej powinna być jednak w tym przypadku wyznaczona wzdłuż fizycznej powierzchni Ziemi na trasie 1— $P$ —2, tj.  $\Delta c_{1-P-2}$ . Na podstawie danych podanych na rys. 2 uzyskujemy:

$$\begin{aligned} \Delta c_{1-2} &= \frac{g_1 + g_2}{2} \Delta H_{1-2} = \left( g_1 + \frac{\Delta g}{2} \right) \Delta H_{1-2}, \\ \Delta c_{1-P-2} &= \frac{g_1 + g_P}{2} \Delta H_{1-P} - \frac{g_P + g_2}{2} \delta H = \\ &= \left( g_1 + \frac{\delta g}{2} \right) \cdot (\Delta H_{1-2} + \delta H) - \left( g_1 + \frac{\delta g + \Delta g}{2} \right) \delta H. \end{aligned}$$

Oznaczając przez  $R$  różnicę pomiędzy tymi wyznaczeniami otrzymamy:

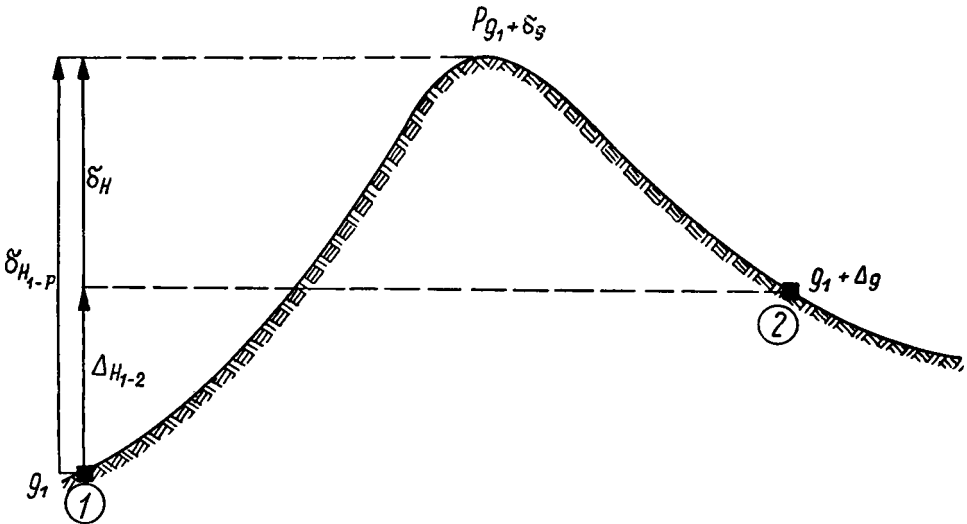
$$R = \Delta c_{1-P-2} - \Delta c_{1-2} = \frac{\delta g}{2} \Delta H_{1-2} - \frac{\Delta g}{2} \cdot \delta H_{1-P}.$$

Jeżeli wartość przyspieszenia siły ciężkości  $g$  w rejonie pomiędzy punktami 1 i 2 zmienia się w sposób proporcjonalny do wysokości  $H$ , tj.  $dg = a \cdot dH$ , gdzie  $a$  jest współczynnikiem o stałej wartości w rozważanym rejonie, wtedy  $R = 0$ , gdyż

$$R = \frac{a \cdot \delta H}{2} \cdot \Delta H - \frac{a \Delta H}{2} \delta H = 0.$$

Jeżeli natomiast wzdłuż linii pomiędzy punktami 1 i 2 istnieje lokalna anomalia grawimetryczna (co bardzo często występuje w obszarze górskim), tj. współczynnik  $a$  nie jest wartością stałą, wówczas  $R \neq 0$ .

Weźmy dla przykładu  $\Delta H_{1-2} = 100$  m,  $\Delta g = -20$  mgal; oraz  $\delta H_{1-P} = 300$  m,  $\delta g = -50$  mgal. Otrzymamy w tym przypadku wartość róż-



Rys. 2

nicy  $R = 500$  mgal  $\cdot$  m  $= 0,5 \cdot 10^{-3}$  u.g.p., która w sposób systematyczny zniekształciłaby wartość  $\Delta c$ , gdyby obliczać ją traktując odcinek 1—2 (rys. 2) jako elementarny.

Jak wynika więc z tych rozważań w rejonie górskim może wystąpić konieczność podzielenia odcinka niwelacyjnego na dwa lub więcej elementarnych odcinków w celu właściwego obliczenia różnicy wartości geopotencjalnej  $\Delta c$ .

Przejdźmy teraz do zagadnienia obliczenia różnicy  $\Delta c_{i,i+1}$  jako elementarnego składnika różnicy wartości geopotencjalnej  $\Delta c_{1-N}$  dla linii niwelacyjnej pomiędzy punktami 1 i  $N$ .

Zgodnie z wzorem (2a)

$$\Delta c_{i,i+1} = g_{i,i+1} \cdot \Delta h_{i,i+1},$$

gdzie praktycznie:  $g_{i,i+1} = \frac{1}{2}(g_i + g_{i+1})$ , a  $\Delta h_{i,i+1}$  jest pomierzoną różnicą wysokości na niwelowanym odcinku  $i, i + 1$ .

Założmy następującą zależność:

$$g_{i,i+1} = g_o + \delta g_{i,i+1}, \text{ przy czym}$$

$g_o$  — najmniejsza wartość przyspieszenia siły ciężkości na obliczonej linii lub w rejonie, w którym przeprowadzone są obliczenia wartości geopotencjalnych ( $g_o = \text{const.}$ ),

$\delta g_{i,i+1} > 0$  i praktycznie maksymalna wartość  $\delta g$  nie będzie większa niż kilkaset miligali.

Przy tym założeniu dla odcinka  $i, i + 1$  otrzymujemy:

$$\Delta c_{i,i+1} = g_o \cdot \Delta h_{i,i+1} + \delta g_{i,i+1} \cdot \Delta h_{i,i+1}.$$

Wobec tego dla całej linii 1— $N$  można więc określić różnicę wartości geopotencjalnej  $\Delta c_{1+N}$  na podstawie praktycznego wzoru:

$$\Delta c_{1-N} = g_o \cdot \sum_1^N \Delta h_{i,i+1} + \sum_1^N (\delta g_{i,i+1} \cdot \Delta h_{i,i+1}). \quad (3)$$

Należy podkreślić, że  $\sum_1^N \Delta h_{i,i+1}$  jest różnicą pomiędzy uzyskaną

z bezpośrednich wyników pomiarów niwelacyjnych (bez wyrównania) wysokością  $H_N$  i  $H_1$ .

Materiały grawimetryczne, którymi należy dysponować przy obliczaniu wartości geopotencjalnych muszą umożliwiać wyznaczenie wartości przyspieszenia siły ciężkości dla punktu początkowego  $i$  oraz punktu końcowego  $i + 1$  każdego elementarnego przęsła obliczanej linii niwelacyjnej.

Praktycznie dla każdego znaku wysokościowego obliczanej linii oraz w rejonie górskim o ile jest to konieczne — także dla punktów pośrednich, muszą być znane wartości  $g$ . Wartości przyspieszenia siły ciężkości powinny być — zgodnie z ustaleniem MAG — określone w systemie poczdamskim [13].

Wartości  $g_i$  oraz  $g_{i+1}$  mogą być uzyskane: a) w wyniku bezpośrednich pomiarów grawimetrycznych na punkcie  $i$  oraz na punkcie  $i + 1$  lub b) na podstawie map anomalii grawimetrycznych.

W pierwszym przypadku punkt grawimetryczny powinien być zakładany przy każdym reperze niwelacyjnym. Jeżeli dla tego punktu grawi-

metrycznego uzyskaliśmy w wyniku pomiaru wartość  $g_{gr}$ , to obliczenie przyspieszenia siły ciężkości dla znaku niwelacyjnego  $i$  przeprowadzi się według wzoru:

$$g_i = g_{gr} + K \cdot (H_{gr} - H_i).$$

Różnica wysokości tych punktów ( $H_{gr} - H_i$ ) będzie praktycznie rzędu kilkudziesięciu centymetrów, współczynnik  $K$  dla reperów naziemnych może być przyjęty zgodnie z redukcją Faye'a  $K = 0,3086$  mgal/m, natomiast dla reperów podziemnych — uwzględniając także wpływ redukcji Bouguera — współczynnik ten dla warunków polskich będzie wynosił  $K = 0,21 \div 0,23$  mgal/m.

Ponieważ ( $H_{gr} - H_i$ ) znane będzie z dokładnością do kilku centymetrów, wobec tego praktycznie średni błąd  $mg_i \cong mg_{gr}$ .

Zasada określenia wartości  $g$  na podstawie map anomalii grawimetrycznej (Bouguera lub Faye'a) przedstawia się praktycznie następująco:

1) wykreśla się na podstawie mapy anomalii przebieg izolinii anomalii wzdłuż obliczanych linii niwelacyjnych; dogodną jest skala opracowania 1 : 100 000, tj. skala odpowiadająca dokumentacji kartograficznej obrazującej topograficzne usytuowanie znaków wysokościowych linii niwelacyjnej;

2) określa się dla każdego znaku wysokościowego (a ewentualnie w miarę potrzeb też dla punktów pośrednich) wartość anomalii  $An_i$  na drodze interpolacji; dokładność odczytania z wykresu izolinii 0,1 mgal;

3) oblicza się wartość  $g_i$  stosując następujący wzór przeliczeniowy:

$$g_i = An_i + \gamma_o - K \cdot H_i \quad (4)$$

gdzie  $\gamma_o$  — wartość normalna przyspieszenia siły ciężkości (według wzoru stosowanego przy opracowaniu mapy anomalii, np. wzór Helmerta 1901—1909); wartość tę wyznacza się na podstawie szerokości geograficznej  $\varphi_i$  określonej z mapy topograficznej w ramach dokumentacji niwelacyjnej;

$K$  — współczynnik redukcyjny zależny od rodzaju anomalii grawimetrycznej dla jakiej została opracowana mapa (tj. anomalia Bouguera lub anomalia Faye'a); współczynnik ten będzie miał stałą wartość dla całej linii niwelacyjnej lub dla całego obszaru;

$H_i$  — wysokość n.p.m. znaku wysokościowego, uzyskana z bezpośrednich wyników pomiarów niwelacyjnych (bez wyrównania).

W ten sposób na podstawie mapy grawimetrycznej, odpowiednio dokładnie opracowanej, możemy uzyskać dla każdego punktu wartość  $g$  potrzebną przy obliczeniach wartości geopotencjalnych.

Należy zaznaczyć, że w przypadku korzystania z map anomalii przyspieszenia siły ciężkości Faye'a (An. F.) współczynnik  $K = 0,3086$  mgal/m, a z map anomalii Bouguera (An. B.) w warunkach obszaru Polski  $K =$

=  $(0,3086 - 0,0419 \sigma)$ , przy czym  $\sigma$  (w  $\text{g} \cdot \text{cm}^{-3}$ ) jest średnią gęstością podłoża przyjmowaną przy opracowaniu mapy (najdogodniej w tym przypadku przyjąć  $\sigma = \text{const.}$  przy sporządzaniu mapy).

Zestawienie wzorów będzie więc następujące:

$$g = An.F. + \gamma_0 - 0,3086 \cdot H \quad \text{lub}$$

$$g = An.B. + \gamma_0 - (0,3086 - 0,0419 \sigma) H.$$

Jak wiadomo anomalie Bouguera wykazują znacznie mniejszą zmienność, tj. mniejsze zmiany w zależności od rzeźby terenu, niż anomalie Faye'a.

Założenie liniowej zmiany anomalii Bouguera pomiędzy sąsiednimi punktami grawimetrycznymi przy określaniu wartości tej anomalii (An.B.) dla znaku wysokościowego będzie w rejonie górskim i podgórskim obarczone mniejszym błędem niż błąd spowodowany przyjęciem liniowej zmiany anomalii Faye'a (An. F.). W rejonach równinnych i pagórkowatych praktycznie obojętne jest czy korzystać będziemy z mapy anomalii Bouguera, czy też z mapy anomalii Faye'a. Dla linii znajdujących się w obszarach górskich i podgórskich celowe jest stosowanie do omawianych przeliczeń mapy anomalii Bouguera opracowanej przy stałej gęstości  $\sigma$  (np.  $\sigma = 2,67 \text{ gcm}^{-3}$  lub  $\sigma = 2,39 \text{ gcm}^{-3}$ ) oraz bez uwzględniania poprawki topograficznej.

Dla kontroli stosować można dwukrotne przeliczenie na podstawie obu map grawimetrycznych.

Zastanówmy się nad dokładnością omawianego wyznaczenia wartości  $g_i$  na podstawie mapy grawimetrycznej.

Średni błąd określenia wartości przyspieszenia siły ciężkości w systemie poczdamskim na podstawie wzoru (4) wynosi:

$$m_g = \pm \sqrt{m_{An}^2 + m_{\gamma_0}^2 + K^2 \cdot m_H^2} \quad (5)$$

Średni błąd  $m_{An}$  zależy od jakości mapy grawimetrycznej (dokładność określenia  $g$  dla punktów grawimetrycznych w systemie poczdamskim wzdłuż linii niwelacyjnej, gęstość zdjęcia grawimetrycznego, skala opracowania mapy), na podstawie której wyznacza się dla znaku wysokościowego wartość anomalii (An).

Biorąc na przykład materiały grawimetryczne przygotowane i opracowane w 1955 r. dla potrzeb obliczenia polskiej sieci niwelacji precyzyjnej w systemie wysokości normalnych ([3], [4]), można po uwzględnieniu wpływu błędu interpolacji ocenić, że wartość średniego błędu  $m_{An}$  będzie wynosić od  $\pm 0,4 \text{ mgal}$  dla optymalnych warunków do około  $\pm 1,5 \text{ mgal}$  w warunkach najgorszych.

Należy zaznaczyć, że przy tych rozważaniach interesuje nas tylko dokładność wzdłuż linii niwelacyjnych dla których przeprowadzone będą wyznaczenia wartości geopotencjalnych.

Nowsze pomiary grawimetryczne i opracowania mapowe mogą zapewnić oczywiście znacznie wyższą dokładność określenia  $A_n$  w systemie poczdamskim (np. rzędu 0,2 mgal).

Średni błąd  $m_{\gamma_0}$  przy założeniu dokładności określenia szerokości geograficznej  $\varphi$  z mapy topograficznej rzędu 5—6", wyniesie  $m_{\gamma_0} = \pm 0,15$  mgal. Szerokość geograficzna  $\varphi$  podana jest w katalogu niwelacyjnym dla każdego znaku wysokościowego w związku z obliczeniami poprawek ze względu na nierównoległość powierzchni poziomowych.

Średni błąd  $m_H$  określenia wysokości n.p.m. z danych niwelacyjnych będzie maksymalnie wynosił parę centymetrów, a ponieważ współczynnik  $K = 0,2—0,3$  mgal/m (zależnie od przyjętego rodzaju anomalii), wobec tego

$$K \cdot m_H \leq 0,01 \text{ mgal.}$$

W rezultacie można z wystarczającym praktycznie przybliżeniem przyjąć  $m_{g_i} \cong m_{A_n}$ .

Reasumując należy podkreślić, że w przypadku posiadania mapy anomalii wzdłuż trasy linii dla których oblicza się wartości  $\Delta C$  celowe jest jej wykorzystanie do wyznaczenia wartości  $g_i$  przy zastosowaniu wzoru (4).

Jeżeli natomiast w wyniku pomiarów grawimetrycznych dysponujemy wartościami przyspieszenia siły ciężkości na punktach przy każdym reperze niwelacyjnym, to oczywiście możemy bezpośrednio wykorzystać te dane dla wyznaczenia średniej wartości przyspieszenia  $g_{i,i+1}$  na elementarnym odcinku naszych obliczeń.

Rozważmy dokładność obliczenia różnicy wartości geopotencjalnej przy wykorzystaniu wzoru (3).

Średni błąd  $m_{\Delta c_{i,i+1}}$  dla elementarnego odcinka wynosi

$$m_{\Delta c_{i,i+1}} = \pm \sqrt{(g_0 \cdot m_{\Delta h_{i,i+1}})^2 + (\delta g_{i,i+1} \cdot m_{\Delta h_{i,i+1}})^2 + (\Delta h_{i,i+1} \cdot m_{\delta g_{i,i+1}})^2} \quad (6)$$

Średni błąd pomiaru przesła niwelacyjnego  $m_{\Delta h_{i,i+1}} = \pm \eta \cdot \sqrt{L_{i,i+1}}$ , gdzie  $L$  długość przesła wyrażona w kilometrach, a  $\eta$ , wyrażone w mm, jest średnim błędem przypadkowym pomiaru niwelacyjnego na 1 km.

Na przykład w polskiej sieci niwelacji precyzyjnej I klasy bezwzględna wartość  $|\eta| \leq 0,75$  mm/km [14]. Dla przeciętnej odległości  $L_{i,i+1} = 2$  km uzyskujemy wtedy  $m_{\Delta h_{i,i+1}} = \pm 1,0$  mm.

Rozpatrzmy kolejno wpływ poszczególnych błędów.

A)  $g_0 \cdot m_{\Delta h_{i,i+1}} = \pm 0,98 \text{ Kgal} \cdot \eta \sqrt{L} \text{ mm} \cong \pm \eta \cdot \sqrt{L} \cdot 10^{-3} \text{ u.g.p.}$

Wyraz ten reprezentuje wpływ średniego błędu pomiaru niwelacyjnego na wyznaczone wartości geopotencjalne.

Dla obliczeń wzdłuż linii krajowej sieci niwelacji precyzyjnej I klasy otrzymujemy, że wpływ tego wyrazu dla przesła 2 km będzie rzędu  $1,0 \cdot 10^{-3}$  u.g.p.



- B) Wartość  $\delta g_{i,i+1}$  będzie maksymalnie wynosić kilkaset miligali. Przyjmując maksymalnie  $\delta g_{i,i+1} = 0,0004$  Kgal otrzymujemy

$$\delta g_{i,i+1} \cdot m_{\Delta h_{i,i+1}} = \pm 0,4 \eta \sqrt{L} \cdot 10^{-6} \text{ u.g.p.}$$

Wpływ tego wyrazu jest tak mały, że można go całkowicie zaniedbać.

W warunkach rozważanej sieci I klasy wyniósł by bowiem dla elementarnego dwukilometrowego odcinka  $\pm 0,4 \cdot 10^{-6}$  u.g.p.

- C) Wielkość iloczynu ( $\Delta h_{i,i+1} \cdot m_{\delta g_{i,i+1}}$ ) zależy od dokładności wyznaczenia  $g_{i,i+1}$  oraz od różnicy wysokości występującej na elementarnym odcinku  $i, i+1$ .

Dla linii położonych w rejonach górskich należy więc mieć z wyższą dokładnością wyznaczone  $g_{i,i+1}$ , tj. dysponować gęstszym i dokładniejszym zdjęciem grawimetrycznym wzdłuż linii dla której obliczane są wartości geopotencjalne, niż w rejonach równinnych.

Biorąc pod uwagę materiały grawimetryczne z 1955 r. przygotowane dla potrzeb niwelacji precyzyjnej I klasy ([3], [4]) otrzymalibyśmy dla niekorzystnych warunków

$$m_{g_{i,i+1}} = \pm \sqrt{2} \cdot m_{g_i} = \pm \sqrt{2} \cdot 1,5 \text{ mgal} = \pm 2,1 \text{ mgal.}$$

Przyjmując odpowiednio różnice wysokości

- a)  $\Delta h_{i,i+1} = 20$  m uzyskujemy  $\Delta h_{i,i+1} \cdot m_{\delta g_{i,i+1}} = \pm 0,04 \cdot 10^{-3}$  u.g.p.  
 b)  $\Delta h_{i,i+1} = 80$  m uzyskujemy  $\Delta h_{i,i+1} \cdot m_{\delta g_{i,i+1}} = \pm 0,17 \cdot 10^{-3}$  u.g.p.

Jak widać z powyższego, dla linii w obszarach równinnych i podgórskich wpływ średniego błędu danych grawimetrycznych na obliczenie wartości geopotencjalnych będzie w tym przypadku znikomy, w stosunku do dokładności pomiarów niwelacyjnych.

Dla linii w obszarach górskich wpływ ten ma już praktyczne znaczenie przy analizie dokładnościowej.

W rezultacie średni błąd wyznaczenia różnicy wartości geopotencjalnej dla elementarnego odcinka (6) przedstawić można praktycznie wzorem

$$m_{\Delta c_{i,i+1}} = \pm \sqrt{L_{i,i+1} \cdot \eta^2 + 2 \left( \frac{\Delta h_{i,i+1}}{10^3} \cdot m_{g_i} \right)^2} \cdot 10^{-3} \text{ u.g.p.}, \quad (6a)$$

dla  $L$  wyrażonego w km,  $\eta$  w mm,  $\Delta h$  w m i  $m_g$  w mgalach.

Dla całej linii 1-N średni błąd obliczanej różnicy wartości geopotencjalnej przedstawiać się więc będzie następująco:

$$m_{\Delta c_{1-N}} = \pm \sqrt{L_{1-N} \cdot \eta^2 + 2 \sum_1^N \left( \frac{\Delta h_{i,i+1}}{10^3} \cdot m_{g_i} \right)^2} \cdot 10^{-3} \text{ u.g.p.} \quad (7)$$

Biorąc pod uwagę przeważnie równinny charakter naszego kraju oraz fakt posiadania odpowiednio dokładnych danych grawimetrycznych wzdłuż linii niwelacji precyzyjnej można określić

$$m_{\Delta c_{1-N}} \cong \pm \eta \sqrt{L_{1-N}} \cdot 10^{-3} \text{ u.g.p.}$$

Oczywiście sieć linii, dla których wyznaczono różnice  $\Delta c$ , podlegać będzie wyrównaniu przy uwzględnieniu warunku, że w zamkniętym poligonie

$$\sum_A^A \Delta c = 0.$$

Przyspieszenia siły ciężkości stosowane do obliczeń wartości geopotencjalnych wyrażone są w systemie poczdamskim [13]. Zwróćmy jednak uwagę na fakt przewidywanej korekcji wyjściowej wartości  $g$  w Poczdamie o około  $-13$  mgal. Korekcja ta spowodowałaby zmianę o charakterze systematycznym liczbowych wartości  $c$  w jednostkach u.g.p.

Wpływ ten dla linii rozciągającej się w Polsce np. od obszarów górskich do obszarów równinnych, tj. dla  $(H_N - H_1) \cong 900$  m wyniosłby około  $-12 \times 10^{-3}$  u.g.p. (co odpowiada około  $-1,2 \text{ cm} \cdot 0,98 \text{ Kgal}$ ).

Obliczenie różnicy wartości geopotencjalnej  $\Delta c$  dla całej linii 1-N proponuje się praktycznie przeprowadzić zgodnie ze schematem podanym w tabelicy 1.

Tabela podaje przykład, gdy przyspieszenia siły ciężkości  $g_i$  określane są przy wykorzystaniu map anomalii grawimetrycznych. W przypadku

Tablica 1  
 $g_0 = 0,981200 \text{ Kgal}$

Nr pkt	$\Delta h$ m	$H_{pom}$ m	$\varphi$	$An$ mgal	$\gamma_0$ mgal	Red. K.H mgal	$g_i$ mgal	$\delta g_{i,i+1}$ mgal	$\Delta h \cdot \delta g$ $10^{-6}(\text{m mgal})$	$\Delta c$ u. g. p.	Uwagi
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
34	10,27550 0,13187	13,15142	54°10'15''	+27,5	981000 432,7	4,1	981000 456,1	256,3 257,5	2634 34		
35		23,42692	12'01''	+28,7	435,0	7,2	456,5				
36		23,55879	12'30''	+30,1	435,7	7,3	458,5				
	112,37551	112,37551							26432	110,28928	

$$g_0 \cdot (H_N - H_1) = 110,262850$$

Uwaga: a) przy obliczaniu  $\Delta h \cdot \delta g$  należy przyjmować  $\Delta h$  do 0,001 m a wartości  $\delta g$  do 0,1 mgal;

b) przy wyznaczaniu  $g_0 \cdot (H_N - H_1)$  należy przyjmować różnicę  $(H_N - H_1)$  do 0,00001 m, tj. według danych z katalogu niwelacyjnego.

posiadania danych  $g_i$  z bezpośrednich pomiarów grawimetrycznych pod znakami wysokościowymi obliczanej linii, rubryki 5, 6, 7 tabeli 1 są zbędne.

Dla poszczególnego przęsła na linii wyznaczane są iloczyny  $\Delta h \cdot \delta g$  i następnie wyznacza się ich sumę dla całej linii. Natomiast dla całej linii oblicza się  $g_o \cdot (H_N - H_1)$ , przy czym przyjmuje się wysokości pomierzone  $H$ . Różnica  $\Delta c_{1-N}$  określana jest w jednostkach u.g.p. na podstawie wzoru

$$\Delta c_{1-N} = \left[ g_o \cdot (H_N - H_1) + \sum_1^N \frac{\Delta h \cdot \delta g}{10^6} \right] \text{u.g.p.}$$

Ostateczny wynik obliczenia podawany jest do  $1 \cdot 10^{-5}$  u.g.p. Iloczyn  $\delta g \cdot \Delta h$  dogodnie jest natomiast wyznaczać do  $1 \cdot 10^{-6}$  u.g.p. (np.  $\Delta h = 20,000$  m,  $\delta g = 150,0$  mgal, wtedy  $\Delta h \cdot \delta g = 3000$  m mgal =  $3000 \cdot 10^{-6}$  u.g.p.).

Wartości geopotencjalne mogą mieć w warunkach polskich zastosowanie praktyczne przy nawiązaniach niwelacyjnych pomiędzy zerami łąk wodowskazowych stacji mareograficznych na wybrzeżu Bałtyku. Jeżeli na dwóch stacjach mareograficznych średni poziom morza, uzyskany z wieloletnich obserwacji, wynosi  $M_1$  i  $M_2$  to obliczając różnice wartości geopotencjalnej wzdłuż linii niwelacyjnej precyzyjnej łączącej te stacje mareograficzne otrzymamy warunek

$$\sum_{M_1}^{M_2} \Delta c = 0.$$

Wodowskazy i mareografy na polskim wybrzeżu Bałtyku są powiązane liniami niwelacji precyzyjnej, dla których celowe jest wyznaczenie różnic  $\Delta c$ .

Ze względu na równinny charakter terenu przez które przechodzą linie niwelacji precyzyjnej w tym obszarze nadmorskim, do obliczeń różnic wartości geopotencjalnej mogą być wykorzystane istniejące mapy anomalii grawimetrycznej [3], przy zastosowaniu praktycznych uwag podanych w niniejszej pracy.

Należy zwrócić też uwagę na praktyczne znaczenie łącznego obliczenia wartości geopotencjalnych dużych sieci międzynarodowych.

Obliczenia sieci w wartościach geopotencjalnych są niezależne od systemów wysokości w jakich opracowano sieci niwelacyjne poszczególnych obszarów lub krajów i dlatego mają duże znaczenie naukowo-badawcze.

Pomiary sieci niwelacji precyzyjnej I i II klasy w Polsce oraz posiadane materiały grawimetryczne dają możliwość w miarę potrzeby przeprowadzenia z wystarczającą praktycznie dokładnością obliczeń wartości geopotencjalnych dla wszystkich linii należących do tych sieci.

## LITERATURA

- [1] *Baeschlin C.*: Nivellement et pesanteur. Rapport spécial. A.I.G. Assemblée générale Toronto, 1957.
- [2] *Bodemüller H.*: Beitrag zur Schwerekorrektion geometrischer Nivellements. Deutsche Geod. Komm., Reihe A, Nr 26, Monachium 1957.
- [3] *Bokun J.*: Przygotowanie i opracowanie materiałów grawimetrycznych dla potrzeb polskiej sieci astronomiczno-geodezyjnej i sieci niwelacji precyzyjnej I klasy. Prace IGiK t. VI, nr 1(13), 1958.
- [4] *Bokun J.*: Analiza i wnioski wynikające z wykorzystania materiałów grawimetrycznych przy opracowaniu geodezyjnych pomiarów podstawowych w Polsce. Prace IGiK, t. VIII, nr 1(17), 1961.
- [5] *Jeremiejew W. F.*: Teoria ortometriczeskich, dinamiczeskich i normalnych wysot. Trudy CNIIGAiK, wyp. 86, Moskwa, 1951.
- [6] *Kamela Cz.*: Geodezja dynamiczna. Warszawa, 1953.
- [7] *Ramsayer K.*: Schwerereduktion des Badisch-Württembergischen Haupthöhennetzes. Deutsche Geod. Komm., Reihe A, Nr 22, Monachium, 1957.
- [8] *Ramsayer K.*: Genauigkeitsuntersuchungen der Schwerereduktion von Nivellements. Deutsche Geod. Komm., Reihe A, Nr 31, Monachium, 1959.
- [9] *Simonsen O.*: Report from the International Commission for European levelling for the period September 1957—July 1960. IUGG, Helsinki, 1960.
- [10] *Vignal J., Simonsen O.*: Identité des corrections de pesanteur appliquées aux altitudes dans les pays de l'Europe de l'Est et en France. Kopenhaga 1962.
- [11] *Comptes rendus d'Ensemble de la Xe Assemblée Générale (Rome; Septembre 1954).* Bull. géodésique, Nr 35, 1955.
- [12] *Compte-rendus d'Ensemble de la XIe Assemblée Générale Toronto Septembre 1957.* Bull. géodésique, Nr 47, 1958.
- [13] *Le réseau Européen unifié de nivellement. Symposium de Florence (Mai 1955).* Bull. géodésique, Nr 45, 1957.
- [14] *Rapport sur les travaux géodésiques en Pologne exécutés de 1945 à 1957* presente a XI Assemblée Général de UGGI. Warszawa, 1957.

*Rękopis złożono w Redakcji w marcu 1963 r.*

ЕЖИ БОКУН

## ЗАМЕЧАНИЯ К ВЫЧИСЛЕНИЮ ГЕОПОТЕНЦИАЛЬНЫХ ВЕЛИЧИН

### Резюме

Среди проблем, связанных с системами высоты, большое значение имеет вопрос определения геопотенциальных величин, которые были сформулированы и приняты Международным геодезическим обществом ([13], [12]).

Для вычисления разности геопотенциальных величин на основании практической формулы  $\Delta C_{A-B} = \sum_B^A g_{i,i+1} \cdot \Delta h_{i,i+1}$  надо знать для отрезков  $i, i+1$  непосредственный результат нивелировки этого отрезка  $\Delta h_{i,i+1}$ , а также среднюю величину силы тяжести  $g_{i,i+1}$  этого отрезка на физической поверхности земли. В районе равнинном и предгорья, в качестве элементарного отрезка  $i, i+1$ , можно принять отрезок между соседними высотными знаками нивелирной линии; что же касается горных районов, то там может появиться необходимость разделить нивелирный отрезок на два или более элементарных отрезков.

Определение  $\Delta C_{1-N}$  для всей нивелирной линии предлагается проводить на основании формулы (3).

Определение величины  $g_{i,i+1}$  может быть проведено:

- а) на основании полученных из непосредственного измерения величин ускорения силы тяжести в нивелирной точке  $i$ , а также в точке  $i+1$ , вычисляя

$$g_{i,i+1} = \frac{1}{2}(g_i + g_{i+1});$$

- б) на основании определения для точки  $i$  и  $i+1$  аномалии по гравиметрической карте и определяя затем  $g_i$  и  $g_{i+1}$  по формуле (4).

В результате анализа возможной ошибки предполагаемую среднюю ошибку определения  $\Delta C$  можно представить формулой (7).

Предполагаемую схему вычислений иллюстрирует таблица 1.

Геопотенциальные величины могут иметь в польских условиях практическое применение при нивелирной увязке между нулями футштоков мареографических станций. Для определения  $g_{i,i+1}$  в этом случае вполне достаточно будет пользоваться картами гравиметрических аномалий ([3], [4]).

Обращается также внимание на практическое значение геопотенциальных величин для совместной разработки больших международных сетей.

## REMARKS CONCERNING THE COMPUTATIONS OF GEOPOTENTIAL NUMBERS

### Summary

The determination of geopotential numbers is of great importance with regard to the problems concerning the systems of heights. The definition of these numbers was accepted by the International Association of Geodesy ([13], [12]).

For the computation of the differences of geopotential numbers, according to the empiric formula  $\Delta c_{A-B} = \sum_A^B (g_{i,i+1} \Delta h_{i,i+1})$ , one has to know for the elementary sections  $i, i+1$  the result of levelling  $\Delta h_{i,i+1}$  and the mean value of the acceleration of gravity  $g_{i,i+1}$  for this section on the physical surface of the Earth.

In the plain and hilly regions one may adopt the section between the neighbouring height marks of the levelling line as the elementary section  $i, i+1$ ; in a mountainous region, however, it may be necessary to divide the section of levelling in two or more elementary sections.

For the whole line of levelling between the points 1 and  $N$  one proposes to determine  $\Delta c_{1-N}$  according to the formula (3).

The determination of the value of  $g_{i,i+1}$  may be done as follows:

a) from the values of the acceleration of gravity, measured directly on the levelling points  $i$  and  $i+1$  and computing  $g_{i,i+1} =$

$$= \frac{1}{2} (g_i + g_{i+1}), \text{ or}$$

b) from the anomalies on the points  $i$  and  $i+1$ , determined from the gravimetric map, computing further  $g_i$  and  $g_{i+1}$  according to the formula (4).

The expected mean square error of determination of  $\Delta c$  may be expressed by the formula (7).

The scheme of computations is given in the table 1.

The geopotential numbers may be of practical use in our country in the connections by levelling of null-points of the water-level rods of the mareographs. In this case the use of the map of gravimetric anomalies for the determination of  $g_{i,i+1}$  will be completely sufficient ([3], [4]).

The attention is given to the practical importance of the geopotential numbers by common elaboration of the great international nets.