

JERZY GAŹDZICKI

526.5 : 621.389 : 681.142

### Rozwiązywanie układów równań normalnych na maszynach elektronowych

Rozwiązywanie układów równań normalnych, zwłaszcza układów o dużej liczbie niewiadomych, jest jednym z najbardziej pracochłonnych zadań obliczeń geodezyjnych. Z tego względu, już od czasów Gaussa geodeci i matematycy prowadzili badania mające na celu podanie algorytmu rozwiązania równań normalnych, który przy zastosowaniu określonej techniki rachunkowej pozwalałby na obliczenie niewiadomych z minimalnym nakładem pracy. Nie tak dawno byliśmy świadkami szerokiego rozpowszechnienia techniki rachunku arytmometrycznego. Jak się okazało, dla tej techniki, techniki arytmetru, papieru i ołówka, najbardziej odpowiedni jest algorytm metody pierwiastka krakowianowego podany przez prof. dra T. Banachiewicza. Obecnie coraz większe zastosowanie w obliczeniach geodezyjnych znajdują automatycznie liczące maszyny elektroniczne. Powstaje pytanie, która ze znanych metod rozwiązywania równań normalnych najbardziej odpowiada specyfice rachunku na maszynach elektronowych. Udzielenie bezpośredniej odpowiedzi na to pytanie jest dość trudne, głównie ze względu na fakt, że dla jednej i tej samej metody numerycznej można opracować szereg różnych pod względem budowy (organizacji) programów, posiadających różne właściwości użytkowe. W pracy niniejszej podaje się koncepcje programów opartych na metodzie pierwiastka krakowianowego. Walory tej metody, zdaniem autora, są bezsporne i nie straciły na swej aktualności, w związku z zastępowaniem arytmetrów przez maszyny elektroniczne. Podawane tu koncepcje zostały zrealizowane, a później zastosowane do obliczeń praktycznych na Uniwersalnej Maszynie Cyfrowej UMC 1, zbudowanej w Zakładzie Konstrukcji Telekomunikacyjnych i Radiofonii Politechniki Warszawskiej pod kierunkiem prof. dra A. Kilińskiego.

Na wstępie postaramy się podać w punktach warunki, jakim powinien odpowiadać program rozwiązywania układów równań normalnych.

1. Czas rozwiązywania przez maszynę danego układu równań powinien być jak najkrótszy. Czas ten zależy: a) od ilości operacji arytmetycznych, organizacyjnych, przesyłania i logicznych, wykonywanych przez maszynę zgodnie z programem, b) od czasu wykonywania poszczególnych operacji.

2. Program powinien umożliwiać rozwiązywanie jak największych układów równań. Wielkość możliwego do rozwiązania układu zależy przede wszystkim od pojemności pamięci maszyny. (W maszynie UMC 1 pamięcią jest bęben magnetyczny o pojemności 4096 słów). Rozwiązywanie układów, których tabela współczynnikowa przekracza pojemność pamięci wymaga korzystania z tzw. pamięci zewnętrznej, wolnej i mało elastycznej w zastosowaniach. (W maszynie UMC 1 jako pamięć zewnętrzną można traktować taśmę dalekopisową). Z tego względu istotne jest, aby program w jak najmniejszym stopniu korzystał z pamięci zewnętrznej.

3. Liczba miejsc pamięci zajętych przez program powinna być jak najmniejsza. Im mniej miejsc zajmuje program, tym więcej pozostaje ich na współczynniki oraz na ewentualne inne programy.

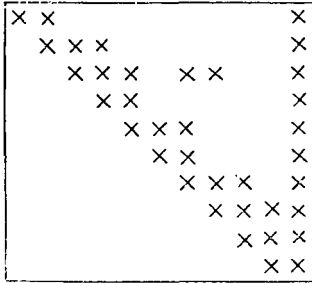
4. Program powinien być uniwersalny tzn. powinien nadawać się do rozwiązywania możliwie szerokiego wachlarza zagadnień, np. pożądane jest, aby program rozwiązywania układów równań normalnych mógł być używany również do obliczania odwrotności krakowianu współczynników równań normalnych.

Przy opracowywaniu programu odpowiadającego powyższym warunkom, a w szczególności warunkom 1 i 2, dochodzimy do wniosku, że niezbędne jest uwzględnienie pewnej szczególnej właściwości układów równań normalnych, z którymi mamy do czynienia w obliczeniach geodezyjnych. Właściwością tą jest występowanie w tabelach równań normalnych znacznej stosunkowo liczby współczynników zerowych, przy czym obserwujemy grupowanie się większości współczynników niezerowych wokół głównej przekątnej.

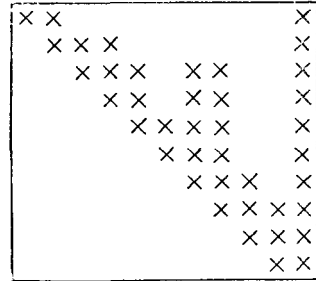
Na rysunku 1 przedstawiona została tabela współczynników typowego układu równań normalnych otrzymanego w trakcie wyrównania sieci geodezyjnej metodą najmniejszych kwadratów. Miejsca współczynników niezerowych położonych na głównej przekątnej oraz powyżej głównej przekątnej zostały zakreślone; symetrycznie położonych współczynników poniżej głównej przekątnej nie zaznaczono.

Położenie elementów oddalonych od głównej przekątnej odgrywa istotną rolę w procesie rachunkowym opartym na eliminacyjnych metodach rozwiązania układów równań normalnych. Na przykład, stosując metodę pierwiastka krakowianowego w odniesieniu do tabeli wyobrażonej na rys. 1, otrzymany przedstawioną na rys. 2 tabelę pierwiastka, zawierającą większą ilość współczynników niezerowych niż tabela równań normalnych.

Liczba elementów  $i$ -tej kolumny tabeli pierwiastka krakowianowego, które są równe zero i jako takie mogą być pominięte w toku rachunku, określona jest przez liczbę elementów zerowych  $i$ -tej kolumny tabeli równań



Rys. 1.



Rys. 2.

normalnych, położonych ponad pierwszym różnym od zera (licząc od góry) elementem tej kolumny. Oznaczając liczbę początkowych zer  $i$ -tej kolumny tabeli przez  $z_i$ , otrzymamy ogólną liczbę zerowych elementów tabeli pierwiastka o  $n$  kolumnach w postaci:

$$\sum_{i=1}^n z_i$$

Zależnie od rodzaju i wielkości sieci geodezyjnej mamy różną procentowo ilość współczynników zerowych tabeli pierwiastka; w układach o kilkudziesięciu niewiadomych ilość współczynników zerowych przekracza na ogół 50% całkowitej ilości współczynników.

Po tych wstępnych uwagach przystąpimy do opisu specjalistycznego programu rozwiązywania układów równań normalnych zawierających znaczną ilość współczynników zerowych, programu, który opiera się na metodzie pierwiastka krakowianowego.

Oznaczmy przez  $\mathbf{b}$  pierwiastek krakowianu  $\mathbf{a}$ , a więc  $\mathbf{b}^2 = \mathbf{a}$ . Przypuśćmy, że elementy krakowianu  $\mathbf{a}$  wprowadzone są do pamięci kolejno, kolumna za kolumną, poczynając od miejsca pamięci  $a$ , przy czym pomijane są elementy położone poniżej głównej przekątnej, jak również początkowe elementy zerowe każdej kolumny. Elementy pierwiastka  $\mathbf{b}$  będziemy obliczać w tej samej kolejności, w jakiej były wprowadzane elementy krakowianu  $\mathbf{a}$ , a więc kolumna za kolumną, z pominięciem  $z_i$  zer  $i$ -tej kolumny. Obliczone elementy umieszczamy w pamięci poczynając od miejsca  $b$ . Przy założeniu, że  $a = b$  w maksymalnym stopniu wykorzystujemy pamięć; każdy nowoobliczony element  $b_{i,j}$ , przesyłamy na miejsce elementu  $a_{i,j}$ .

Oprócz  $n$ -kolumnowej tabeli krakowianu  $a$  zajmującej ogółem

$$\frac{n(n+1)}{2} - \sum_{i=1}^n z_i$$

miejsz pamięci, wprowadzamy do pamięci maszyny  $n$  liczb  $z_i$ .

Wzory metody pierwiastka krakowianowego\*):

$$b_{i,i} = \sqrt{a_{i,i} - \sum_{k=1}^{i-1} b_{i,k}^2} \quad (1)$$

$$b_{i,j} = \begin{cases} 1 & (a_{i,j} - \sum_{k=1}^{i-1} b_{i,k} b_{j,k}) \\ b_{j,j} & (j > i) \\ 0 & (j < i) \end{cases} \quad (2)$$

nie znajdują bezpośredniego zastosowania przy opracowaniu programu. Zgodnie z założeniami, elementy poszczególnych kolumn wprowadzamy do pamięci maszyny kolejno, pomijając początkowe elementy zerowe. Przy takim uporządkowaniu tabeli, prócz wskaźników kolumn  $i$  oraz wierszy  $j$ , istotne stają się również wartości  $z_i$ . Prócz tego celowe jest wprowadzenie wskaźnika  $l$ , określającego bieżący numer (adres) elementu w tabeli (w numeracji pomija się oczywiście początkowe elementy zerowe). Wartość wskaźnika  $l$ , odpowiadającą pierwszemu różnemu od zera elementowi  $i$ -tej kolumny, będziemy oznaczać przez  $L_i$ . Przy tych oznaczeniach wzory (1), (2) możemy napisać w następującej, nietrudnej do uzasadnienia postaci:

$$b_{i,i} = b_{L_i + i - z_i - 1} = \sqrt{a_{L_i + i - z_i - 1} - \sum_{k=0}^{i - z_i - 2} b_{L_i + k}^2} \quad (3)$$

$$b_{i,j} = b_{L_i + j - z_i - 1} = \begin{cases} 1 & (a_{L_i + j - z_i - 1} - \sum_{k=0}^{j - z_j - 2} b_{L_j + k} b_{L_i + z_j - z_i + k}) \\ b_{L_j + j - z_j - 1} & (j > i, z_i \leq z_j) \\ 1 & (a_{L_i + j - z_i - 1} - \sum_{k=0}^{j - z_i - 2} b_{L_i + k} b_{L_j + z_i - z_j + k}) \\ b_{L_j + j - z_j - 1} & (j > i, z_i > z_j) \\ 0 & (j < i) \end{cases} \quad (4)$$

Wartości  $L_i$  mogą być obliczane przy użyciu wzoru rekurencyjnego:

$$L_i = L_{i-1} + i - 1 - z_{i-1} \quad (5)$$

\*) W następujących dalej wzorach, w przypadku, gdy górna granica sumowania jest mniejsza od dolnej, należy przyjąć, że suma równa się zeru.

Czytelnik interesujący się wyprowadzeniem, ewentualnie sprawdzeniem tych wzorów, będzie mógł posłużyć się rys. 3, przedstawiającym numery (wartości  $l$ ) obliczanych przez maszynę elementów tabeli pierwiastka. Elementowi  $b_{1,1}$  przyporządkowano wartość  $l_1 = 0$ .

$Z_i$	0	0	1	1	3	3	5	0
$j \backslash i$	1	2	3	4	5	6	7	8
1	0	1						15
2		2	3	5				16
3			4	6				17
4				7	8	10		18
5					9	11		19
6						12	13	20
7							14	21
8								22
$L_i$	0	1	3	5	8	10	13	15

Rys. 3.

W zastosowaniach praktycznych, o których dalej będzie mowa, okazało się, że celowe jest używanie wzorów (3), (4) tylko do pierwszych  $m$  wierszy tabeli krakowianu  $\mathbf{a}$ ; do pozostałych  $n-m$  wierszy odnoszą się wzory:

$$b'_{i,i} = b'_{L_i - i - z_i - 1} = a_{L_i + i - z_i - 1} - \sum_{k=0}^{m-z_i-1} b_{L_i+k} \quad (i > m) \quad (6)$$

$$b'_{i,j} = b'_{L_i + j - z_i - 1} = \begin{cases} a_{L_i + j - z_i - 1} - \sum_{k=0}^{m-z_j-1} b_{L_j+k} b_{L_i + z_j - z_i + k} & (j > m, j > i, z_i \leq z_j) \\ a_{L_i + j - z_i - 1} - \sum_{k=0}^{m-z_i-1} b_{L_i+k} b_{L_j + z_i - z_j + k} & (j > m, j > i, z_i > z_j) \\ 0 & (j < i) \end{cases} \quad (7)$$

W rezultacie otrzymujemy krakowian kwadrasty

$$\left\{ \begin{matrix} \mathbf{B} \\ \mathbf{B}' \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} b_{1,1} & b_{2,1} & \dots & b_{m,1} & b_{m+1,1} & \dots & b_{n,1} \\ & b_{2,2} & \dots & b_{m,2} & b_{m+1,2} & \dots & b_{n,2} \\ & & \dots & & & \dots & \\ & & & b_{m,m} & b_{m+1,m} & \dots & b_{n,m} \\ & & & & b'_{m+1,m+1} & \dots & b'_{n,m+1} \\ & & & & & \dots & b_{n,n} \end{matrix} \right\}, \quad (8)$$

w których  $m$  początkowych wierszy, tworzących krakowian blokowy  $\mathbf{B}$ ,

jest identycznych z początkowymi  $m$  wierszami pierwiastka  $\mathbf{b}$ , zaś pozostałe  $n-m$  wierszy, tworzących krakowian blokowy  $\mathbf{B}'$ , są — zgodnie ze wzorami (6), (7) — iloczynami odpowiednich kolumn krakowianu  $\mathbf{B}$ .

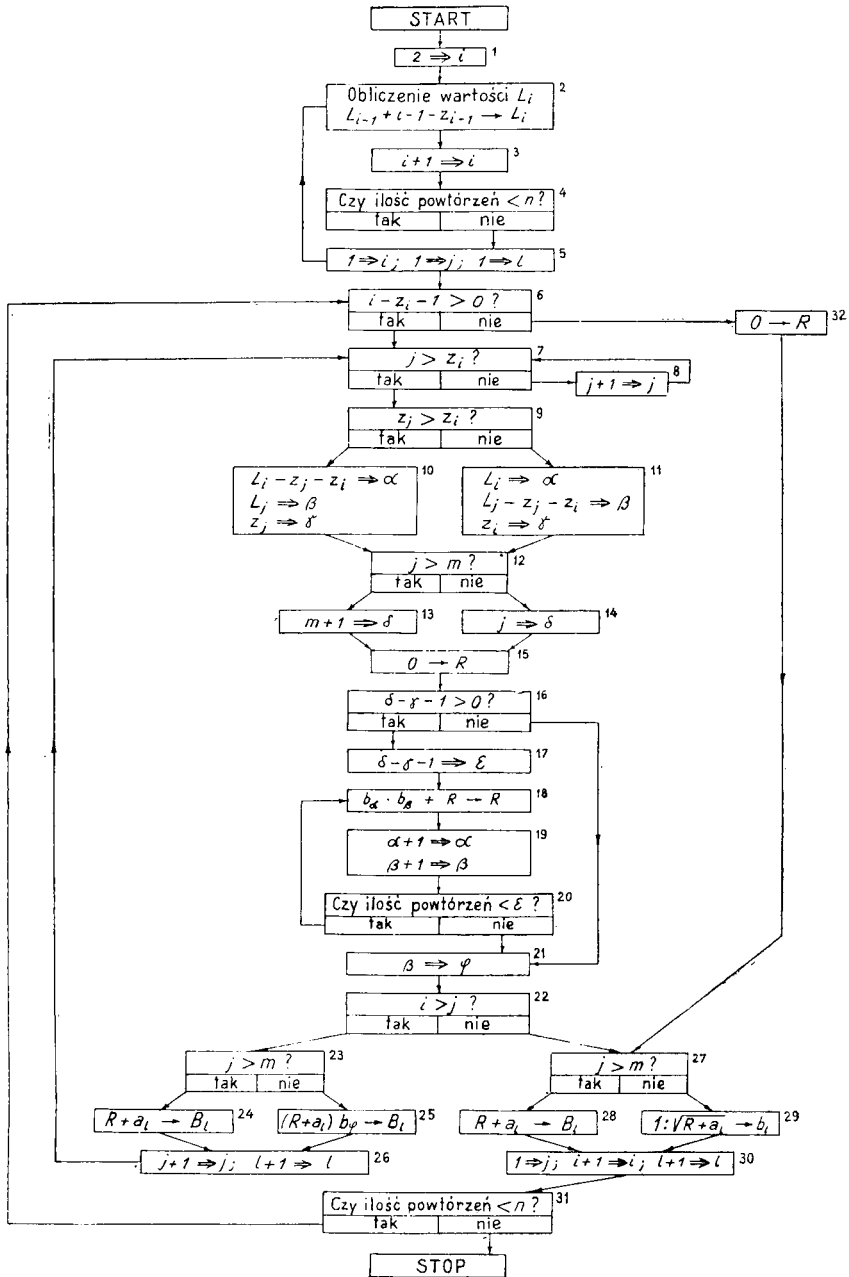
Podobieństwo budowy wzorów (3), (4) i (6), (7) jest tak duże, że program obliczający krakowian (8) w nieznacznym stopniu różni się od programu liczącego pierwiastek  $\mathbf{b}$ .

Podamy teraz przykładowo schemat blokowy (patrz rys. 4) programu liczącego krakowian (8). Ze względu na to, że czas dzielenia jest na ogół znacznie dłuższy od czasu mnożenia, program ten w miejscach pamięci odpowiadających elementom przekątnym  $b_{i,i}$  będzie umieszczał od razu odwrotności tych elementów  $1/b_{i,i}$ . Opisany program w dalszym ciągu będziemy oznaczać symbolem W6.

Pierwszych 5 klatek schematu przedstawia obliczenie  $n$  wartości  $L_j$ . W następnych klatkach podano obliczanie elementów krakowianu (8) wykonywane kolejno, kolumna za kolumną, poczynając oczywiście od kolumny pierwszej.

Poniżej podamy objaśnienia dotyczące najbardziej istotnych fragmentów programu.

- Klatka 6 — badanie, czy choć jeden element  $i$ -tej kolumny krakowianu  $\mathbf{B}$ , poza elementem przekątnym jest różny od zera. Jeśli tylko element przekątny jest różny od zera — program przechodzi bezpośrednio do obliczenia tego elementu (klatka 32 i dalsze).
- Klatka 7 — badanie, czy element  $i$ -tej kolumny położony w  $j$ -tym wierszu jest różny od zera; jeśli nie — program pomija obliczenie tego elementu i przechodzi do badania elementu w wierszu  $j + 1$ .
- Klatki 9—11 — obliczanie wartości wskaźników  $l$ .
- Klatka 15 — przesyłanie zera do wybranego miejsca pamięci  $R$  (tzn. miejsca roboczego) w którym zostanie utworzona suma iloczynów elementów  $b_i$ , występująca we wzorach (3), (4), (6), (7).
- Klatka 16 — badanie, czy suma iloczynów elementów  $b_i$  jest różna od zera, jeśli nie — program pomija obliczenie tej sumy.
- Klatki 18—20 — obliczenie sumy elementów  $b_i$ .
- Klatka 21 — pobranie i przesłanie adresu elementu przekątnego  $j$ -tej kolumny.
- Klatka 22 — badanie, czy obliczany element jest przekątny.
- Klatki 23—26 — obliczanie elementu nieprzekątnego i przejście do obliczenia następnego elementu  $i$ -tej kolumny.
- Klatki 27—30 — obliczanie elementu przekątnego  $i$ -tej kolumny i przejście do obliczenia elementów następnej kolumny.



Oznaczenia:

$x \rightarrow y$  - liczbę  $x$  prześlij na miejsce liczby  $y$ ,

$x \Rightarrow y$  - liczbę  $x$  prześlij na miejsce liczby  $y$ , przeszytanie wykonuje się na częściach adresowych rozkazów.

Rys. 4.

Klatka 31 — badanie, czy nie zostało już zakończone obliczenie całej tabeli.

Podamy teraz przykłady zastosowań programu W6.

Przypuścimy, że dany jest układ  $m$  równań normalnych

$$\mathbf{x} \tau \mathbf{A} + \mathbf{l} = \mathbf{0}$$

Oznaczmy przez  $\mathbf{a}$  krakowian symetryczny utworzony z krakowianu współczynników  $\mathbf{A}$ , kolumny wyrazów wolnych  $\mathbf{l}$ , kolumny sumowej  $\mathbf{s}$  oraz z dopisanych w prawym dolnym rogu tabeli elementów  $0$ ,  $[l]$ ,  $[l + s]$ .

$$\mathbf{a} = \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbf{A} & \mathbf{l} & \mathbf{s} \\ \tau \mathbf{l} & 0 & [l] \\ \tau \mathbf{s} & [l] & [l + s] \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{cccccc} A_{1,1} & A_{2,1} & \dots & A_{m,1} & l_1 & s_1 \\ A_{1,2} & A_{2,2} & \dots & A_{m,2} & l_2 & s_2 \\ & & \dots & & & \\ A_{1,m} & A_{2,m} & \dots & A_{m,m} & l_m & s_m \\ l_1 & l_2 & \dots & l_m & 0 & [l] \\ s_1 & s_2 & \dots & s_m & [l] & [l + s] \end{array} \right\} \quad (9)$$

Kładąc  $n = m + 2$ , obliczamy przy użyciu programu W6 tabelę:

$$\left\{ \begin{array}{cccccc} b_{1,1} & b_{2,1} & \dots & b_{m,1} & \lambda_1 & \sigma_1 \\ & b_{2,2} & \dots & b_{m,2} & \lambda_2 & \sigma_2 \\ & & \dots & & & \\ & & & b_{m,m} & \lambda_m & \sigma_m \\ & & & & q & q \\ & & & & & q \end{array} \right\} \quad (10)$$

Elementy kolumny wyrazów wolnych oznaczono tu przez  $\lambda_i$ , zaś kolumny sumowej przez  $\sigma_i$ , natomiast przez  $q$  oznaczono wspólną wartość trzech końcowych elementów tabeli. Mamy tu do czynienia z cenną kontrolą dokładności rachunku i poprawności wprowadzenia do maszyny danych liczbowych:

$$b'_{m+1,m+1} = b'_{m+2,m+1} = b'_{m+2,m+2} = q$$

Celem uzasadnienia słuszności tej kontroli zauważmy, że dla  $m + 1$  wiersza pierwiastka krakowianowego zachodzi kontrola sumowa:  $b_{m+1,m+1} = b_{m+2,m+1}$ . Mnożąc obydwie strony tej równości przez element przekątny  $b_{m+1,m+1}$ , otrzymamy  $b'_{m+1,m+1} = b'_{m+2,m+1}$ . Z kolei zauważmy, że ostatni wiersz tabeli danych początkowych, jako wiersz sumowy, jest liniowo zależny od poprzednich wierszy, wobec tego

$$b_{m+2,m+2} = \sqrt{b'_{m+2,m+2} - b'^2_{m+2,m+1}} = 0 \text{ a stąd } b'_{m+2,m+2} = b'_{m+2,m+1}$$

Jeżeli układ równań normalnych powstaje w wyniku rachunku metodą spostrzeżeń pośrednich, piszemy zamiast  $0$  w kolumnie  $l$  krakowianu



a wartość  $[ll]$ , zaś zamiast  $[l]$  i  $[s + l]$  — odpowiednio  $[sl]$  i  $[ssl]$ ; w efekcie dostajemy  $q = [vv]$ .

Mając już tabelę (10), niewiadome obliczamy korzystając z dodatkowego, znacznie prostszego, programu. Dla kontroli wskazane jest dwukrotne obliczenie niewiadomych, odpowiadające rozwiązaniu 2 układów równań o tym samym krakowianie współczynnikowym i różnych wyrazach wolnych:

$$\mathbf{x} \mathbf{A} + \mathbf{l} = \mathbf{0},$$

$$\mathbf{y} \mathbf{A} + \mathbf{s} = \mathbf{0},$$

Mamy tu następującą zależność:

$$y_i = x_i - 1, \quad i = 1, 2 \dots m.$$

Wielkość układu, który może być w ten sposób rozwiązany ograniczona jest pojemnością pamięci. Dane początkowe układu  $m$  równań zajmują

$$\frac{n(n+1)}{2} - \sum_{i=1}^n z_i$$

miejsz pamięci, gdzie  $n = m + 2$ . Prócz tego  $2n$  miejsc pamięci musi być przeznaczonych na wartości  $z_i$  oraz  $L_i$ . Z ogólnej ilości 4096 miejsc pamięci w maszynie UMC 1 należy odliczyć około 200 miejsc na program rozwiązywania układu równań, oraz ponad 600 — na stałe programy maszyny, tak, że w rezultacie około 3300 może być użytych dla wprowadzenia danych początkowych układu. Taka ilość miejsc pamięci wystarcza dla rozwiązywania układów 100—150 równań, przy czym górna granica ilości równań zależy oczywiście od ilości pomijalnych w rachunku współczynników zerowych, tj. od wartości

$$\sum_{i=1}^n z_i$$

W przypadku korzystania z powszechnie stosowanych programów wymagających wprowadzenia pełnej tabeli współczynników, podana ilość miejsc pamięci wystarcza do rozwiązywania układów co najwyżej siedemdziesięciu kilku równań. Warto przy tym dodać, że pomijanie elementów zerowych w rachunku poważnie skraca czas liczenia.

Program W6 pozwala również na jednoczesne obliczenie:

- a) pierwiastka krakowianowego  $\mathbf{b}$  ( $\mathbf{b}^2 = \mathbf{A}$ ),
- b) odwrotności pierwiastka  $\mathbf{b}^{-1}$ ,
- c) niewiadomych  $x_i$  oraz  $y_i = x_i - 1$ ,
- d) odwrotności krakowianu współczynników  $\mathbf{A}^{-1}$ .

Celem przeprowadzenia tego rodzaju rachunku, należy zestawić następującą tabelę danych początkowych:

$$\begin{array}{cccccccc}
 A_{1,1} & A_{2,1} \dots A_{m,1} & l_1 & s_1 & 1 & & & 1 \\
 & A_{2,2} \dots A_{m,2} & l_2 & s_2 & 0 & 1 & & 1 \\
 & & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 & & & & & & & & A_{m,m} & l_m & s_m & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \\
 & & & & & & & & & 0 & [l] & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
 & & & & & & & & & & [l+s] & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
 & & & & & & & & & & & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
 & & & & & & & & & & & & 0 & \dots & 0 & 0 \\
 & & & & & & & & & & & & & \dots & \dots & \dots \\
 & & & & & & & & & & & & & & 0 & 0 \\
 & & & & & & & & & & & & & & & 0
 \end{array}$$

składającą się ze współczynników  $A_{i,j}$ , wyrazów wolnych  $l_i$ , sum  $s_i$ , elementów kontrolnych 0,  $[l]$ ,  $[l+s]$ , elementów krakowianu jednostkowego  $\tau$ , kolumny sumowej tego krakowianu (jedynki) oraz z zer wypełniających resztę trójkątnej tabeli o  $n = 2m + 3$  wierszach i kolumnach. Zera powyżej głównej przekątnej krakowianu  $\tau$  nie zostały wypisane, ponieważ są to początkowe, pomijalne w rachunku, zera kolumn:  $m + 3$ ,  $m + 4, \dots, 2m + 2$ . Elementy początkowych  $m + 2$  kolumn tabeli należy wprowadzić do maszyny, natomiast elementy pozostałych kolumn, równe 0 lub 1, wprowadzane są automatycznie przez dodatkowy program.

Przy pomocy programu W6 obliczamy bezpośrednio krakowian (8) o tabeli:

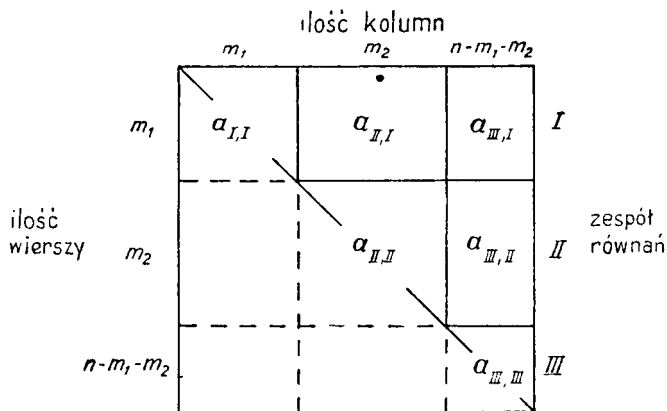
$$\begin{array}{cccccccc}
 b_{1,1} & b_{2,1} & \dots & b_{m,1} & \lambda_1 & \sigma_1 & \mathbf{b}_{1,1}^{-1} & [\mathbf{b}_{i,1}^{-1}] \\
 & b_{2,2} & \dots & b_{m,2} & \lambda_2 & \sigma_2 & \mathbf{b}_{1,2}^{-1} & \mathbf{b}_{2,2}^{-1} & [\mathbf{b}_{i,2}^{-1}] \\
 & & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 & & & b_{m,m} & \lambda_m & \sigma_m & \mathbf{b}_{1,m}^{-1} & \mathbf{b}_{2,m}^{-1} & \dots & \mathbf{b}_{m,m}^{-1} & [\mathbf{b}_{i,m}^{-1}] \\
 & & & & q & q & x_1 & x_2 & \dots & x_m & [x_i] \\
 & & & & & q & y_1 & y_2 & \dots & y_m & [y_i] \\
 & & & & & & -\mathbf{A}_{1,1}^{-1} & \mathbf{A}_{2,1}^{-1} & \dots & -\mathbf{A}_{m,1}^{-1} & [-\mathbf{A}_{i,1}^{-1}] \\
 & & & & & & & -\mathbf{A}_{2,2}^{-1} & \dots & -\mathbf{A}_{m,2}^{-1} & [-\mathbf{A}_{i,2}^{-1}] \\
 & & & & & & & & \dots & \dots & \dots \\
 & & & & & & & & & & & -\mathbf{A}_{i,m}^{-1} & [-\mathbf{A}_{i,m}^{-1}] \\
 & & & & & & & & & & & & [-\mathbf{A}_{i,j}^{-1}]
 \end{array}$$

zawierającej wszystkie poszukiwane elementy.

Zauważmy, że nie zachodzi potrzeba umieszczania w pamięci końcowych  $n-m$  wierszy tabeli — elementy tych wierszy nie biorą udziału w dalszym rachunku i mogą być bezpośrednio wydrukowane. Opracowano modyfikację programu W6 oznaczoną symbolem W6a, która wykonuje obliczenia w ten właśnie sposób.

Oddzielnym zagadnieniem jest zastosowanie programu W6, a właściwie jego modyfikacji W6a, do rozwiązywania układów równań normalnych, których tabela współczynnikowa nie mieści się w pamięci maszyny. W pracy [4] podaje się metodę rozwiązywania układów równań liniowych o tabeli zawierającej dużą ilość współczynników zerowych. Istotą tej metody jest podział, w pewien określony sposób, danego układu na szereg zespołów równań. Używając do obliczeń maszynę elektroniczną, podział ten będziemy musieli tak wykonać, aby tabela współczynnikowa każdego z zespołów równań mieściła się w pamięci.

Dla zilustrowania metody podamy prosty przykład odnoszący się do układu, który podzielono na 3 zespoły po  $m_1$ ,  $m_2$  i  $n-m_1-m_2$  równań. Układ ten przez zmianę kolejności kolumn i wierszy przekształcono tak, aby  $\mathbf{a}_{II,I} = \mathbf{0}$  (patrz rys. 5, przedstawiający utworzoną ze współczynników, wyrazów wolnych i sum kontrolnych tabelę krakowianu  $\mathbf{a}$ ).



Rys. 5.

W stosunku do tabel utworzonych z bloków  $\mathbf{a}_{I,I}$  i  $\mathbf{a}_{III,I}$  oraz oddzielnie z bloków  $\mathbf{a}_{II,II}$  i  $\mathbf{a}_{III,II}$  dokonujemy przeliczenia programem W6a, otrzymując w rezultacie wydrukowane na taśmie elementy krakowianów  $\mathbf{B}'$  oraz pozostawione w pamięci elementy krakowianów  $\mathbf{B}$ . Krakowiany te oznaczymy odpowiednio przez  $\mathbf{B}_I$ ,  $\mathbf{B}'_I$ ,  $\mathbf{B}_{II}$ ,  $\mathbf{B}'_{II}$ . Pozostawione w pamięci elementy krakowianów  $\mathbf{B}$  dziurkujemy również na taśmie dalekopisowej.

Nietrudno uzasadnić, że końcowe  $n-m_1-m_2$  niewiadome mogą być obliczone jako niewiadome układu o tabeli

$$a_{III,III} + \mathbf{B}'_I + \mathbf{B}'_{II}.$$

Po wykonaniu sumowania wydziurkowanych krakowianów  $a_{III,III}$ ,  $\mathbf{B}'_I$ ,  $\mathbf{B}'_{II}$  oraz po obliczeniu końcowych niewiadomych, podstawiamy wartości tych niewiadomych do równań pierwiastka krakowianowego o tabelach  $\mathbf{B}_I$  i  $\mathbf{B}_{II}$ . Z kolei rozwiązując te równania, otrzymujemy pozostałe niewiadome układu.

Z opisu postępowania widać, że rozwiązywanie tą metodą dużych układów równań normalnych wymaga użycia szeregu programów o charakterze pomocniczym, m. in. programów: a) sumowania tabel, b) obliczania niewiadomych, c) podstawiania niewiadomych do równań pierwiastka itd.

W analogiczny sposób można rozwiązywać układy równań normalnych podzielone na większą ilość zespołów równań.

Reasumując, wydaje się, że przedstawiona koncepcja programu rozwiązywania układów równań normalnych dobrze odpowiada podanym na początku pracy 4 warunkom; w szczególności program:

- a) liczy szybko, ponieważ pomija operacje arytmetyczne na elementach zerowych,
- b) umożliwia rozwiązywanie stosunkowo dużych układów równań, gdyż nie zajmuje miejsc pamięci na zbędne elementy zerowe,
- c) odznacza się względnie prostą organizacją i z tego względu nie zajmuje wiele miejsc pamięci na rozkazy; działanie programu ogranicza się do obliczenia jednej tabeli o kształcie trójkąta,
- d) pozwala na rozwiązywanie szeregu różnych zadań.

#### LITERATURA

- [1] *Banachiewicz T.*: Rachunek krakowianowy. PWN, Warszawa 1959.
- [2] *Hausbrandt St.*: Rachunki geodezyjne. PPWK, Warszawa 1953.
- [3] *Gaździcki J.*: Programy rozwiązywania zadań geodezyjnych na polskiej uniwersalnej maszynie UMC 1. Prace Instytutu Geodezji i Kartografii, tom IX, zeszyt 1(19), PPWK, Warszawa 1962.
- [4] *Gaździcki J.*: Niektóre zastosowania pojęcia eliminacji w obliczeniach geodezyjnych. Zeszyty Naukowe Politechniki Warszawskiej, Geodezja. Nr 7, Warszawa 1962.

*Rękopis złożono w Redakcji w marcu 1962 r.*

ЕЖИ ГАЗЬДЗИЦКИ

## РЕШЕНИЕ СИСТЕМ НОРМАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ НА ЭЛЕКТРОННЫХ МАШИНАХ

### Резюме

В докладе дана концепция и описание программ решения систем нормальных уравнений, встречающихся при геодезических вычислениях. Как известно, эти системы в общем характеризуются относительно большим числом нулевых коэффициентов, в виду чего, для решения этих систем целесообразным является применение специальных программ, которые учитывают эту характерную черту и при том:

- а) дают возможность скорее решить данную систему,
- б) дают возможность, при данной ёмкости запоминающего устройства, решать большие системы.

Представленные программы составлены на основании данного проф. докт. Т. Банахевичем метода краковянского корня. Эти программы могут быть также применяемы при вычислении обратного краковяна коэффициентов и при решении больших систем нормальных уравнений методом многогруппового уравнивания. Экспериментальные вычисления были исполнены на универсальной цифровой машине (UMC 1) построенной в Кафедре Конструкции Телесвязи и Радиовещания Варшавского Политехнического Института.

JERZY GAŹDZICKI

THE SOLUTION OF NORMAL EQUATIONS BY MEANS  
OF ELEKTRONIC CALCULATING MACHINES

S u m m a r y

This paper contains the conception and description of the programmes for the solution of normal equations in geodetic computations.

As it is known, in these systems of equations, as a rule, a relatively great number of coefficients are zero. The use of special elaborated programmes for the solution of equations of above characteristic is very recommended, because such programmes:

- a) enable the solution of a given system of equations in a shorter time,
- b) make possible the solution of larger systems of equations by the same storage capacity of the machine.

The programmes described here are elaborated, basing on Professor's Banachiewicz cracovian root method. These programmes can be also used for the calculations of reciprocal of the cracovian coefficients and for the solution of the large systems of normal equations by dividing them into groups. The experimental computations were made on the Universal Digital Computer (UMC 1), constructed in the Laboratory for Telecommunication and Radio Constructions of the Warsaw Institute of Technology.