PRACE INSTYTUTU GEODEZJI I KARTOGRAFII

*Tom IX, Zeszyt 1 (19), 1962*

*WOJCIECH JANUSZ*

526.99

# Zagadnienie identyfikacji punktów stałych w sieciach kontrolnych dla pomiarów odkształceń

Przy badaniu odkształceń terenu można posługiwać się specjalnie zastabilizowaną siecią znaków geodezyjnych, będących jednocześnie stanowiskami teodolitu. Na podstawie różnic wielkości dwukrotnie w pewnym odstępie czasu pomierzonych kątów lub kierunków w sieci, możemy sądzić o zmianach jej kształtu, spowodowanych przesunięciami poszczególnych znaków w okresie między obydwoma pomiarami. Odwrotnie — na podstawie zauważonej zmiany kształtu sieci — możemy sądzić o zmianach położenia poszczególnych znaków. O tym więc, że znaki pomiarowe nie zmieniły swego położenia świadczyć może zachowanie podobieństwa figur utworzonych przez odcinki proste łączące te znaki, zaś o istniejącym przesunięciu świadczy niezachowanie podobieństwa figur.

W praktyce czynności obliczeniowe, mające na celu identyfikację znaków pomiarowych nieporuszonych oraz określenie wielkości i kierunków przesunięć pozostałych znaków, mają następujący przebieg:

1. Wyrównuje się łącznie wszystkie różnice kierunków w sieci z jednoczesnym wyznaczeniem składowych przesunięć znaków ($dx$, $dy$) przy przyjęciu dwu znaków pomiarowych za stałe.

2. W przypadku, gdy w wyniku wyżej wymienionego wyrównania wszystkie znaki otrzymają przesunięcia przekraczające graniczne błędy wyznaczenia uznaje się, że dwa znaki przyjęte jako stałe w rzeczywistości poruszyły się względem siebie. Wówczas przyjmuje się inną parę znaków pomiarowych jako stałą i poszukuje dodatkowo znaków o przesunięciach bliskich zera. Czynność tę wykonuje się w oparciu o metodę transformacji współrzędnych. Ponieważ ponownie przyjęta za stałą inna para punktów może się również okazać ruchoma, czynność tę możemy powtarzać wielokrotnie [1].

3. Jeśli w wyniku czynności wymienionej w punkcie 2 trafimy na parę znaków rzeczywiście stałą, to jest taką, która będzie spełniała wraz z kilkoma innymi znakami warunek podobieństwa figur, możemy wyko-

nać ostateczną transformację, w której jako punkty dostosowania przyjmuje się wszystkie znaki zidentyfikowane jako stałe. Transformacja ta pozwala na obliczenie wielkości i kierunków przesunięć znaków ruchomych.

W opisanej metodzie identyfikacji znaków stałych posługujemy się kolejnymi przybliżeniami, których liczba jest zależna od ilości wszystkich znaków pomiarowych w sieci, od ilości znaków nieporuszonych oraz od tego czy posiadamy dodatkowe informacje, np. natury geomorfologicznej, ułatwiające identyfikację. W związku z tym, w sieciach dużych — przy jednoczesnym braku pewnych informacji wskazujących na stałość niektórych punktów — metoda ta może się okazać bardzo uciążliwa. Ponadto może się zdarzyć, że wszystkie znaki pomiarowe uległy przesunięciom (jakkolwiek staramy się tego uniknąć drogą właściwego zaprojektowania sieci). W przypadku takim w/w metoda identyfikacji nie informuje dostatecznie szybko, że stałych punktów nie ma i prowadzi do wykonywania bezużytecznych obliczeń.

W związku z tym wyłania się potrzeba odmiennego potraktowania zagadnienia w oparciu o to samo zasadnicze kryterium stałości.

Proponowany sposób identyfikacji punktów stałych opiera się również na wynikach wyrównania różnic kierunków z jednoczesnym wyznaczeniem przesunięć znaków pomiarowych przy przyjęciu dwu znaków za stałe. W przypadku jednak, gdy założenie stałości określonych dwu punktów okaże się niesłuszne — poszukiwanie znaków nieporuszonych odbywa się w sposób niżej uzasadniony i scharakteryzowany dalej podanym przykładem.

Przypuśćmy, że długość odcinka między punktami przyjętymi za stałe w rzeczywistości zmieniła się. Wówczas — w wyniku wyrównania — otrzymamy zmienione długości wszystkich odcinków między punktami całej sieci. Zmiany te można scharakteryzować wzorem na wartość współczynnika zmiany skali $q + \beta$, gdzie:

$$\beta_{ik} = - \frac{\Delta x_{ik}}{\Delta x_{ik}^2 + \Delta y_{ik}^2} \cdot (dx_k - dx_i) - \frac{\Delta y_{ik}}{\Delta x_{ik}^2 + \Delta y_{ik}^2} (dy_k - dy_i) . \qquad (1)$$

$\Delta x_{ik}$, $\Delta y_{ik}$ — przyrosty współrzędnych na odcinku określonym przez punkty $i$, $k$,

$dx_k$, $dy_k$, $dx_i$, $dy_i$ — składowe przesunięć punktów $i$, $k$, wyznaczone z wyrównania różnic kierunków.

Zauważmy, że wszystkie odcinki łączące wzajemnie punkty, które tworzą figury o zachowanym podobieństwie powinny otrzymać wielkości współczynników $\beta$ o tym samym znaku i wartościach różniących się nieznacznie (w granicach dokładności wyznaczenia). Wobec tego można, przy wykorzystaniu wzoru (1), obliczyć wszystkie wielkości współczynników $\beta$ odpowiadające odcinkom łączącym punkty sieci we wszystkich kombinacjach. Ilość koniecznych do obliczenia współczynników jest więc równa $\frac{(n-1)n}{2}$, gdzie $n$ — ilość punktów w sieci. Następnie należy przeanalizować wielkości uzyskanych współczynników i odszukać punkty, będące końcami odcinków o jednakowych wartościach współczynników. Należy podkreślić, że wartości $A = \frac{\Delta x_{ik}}{\Delta x_{ik}^2 + \Delta y_{ik}^2}$ oraz $B = \frac{\Delta y_{ik}}{\Delta x_{ik}^2 + \Delta y_{ik}^2}$ można obliczyć jeden raz i wykorzystywać wielokrotnie do kolejnych identyfikacji punktów stałych. Praktyczne korzystanie z niniejszego sposobu identyfikacji punktów stałych można prześledzić na załączonym przykładzie. Jako dane wyjściowe do przykładu przyjęto współrzędne punktów sieci zamieszczonej w pracy [1] na rys. 123 oraz wyniki wyrównania różnic zaobserwowanych kierunków przy przyjęciu za stałe punktów II, XI (przykład liczbowy w publikacji [1] na str. 248—254).

W przykładzie zestawiono tabelki wielkości $A$, $B$, $dx_k$—$dx_i$, $dy_k$—$dy_i$ oraz tabelkę wielkości $\beta$ obliczonych z wzoru (1) w następującym porządku:

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| I — II | I — III | I — IV | I — V | I — VI | I — VIII | I — IX | I — X | I — XI |
| | II — III | II — IV | II — V | II — VI | II — VIII | II — IX | II — X | II — XI |
| | | III — IV | . . . | . . . | . . . | . . . | . . . | . . . |
| | | | . . . | . . . | . . . | . . . | . . . | . . . |

itd.

W otrzymanej tabelce wielkości współczynników $\beta$ znajdujemy w wielu miejscach współczynniki o wartościach zbliżonych do siebie i równych w przybliżeniu $\beta = -10\,000$, na przykład $\beta_{\text{III-VI}} = -10\,112$, $\beta_{\text{III-IX}} = -9\,974$. Aby stwierdzić, że trójkąt utworzony przez punkty III, VI, IX jako wierzchołki nie zmienił kształtu należy sprawdzić, czy $\beta_{\text{VI-IX}}$ jest bliskie dwu poprzednio wymienionych wartości. Rzeczywiście odczytujemy w tabelce, że $\beta_{\text{VI-IX}} = -9\,987$. Zauważmy dalej, że w kolumnie odpowiadającej odcinkom kończącym się w punkcie X znajduje się szereg współczynników o wartościach bliskich wartościom trzech wymienionych wyżej współczynników. Wobec tego, aby stwierdzić stałość punktu X, należy sprawdzić czy są wśród nich współczynniki odpowiadające odcinkom łączącym punkty III, VI, IX z punktem X. Rzeczywiście zachodzi ten przypadek, wobec czego możemy powiedzieć, że wszystkie cztery wymienione punkty nie zmieniły swego położenia wzajemnego. Postępując dalej w podobny sposób stwierdzimy jeszcze, że punktem stałym jest punkt IV.

Pozornie mogłoby się wydawać, że punktem stałym jest punkt I, ponieważ np. współczynnik $\beta_{\mathrm{I-IX}} = -10\,069$ jest zbliżony, co do wartości do uprzednio wymienionych. Jednak warunek ten nie jest spełniony przez inne odcinki łączące punkt I z pozostałymi punktami uznanymi za stałe. W podobny sposób można wykluczyć jako stały każdy inny punkt, który przypadkowo jest początkiem lub końcem odcinka o wielkości współczynnika $\beta$ zbliżonej do wielkości $\beta$ charakterystycznej dla odcinków między punktami stałymi.

W przykładzie niniejszym wykryto dodatkowo na podstawie porównania współczynników $\beta$ trójkąt określony punktami II, VIII, XI, stosunkowo mało zniekształcony przez przesunięcia wierzchołków. Jest to przykład, że niniejsza metoda identyfikacji posiada bardziej ogólny charakter od metody kolejnych przybliżeń. Ponadto przykład ten wskazuje na istnienie pewnego niebezpieczeństwa w identyfikacji punktów stałych opartej jedynie na kryterium podobieństwa figur. Identyfikacja punktów stałych byłaby bardziej pewna, gdyby jeszcze dodatkowo opierała się na kryterium określonej zmiany skali. Wprowadzenie takiego kryterium wymagałoby zastosowania w sieci pomiaru niektórych odcinków pomiędzy znakami.

Należy podkreślić, że dokonanie identyfikacji punktów stałych w omówionym przykładzie zabrało autorowi 70 minut czasu, nie licząc czasu przygotowania tabeli współczynników $A$, $B$. Można więc uznać, że zastosowanie wspomnianej metody jest bardziej ekonomiczne od stosowania metody kolejnych przybliżeń, których liczba dla sieci objętej przykładem wynosi na ogół dwa do trzech.

Po zidentyfikowaniu punktów stałych, można w oparciu o nie — jako o punkty dostosowania — wykonać transformację ostateczną dla wyznaczenia wielkości i kierunków przesunięć punktów poruszonych. Czynność tą wykonujemy w oparciu o wzory podane w publikacji [1], str. 46—52.

Niekiedy zachodzi przypadek, że szereg punktów sieci kontrolnej podlega ruchom niewielkim, rzędu nieznacznie przekraczającego dokładność ich wyznaczenia. Wówczas otrzymujemy współczynniki $\beta$ różniące się co do wartości w sposób utrudniający jednoznaczną identyfikację punktów, których ruchu nie możemy stwierdzić (posiadających ruch o wielkości poniżej błędów wyznaczenia). Wobec tego w każdym przypadku należy sprawdzić, czy przyjęta za stałą grupa punktów nie zawiera odcinków o wielkościach współczynnika $\beta$ zbyt odbiegających od pozostałych. Sprawdzenie to polega na obliczeniu wartości $\beta_{sr}$ dla danej grupy, jako ogólnej średniej arytmetycznej z $\beta$ otrzymanych na wszystkich odcinkach grupy:

$$\beta_{śr} = \frac{[p_i \beta_i]}{[p_i]},$$

gdzie: $p_i = \frac{1}{m_{\beta i}^2} = \frac{\Delta x^2 + \Delta y^2}{m_d^2}$, zaś $m_d$ obliczamy dla każdego odcinka jako błąd funkcji. Następnie należy obliczyć błąd pojedynczego spostrzeżenia z wykazaniem poszczególnych składników $\sqrt{p_i} \cdot v_{\beta i}$,

$$M_\beta = \sqrt{\frac{[(\sqrt{p_i}\, v_{\beta i})^2]}{n-1}},$$

gdzie: $v_{\beta i} = \beta_{śr} - \beta_i$.

Zarówno poszczególne składniki $\sqrt{p_i}\, v_{\beta i}$, jak i $M_\beta$, nie powinny zbytnio przekraczać wielkości 1,0, przy czym tolerancje tych przekroczeń wynikają z teoretycznie przyjętego rozkładu wyników obserwacji. Możemy przyjąć, że graniczna występująca wielkość któregokolwiek składnika $\sqrt{p_i}\, v_{\beta i}$, odpowiadającego odcinkowi między punktami stałymi, nie może przekroczyć 2,0, zaś wielkość $M_\beta$ powinna być na ogół bardziej zbliżona do 1,0.

Praktycznie jest korzystać z tablicy obliczonych jednorazowo wag współczynników przy założeniu, że dokładności wielokrotnie powtarzanych obserwacji sieci kontrolnej są jednakowe.

Poniżej podaję przykład obliczenia wagi współczynnika odpowiadającego odcinkowi łączącemu punkty III, IV. Obliczenie błędu średniego długości boku wyznaczonego z wyrównania polega na zrealizowaniu wzoru wyrażonego krakowianowo: $m_F = m_0 \sqrt{\mathbf{f}\,(\mathbf{a}^2)^{-1}\,\mathbf{f}}$,

gdzie $\mathbf{f}$ — krakowian kolumnowy zawierający funkcje azymutu odcinka:

$$\begin{Bmatrix} -\cos\varphi \\ -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{Bmatrix}$$

zaś $(\mathbf{a}^2)^{-1}$ — krakowian odwrotności tabeli współczynnikowej równań normalnych. Z krakowianu powyższego, przy praktycznej realizacji wzoru, wypisuje się tylko elementy znajdujące się na przecięciu kolumn i wierszy odpowiadających niewiadomym $dx_i$, $dy_i$, $dx_k$, $dy_k$, gdzie wskaźniki $i$, $k$ oznaczają początkowy i końcowy punkt odcinka.

$$m_{d\,\mathrm{III.IV}} = m_0 \sqrt{\begin{Bmatrix} 0{,}018 \\ 1{,}000 \\ -0{,}018 \\ -1{,}000 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 0{,}792 & 0{,}068 & 0{,}713 & 0{,}180 \\ 0{,}068 & 0{,}806 & 0{,}069 & 0{,}115 \\ 0{,}713 & 0{,}069 & 0{,}939 & 0{,}200 \\ 0{,}180 & 0{,}115 & 0{,}200 & 0{,}395 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 0{,}018 \\ 1{,}000 \\ -0{,}018 \\ -1{,}000 \end{Bmatrix}} = 0{,}7$$

$$\sqrt{p} = \frac{d}{m_d} = \frac{164\,000\ \mathrm{mm}}{0{,}7\ \mathrm{mm}} = 2{,}34 \cdot 10^5$$

W podanym na końcu przykładzie identyfikacji punktów stałych zidentyfikowano jako stałe następujące punkty: III, IV, VI, IX, X. Obecnie dokonamy sprawdzenia, czy powyższa identyfikacja jest prawidłowa.

| Nr odcinka | $\sqrt{p}$ | $p$ | $\beta$ | $v_\beta$ | $\sqrt{p}\, v_\beta$ | Uwagi |
|---|---|---|---|---|---|---|
| III-IV | $2{,}30 \cdot 10^5$ | $5{,}5 \cdot 10^{10}$ | $-10\,085 \cdot 10^{-8}$ | $158 \cdot 10^{-8}$ | 0,36 | |
| III-VI | 3,60 | 13,0 | −10 112 | 185 | 0,67 | $[p\, v_\beta] = -27$ |
| III-IX | 1,85 | 3,4 | − 9 974 | 47 | 0,09 | |
| III-X | 3,40 | 11,6 | − 9 733 | −194 | −0,66 | $M_\beta = \sqrt{\frac{4.32}{9}} =$ |
| IV-VI | 4,40 | 19,2 | −10 174 | 247 | 1,09 | |
| IV-IX | 2,00 | 4,0 | − 9 739 | −188 | −0,38 | $= 0{,}7$ |
| IV-X | 4,30 | 18,5 | − 9 605 | −322 | −1,38 | Stwierdzono |
| VI-IX | 3,30 | 11,0 | − 9 987 | 60 | 0,20 | stałość |
| VI-X | 2,90 | 8,4 | − 9 922 | −5 | −0,01 | punktów. |
| IX-X | 0,80 | 0,7 | −10 125 | 198 | 0,16 | |

**Przykład identyfikacji punktów stałych w sieci kontrolnej**

Tabela współczynników kierunkowych *A*, *B*.

| Nr p-ktu | | II | III | IV | V | VI | VIII | IX | X | XI |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| I | *A* | 2 | −335 | −630 | 631 | 147 | −138 | −208 | −254 | −350 |
| | *B* | 771 | 323 | − 59 | −900 | 494 | 171 | − 4 | 68 | −253 |
| II | *A* | | −635 | −345 | 117 | 889 | −217 | −192 | −270 | −178 |
| | *B* | | 79 | −316 | −460 | 909 | 170 | − 55 | − 23 | −251 |
| III | *A* | | | − 10 | 223 | 462 | −222 | −250 | −445 | − 40 |
| | *B* | | | −611 | −241 | 81 | 348 | −121 | −105 | −347 |
| IV | *A* | | | | 441 | 249 | − 84 | −309 | −369 | −196 |
| | *B* | | | | −126 | 235 | 243 | 6 | 199 | −778 |
| V | *A* | | | | | 5 | −114 | −185 | −204 | −744 |
| | *B* | | | | | 384 | 144 | 23 | 84 | −478 |
| VI | *A* | | | | | | −237 | −165 | −227 | −150 |
| | *B* | | | | | | 116 | − 60 | − 47 | −198 |
| VIII | *A* | | | | | | | −116 | −115 | 39 |
| | *B* | | | | | | | −214 | −355 | −197 |
| IX | *A* | | | | | | | | 466 | 288 |
| | *B* | | | | | | | | 443 | −125 |
| X | *A* | | | | | | | | | 206 |
| | *B* | | | | | | | | | −269 |

$\times 10^{-8}$

Tabela różnic wyrównanych przesunięć $\begin{matrix} dx_k - dx_i \\ dy_k - dy_i \end{matrix}$ (w milimetrach)

| Nr p-ktu | II | III | IV | V | VI | VIII | IX | X | XI |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| I | −18,25 | −11,64 | −16,92 | −11,24 | 10,66 | −12,79 | −48,25 | −33,69 | −18,25 |
| | −6,64 | −1,39 | −17,81 | −10,79 | −3,74 | −5,27 | −8,18 | −0,64 | −6,64 |
| II | | 6,61 | 1,33 | 7,01 | 28,91 | 5,46 | −30,00 | −15,44 | 0,00 |
| | | 5,25 | −11,17 | −4,15 | 2,90 | 1,37 | −1,54 | 6,00 | 0,00 |
| III | | | 5,28 | 0,40 | 22,30 | −1,15 | −36,61 | −22,05 | −6,61 |
| | | | −16,42 | −9,40 | −2,35 | −3,88 | −6,79 | 0,75 | −5,25 |
| IV | | | | 5,68 | 27,58 | 4,13 | −31,33 | −16,77 | −1,33 |
| | | | | 7,02 | 14,07 | 12,54 | 9,63 | 17,17 | 11,17 |
| V | | | | | 21,90 | −1,55 | −37,01 | −22,45 | −7,01 |
| | | | | | 7,05 | 5,52 | 2,61 | 10,15 | 4,15 |
| VI | | | | | | −23.45 | −58,91 | −44,35 | −28,91 |
| | | | | | | −1,53 | −4,44 | 3,10 | −2,90 |
| VIII | | | | | | | −35,46 | −20,90 | −5,46 |
| | | | | | | | −2,91 | 4,63 | −1,37 |
| IX | | | | | | | | 14,56 | 30,00 |
| | | | | | | | | 7,54 | 1,54 |
| X | | | | | | | | | 15,44 |
| | | | | | | | | | −6,00 |

Tabelka wartości współczynników $\beta$

| Nr p-ktu | II | III | IV | V | VI | VIII | IX | X | XI |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| I | 5156 | −3450 | −11710 | −2619 | 280 | −864 | −10069 | −8514 | −8068 |
| II | | 3783 | 3071 | −2729 | −28337 | 952 | −5845 | −4031 | 0 |
| III | | | −10085 | −2355 | −10112 | 1095 | −9974 | −9733 | −2086 |
| IV | | | | −1620 | −10174 | 2800 | −9739 | −9605 | 8430 |
| V | | | | | −3522 | −972 | −6907 | −5432 | −3232 |
| VI | | | | | | −5380 | −9987 | −9922 | −4911 |
| VIII | | | | | | | −4736 | −760 | −57 |
| IX | | | | | | | | −10125 | −9447 |
| X | | | | | | | | | −4795 |

$\times 10^{-8}$

## LITERATURA

[1] *Lazzarini T.*: Geodezyjne pomiary odkształceń i ich zastosowanie w budownictwie. PPWK, Warszawa 1961.

*Rękopis złożono w Redakcji we wrześniu 1961 r.*

*ВОЙЦЕХ ЯНУШ*

# ПРОБЛЕМА ИДЕНТИФИКАЦИИ ПОСТОЯННЫХ ПУНКТОВ В КОНТРОЛЬНЫХ СЕТЯХ ПРИ ИССЛЕДОВАНИЯХ ДЕФОРМАЦИИ

## Резюме

Доклад занимается проблемой идентификации тех пунктов наблюдаемой сети, которые не подверглись перемещениям в интервале времени между двумя измерениями углов или направлении в сети.

Предлагается идентифицировать постоянные пункты следующим способом: уравниваются разности результатов измерении тех же самых углов или направлении, определяя составляющие перемещении $dx$, $dy$ пунктов в рассматриваемом интервале времени между измерениями. Это уравнивание ведется принимая два пункты сети за неподвижные. Если бы правильность этой предпосылки не была оправдана получением в результате уравнивания малых величин $dx$, $dy$ для — по меньшей мере — еще одного пункта сети, следует вычислить значения кооэффициентов $\beta$, отвечающих отрезкам, соединяющим во всех комбинациях пункты наблюдаемой сети. Величины коэффициентов вычисляются по формуле:

$$\beta = -\frac{\Delta x_{ik}}{\Delta x_{ik}^2 + \Delta y_{ik}^2}(dx_k - dx_i) - \frac{\Delta y_{ik}}{\Delta x_{ik}^2 + \Delta y_{ik}^2}(dy_k - dy_i),$$

где: $\Delta x_{ik}$, $\Delta y_{ik}$ — приращения координат на отрезке, которого начало находится в пункте $i$, а конец в пункте $k$,

$dx_i, dy_i, dx_k, dy_k$ — составляющие перемещении пунктов $i$, $k$, полученные из уравнивания.

Число коэффициентов $\beta$, значение которых нужно вычислить, равняется числу комбинации взаимных связей между пунктами сети: $\frac{(n-1)n}{2}$, где $n$ — число пунктов сети.

Для всех отрезков, соединяющих между собой те пункты сети, которые остались неподвижными в течение интервала времени между

двумя измерениями, должны получится значения коэффициентов $\beta$ приблизительно одинаковые и с одинаковым знаком. На основании составленной таблицы значении всех вычисленных коэффициентов $\beta$ можно отыскать пункты, которые сохранили постоянное положение.

Опираясь на пунктах, идентифицированных как неподвижные, можно вычислить — путем трансформации полученных из уравнивания поправок $dx$, $dy$ — действительные величины перемещении изменивших свое положение пунктов.

*WOJCIECH JANUSZ*

# PROBLEM OF IDENTIFICATION OF FIX POINTS IN CONTROL NETS BY THE MEASUREMENTS OF DEFORMATIONS


## Summary

The problem of identification of those points of a surveying net that did not undergo any positional change in the time interval between two angle or direction measurements in a net, has been discussed in this paper.

To identify fix points following way is proposed:

The measurement differences of the same angles or directions are compensated and the components $dx$, $dy$ of the points positional changes are determined for the time interval between the measurements. The compensation is carried out by assuming two net points being immovable. If the result of the compensation had not proved the assumption to be right by delivering small quantities of $dx$, $dy$ for at least one netpoint more, it would be indispensable to compute the values of $\beta$ corresponding to the sectors interconnecting the netpoints in all combinations. The quantities $\beta$ are computed in accordance with the formula:

$$\beta = - \frac{\Delta x_{ik}}{\Delta x_{ik}^2 + \Delta y_{ik}^2} (d x_k - d x_i) - \frac{\Delta y_{ik}}{\Delta x_{ik}^2 + \Delta y_{ik}^2} (d y_k - d y_i) ,$$

where: $\Delta x_{ik}$, $\Delta y_{ik}$ — latitude and departur of the line starting at a point $i$ and terminating at a point $k$,

$dx_i$, $dy_i$, $dx_k$, $dy_k$ — shifting components of the points $i$, $k$ determined by compensation.

The number of coefficients $\beta$ the values of which have to be computed is equal to the number of reciprocal junctions of netpoints — $\frac{(n-1)n}{2}$, where $n$ — number of netpoints.

All the sectors interconnecting the netpoints that remained unmoved in the period between two measurements should get the same values of $\beta$ and with the same sign.

Having computed coefficients of $\beta$ tabulated, the points which retained their fix position might be found.

The identified points adopted as being fix, real shifting amount of displaced points can be computed by transforming the corrections $dx$, $dy$ obtained from compensation.