

TADEUSZ WYRZYKOWSKI

551.241 : 525.36

Sposoby geodezyjnego wyznaczania współczesnych ruchów pionowych skorupy ziemskiej *)

1. Wstęp.

Geodezyjna metoda wyznaczania współczesnych ruchów pionowych skorupy ziemskiej, przez porównanie wyników kolejnych pomiarów niwelacji precyzyjnej, jest metodą pozwalającą na określenie wielkości pionowego przesunięcia punktu w interwale czasu między pomiarami. W wyniku podzielenia wielkości stwierdzonego przesunięcia przez wielkość interwału czasu otrzymujemy przeciętną (średnią) prędkość ruchu punktu w danym interwale czasu.

Z dotychczas zebranego materiału powtarzanych niwelacji, a także z porównania wyników uzyskanych metodą geodezyjną i innymi metodami, można wyciągnąć wniosek, że przy dostatecznie długim interwale czasu (ΔT), rzędu dwudziestu—trzydziestu lat, wyznaczona metodą geodezyjną średnia prędkość ruchu jest — w przeważającej ilości wypadków — wielkością reprezentatywną dla współczesnych ruchów skorupy ziemskiej na danym obszarze, na skutek znacznego wyeliminowania wpływu krótkookresowych wahań tych ruchów, a także przez zmniejszenie wpływu błędów pomiaru niwelacji na wyniki wyznaczenia.

Sposoby wykorzystania powtarzanych pomiarów niwelacyjnych do wyznaczenia współczesnych pionowych ruchów skorupy ziemskiej na dużych obszarach są różne i wynikają między innymi z jakości posiadanego materiału powtórnych niwelacji, z założonej dokładności wyznaczenia ruchów, a także z możliwości przyjęcia ogólnych założeń co do charakteru ruchów i wykorzystania ich w toku opracowania rachunkowego.

*) Jest to, z małymi uzupełnieniami, treść komunikatu pt. "The methods of geodetic determination of the recent vertical movements of the Earth's crust", przedstawionego na I Międzynarodowym Sympozjum Współczesnych Ruchów Skorupy Ziemskiej (Lipsk, 21—26 maja 1962 r.)

Poniżej omówimy pokrótce te sposoby, ich zalety i wady, charakteryzując jednocześnie zakres ich stosowania.

2. Wyznaczenie ruchów pionowych przez porównanie wysokości punktów wyznaczonych z niezależnych wyrównań dwu sieci niwelacji precyzyjnej

Sposób ten polega na wykorzystaniu, dla wyznaczenia pionowych ruchów skorupy ziemskiej, porównań wysokości tych samych punktów wyznaczonych z niezależnego wyrównania dwu nakładających się na siebie sieci niwelacyjnych, w których wysokości punktów obliczone zostały w tych samych systemach wysokości i odniesione zostały do tego samego poziomu odniesienia.

Prędkość ruchu dowolnego wspólnego punktu (n) dwu sieci w stosunku do poziomu odniesienia niwelacji, przyjętego za niezmienny w okresie między pomiarami, będzie się wyrażała jako:

$$V'_n = \frac{H''_n - H'_n}{T'' - T'} = \frac{\Delta H_n}{\Delta T_{sr}}, \quad (1)$$

gdzie:

ΔH_n — różnica między wysokościami n -tego punktu, wyznaczonymi z obu sieci,

ΔT_{sr} — średnia wartość interwału czasu między pomiarami porównywanych sieci.

W zależności od tego czy przyjmiemy dla punktu odniesienia wyznaczanych ruchów prędkość V_0 równą zero, czy też wyznaczymy ją w odniesieniu do średniego poziomu morza, otrzymamy dla wszystkich punktów prędkości względne (V') lub bezwzględne (V).

Jeśli poziom (punkt) odniesienia ruchów skorupy ziemskiej różni się od poziomu (punktu) odniesienia niwelacji, otrzymamy następującą zależność:

$$V_n = V_0 + V'_n \quad (2)$$

Średni błąd określenia prędkości względnej ruchów pionowych można wyrazić przybliżonym wzorem:

$$m_{V'_n} = \pm \frac{1}{\Delta T_{sr}} \cdot \sqrt{V'^2 \cdot m_{\Delta T}^2 + m_{\Delta H_n}^2}, \quad (3)$$

gdzie:

V' — przeciętna wielkość prędkości ruchów skorupy ziemskiej między punktem odniesienia niwelacji i danym punktem,

$m_{\Delta T}$ — średnia wartość różnic między faktycznymi interwałami czasu (ΔT_i), oddzielającymi powtarzane pomiary poszczególnych linii, a wyznaczonym interwałem średnim (ΔT_{sr}), traktowana jako średni błąd ΔT_i ,

$m_{\Delta H_n}$ — średni błąd wyznaczenia różnicy wysokości n -tego punktu.

Ze wzoru tego wynika, że stosunkowo wysoką dokładność wyznaczenia prędkości ruchów można uzyskać przy odpowiednio długim interwale czasu między powtarzanymi pomiarami (duża wartość ΔT_{sr}) oraz przy krótkich interwałach czasu, w których wykonane zostały pomiary obu porównywanych sieci niwelacji (mała wartość $m_{\Delta T}$).

Zalety sposobu porównania wyrównanych wartości wysokości są następujące:

a) W wypadku gdy linie powtarzanej niwelacji nie tworzą sieci zamkniętych poligonów — a więc kiedy zastosowanie innego geodezyjnego sposobu wyznaczania ruchów jest niemożliwe — sposób ten pozwala jeszcze na uzyskanie w pewnym sensie jednolitego wyznaczenia, odniesionego do wspólnego poziomu odniesienia [4], [5].

b) Przez operowanie wyrównanymi wartościami wysokości, wykorzystuje warunki nadliczbowe obu sieci niwelacyjnych.

c) Możliwy jest jeszcze do zastosowania w wypadku gdy do wykorzystania dostępne są jedynie materiały katalogowe (wyrównane wysokości punktów), bez danych pomiarowych.

d) Bazując na materiale uzyskanym z uprzednio wykonanych wyrównań sieci niwelacyjnych, sposób ten jest mało pracochłonny.

Słabą stroną tego sposobu wyznaczania ruchów jest:

a) Nie eliminowanie z wyników wyznaczenia szkodliwego wpływu ruchu punktów, w czasie pomiaru sieci. Wpływ ten wyraża się poprzez wprowadzenie systematycznych błędów do wyników wyrównania [7], [8].

b) Wprowadzenie dodatkowego źródła błędu wyznaczenia ruchów na skutek operowania średnim interwałem czasu (ΔT_{sr}).

c) Niepewność oceny błędu wyznaczenia ΔH , z uwagi na to, że przewyższenia w każdej z sieci wyrównane zostały przy dwu nie powiązanych z sobą warunkach $[p'v'v'] = \min.$ i $[p''v''v''] = \min.$

Dla zmniejszenia wpływu czynników wymienionych w p. a) i b) stosowana może być metoda kolejnych przybliżeń, która jednak wymaga posiadania materiałów pomiarowych obu porównywanych sieci [2]. Polega ona na wykorzystaniu, wyznaczonych z pierwszego porównania wysokości, przybliżonych prędkości ruchu punktów węzłowych obu sieci dla redukcji przewyższeń poszczególnych linii tych sieci do odpowiednio wybranych epok [7], [8], różnych dla obu sieci. Tak zredukowane materiały obu sieci poddaje się ponownym wyrównaniom, w wyniku któ-

rych wyznaczone wysokości punktów są podstawą dla określenia drugiego przybliżenia wyznaczanych prędkości ruchów skorupy ziemskiej.

Porównanie wysokości wspólnych punktów, wyznaczonych z odrębnych wyrównań dwu pomiarów sieci, jako sposób wyznaczania współczesnych ruchów skorupy ziemskiej, jest — szczególnie w swej wersji pierwotnej, bez kolejnych przybliżeń — sposobem najmniej dokładnym ze wszystkich tu przedstawionych. Stosowany być powinien w przypadku wyznaczeń o charakterze przybliżonym, bądź w przypadku gdy inne sposoby nie mogą być wykorzystane.

3. Wyznaczenie ruchów pionowych przez wyrównanie różnic przewyższeń wyznaczonych z dwu pomiarów sieci niwelacji precyzyjnej lub przez łączne wyrównanie przewyższeń wyznaczonych z dwu pomiarów sieci

W odróżnieniu od poprzedniego, sposób ten wymaga aby linie powtórnej niwelacji tworzyły sieć poligonów, a więc stosowany może być albo w wypadku prawie całkowitego pokrywania się dwu różnych sieci, albo w wypadku specjalnej sieci badawczej, której pomiary powtarzane są okresowo.

Mogą tu mieć zastosowanie dwie równoważne pod względem teoretycznym drogi postępowania:

a) poddanie wspólnemu wyrównaniu pomierzonych przewyższeń wyznaczonych z dwu pomiarów sieci, przy założeniu warunku $[p'v'v'] + [p''v''v''] = \min$.

b) poddanie wyrównaniu różnic pomierzonych przewyższeń wyznaczonych z dwu pomiarów sieci, przy założeniu warunku $[p'v'v'] = \min$, gdzie v jest poprawką różnicy pomierzonych przewyższeń.

Obie drogi prowadzą do wyznaczenia tych samych wartości niewiadomych, a więc przewyższenia (h_i'' , h_i') wyrównane zgodnie z warunkiem $[p'v'v'] + [p''v''v''] = \min$. będą spełniały wraz z różnicami przewyższeń (Δh_i), wyrównanymi zgodnie z warunkiem $[p'v'v'] = \min$, zależność: $h_i'' - h_i' = \Delta h_i$. Charakterystyka dokładności wyznaczonych niewiadomych też będzie w obu wypadkach taka sama [3].

W przypadku dużych sieci, wygodniejsze jest operowanie różnicami pomierzonych przewyższeń, przez co uzyskujemy mniejszą ilość niewiadomych i równań normalnych.

Omawiany tu sposób wyznaczenia pionowych przesunięć jest z punktu widzenia rachunku wyrównawczego poprawniejszy od podanego w rozdz. 2 opracowania. Jak wykazano w publikacji [3] (§ 44 — opracowany przez J. Gaździckiego), przesunięcia pionowe punktów wyznaczone z dwu oddzielnych wyrównań dwu pomiarów sieci niwelacyjnej oraz z jednego wspólnego ich wyrównania, będą sobie równe jedynie

w wypadku zachowania proporcjonalności wag obu pomiarów sieci. Natomiast charakterystyka dokładności wyznaczenia przesunięć będzie, w obu sposobach, w każdym wypadku różna.

Biorąc pod uwagę długości interwałów czasu, w jakich dokonane zostały każde z dwu pomiarów sieci, może zajść konieczność odrzucenia założenia stałości położenia mierzonych punktów w tych interwałach czasu. Jeśli obliczenie zmian wysokości punktów, na drodze zsumowania wyrównanych różnic przewyższeń, a następnie wyznaczenie prędkości wzorem (1), wykaże, że zmiany przewyższeń w okresie pomiaru sieci były znaczne i że wielkości redukcji do momentu średniego każdego pomiaru sieci są rzędu błędów przypadkowych tego pomiaru, należy wtedy takie redukcje wprowadzić.

Wprowadzenie redukcji do przewyższeń linii lub do warunków poligonalnych [7], [8] pozwoli na powtórzenie łącznego wyrównania i obliczenie drugiego przybliżenia wielkości pionowych przesunięć punktów, a w konsekwencji i prędkości ruchów. A więc tok postępowania będzie w tym wypadku analogiczny do podanego w końcu rozdz. 2.

*

Oba wymienione dotychczas sposoby (rozdz. 2 i 3) wykorzystywały do wyznaczenia pionowych ruchów skorupy ziemskiej, bądź oddzielne wyrównania dwu pomiarów sieci, bądź wyrównanie wspólne obu pomiarów.

Dla ułożenia równań błędu, przy metodzie spostrzeżeń pośrednich, korzystano z podstawowej zależności między prawdziwymi wysokościami punktów i przewyższeniami:

$$\begin{aligned} \text{z pierwszego pomiaru: } H'_{k_i} - H'_{p_i} &= h'_i, \\ \text{z drugiego pomiaru: } H''_{k_i} - H''_{p_i} &= h''_i, \end{aligned} \quad (4)$$

lub dla różnic:

$$(H''_{k_i} - H'_{k_i}) - (H''_{p_i} - H'_{p_i}) = h''_i - h'_i = \Delta h_i. \quad (4a)$$

Dla ułożenia równań warunkowych, przy metodzie spostrzeżeń warunkowych, korzystano z warunku na sumę przewyższeń w zamkniętym poligonie:

$$\begin{aligned} \text{z pierwszego pomiaru: } h'_1 + h'_2 + h'_3 + \dots + h'_n &= 0, \\ \text{z drugiego pomiaru: } h''_1 + h''_2 + h''_3 + \dots + h''_n &= 0, \end{aligned} \quad (5)$$

lub dla różnic:

$$(h''_1 - h'_1) + (h''_2 - h'_2) + (h''_3 - h'_3) + \dots + (h''_n - h'_n) = 0. \quad (5a)$$

Przy założeniu istnienia systematycznych ruchów skorupy ziemskiej, nieścisłość takiego postępowania polega:

a) na przyjęciu za jedną niewiadomą rzędną i -tego punktu węzłowego (H_i), wchodzącą do równań różnych linii, wynikających z pomiarów

dokonanych w różnym czasie, podczas jednego pomiaru sieci (pomiaru różnych linii o wspólnym punkcie węzłowym). — Ściśle biorąc, rzędna i -tego punktu węzłowego powinna być dla każdej linii traktowana jako inna niewiadoma.

b) na nie zachowaniu przez przewyższenia w zamkniętym poligonie, w którym poszczególne linie mierzone były w różnym czasie, warunku wyrażonego wzorem (5) i (5a). — Na skutek systematycznych ruchów skorupy ziemskiej powstaje bowiem teoretyczna wielkość niezamknięcia poligonu, omówiona szerzej w publikacjach [7] i [8].

Z powyższego wynikała celowość obliczania wielkości pionowych przesunięć punktów kolejnymi przybliżeniami, redukując pomiary poszczególnych linii do średniego momentu każdego z pomiarów sieci. Istnieje jednak inny sposób (rozdz. 4), pozwalający na uniknięcie tej niewygodnej drogi postępowania.

4. Wyznaczenie prędkości ruchów pionowych przez wprowadzenie do wyrównania różnic przewyższeń, wyznaczonych z dwu pomiarów sieci niwelacyjnej, dodatkowego związku $\Delta h = \Delta T \cdot V$

Jak wspomnieliśmy, poprzednie sposoby wyznaczania współczesnych ruchów skorupy ziemskiej, na skutek istnienia tych ruchów w okresie pomiarów sieci, były nieściśle, a wyznaczane pionowe przesunięcia punktów nie można było odnieść do ściśle określonego interwału czasu. Szczególnie jaskrawo występuje to w wypadku gdy interwały czasu, między powtarzanymi pomiarami poszczególnych linii sieci, są zdecydowanie różne.

Wobec tego, że przy wyznaczaniu prędkości współczesnych pionowych ruchów skorupy ziemskiej, metodą geodezyjną, z konieczności zakłada się stałą prędkość tego ruchu w określonym interwale czasu, możliwe więc jest skorzystanie z tego założenia już przy układaniu warunków do wyrównania sieci.

A. Metoda spostrzeżeń pośrednich

Jeśli wyjdziemy z podanego uprzednio — dla dwukrotnie pomierzonej linii niwelacyjnej — równania (4a) i napiszemy je w nieco zmienionej formie:

$$\Delta H_{k_i} - \Delta H_{p_i} = \Delta h_i, \quad (6)$$

wtedy możemy — znając interwał czasu między pomiarami (ΔT_i) i korzystając z zależności $\Delta h = \Delta T \cdot \Delta V$ oraz $\Delta H = \Delta T \cdot V$ — napisać:

$$\Delta T_i \cdot V_{k_i} - \Delta T_i \cdot V_{p_i} = \Delta h_i, \quad (7)$$

gdzie V_{k_i} i V_{p_i} są prędkościami ruchu punktu końcowego i początkowego i -tej linii niwelacyjnej.

Dzieląc obie strony równania (7) przez ΔT_i , otrzymamy równanie przyrostu prędkości między końcowymi punktami linii niwelacyjnej:

$$V_{k_i} - V_{p_i} = \frac{\Delta h_i}{\Delta T_i} = \Delta V_i. \quad (8)$$

Zależności wyrażone wzorami (7) i (8) są odmienne od tych, z których korzysta się normalnie dla ułożenia równań błędów przy wyrównaniu sieci niwelacyjnej. Z tego też względu podamy formę równań błędów, wynikających z równań (7) i (8):

$$\Delta T_i \cdot dV_{k_i} - \Delta T_i \cdot dV_{p_i} + \Delta T_i (V_{k_i}^0 - V_{p_i}^0) - \Delta h_{i_{obs.}} = v_{\Delta h_i}, \quad (7a)$$

$$dV_{k_i} - dV_{p_i} + (V_{k_i}^0 - V_{p_i}^0) - \frac{\Delta h_{i_{obs.}}}{\Delta T_i} = v_{\Delta V_i}, \quad (8a)$$

gdzie:

$V_{k_i}^0, V_{p_i}^0$ — przybliżone wartości prędkości pionowego ruchu punktu końcowego i początkowego i -tej linii niwelacyjnej,

dV_{k_i}, dV_{p_i} — poszukiwane poprawki do przybliżonych prędkości punktu końcowego i początkowego linii,

$v_{\Delta h_i}$ — poprawka do obserwowanej różnicy przewyższeń i -tej linii,

$v_{\Delta V_i}$ — poprawka do przyrostu prędkości między końcowymi punktami linii, wyznaczonego jako: $\frac{\Delta h_{i_{obs.}}}{\Delta T_i}$.

Równaniom wynikającym z obserwacji dokonanych w sieci powtarzanej niwelacji, przypisujemy następujące wagi:

$$\text{dla równań błędu typu (7a): } p_i = \frac{K}{m_{\Delta h_i}^2}, \quad (9)$$

dla równań błędu typu (8a):

$$p'_i = \frac{K}{m_{\Delta V_i}^2} = \frac{K \cdot \Delta T_i^2}{m_{\Delta h_i}^2}. \quad (10)$$

W wyniku zastosowania wag, układ równań normalnych, uzyskany z równań błędów w formie (7a) lub (8a), będzie identyczny. Z tego też względu o użyciu którejś z tych form może decydować jedynie wygoda rachunku.

Po rozwiązaniu układu równań normalnych i obliczeniu szukanych wartości dV_i , możemy wyznaczyć średni błąd typowego spostrzeżenia jako:

$$m_0 = \pm \sqrt{\frac{[p \cdot v_{\Delta h}^2]}{n - k}} = \pm \sqrt{\frac{[p' \cdot v_{\Delta V}^2]}{n - k}}, \quad (11)$$

gdzie $n - k$ — ilość spostrzeżeń nadliczbowych, a następnie — średnie błędy poszczególnych niewiadomych.

B. Metoda spostrzeżeń warunkowych

Jak przy metodzie spostrzeżeń pośrednich (punkt A), korzystamy z założenia stałości prędkości ruchu każdego z punktów, nie robiąc jednak żadnych założeń co do znaku i wielkości tego ruchu.

W tym przypadku dla zamkniętego poligonu słuszniejsze od równania (5a) staje się równanie na sumę prawdziwych przyrostów prędkości:

$$\Delta V_1 + \Delta V_2 + \Delta V_3 + \dots + \Delta V_n = 0 \quad (12)$$

czyli:

$$\frac{\Delta h_1}{\Delta T_1} + \frac{\Delta h_2}{\Delta T_2} + \frac{\Delta h_3}{\Delta T_3} + \dots + \frac{\Delta h_n}{\Delta T_n} = 0, \quad (12a)$$

gdzie:

ΔV_i — prawdziwa wartość przyrostu prędkości ruchu pionowego między końcowymi punktami i -tej linii poligonu,

Δh_i — prawdziwa wartość zmiany przewyższenia między końcowymi punktami i -tej linii, w interwale czasu między dwoma pomiarami (ΔT_i).

I znów, analogicznie jak poprzednio w metodzie spostrzeżeń pośrednich, można nadać równaniom warunkowym — odnoszącym się do wielkości pomierzonych — dwie formalnie różne postacie:

$$v_{\Delta V_1} + v_{\Delta V_2} + \dots + v_{\Delta V_n} + (\Delta V_1 + \Delta V_2 + \dots + \Delta V_n) = 0 \quad (13)$$

lub:

$$\frac{1}{\Delta T_1} \cdot v_{\Delta h_1} + \frac{1}{\Delta T_2} \cdot v_{\Delta h_2} + \dots + \frac{1}{\Delta T_n} \cdot v_{\Delta h_n} + \left(\frac{\Delta h_1}{\Delta T_1} + \frac{\Delta h_2}{\Delta T_2} + \dots + \frac{\Delta h_n}{\Delta T_n} \right) = 0 \quad (13a)$$

gdzie:

$\Delta V_i = \frac{\Delta h_i}{\Delta T_i}$ — (wartości Δh_i i ΔT_i — z obserwacji),

$v_{\Delta V_i}$, $v_{\Delta h_i}$ — poprawki do wartości ΔV_i i Δh_i , wyznaczonych z obserwacji.

Wielkości ΔV_i oraz Δh_i odpowiednio wagujemy, zgodnie z wzorami (10) i (9).

Dalsze postępowanie dla wyznaczenia wyrównanych wartości ΔV_i , a następnie V_i oraz błędu średniego typowego spostrzeżenia, a ewentualnie błędu średniego wielkości V_i po wyrównaniu, nie wymaga omówienia.

Szacując przybliżony błąd wyznaczenia prędkości ruchu punktu sieci tym sposobem, można we wzorze (3) odrzucić pierwszy wyraz podpierwiastkowy.

*

Konsekwencje wynikające z podanego na wstępie tego rozdziału założenia i omówionego dalej postępowania są następujące:

a) Dla wyznaczenia prędkości ruchu punktów sieci niwelacyjnej nie trzeba stosować metody przybliżeń, gdyż otrzymane z pierwszego wyównania wielkości są już ostateczne.

b) Prędkości ruchu punktów zostają wyznaczone ze ściśle określonych interwałów czasu.

c) Sumy zmian przewyższeń w zamkniętym poligonie nie są poddane przymusowi spełnienia niesłusznego dla dużych sieci warunku $\sum \Delta h = 0$ i nie spełniają niesłusznego założenia $H_i = \text{const.}$ dla interwału czasu pomiaru sieci, to znaczy na przykład — założenia identyczności rzędnej punktu węzłowego, wyznaczanego z pomiarów kilku linii, mierzonych w różnym czasie.

d) Wyznaczone poprawki do różnic przewyższeń, spełniające ogólny warunek $[pvv] = \text{min.}$, nie zamykają różnic przewyższeń w poligonach do zera lecz do wielkości różnicy między teoretycznymi wielkościami niezamknięć każdego z poligonów, obliczonymi z dwu porównywanych pomiarów.

A więc, jeśli teoretyczne niezamknięcie poligonu, wynikające z ruchów skorupy ziemskiej w czasie pierwszego (wcześniejszego) pomiaru poligonu oznaczmy jako Δ'_p [7], [8], a teoretyczną wielkość niezamknięcia tego poligonu na skutek tych samych wpływów w czasie drugiego (późniejszego) pomiaru — jako Δ''_p , to teoretyczną wielkością niezamknięcia wyrównanych różnic przewyższeń w poligonie będzie wielkość:

$$\Delta_p = \Delta''_p - \Delta'_p, \quad (14)$$

którą można obliczyć bezpośrednio jako:

$$\Delta_p = \sum_{i=1}^n \Delta V_i \cdot \Delta T_i, \quad (15)$$

gdzie:

ΔV_i — wyrównane wartości przyrostów prędkości między końcowymi punktami i -tej linii niwelacyjnej poligonu,

ΔT_i — interwał czasu między porównywanymi pomiarami i -tej linii,

n — ilość linii w danym poligonie.

Niezależne użycie wzoru (14) i (15) daje możliwość kontroli rachunku *).

*) Wzory dla obliczenia teoretycznego niezamknięcia poligonu, z jednego pomiaru, czyli dla obliczenia Δ'_p i Δ''_p , zostały podane i omówione w publikacji [7] i [8].

Dla każdego poligonu po wyrównaniu zachodzi więc związek:

$$\sum_{i=1}^n \Delta h_i = \Delta p. \quad (16)$$

Sposób opisany w rozdz. 4, spośród wszystkich opisanych tu sposobów, najbardziej nadaje się do wyznaczania współczesnych ruchów skorupy ziemskiej. Był on już do tych celów w praktyce częściowo stosowany (metoda spostrzeżeń warunkowych) [6]. Ogólnie biorąc, może być stosowany zarówno przy porównaniu dwu pokrywających się częściowo sieci niwelacyjnych, jak też przy okresowych pomiarach specjalnie zaprojektowanej sieci badawczej; wszędzie, gdzie mamy prawo odrzucić generalnie możliwość istnienia wyraźnie skokowych zmian wysokości punktu.

5. Nawiązanie do poziomu odniesienia wyznaczanych ruchów skorupy ziemskiej

Jak wspomnieliśmy już poprzednio, pionowe przesunięcia punktów skorupy ziemskiej, a także prędkości tych ruchów mogą być wyznaczone jako względne, odniesione do dowolnie obranego punktu (poziomu odniesienia), lub wyznaczone jako bezwzględne, w odniesieniu do dostatecznie pewnie wyznaczonego średniego poziomu morza.

W pierwszym przypadku obieramy zwykle jeden punkt odniesienia, traktując go jako stały ($V = 0$), w wyniku czego błędy wyznaczonych prędkości względnych mają swe źródło jedynie w błędach pomiarów niwelacyjnych.

W przypadku jednopunktowego nawiązania sieci do punktu, którego pionowa składowa prędkości ruchu ($V_0 = K$) została wyznaczona z wieloletnich obserwacji poziomu morza, wyznaczone bezwzględne wartości ruchów w całej sieci będą obciążone dodatkowo błędem wyznaczenia prędkości ruchu punktu wyjściowego.

Jeśli sieć powtórnej niwelacji zostanie oparta o większą ilość punktów, posiadających wyznaczone prędkości bezwzględne V_0 (repery koło mareografów), wtedy dochodzą dodatkowe warunki matematyczne, które należy włączyć do wyrównania sieci.

W zależności od tego jak dużymi błędami obciążone są wartości V_0 na poszczególnych punktach, postępowanie może być rozmaite. W przypadku małych błędów — w porównaniu z błędami pomiaru sieci — można traktować wartości wyjściowe za bezbłędne. W przeciwnym wypadku korzystnie jest wartości wyjściowe V_0 traktować jako wielkości obserwowane o odpowiedniej wadze, dając im możność otrzymania poprawek z wyrównania [1].

LITERATURA

- [1] *Hausbrandt S.*: „Analiza porównawcza dokładności wielkotrójkątowych i małotrójkątowych sieci triangulacyjnych nawiązana do prac geodezyjnych w Polsce” (Rozdz. XII), *Prace Inst. Geod. i Kart.*, t. III, Nr 1 (5), Warszawa 1955.
- [2] *Kukkamäki T. J.*: „The land uplift in Finland determined with two levellings as well as with water level observations”, *Bull. géod.* Nr 36, Londyn 1955.
- [3] *Lazzarini T.*: „Geodezyjne pomiary odkształceń i ich zastosowanie w budownictwie”, Warszawa 1961.
- [4] *Niewiarowski J., Wyrzykowski T.*: „Wyznaczenie współczesnych ruchów pionowych skorupy ziemskiej na obszarze Polski przez porównanie wyników powtarzanych niwelacji precyzyjnych”, *Prace Inst. Geod. i Kart.*, t. VIII, Nr 1 (17), Warszawa 1961.
- [5] *Niewiarowski J., Wyrzykowski T.*: „Détermination des mouvements verticaux de l'écorce terrestre sur l'étendue de la Pologne par méthode de répétition des nivellements de precision”, *Bull. Géod.* No 62, Paryż 1961.
- [6] *Sowriemiennyje wiertikalnyje dwiżenija ziemnoj kory na tierritorii zapadnoj połowiny jewropiejskoj czasti SSSR*”, *Trudy CNIIGAiK*, Nr 123, Moskwa 1958.
- [7] *Wyrzykowski T.*: „Wpływ systematycznych pionowych ruchów skorupy ziemskiej na wyniki i wyznaczane błędy niwelacji precyzyjnej”, *Prace Inst. Geod. i Kart.*, t. VII, Nr 2 (16), Warszawa 1960.
- [8] *Wyrzykowski T.*: „Influence des mouvements systematiques verticaux de l'écorce terrestre sur les resultats et la détermination des grandeurs d'erreurs de nivellement de precision”, *Comm. présentée à XII Assemblée UGGI*, Helsinki, Warszawa 1960.

Rękopis złożono w Redakcji w lipcu 1962 r.

ТАДЭУШ ВYЖИКОВСКИ

СПОСОБЫ ГЕОДЕЗИЧЕСКОГО ОПРЕДЕЛЕНИЯ СОВРЕМЕННЫХ ВЕРТИКАЛЬНЫХ ДВИЖЕНИЙ ЗЕМНОЙ КОРЫ *)

Резюме

Современные вертикальные движения земной коры на большом пространстве определяются из сравнения результатов повторяемых измерений точного нивелирования. Существует несколько способов использования материалов нивелирования. Применение такого или другого способа может зависеть между прочим от качества имевшихся данных повторного нивелирования, от требуемой точности определения движений, а также от возможности принятия условия существования систематического характера движений, и использования этого условия в ходе уравнивания сетей повторного нивелирования.

Работа рассматривает различные способы использования нивелирования, их преимущества и недостатки, характеризуя одновременно область их применения.

Первым рассмотрено определение вертикальных движений, сравнивая высоты аналогичных точек, определенных в независимых выравниваниях двух сетей точного нивелирования (гл. 2). Сравниваются высоты вычисленные в идентичных системах высот относительно общего относительного уровня. Преимуществом способа является между прочим то, что в случае когда линии повторного нивелирования не образуют замкнутых сетей полигонов — стало быть когда применение другого геодезического способа определения движений является невозможным — способ этот позволяет получить в некотором отношении однородное определение относительно общего относительного уровня [4], [5].

*) Является это, с небольшими дополнениями, содержанием доклада „The methods of geodetic determination of the recent vertical movements of the Earth's crust” представленного на Международном Симпозиуме Современных Движений Земной Коры (Лейпциг, 21 по 26 мая 1962 г.).

Для повышения точности определения — имея материалы наблюдений обеих сетей — можно применять метод постепенных приближений, редуцируя каждое наблюдение сети к определенной эпохе (введение редуцирования, имея в виду постепенно все лучше определенные движения земной коры) [2], [7], [8].

Другим способом, который дает лучшую характеристику точности, является определение вертикальных движений уравнивая разности превышений определенных из двух измерений сети (гл. 3). Способ этот требует, чтобы линии повторного нивелирования образовали сеть замкнутых полигонов. В этом способе, как и в первом, применять можно постепенные приближения, исходящие из редуцирования измерений сети к некоторой определенной эпохе. Необходимость введения величин редуцирования и количество приближений зависит м. пр. от величины редукции и требуемой точности определения.

При составлении уравнений ошибок в методе косвенных наблюдений, эти два способа (гл. 2 и 3) использовали основные зависимости между высотами точек и превышениями даны в виде уравнений (4) или для разностей — в виде (4а).

При составлении условных уравнений, в методе обусловленных наблюдений, использовано условие суммы превышений в замкнутом полигоне; уравнение (5) или для разностей — (5а).

При условии существования систематических движений земной коры, неточность этих операции заключается в том что:

а) принимается как одну неизвестную ординату i -той узловой точки (H_i), входящую в уравнения разных линий, вытекающих из измерений произведенных в различное время, во время одного измерения сети (измерения разных линий с общей узловой точкой). — Точно рассматривая вопрос мы видим, что ордината i -той узловой точки должна быть для каждой линии собственной неизвестной;

б) превышения в замкнутом полигоне, в котором все линии были измеряемые в различное время, не сохраняют условия выраженного формулой (5) и (5а). — В результате систематических движений земной коры, возникает теоретическая величина невязки замкнутого полигона, рассматриваемая шире в работах [7] и [8].

Имея это в виду возникает целесообразность применения постепенных приближений и введение редукции.

Существует однако другой способ позволяющий избежать этого неудобного пути решения. Это определение скорости вертикальных движений, вводя при уравнивании разностей превышений, определенных из двух измерений сети нивелирования, добавочную зависимость:

$\Delta h = \Delta T \cdot \Delta V$ (гл. 4). Возможность использования этой зависимости следует из условия стабильности скорости движения данной точки в рассматриваемом промежутке времени; это условие принимается из необходимости при каждом геодезическом определении современных движений земной коры.

В способе посредственных наблюдений — вместо как раньше из уравнений в виде (4) или (4a) — исходим из уравнений (7) или (8), приходя к уравнениям ошибок в виде (7a) или (8a).

В этих формулах приняты следующие обозначения:

$V_{k_i}^0, V_{p_i}^0$ — приближенные значения скорости конечной и начальной точек i -той линии нивелирования,

dV_{k_i}, dV_{p_i} — искомые поправки приближенных скоростей конечных точек линии,

$v_{\Delta h_i}$ — поправка в наблюдаемую разность превышений i -той линии,

$v_{\Delta V_i}$ — поправка в приращение скорости между конечными точками линии, определяемое как: $\frac{\Delta h_i}{\Delta T_i}$ (из измерений).

Уравнения ошибок (7a) и (8a) имеют веса определяемые соответственно формулами (9) или (10), что приводит в конечном счете к этим же самым нормальным уравнениям.

В методе условных наблюдений — вместо того как раньше из уравнений (5) или (5a) — исходим из уравнений (12) или (12a), получая условные уравнения в виде (13) или (13a).

Преимуществом этого способа является то, что: а) не нужно здесь применять метода постепенных приближений; б) при условии $V_i = \text{const.}$ — составленные условия являются точными.

Определяемые поправки к разностям превышений исполняют общее условие $[pvv] = \min.$, но не сводят разностей превышений в замкнутых полигонах к нулю, а только к величинам разностей между теоретическими значениями невязки каждого замкнутого полигона, вычисленными из двух сравниваемых измерений; формула (14) или (15) [7], [8].

В последней главе рассматривается привязку определяемых движений земной коры к исходному уровню.

TADEUSZ WYRZYKOWSKI

THE METHODS OF GEODETIC DETERMINATION OF THE RECENT VERTICAL MOVEMENTS OF THE EARTH'S CRUST^{*)}

S u m m a r y

The recent vertical movements of the Earth's crust on great areas are determined with geodetic methods by comparison of results of reiterated precise levelling. There are several methods of use the levelling data. The choice of one of these methods may depend of the quality of data of the second levelling, of the accuracy to be obtained and of the possibility of admission of the thesis, that the movements have the systematic character; such a thesis will be then use in the adjustment of the net of reiterated levelling.

This paper deals with different methods of use the levelling data, their advantages and disadvantages, giving the limitations of their use, as well.

As first the determination of the vertical movements by comparison the heights of identical points, determined from the independent adjustments of the two nets of precise levelling is described (chapter 2.). The heights to be compared were computed in the same systems of heights and referred to the same reference level.

One of the advantages of this method is this, that, if the lines of reiterated levellings do not form the net of loops, that is, when the adoption of any other geodetic method of the determination of movements is impossible, this method will yet enable to obtain the determination, which will be to a certain degree homogenous and referred to the common reference level [4], [5].

Let's suppose we have the field data of the two nets to be compared. To increase the accuracy of determination the movements the method

^{*)} This is a little supplemented paper, presented under the same title on the First International Symposium on the Recent Movements of the Earth's Crust, held in Leipzig, 21.-26. May 1962.

of succeeding approximations can be used; then each levelling of net has to be reduced to the definite epoche (reduction to the still better determined movements of the Earth's crust) [2], [7], [8].

The second method, which gives a better characteristic of the accuracy is based on the determination of the vertical movements by means of adjustment of differences of height differences between the two measurements of the precise levelling net or by the joint adjustment of differences determined from two measurements of a net (chapter 3). For this method the lines of reiterated levellings have to form a net of loops.

In this procedure, like in the first one, the method of succeeding approximations, resulting from the reduction of net measurements to one definite epoche can be used. The fitness of the introduction of reduction and the number of approximations depend on the value of the reduction, on the accuracy of determination to be required and on the other factors.

In both procedures described here (chapters 2. and 3.), when setting the error equations according to the method of indirect observations, one have made use of the basic relations between the heights of points and the differences of heights in the form of equation (4) or, — for the differences — in the form (4a).

To form the conditional equations in the method of conditional observations the condition for the sum of heights differences in a loop was used; the equations in the form (5) or for the differences — in the form (5a).

If we assume the existence of the systematic movements of the Earth's crust, then the inexactness of such a procedure rely on this, that:

a) we adopt as one unknown the height (H_i) of the nodal point (i), which appears in different equations, resulting from the measurements made in different times during one survey of the net (the measurements of different lines having the same nodal point); to be correct — the height of the nodal point (i) has to be treated as a different unknown for each line,

b) the condition expressed by the formulae (5) and (5a) for the height differences in a loop, in which the lines were measured in the different moments of time, will not be fulfilled. As a consequence of the systematic movements of the Earth's crust, appears a theoretic discrepancy in a loop, which is more exactly discussed in the publications [7] and [8].

From these reasons the necessity of the use of succeeding approximations and of making reductions is arised.

There is, however, another method, which enables to avoid this procedure. It is, namely, the determination of the velocity of vertical move-

ments by introducing the additional relation: $\Delta h = \Delta T \cdot \Delta V$ to the adjustment of differences of height differences, determined from the two measurements of a levelling net (chapter 4.). The possibility of use of this relation arises from the assumption, that the velocity of movements of a given points is constant in a given interval of time; such an assumption is necessarily adopted in geodetic determination of the recent movements of the Earth's crust.

In the method of indirect observations — instead of the equations (4) or (4a) — we use the equations (7) or (8), giving to them the form (7a) or (8a).

In these formulas the following notations are adopted:

- $V_{k_i}^0, V_{p_i}^0$ — the approximate values of velocities of the end — and initial point of the i -levelling line,
 dV_{k_i}, dV_{p_i} — the corrections to the approximate values of velocities of the end points of a line,
 $v_{\Delta h_i}$ — the correction to the observed difference of height differences of the i -line,
 $v_{\Delta V_i}$ — the correction to the increase of velocity between the end points of the line, expressed as:

$$\frac{\Delta h_i}{\Delta T_i} \quad (\text{from the observations}).$$

To the equations in the form (7a) and (8a) we give the weights according to the formulas (9) or (10), which leads finally to identical normal equations in both cases.

In the method of the conditioned observations, we start from the equations (12) or (12a) — instead of the former equations (5) or (5a) — and we obtain the condition equations in the form (13) or (13a).

The advantages of this method are the following ones.

a) it is not necessary to use here the method of succeeding approximations,

b) with the assumption $V_i = \text{const.}$ the conditions are absolutely exact.

The corrections of the differences of height differences, obtained from the adjustment, will fulfil the condition $[pvv] = \text{minimum}$, but the sum of the differences of height differences in every loop will not be zero, but it will be equal to the difference between the values of the theoretic discrepancies in the loops, as computed from the two measurements of the net, to be compared: formula (14) or (15) [7], [8].

The last chapter deals with the connection of the determined movements of the Earth's crust to the reference level.