PRACE INSTYTUTU GEODEZJI I KARTOGRAFII
Tom X, Zeszyt 1 (21), 1963

JERZY GAŻDZICKI

526.53 : 519.28

Transformacja Helmerta przy różnej dokładności położenia punktów dostosowania

Transformację Helmerta wykonuje się poprzez zmianę skali, skręt i przesunięcie układu. Istotną cechą tej transformacji, odróżniającą ją od innych transformacji tego typu, jest wyznaczenie współczynników transformacyjnych na podstawie więcej niż 2 punktów dostosowania, przy czym realizuje się warunek metody najmniejszych kwadratów w postaci:

$$[v_x v_x] + [v_y v_y] = min. \tag{1}$$

gdzie v_x i v_y są różnicami pomiędzy współrzędnymi danymi i przetransformowanymi punktów dostosowania.

Cenna koncepcja Helmerta znalazła szerokie zastosowanie w różnych działach geodezji. Jednakże podawane w literaturze wzory, które wyprowadza się w oparciu o warunek (1), są w pewnych przypadkach niesłuszne, a uzyskiwane przy ich użyciu wyniki — wadliwe. W obliczeniach praktycznych niejednokrotnie zachodzi potrzeba stosowania wzorów wynikających z warunku ogólniejszego, uwzględniającego różnice w dokładności położenia poszczególnych punktów dostosowania zarówno w układzie pierwotnym (lokalnym), jak i wtórnym (głównym). Warunek ten podamy nieco dalej, po uprzednim, wyraźniejszym sformułowaniu treści zadania.

Dane są współrzędne n punktów w układzie pierwotnym oraz w układzie wtórnym. Punkty te, zgodnie z przyjętą na ogół terminologią, nazywamy w tym artykule punktami łącznymi. Prócz tego dane są współrzędne N punktów w układzie pierwotnym, które należy przeliczyć na układ wtórny. Współrzędne punktów w obydwóch układach scharakteryzowane są dokładnościowo przez podanie odpowiednich błędów średnich, ewentualnie wag.

Wprowadzimy następujące oznaczenia:

	wsp. dane	wsp. przel.	bł. śr. wsp. danych	wagi wsp. danych
układ pierwotny	x', y'		m'_x, m'_y	p'_x, p'_y
układ wtórny	x'', y''	X'', Y''	m''_x, m''_y	p''_x, p''_y

Pomiędzy współrzędnymi dwóch punktów w układzie pierwotnym:

$$P'_i(x'_i, y'_i), \; P'_k(x'_k, y'_k)$$

i współrzędnymi odpowiednich punktów w układzie wtórnym:

$$P''_i(x''_i, y'_i), \; P''_k(x''_k, y''_k)$$

istnieją następujące łatwe do wyprowadzenia, związki [1]:

$$\begin{aligned} X''_i - X''_k &= -r \sin p\,(y'_i - y'_k) + r \cos p\,(x'_i - x'_k), \\ Y''_i - Y''_k &= r \sin p\,(x'_i - x'_k) + r \cos p\,(y'_i - y'_k). \end{aligned} \qquad (2)$$

w których przez r oznaczono stosunek długości w układzie wtórnym do odpowiedniej długości w układzie pierwotnym, zaś przez p — kąt jaki należy dodać do kąta osiowego odcinka w układzie pierwotnym, aby otrzymać kąt osiowy odpowiedniego odcinka w układzie wtórnym.

Oznaczając $r \cos p$ przez w oraz $r \sin p$ przez u, związki (2) możemy przepisać w następującej postaci:

$$\begin{aligned} X''_i - X''_k &= -u\,(y'_i - y'_k) + w\,(x'_i - x'_k), \\ Y''_i - Y''_k &= u\,(x'_i - x'_k) + w\,(y'_i - y'_k). \end{aligned} \qquad (3)$$

Jak widać, celem przeliczenia przyrostów współrzędnych między dwoma punktami układu pierwotnego na odpowiednie przyrosty układu wtórnego należy uprzednio obliczyć współczynniki u, w. Dla jednoznacznego wyznaczenia tych współczynników wystarczą nam równania (3) napisane dla przyrostów współrzędnych między dwoma punktami, przy czym wartości tych przyrostów muszą być, oczywiście, dane w obydwóch układach.

Rozwiązując układ 2 równań (3) względem niewiadomych u, w i oznaczając przez Δx, Δy przyrosty współrzędnych, otrzymamy:

$$\begin{aligned} u &= \frac{\Delta x' \Delta y'' - \Delta x'' \Delta y'}{\Delta x'^2 + \Delta y'^2}, \\ w &= \frac{\Delta x' \Delta x'' + \Delta y' \Delta y''}{\Delta x'^2 + \Delta y'^2}. \end{aligned} \qquad (4)$$

W przejrzysej i wygodnej rachunkowo symbolice prof. dr. S. Hausbrandta wzory (3) i (4) przedstawiają się jak następuje:

$$(\Delta X'', \Delta Y'') = \begin{vmatrix} \Delta x' & \Delta y' \\ u & w \end{vmatrix}_{1,2} \tag{5}$$

$$(u, w) = \begin{vmatrix} \Delta x' & \Delta y' \\ \Delta x'' & \Delta y'' \end{vmatrix}^{\boxed{1,2}} \tag{6}$$

W pewnych przypadkach wygodnie jest rozważać bezpośrednio transformację współrzędnych, a nie przyrostów współrzędnych. Przeliczenie współrzędnych wykonuje się wówczas na podstawie wzorów (3) przekształconych do postaci:

$$\begin{aligned} X_i'' &= x_0'' - u(y_i' - y_0') + w(x_i' - x_0'), \\ Y_i'' &= y_0'' + u(x_i' - x_0') + w(y_i' - y_0'). \end{aligned} \tag{7}$$

gdzie punkt $P_0'(x_0', y_0')$ oraz odpowiadający mu położeniem w układzie wtórnym punkt $P_0''(x_0'', y_0'')$ są tzw. biegunami transformacji. Współrzędne x_0', y_0' mogą być obrane w sposób zasadniczo dowolny, natomiast współrzędne x_0'', y_0'' należy traktować jako niewiadome pozostające w funkcjonalnej zależności od założonych współrzędnych x_0', y_0'. Dla dwóch punktów łącznych mamy 4 równania (7), z których możemy obliczyć w sposób jednoznaczny 4 niewiadome: x_0'', y_0', u, w. W przypadku, gdy ilość punktów łącznych jest większa od dwóch ($n > 2$) powstaje problem wyrównawczy. Na skutek błędów współrzędnych punktów łącznych otrzymujemy pewne różnice (poprawki) v_x, v_y pomiędzy współrzędnymi obliczonymi przy użyciu określonych współczynników transformacyjnych i współrzędnymi danymi:

$$\begin{aligned} v_{x_i} &= X_i'' - x_i'' = x_0'' - u(y_i' - y_0') + w(x_i' - x_0') - x_i'', \\ v_{y_i} &= Y_i'' - y_i'' = y_0'' + u(x_i' - x_0') + w(y_i' - y_0') - y_i'', \end{aligned} \tag{8}$$

gdzie $i = 1, 2 \ldots n$.

Transformacja Helmerta sprowadza się do wyznaczenia niewiadomych x_0'', y_0'', u, w przy postawieniu warunku (1). Natomiast treścią niniejszego artykułu jest obliczenie tych niewiadomych przy postawieniu warunku ogólniejszego:

$$[p_x v_x v_x] + [p_y v_y v_y] = min. \tag{9}$$

W powyższym warunku przez p_x, p_y oznaczone zostały wagi różnic pomiędzy współrzędnymi obliczonymi i danymi w układzie wtórnym. Biorąc pod uwagę równania (8) oraz fakt, że wspomniane różnice między współrzędnymi wynikają z błędów współrzędnych punktów łącznych —

i to zarówno w układzie pierwotnym, jak i wtórnym — będziemy mogli napisać

$$
\begin{aligned}
m_{x_i}^2 &= u^2 m_{y_i}'^2 + w^2 m_{x_i}'^2 + m_{x_i}''^2 , \\
m_{y_i}^2 &= u^2 m_{x_i}'^2 + w^2 m_{y_i}'^2 + m_{y_i}''^2 ,
\end{aligned} \tag{10}
$$

przy czym, oczywiście

$$
p_{x_i} \approx \frac{1}{m_{x_i}^2}, \quad p_{y_i} \approx \frac{1}{m_{y_i}^2}
$$

Do obliczenia błędów średnich wystarczy brać przybliżone wartości współczynników u, w.

Na podstawie równań poprawek (8) łatwo utworzymy równania normalne:

$$
\begin{aligned}
&1.\ x_0''[p_x] + y_0'' \cdot 0 - u[p_x(y' - y_0')] + w[p_x(x' - x_0')] - [p_x x''] = 0 \\
&2.\ x_0'' \cdot 0 + y_0''[p_y] + u[p_y(x' - x_0')] + w[p_y(y' - y_0')] - [p_y y''] = 0 \\
&3.\ - x_0''[p_x(y' - y_0')] + y_0''[p_y(x' - x_0')] + u[p_x(y' - y_0')^2 + p_y(x' - x_0')^2] + \\
&\qquad + w[p_y(x' - x_0')(y' - y_0') - p_x(x' - x_0')(y' - y_0')] + \\
&\qquad + [p_x(y' - y_0')x'' - p_y(x' - x_0')y''] = 0 \qquad (11) \\
&4.\ x_0''[p_x(x' - x_0')] + y_0''[p_y(y' - y_0')] + u[p_y(x' - x_0')(y' - y_0') - p_x(x' - x_0')(y' - y_0')] + \\
&\qquad + w[p_x(x' - x_0')^2 + p_y(y' - y_0')^2] - [p_x(x' - x_0')x'' + p_y(y' - y_0')^2 y''] = 0
\end{aligned}
$$

Rozwiązując te równania przy pewnych założonych wartościach x_0', y_0', otrzymamy poszukiwane niewiadome x_0'', y_0'', u, w.

Rozwiązanie układu (11) jest stosunkowo uciążliwe. Dla uproszczenia tego układu przyjmiemy, że $m_{x_i} = m_{y_i} = m$, tj. że $p_{x_i} = p_{y_i} = p$. Wydaje się, że tego rodzaju założenie z punktu widzenia obecnych potrzeb praktyki geodezyjnej jest całkowicie dopuszczalne. Prócz tego przyjmiemy, że:

$$
\begin{aligned}
x_0' &= \frac{[px']}{[p]}, \\
y_0' &= \frac{[py']}{[p]}.
\end{aligned} \tag{12}
$$

W efekcie uzyskujemy 4 równania, z których każde zawiera tylko 1 niewiadomą. Oznaczając:

$$
\begin{aligned}
\Delta x_i &= x_i' - x_0', \\
\Delta y_i &= y_i' - y_0',
\end{aligned} \tag{13}
$$

możemy napisać bezpośrednio:

$$
\begin{aligned}
x_0'' &= \frac{[px'']}{[p]}, \quad y_0'' = \frac{[py'']}{[p]}, \\
u &= \frac{[p\,\Delta\,x'y'' - p\,\Delta\,y'x'']}{[p\,\Delta\,x'^2 + p\,\Delta\,y'^2]}, \\
w &= \frac{[p\,\Delta\,x'x'' + p\,\Delta\,y'y'']}{[p\,\Delta\,x'^2 + p\,\Delta\,y'^2]}.
\end{aligned}
\tag{14}
$$

W dwóch ostatnich wzorach zamiast współrzędnych x_i'', y_i'' możemy podstawić różnice $x_i'' - c_x$, $y_i'' - c_y$, gdzie c_x, c_y są dowolnymi stałymi. Wygodne jest dobierać takie wartości c_x, c_y, aby w powyższych różnicach uzyskać jak najmniejszą ilość cyfr znaczących. Ze względu na wpływ błędów zaokrągleń współrzędnych x_0', y_0' najbardziej wskazane jest przyjęcie, że $c_x = x_0''$, a $c_y = y_0''$.

Zajmiemy się z kolei charakterystyką dokładnościową wyników transformacji. Z wzorów (7) widać, że błędy średnie współrzędnych przeliczonych na układ wtórny zależą z jednej strony od błędów średnich funkcji niewiadomych x_0'', y_0'', u, w, zaś z drugiej — od błędów średnich współrzędnych punktu przeliczanego $P_i'(x_i', y_i')$.

Kwadraty błędów średnich funkcji niewiadomych obliczymy według wzoru:

$$m_F^2 = m_0^2\,(\mathbf{f}\,(\mathbf{a}^2)^{-1}\,\mathbf{f}),$$

gdzie: $\mathbf{f}$ — krakowian pochodnych cząstkowych,

$\mathbf{a}^2$ — krakowian współczynników w równaniach normalnych,

zaś

$$m_0^2 = \frac{[p\,(v_x^2 + v_y^2)]}{2n - 4}. \tag{15}$$

Wykonując odpowiednie rachunki nad krakowianami pochodnych cząstkowych

$$\mathbf{f}_{x_i} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ -\Delta\,y_i' \\ \Delta\,x_i' \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{f}_{y_i} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ \Delta\,x_i' \\ \Delta\,y_i' \end{Bmatrix},$$

i krakowianem $\mathbf{a}^2$:

$$\mathbf{a}^2 = \begin{Bmatrix} [p] & & & \\ & [p] & & \\ & & [p\,\Delta\,x'^2 + p\,\Delta\,y'^2] & \\ & & & [p\,\Delta\,x'^2 + p\,\Delta\,y'^2] \end{Bmatrix},$$

otrzymamy następujące wyrażenie, przedstawiające wielkość kwadratu błędu średniego obydwóch interesujących nas funkcji niewiadomych:

$$m_0^2 = \left\{\frac{1}{[p]} + \frac{\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2}{[p\Delta x^2 + p\Delta y^2]}\right\}.$$

Na podstawie wzorów (7) możemy określić wpływ błędów średnich współrzędnych danych x_i', y_i' na błędy średnie współrzędnych przeliczanych. Wpływ ten określają następujące wyrażenia:

$$u^2 m_{y_i}'^2 + w^2 m_{x_i}'^2$$

$$u^2 m_{x_i}'^2 + w^2 m_{y_i}'^2$$

Uwzględniając zarówno błędy średnie funkcji niewiadomych, jak i błędy średnie współrzędnych danych, możemy napisać:

$$\begin{aligned} m_{X_i}''^2 &= u^2 m_{y_i}'^2 + w^2 m_{x_i}'^2 + m_0^2\left\{\frac{1}{[p]} + \frac{\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2}{[p\Delta x^2 + p\Delta y^2]}\right\}, \\ m_{Y_i}^2{}'' &= u^2 m_{x_i}'^2 + w^2 m_{y_i}'^2 + m_0^2\left\{\frac{1}{[p]} + \frac{\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2}{[p\Delta x^2 + p\Delta y^2]}\right\}. \end{aligned} \tag{16}$$

Z postaci tych wzorów widać, że kwadraty błędów średnich współrzędnych przeliczanych zależą od kwadratu odległości pomiędzy punktem $P_i'(x_i', y_i')$ i środkiem ciężkości $P_0'(x_0', y_0')$.

Wskazane jest skontrolowanie rachunku poprawek v_x, v_y przy pomocy wzorów:

$$\begin{aligned} [p\,v_x] &= 0 \\ [p\,v_y] &= 0 \end{aligned} \tag{17}$$

Wzory te wynikają z zależności właściwych dla metody najmniejszych kwadratów.

Kontrole rachunkowe niezbędne są również przy obliczaniu współrzędnych X_i'', Y_i'' wzorami (7). Mogą do tego celu służyć wzory:

$$\begin{aligned} X_i'' &= (x_0'' + u\,y_0' - w\,x_0') - u\,y_i' + w\,x_i' = \overline{x}_0'' - u\,y_i' + w\,x_i', \\ Y_i'' &= (y_0'' - u\,x_0' - w\,y_0') + u\,x_i' + w\,y_i' = \overline{y}_0'' + u\,x_i' + w\,y_i', \end{aligned} \tag{18}$$

otrzymane na drodze prostego przekształcenia wzorów (7). Prostą kontrolę otrzymujemy również przeliczając przyrosty wzorami (5). Rachunek rozpoczynamy i kończymy na biegunie, wobec czego sumy przyrostów w obydwóch układach — pierwotnym i wtórnym — powinny być równe zeru.

W większości przypadków geodezyjnych stosunek długości r jest bliski jedności, a kąt p — niewielki. Wygodnie jest stosować wówczas wzory transformacyjne w nieco innej postaci, zwłaszcza, jeśli z góry dane są różnice między współrzędnymi punktów łącznych w obydwóch układach:

$$l_{x_i} = x_i'' - x_i', \quad l_{y_i} = y_i'' - y_i'. \tag{19}$$

Wzory te podajemy dalej bez dowodów, które są analogiczne do przeprowadzonych już w tym artykule.

Przeliczenie współrzędnych wykonujemy według wzorów:

$$X_i'' = x_i' + a - (y_i' - y_0')\alpha + (x_i' - x_0')\beta, \quad Y_i'' = y_i' + b + (x_i' - x_0')\alpha + (y_i' - y_0')\beta, \tag{20}$$

gdzie:

$$a = x_0'' - x_0' = \frac{[p\,l_x]}{[p]}, \quad b = y_0'' - y_0' = \frac{[p\,l_y]}{[p]}, \tag{21}$$

$$\alpha = u = \frac{[p\,\Delta x'\,l_y - p\,\Delta y'\,l_x]}{[p\,\Delta x'^2 + p\,\Delta y'^2]}, \quad \beta = w - 1 = \frac{[p\,\Delta x'\,l_x + p\,\Delta y'\,l_y]}{[p\,\Delta x'^2 + p\,\Delta y'^2]}. \tag{22}$$

Wagi p_i obliczamy jako odwrotności kwadratów błędów średnich różnic l_{x_i}, l_{y_i}, przy czym zgodnie z wzorami (10) i założeniem upraszczającym $m_{x_i} = m_{y_i} = m_i$, mamy:

$$\frac{1}{p_i} \approx m_i^2 = m_x'^2 + m_x''^2 = m_y'^2 + m_y''^2 \tag{23}$$

Błędy średnie współrzędnych przeliczonych podane są wzorami:

$$m_{X_i''}^2 = m_{x_i}'^2 + m_0^2\left\{\frac{1}{[p]} + \frac{\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2}{[p\,\Delta x^2 + p\,\Delta y^2]}\right\}, \quad m_{Y_i''}^2 = m_{y_i}'^2 + m_0^2\left\{\frac{1}{[p]} + \frac{\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2}{[p\,\Delta x^2 + p\,\Delta y^2]}\right\}. \tag{24}$$

Kontrole rachunku wykonujemy przy użyciu przekształconych wzorów (20):

$$X_i'' = x_i' + (a + y_0'\alpha - x_0'\beta) - y_i'\alpha + x_i'\beta, \quad Y_i'' = y_i' + (b - x_0'\alpha - y_0'\beta) + x_i'\alpha + y_i'\beta, \tag{25}$$

wzorów (17) i ewentualnie przy użyciu podanego poniżej wzoru, umożliwiającego niezależne obliczenie wartości $[p(v_x^2 + v_y^2)]$:

$$[p(v_x^2 + v_y^2)] = [p(l_x^2 + l_y^2)] - [p](a^2 + b^2) - [p(\Delta x^2 + \Delta y^2)](\alpha^2 + \beta^2) \qquad (26)$$

Często się zdarza, że różnice l_{x_i}, l_{y_i} są liczbami wielocyfrowymi, różniącymi się od siebie jedynie cyframi końcowymi. Wygodnie jest wówczas w rachunku powyższymi wzorami zamiast wartościami l_{x_i}, l_{y_i} operować niewielkimi co do bezwzględnej wartości różnicami $d_{x_i} = l_{x_i} - c_x$, $d_{y_i} = l_{y_i} - c_y$, gdzie c_x, c_y są odpowiednio dobranymi stałymi.

Przykład liczbowy. Wyznaczymy współczynniki transformacyjne na podstawie 4 punktów łącznych (punkty 1, 2, 3, 4), po czym przeliczymy współrzędne punktu 5 z układu pierwotnego na wtórny. Do rachunku zastosujemy wzory podane w punkcie 5.

Dane:

Tablica 1

Nr	Układ pierwotny			Układ wtórny		
	x'	y'	$m'_x = m'_y$	x''	y''	$m''_x = m''_y$
1	500,00	400,00	0,03	1500,20	899,90	0,04
2	1300,00	1200,00	0,03	2300,10	1700,10	0,04
3	900,00	2500,00	0,10	1899,80	3000,20	0,05
4	200,00	1700,00	0,10	1200,10	2200,20	0,10
5	800,00	1450,00	0,05			

a) Obliczenie współczynników: a, b, α, β

Tablica 2

Nr	$m^2 = m'^2_x + m''^2_x$	$p = \frac{10^{-2}}{m^2}$	$\Delta x'$	$\Delta y'$	$p\Delta x'$	$p\Delta y'$	$dx = l_x - 1000,00$	$dy = l_y - 500,00$
1	0,0025	4,0	−362,37	−594,62	−1449,48	−2378,48	+0,20	−0,10
2	0,0025	4,0	437,63	205,38	1750,52	821,52	+0,10	+0,10
3	0,0125	0,8	37,63	1505,38	30,10	1204,30	−0,10	+0,20
4	0,0200	0,5	−662,37	705,38	−331,18	352,69	+0,10	+0,20
		9,3			−0,04	+0,03		

$x'_0 = 862,37 \quad y'_0 = 994,62$

$$a = 1000,000 + \frac{[pdx]}{[p]} = 1000,117 \qquad b = 5000,000 + \frac{[pdy]}{[p]} = 500,028$$

$$[p\Delta x'^2 + p\Delta'^2] = 5156\,550$$

$$[p\Delta x'dy - p\Delta y'dx] = 860 \qquad \alpha = 0,000167$$

$$[p\Delta x'dx + p\Delta y'dy] = 477 \qquad \beta = 0,000093$$

b) Obliczenie poprawek v_x, v_y z kontrolą, przy użyciu wzorów (17) i (26):

Tablica 3

Nr	X''	Y''	v_x	v_y	p
1	1500,183	899,912	−0,017	+0,012	4,0
2	2300,123	1700,120	+0,023	+0,020	4,0
3	1899,869	3000,174	+0,069	−0,026	0,8
4	1199,938	2199,983	−0,162	−0,217	0,5
			−0,002	−0,001	

$p(v_x^2 + v_y^2)] = 0{,}0465 \qquad m_0^2 = 0{,}0116$

$p(v_x^2 + v_y^2)] = 0{,}3690 - 0{,}1346 - 0{,}1884 = 0{,}0460$

c) Przeliczenie współrzędnych punktu 5 przy użyciu wzorów (20):

$X_5'' = 1000{,}117 + 800{,}000 - 0{,}082 = 1800{,}035$

$Y_5'' = 500{,}028 + 1450{,}000 + 0{,}032 = 1950{,}060$

Identyczne wartości otrzymujemy wg wzorów (25).

d) Obliczenie błędów średnich współrzędnych X_5'', Y_5'':

$$m_{X_5''}^{2} = m_{Y_5''}^{2} = 0{,}0025 + 0{,}0116\left(0{,}11 + \frac{210869}{5156550}\right) = 0{,}0043$$

$$m_{X_5'} = m_{Y_5''} = 0{,}07$$

LITERATURA

[1] *Hausbrandt S.*: Rachunki geodezyjne. Warszawa 1954.

[2] *Lazzarini T.*: Wykłady geodezji II. Warszawa 1957.

Rękopis złożono w Redakcji w sierpniu 1962 r.

ЕЖИ ГАЗЬДЗИЦКИ

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ГЕЛЬМЕРТА ДЛЯ ОПОРНЫХ ТОЧЕК РАЗЛИЧНОЙ ТОЧНОСТИ

Резюме

В работе выведены формулы, с помощью которых производится преобразование Гельмерта для опорных точек различной точности, при этом исполняется условие:

$$[p_x v_x v_x] + [p_y v_y v_y] = min.$$

где: v_x, v_y — поправки в приращения координат опорных точек в двух системах, а p_x, p_y — соответствующие веса.

Кроме того приводятся формулы для вывода точности преобразованных координат (19), а также формулы контроля правильности вычислений (20), (23).

JERZY GAŻDZICKI

HELMERT'S TRANSFORMATION WITH CONTROL POINTS OF UNEQUAL ACCURACY

Summary

Formulas for Helmert's transformation with control points of unequal accuracy are deduced. Here the condition has to be fulfilled:

$$[p_x v_x v_x] + [p_y v_y v_y] = minimum,$$

where v_x, v_y — the corrections of coordinates differences of the control points in both systems, p_x, p_y — the appropriate weight numbers.

Besides, the formulas (19) for the determination of accuracy of the transformed coordinates and formulas (20) and (23) for control of correctness of computations are given.