

JERZY BOKUN

526.7 : 526.3 (438)

## **Analiza i wnioski wynikające z wykorzystania materiałów grawimetrycznych przy opracowaniu geodezyjnych pomiarów podstawowych w Polsce**

### **1. Wstęp**

Nowe sieci triangulacji głównej i niwelacji precyzyjnej w Polsce zostały obliczone przy uwzględnieniu specjalnie przygotowanych i opracowanych materiałów grawimetrycznych.

Całość zagadnień naukowo-badawczych, związanych z przygotowaniem danych grawimetrycznych, ich odpowiednim opracowaniem, jak również ze sporządzeniem dokumentacji dla praktycznych potrzeb geodezyjnych pomiarów podstawowych w Polsce, przedstawiona została przez autora w „Pracach Instytutu Geodezji i Kartografii” t. VI, nr 1, 1958 r. [4]. Praktyczne wykorzystanie, po raz pierwszy w warunkach polskich, rzeczywistych danych grawimetrycznych przy obliczeniach triangulacji głównej i niwelacji precyzyjnej umożliwia przeprowadzenie analizy nad wpływem danych grawimetrycznych i celowością ich uwzględniania przy opracowaniu polskich geodezyjnych pomiarów podstawowych.

Rozważania dotyczące konkretnych materiałów powinny dać też odpowiedź na pytanie czy założenia teoretyczne i praktyczne, przyjęte podczas przygotowania i opracowania materiałów grawimetrycznych [4], zostały potwierdzone uzyskanymi praktycznie wynikami i ich dokładnością.

Z punktu widzenia naukowego istotne jest również zbadanie możliwości odpowiedniego zastosowania posiadanych materiałów grawimetrycznych przy pracach nad zagadnieniem systemów wysokości i przebiegu geoidy w warunkach polskich.

Analiza i wnioski wynikające z wykorzystania materiałów grawimetrycznych przy opracowaniu sieci triangulacji głównej i sieci niwelacji precyzyjnej w Polsce pozwalają zasugerować szereg wniosków na przyszłość, zarówno z punktu widzenia praktycznych potrzeb, jak też prac naukowych z zakresu grawimetrii geodezyjnej w Polsce.

## 2. Analiza i wnioski wynikające z wykorzystania materiałów grawimetrycznych w polskiej sieci triangulacji głównej

Przed wyrównaniem polskiej sieci triangulacji głównej wszystkie pomierzone kąty i bazy triangulacyjne zredukowano na elipsoidę odniesienia. Uwzględniono przy tym też redukcje ze względu na wpływ odchylenia pionu i odstępów geoidy od elipsoidy odniesienia. Jako dane wyjściowe do wprowadzenia tych redukcji zostały wyznaczone dla wszystkich punktów triangulacyjnych składowe względnych odchylenia pionu. Dokładne wyznaczenia tych składowych przeprowadzono przy wykorzystaniu przygotowanych i odpowiednio opracowanych danych grawimetrycznych [4].

Obecnie po obliczeniu sieci triangulacji głównej, można rozważyć czy przygotowane materiały grawimetryczne spełniły swe zadania, a tym samym czy słuszna była koncepcja i założenia postawione przez autora w cytowanej poprzednio pracy [4]. Analiza teoretyczna dokładności wyznaczeń składowych względnego odchylenia pionu może być teraz skonfrontowana przez porównanie z wyznaczeniami astronomicznymi z lat 1956—58 (nie uwzględnionymi już oczywiście przy obliczaniu sieci triangulacyjnej). Rozważania te pozwolą na realną ocenę dokładności danych grawimetrycznych w zastosowaniu do potrzeb triangulacji.

Dalszym zagadnieniem wymagającym zastanowienia, to sprawa celowości wprowadzenia redukcji do baz i kątów ze względu na odchylenia pionu i odstęp geoidy, uwzględniając konkretną sieć i realne warunki polskie. Należy przy tym zwrócić uwagę nie tylko na aspekt praktyczny, ale też i naukowy, jaki powinna spełniać podstawowa sieć triangulacyjna.

*2.1. Analiza dokładności określenia względnych odchylenia pionu przy wykorzystaniu materiałów grawimetrycznych dla punktów triangulacyjnych (nie będących punktami astronomiczno-geodezyjnymi)*

W wymienionej poprzednio pracy autora [4] przeprowadzona była szczegółowa analiza dokładności danych grawimetrycznych, ich przygotowania oraz zastosowania do obliczenia składowych grawimetrycznego odchylenia pionu ( $\xi_{gr}$ ,  $\eta_{gr}$ ) dla punktów astronomiczno-geodezyjnych, potrzebnych do ustalenia poprawek  $\Delta\xi$  i  $\Delta\eta$  ze względu na przejście od grawimetrycznego do względnego odchylenia pionu.

Zastanówmy się obecnie, z jaką dokładnością zostały określone składowe względne odchylenia pionu ( $\xi$  i  $\eta$ ) dla poszczególnych punktów triangulacyjnych w oparciu o dane grawimetryczne i odpowiednio usytuowane 52 punkty astronomiczno-geodezyjne sieci triangulacji głównej.

Rozważania te przeprowadzimy w oparciu o teoretyczne założenia wymienionej pracy [4] i praktycznie osiągnięte rezultaty. Wyniki tej analizy sprawdzimy dokonując porównania pomiędzy wartościami składo-

wych odchylen pionu dla punktów triangulacyjnych, obliczonych na podstawie wykorzystania materiałów grawimetrycznych, z wartościami tych składowych, obliczonych w oparciu o wyniki późniejszych pomiarów astronomicznych, tj. z 1956 i 1958 r. i o wyniki dawnych niemieckich pomiarów astronomicznych (nie wykorzystanych w sieci triangulacji głównej).

### 2.1.1. Analiza dokładności określenia składowych odchylen pionu dla punktów triangulacyjnych

#### 2.1.1.1. Ogólne założenia i wzory analizy

Dla wszystkich punktów triangulacji głównej (nie będących punktami astronomiczno-geodezyjnymi) obliczone zostały — zgodnie z założeniami teoretycznymi Vening Meinesza [27], de Graaff Huntera [8], Michajłowa [14] i Mołodeńskiego [15] oraz praktycznymi uwagami podanymi przez Zakatowa [28], jak też z rozważaniami przedstawionymi przez autora (p. 2.2 i p. 9.4 cytowanej pracy [4]) — składowe względnych odchylen pionu (w stosunku do odpowiednio zorientowanej elipsoidy Krasowskiego) na podstawie przygotowanych materiałów grawimetrycznych.

Obliczenia te oparte są na następującym postępowaniu. Mianowicie dla punktu triangulacyjnego  $A$  (nie będącego punktem astronomicznym) składowe względne odchylenia pionu ( $\xi_A$  i  $\eta_A$ ) wyrazić można, jak wiadomo, wzorem:

$$\xi_A = \xi_{gr.A} + \Delta\xi_A; \quad \eta_A = \eta_{gr.A} + \Delta\eta_A,$$

gdzie  $\xi_{gr.A}$ ,  $\eta_{gr.A}$  — składowe częściowego odchylenia pionu obliczone na podstawie samych materiałów grawimetrycznych (map anomalii Faye'a) z obszaru o promieniu  $r$  (np. 300 km) od punktu  $A$ ,

$\Delta\xi_A$ ,  $\Delta\eta_A$  — wartości poprawek dla punktu  $A$ , uwzględniających przejście od składowych grawimetrycznego do składowych względnego odchylenia pionu; są one interpolowane dla punktu  $A$  na podstawie wartości  $\Delta\xi_{p.L}$  i  $\Delta\eta_{p.L}$  wyznaczonych na najbliższych od  $A$  punktach astronomiczno-geodezyjnych.

Wartości tych poprawek ( $\Delta\xi_{p.L}$  i  $\Delta\eta_{p.L}$ ) na punkcie astronomiczno-geodezyjnym obliczamy z wzorów:

$$\begin{aligned} \Delta\xi_{p.L} &= (\varphi_{p.L}^a - \varphi_{p.L}^g) - \xi_{gr.p.L}, \\ \Delta\eta_{p.L} &= (\lambda_{p.L}^a - \lambda_{p.L}^g) \cos \varphi_{p.L} - \eta_{gr.p.L}, \end{aligned}$$

$\varphi^a$ ,  $\lambda^a$  — współrzędne wyznaczone na podstawie obserwacji astronomicznych (zredukowane na geoidę),

$\varphi^g$ ,  $\lambda^g$  — współrzędne geodezyjne przybliżone (przed wyrównaniem),

$\xi_{gr.p.L}, \eta_{gr.p.L}$  — składowe częściowego odchylenia pionu dla punktu astronomiczno-geodezyjnego, obliczone na podstawie materiałów grawimetrycznych z obszaru o promieniu  $r$  od tego punktu (promień  $r$  — identyczny jak przy obliczeniu  $\xi_{gr.A}$  i  $\eta_{gr.A}$ ).

Na podstawie powyższego możemy napisać:

$$\Delta\xi_A = \Delta\xi_{p.L} + \delta\Delta\xi_{A.int.}$$

$$\Delta\eta_A = \Delta\eta_{p.L} + \delta\Delta\eta_{A.int.},$$

przy czym  $\delta\Delta\xi_{A.int.}$  i  $\delta\Delta\eta_{A.int.}$  uzyskuje się dla punktu  $A$  przez interpolację pomiędzy wartościami  $\Delta\xi_{p.L}$  i  $\Delta\eta_{p.L}$  na najbliższych od  $A$  punktach astronomiczno-geodezyjnych.

Na podstawie powyższego średni błąd wyznaczenia składowych względnego odchylenia pionu na punkcie triangulacyjnym ( $\xi_A, \eta_A$ ) możemy określić ze wzorów:

$$m_{\xi_A} = \pm \sqrt{m_{\xi_{gr.A}}^2 + m_{\Delta\xi_A}^2}; \quad m_{\eta_A} = \pm \sqrt{m_{\eta_{gr.A}}^2 + m_{\Delta\eta_A}^2},$$

gdzie:

$$m_{\Delta\xi_A} = \pm \sqrt{m_{\Delta\xi_{p.L}}^2 + m_{\delta\Delta\xi_{A.int.}}^2}; \quad m_{\Delta\eta_A} = \pm \sqrt{m_{\Delta\eta_{p.L}}^2 + m_{\delta\Delta\eta_{A.int.}}^2},$$

$$m_{\Delta\xi_{p.L}} = \pm \sqrt{m_{\varphi_{p.L}^a}^2 + m_{\varphi_{p.L}^g}^2 + m_{\xi_{gr.p.L}}^2};$$

$$m_{\Delta\eta_{p.L}} = \pm \sqrt{(\cos \varphi \cdot m_{\lambda_{p.L}^a})^2 + (\cos \varphi \cdot m_{\lambda_{p.L}^g})^2 + m_{\eta_{gr.p.L}}^2}.$$

Dla określenia przewidywanej wielkości średnich błędów  $m_{\xi_A}$  i  $m_{\eta_A}$  rozpatrzmy kolejno uzyskane dokładności w polskiej sieci triangulacji głównej oraz weźmy pod uwagę rozważania poprzednie autora [4].

#### 2.1.1.2. Określenie średnich błędów $m_{\Delta\xi_{p.L}}$ i $m_{\Delta\eta_{p.L}}$

A) Średnie błędy wyznaczeń astronomicznych  $\varphi_{p.L}^a$  i  $\lambda_{p.L}^a$  obliczone z pomiarów wykonanych na 52 punktach sieci triangulacji głównej (34 punktach Laplace'a i 18 punktach astronomiczno-grawimetrycznej niwelacji) kształtują się odpowiednio:

$$0'',04 \leq |m_{\varphi^a}| \leq 0'',28; \quad 0'',04 \leq |m_{\lambda^a}| \leq 0'',46.$$

Średnia wartość tych średnich błędów wynosi:

$$m_{\varphi_{p.L}^a} = \pm 0'',14 \quad \text{i} \quad m_{\lambda_{p.L}^a} = \pm 0'',23.$$

Zwróćmy uwagę, iż biorąc przeciętną szerokość geograficzną dla Polski  $\varphi = 52^\circ$  uzyskujemy  $\cos \varphi \cdot m_{\lambda_{p.L}^a} = \pm 0'',14$ , a więc wpływ błędów wyznaczeń astronomicznych w polskiej sieci na składowe odchylenie pionu  $\xi$  i  $\eta$  jest analogiczny ( $\pm 0'',14$ ).

B) Przybliżone współrzędne geodezyjne  $\varphi_{p.L}^g$ ,  $\lambda_{p.L}^g$  obliczone przed wyrównaniem, obciążone są średnim błędem około  $\pm 3$  m, tj.

$$m_{\varphi_{p.L}^g} \cong \pm 0'',09; \quad m_{\lambda_{p.L}^g} \cong \pm 0'',15 \quad (\text{czyli } \cos \varphi \cdot m_{\lambda_{p.L}^g} \cong \pm 0'',09).$$

Wielkości tych błędów oszacowane zostały przez porównanie wyrównanych i przybliżonych współrzędnych geodezyjnych punktów astronomiczno-geodezyjnych sieci.

C) Zgodnie z rozważaniami autora, podanymi w p. 2.2. s. 17 wymienionej pracy [4], obliczone na podstawie przygotowanych materiałów grawimetrycznych składowe  $\xi_{gr.p.L}$  i  $\eta_{gr.p.L}$  (z danych grawimetrycznych w promieniu do około 300 km od punktu astronomiczno-geodezyjnego) obciążone są średnim błędem:

$$m_{\xi_{gr.p.L}} = m_{\eta_{gr.p.L}} = \pm 0''16 \sqrt{3} = \pm 0''28.$$

Na podstawie określonych (w punktach A, B, C) średnich błędów uzyskujemy:

$$m_{\Delta \xi_{p.L}} = \pm \sqrt{(0''14)^2 + (0''09)^2 + (0''28)^2} = \pm 0''33,$$

$$m_{\Delta \eta_{p.L}} = \pm \sqrt{(0''23 \times 0,62)^2 + (0''15 \times 0,62)^2 + (0''28)^2} = \pm 0''33.$$

#### 2.1.1.3. Określenie średnich błędów $m_{\Delta \xi_A}$ i $m_{\Delta \eta_A}$ .

Wartości  $\Delta \xi_A$  i  $\Delta \eta_A$  dla poszczególnego punktu triangulacyjnego A uzyskuje się praktycznie, jak wyżej powiedzieliśmy, na podstawie interpolacji liniowej pomiędzy wartościami  $\Delta \xi_{p.L}$  i  $\Delta \eta_{p.L}$  najbliższych punktów astronomiczno-geodezyjnych. Zagadnienie określenia średniego błędu interpolacji tej poprawki ( $m_{\delta \Delta \xi_{int.}}$  i  $m_{\delta \Delta \eta_{int.}}$ ) wiąże się przede wszystkim z odległością między punktami astronomiczno-geodezyjnymi, będącymi podstawą interpolacji oraz wielkością promienia obszaru, z którego dane grawimetryczne wykorzystano do obliczeń  $\xi_{p.L}$  i  $\eta_{p.L}$ .

Wzdłuż łańcuchów polskiej sieci triangulacji głównej odległości pomiędzy punktami astronomiczno-geodezyjnymi wynoszą przeciętnie 60—70 km. Średni błąd spowodowany interpolacją ocenia w takim przypadku Mołodeński [15] na  $\pm 0''2$  —  $0''3$ . Nie dysponując materiałami do obiektywnej własnej oceny wielkości tego średniego błędu przyjmijmy, zgodnie z teoretycznymi i praktycznymi rozważaniami Mołodeńskiego:

$$m_{\delta \Delta \xi_{int}} = m_{\delta \Delta \eta_{int}} = \pm 0''30.$$

Wobec powyższego dla punktu triangulacyjnego A otrzymujemy:

$$m_{\Delta \xi_A} = \pm \sqrt{m_{\Delta \xi_{p.L}}^2 + m_{\delta \Delta \xi_{int.}}^2} = \pm \sqrt{(0''33)^2 + (0''30)^2} = \pm 0''45$$

$$m_{\Delta \eta_A} = \pm \sqrt{m_{\Delta \eta_{p.L}}^2 + m_{\delta \Delta \eta_{int.}}^2} = \pm \sqrt{(0''33)^2 + (0''30)^2} = \pm 0''45.$$

#### 2.1.1.4. Określenie średnich błędów $m_{\xi_{gr.A}}$ i $m_{\eta_{gr.A}}$

W opublikowanej poprzednio pracy [4] w p. 2.2. przeprowadzono analizę dokładności wyznaczeń składowych odchyłeń pionu z danych grawimetrycznych dla punktów Laplace'a i punktów astronomiczno-geodezyjnych.

Wokół tych punktów astronomicznych zostało dokonane specjalne zagęszczenie punktów grawimetrycznych, a w otoczeniu punktów triangulacyjnych, nie będących punktami astronomiczno-geodezyjnymi, zagęszczenie zdjęcia grawimetrycznego — jak wiadomo [4] — było oczywiście rzadsze.

W związku z tym średnie błędy wyznaczenia  $\xi_{gr.A}$  i  $\eta_{gr.A}$  dla punktów triangulacyjnych będą większe niż średnie błędy wyznaczeń  $\xi_{gr.p.L}$  i  $\eta_{gr.p.L}$  dla punktów astronomiczno-geodezyjnych. Wpływ na tę różnicę będą miały średnie błędy anomalii Faye'a z najbliższego otoczenia punktu triangulacyjnego, tj. praktycznie z obszaru o promieniu kilkunastu kilometrów, gdyż w dalszych obszarach jakość zdjęcia grawimetrycznego dla punktu triangulacyjnego i astronomiczno-geodezyjnego jest identyczna.

Średnie błędy wyznaczeń  $\xi_{gr.A}$  i  $\eta_{gr.A}$  będą większe w rejonach o lokalnej anomalii pola siły ciężkości i o dużym gradiencie anomalii Faye'a, co z kolei jest funkcją charakteru rzeźby terenu. Wobec tego oszacowanie średnich błędów  $m\xi_{gr.A}$  i  $m\eta_{gr.A}$  rozważymy oddzielnie dla terenu płaskiego, pagórkowatego, podgórskiego i górskiego.

W tym celu przeprowadzimy analizę porównawczą dla wybranych na terenie Polski 14 punktów (3 w terenie płaskim, 3 w pagórkowatym, 4 w podgórskim i 4 w górskim). Dla tych wybranych punktów określono średnie wartości anomalii dla wszystkich wycinków sektorowych w promieniu do 20 km (na które podzielono otoczenie punktu w celu obliczenia grawimetrycznych odchyłeń pionu, zgodnie z założeniami podanymi w pracy autora [4], p. 2.2.) \*) na podstawie:

\*) Należy zaznaczyć, że dla strefy centralnej 0—1,5 km obliczenia przeprowadziliśmy dokonując podziału tej strefy na 8 sektorów. Anomalie Faye'a oszacowano na zewnętrznym obwodzie strefy ( $r = 1,5$  km) na dwusiecznej kąta środkowego poszczególnego sektora. Przy tak przyjętym podziale, zgodnie ze znanymi wzorami [28]:

$$\xi = \frac{Q}{2\pi r \cdot g_0} \int_0^r \int_0^{2\pi} (g_0 - \gamma_0) \cos \alpha \cdot dr \cdot da$$

uzyskujemy dla  $da = \frac{2\pi}{8}$  i  $r = \text{const.}$ :  $\xi = \frac{Q}{8g} \sum_1^8 (g_0 - \gamma_0) \cos \alpha$ .

Praktycznie w tym przypadku obliczenie składowych odchyłeń pionu dla strefy 0—1,5 km przeprowadzić można wg wzorów:

$$\xi_{0-1,5} = 0,02628 \sum_1^8 (g_0 - \gamma_0) \cos \alpha; \quad \eta_{0-1,5} = 0,02628 \sum_1^8 (g_0 - \gamma_0) \sin \alpha$$

Średnie błędy tych składowych (zgodnie z s. 19 pracy autora [4]) wynoszą:

$$m\xi_{0-1,5} = m\eta_{0-1,5} = \pm 0,02628 \cdot 0,7 \cdot \frac{1}{8} \cdot m_{(g_0 - \gamma_0)} = \pm 0,0029 \cdot m_{(g_0 - \gamma_0)}$$

Dla średniego błędu anomalii Faye'a  $m_{(g_0 - \gamma_0)} = \pm 1,5$  mgal uzyskujemy:

$$m\xi_{0-1,5} = m\eta_{0-1,5} = \pm 0,0044$$

$$|m\xi_{0-1,5}| = |m\eta_{0-1,5}| \leq 0,0044$$

Zastosowanie opisanego postępowania dla strefy centralnej jest praktycznie wygodniejsze i daje dokładniejsze rezultaty niż korzystanie z gradientów.

- a) materiałów grawimetrycznych szczegółowych (analogicznie do zagęszczenia dla punktu astronomiczno-geodezyjnego) [4],
- b) materiałów grawimetrycznych ogólnych (zgodnie z danymi grawimetrycznymi opracowanymi dla punktów triangulacyjnych nie będących punktami astronomiczno-geodezyjnymi [4]).

Różnice wyznaczeń średnich anomalii dla wycinków sektorowych na podstawie materiałów grawimetrycznych wymienionych w punkcie a) i materiałów wymienionych w punkcie b) uważać można jako średnie błędy. Umożliwiają one ocenę średniego błędu określenia anomalii oddzielnie dla każdej strefy wokół punktu triangulacyjnego, przy tymczasowym przyjęciu wartości wyznaczanych z materiałów a) za bezbłędne.

W tablicy 1 podano obliczone dla 14 punktów wyżej wymienione wartości średnich błędów anomalii dla wycinka sektorowego poszczególnych stref.

Dla terenu równinnego, pogórkowatego i podgórskiego przeprowadzono w tabl. 1 porównanie w odniesieniu do anomalii Faye'a, natomiast dla 4 punktów terenu górskiego — w stosunku do anomalii Bouguera. Było to uwarunkowane tym, że do obliczeń składowych grawimetrycznego odchylenia pionu dla punktów triangulacyjnych w górach użyto map anomalii Bouguera oraz map warstwicznych \*).

Dla terenów górskich średni błąd wartości anomalii Faye'a, reprezentującej poszczególny wycinek sektorowy wokół punktu triangulacyjnego, będzie wynosił:

$$m_{an.F} = \pm \sqrt{m_{an.B}^2 + C^2 \cdot m_H^2},$$

przy czym  $C$  możemy przyjąć równe 0,1 mgal/m.

Średnie wysokości  $H$  npm wycinków sektorowych określa się z map warstwicznych (skala 1 : 100 000 lub 1 : 200 000). Ponieważ punkty triangulacyjne w rejonie górskim położone są z reguły na szczytach gór, a więc

---

\*) W terenie górzystym gradient horyzontalny anomalii Faye'a jest bardzo duży. Zmienność anomalii Faye'a, jako funkcja przede wszystkim wysokości, różni się w wielu przypadkach znacznie (do kilkudziesięciu miligali) od przyjętej liniowej zmienności między pomiarowymi punktami grawimetrycznymi. Wobec tego dla potrzeb obliczenia  $\xi_{gr}$  i  $\eta_{gr}$  w górach stosuje się zazwyczaj mapy anomalii Bouguera (charakteryzujące się mniejszą zmiennością w zależności od rzeźby terenu) o stałej gęstości (np.  $\sigma = 2,4 \text{ gcm}^{-3}$ ) oraz topograficzne mapy hipsometryczne, celem odpowiedniego przejścia od wartości anomalii Bouguera do anomalii Faye'a. W związku z tym:  $\xi_{gr} = \xi_{gr.an.Boug.} + C \cdot \xi_{gr.hips.}$ ;  $\eta_{gr} = \eta_{gr.an.Boug.} + C \cdot \eta_{gr.hips.}$ .

Obliczenie  $\xi_{gr.hips.}$  i  $\eta_{gr.hips.}$  przeprowadza się na mapie warstwicznej analogicznie jak na mapie anomalii, z tym, że warstwice w metrach traktuje się jako izolinie. Współczynnik  $C$  dla warunków polskich wynosi  $C = 0,0419 \sigma$ . Przy przyjęciu  $\sigma = 2,4 \text{ gcm}^{-3}$  (co odpowiada przeciętnej gęstości skał w Karpatach i Sudetach) uzyskujemy  $C = 0,1$ .

Tablica 1

| Średnie błędy określenia dla wycinka sektorowego |                                                                           |                         |                    |              |                              |
|--------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------|-------------------------|--------------------|--------------|------------------------------|
| Strefa<br>km                                     | Punkty                                                                    | anomalii Faye'a<br>mgal |                    |              | anomalii<br>Bougiera<br>mgal |
|                                                  |                                                                           | dla terenu              |                    |              |                              |
|                                                  |                                                                           | równinnego              | pagórkowa-<br>tego | podgórskiego |                              |
| 0 - 1,5                                          | 1                                                                         | ± 1,3                   | ± 1,9              | ± 2,1        | ± 2,8                        |
|                                                  | 2                                                                         | 1,7                     | 1,5                | 5,0          | 2,5                          |
|                                                  | 3                                                                         | 1,5                     | 2,0                | 3,7          | 3,6                          |
|                                                  | 4                                                                         | —                       | —                  | 3,4          | 3,9                          |
|                                                  | średnio                                                                   | ± 1,5                   | ± 1,8              | ± 3,6        | ± 3,2                        |
| 1,5 - 5,0                                        | 1                                                                         | ± 1,2                   | ± 1,2              | ± 1,7        | ± 4,2                        |
|                                                  | 2                                                                         | 1,1                     | 1,1                | 5,1          | 2,5                          |
|                                                  | 3                                                                         | 1,2                     | 1,4                | 4,0          | 2,7                          |
|                                                  | 4                                                                         | —                       | —                  | 3,7          | 2,6                          |
|                                                  | średnio                                                                   | ± 1,2                   | ± 1,2              | ± 3,6        | ± 3,0                        |
| 5,0 - 7,3                                        | 1                                                                         | ± 0,9                   | ± 1,1              | ± 1,8        | ± 3,7                        |
|                                                  | 2                                                                         | 0,3                     | 1,2                | 3,5          | 1,9                          |
|                                                  | 3                                                                         | 0,8                     | 0,9                | 3,6          | 2,0                          |
|                                                  | 4                                                                         | —                       | —                  | 3,1          | 3,0                          |
|                                                  | średnio                                                                   | ± 0,7                   | ± 1,1              | ± 3,0        | ± 2,6                        |
| 7,3 - 10,7                                       | 1                                                                         | Identyfikacja przebiegu |                    | ± 3,4        | ± 3,1                        |
|                                                  | 2                                                                         | izolinii anomalii wg    |                    | 2,1          | 2,2                          |
|                                                  | 3                                                                         | materiałów grawime-     |                    | 3,2          | 1,9                          |
|                                                  | 4                                                                         | trycznych b) i a)       |                    | 3,2          | 2,8                          |
|                                                  | średnio                                                                   |                         |                    | ± 3,0        | ± 2,7                        |
| < 10,7                                           | Identyfikacja obrazu anomalii wg materiałów gra-<br>wimetrycznych b) i a) |                         |                    |              |                              |

w ich najbliższym otoczeniu zmienność wysokości jest znaczna (duży gradient). Biorąc pod uwagę cięcie warstwic można w tym przypadku realnie ocenić dokładność wyznaczenia z mapy średniej wysokości w otoczeniu punktu triangulacyjnego na 30—50 m.

Przy tych założeniach oraz obliczeniach podanych w tabl. 1 średni błąd określenia anomalii Faye'a, na podstawie materiałów podanych w punkcie b) dla wycinka sektorowego w otoczeniu punktu triangulacyjnego w górach, będzie kształtował się następująco (tabl. 2).

Wyznaczone dotychczas (tabl. 1 i tabl. 2) wartości średnich błędów anomalii Faye'a, reprezentującej wycinek sektorowy odpowiedniej strefy,

Tablica 2

| Strefa<br>km | $m_{an.B.}$<br>(z tabl. 1)<br>mgal | $m_H$<br>m | $m_{an.F.}$<br>(b)<br>mgal |
|--------------|------------------------------------|------------|----------------------------|
| 0—1,5        | $\pm 3,2$                          | $\pm 50$   | $\pm 5,9$                  |
| 1,5—5,0      | $\pm 3,0$                          | $\pm 40$   | $\pm 5,0$                  |
| 5,0—7,3      | $\pm 2,6$                          | $\pm 35$   | $\pm 4,4$                  |
| 7,3—10,7     | $\pm 2,7$                          | $\pm 30$   | $\pm 4,0$                  |

na podstawie materiałów b) ( $m_{an.F.}^{(b)}$ ), uzyskano przy założeniu bezbłędności materiałów a). Materiały te (a) jednak obarczone są średnimi błędami (nazwijmy je  $m_{an.F.}^{(a)}$ ), które przyjmujemy zgodnie z rozważaniami podanymi przez autora w p. 2.2, s. 18—21 cytowanej pracy [4].

W związku z tym całkowity średni błąd anomalii Faye'a, reprezentującej wycinek sektorowy wokół punktu triangulacyjnego, można przedstawić wzorem:

$$m_{an.F} = \pm \sqrt{m_{an.F.}^2{}^{(a)} + m_{an.F.}^2{}^{(b)}}$$

Przyjmując  $m_{an.F.}^{(a)}$  wg poprzednich założeń [4] mamy:

$$\begin{aligned} \text{dla strefy } 0-1,5 \text{ km} & \quad |m_{an.F.}^{(a)}| \leq 1,5 \text{ mgal} \\ \text{dla strefy } 1,5-5,0 \text{ km} & \quad |m_{an.F.}^{(a)}| \leq 2,2 \text{ ,,} \\ \text{dla strefy } 5,0-7,3 \text{ km} & \quad |m_{an.F.}^{(a)}| \leq 2,9 \text{ ,,} \\ \text{dla strefy } 7,3-30 \text{ km} & \quad |m_{an.F.}^{(a)}| \leq 2,9 \text{ ,,} \end{aligned}$$

Obliczone na podstawie powyższego całkowite średnie błędy  $m_{an.F}$  dla wycinków sektorowych poszczególnych kategorii terenu i stref wokół punktu triangulacyjnego przedstawia tabl. 3.

Dla dalszych stref (tj.  $> 10,7$  km) nie występuje już praktycznie — w materiałach grawimetrycznych przygotowanych dla potrzeb triangulacji — różnica w gęstości zdjęcia grawimetrycznego wokół punktu trian-

Tablica 3

| Strefa<br>km | Kategoria terenu            |                    |                    |                    |
|--------------|-----------------------------|--------------------|--------------------|--------------------|
|              | równinny                    | pagórkowaty        | podgórski          | górski             |
|              | $m_{an.F}$<br>mgal          | $m_{an.F}$<br>mgal | $m_{an.F}$<br>mgal | $m_{an.F}$<br>mgal |
| 0—1,5        | $\pm 2,1$                   | $\pm 2,3$          | $\pm 3,9$          | $\pm 6,1$          |
| 1,5—5,0      | $\pm 2,5$                   | $\pm 2,5$          | $\pm 4,2$          | $\pm 5,5$          |
| 5,0—7,3      | $\pm 3,0$                   | $\pm 3,1$          | $\pm 4,2$          | $\pm 5,3$          |
| 7,3—10,7     | $m_{an.F} - m_{an.F}^{(a)}$ | $\pm 2,9$          | $\pm 4,2$          | $\pm 4,9$          |

Tablica 4

| Strefa<br>km                        | Dla punktu triangulacyjnego w terenie: |                            |                    |                            |                              |                            | Dla punktu astr.-geod.<br>Przewidywane średnie<br>błędy |
|-------------------------------------|----------------------------------------|----------------------------|--------------------|----------------------------|------------------------------|----------------------------|---------------------------------------------------------|
|                                     | równinnym                              | pagórkowatym               |                    | podgórskim                 |                              | górskim                    |                                                         |
|                                     | $m_{an.F}$<br>mgal                     | $m_{\xi gr} = m_{\eta gr}$ | $m_{an.F}$<br>mgal | $m_{\xi gr} = m_{\eta gr}$ | $m_{an.F}$<br>mgal           | $m_{\xi gr} = m_{\eta gr}$ | $m_{an.F}$<br>mgal                                      |
| 0-1,5                               | $\pm 2,1$                              | $\pm 0,13$                 | $\pm 2,3$          | $\pm 0,14$                 | $\pm 3,9$                    | $\pm 0,23$                 | $\pm 1,5$                                               |
| 1,5-5,0                             | $\pm 2,5$                              | $\pm 0,13$                 | $\pm 2,5$          | $\pm 0,13$                 | $\pm 4,2$                    | $\pm 0,21$                 | $\pm 2,2$                                               |
| 5,0-7,3                             | $\pm 3,0$                              | $\pm 0,05$                 | $\pm 3,1$          | $\pm 0,05$                 | $\pm 4,2$                    | $\pm 0,07$                 | $\pm 2,9$                                               |
| 7,3-10,7                            | $\pm 0,10$                             | $\pm 0,10$                 | $\pm 0,10$         | $\pm 0,10$                 | $\pm 4,2$                    | $\pm 0,07$                 | $\pm 2,9$                                               |
| 10,7-30                             |                                        |                            |                    |                            | $\pm 4,9$                    | $\pm 0,08$                 | $\pm 2,9$                                               |
| 30-100                              | $\pm 0,11$                             | $\pm 0,11$                 | $\pm 0,11$         | $\pm 0,11$                 | $\pm 0,08$                   | $\pm 0,08$                 | $\pm 3,8$                                               |
| 100-300                             | $\pm 0,16$                             | $\pm 0,16$                 | $\pm 0,16$         | $\pm 0,16$                 | $\pm 0,16$                   | $\pm 0,16$                 | $\pm 9,0$                                               |
| $m_{\xi gr} = m_{\eta gr}$<br>0-300 | $\pm 0,29$                             | $\pm 0,30$                 | $\pm 0,39$         | $\pm 0,52$                 | $\pm 0,27$<br>( $\pm 0,28$ ) |                            |                                                         |

gulacyjnego i astronomiczno-geodezyjnego. Dla tych stref zachodzi równość  $m_{an.F} = m_{an.F(a)}$ .

Obecnie można już przystąpić do obliczenia przewidywanych średnich błędów wyznaczenia składowych grawimetrycznego odchylenia pionu  $\xi_{gr.A}$  i  $\eta_{gr.A}$  dla punktu triangulacyjnego nie będącego punktem astronomicznym. Do tych obliczeń weźmy średnie błędy anomalii Faye'a ( $m_{an.F}$ ) wg danych tablicy 3 oraz wyniki liczbowe p. 2.2, s. 18—20 [4], dotyczące zależności między średnimi błędami anomalii Faye'a i średnimi błędami wyznaczeń składowych grawimetrycznego odchylenia pionu.

Wyniki obliczeń, przeprowadzonych dla przyjętych kategorii terenu, podane są w tablicy 4. Dla porównania podano także średnie błędy określenia  $\xi_{gr.p.L}$  i  $\eta_{gr.p.L}$  dla punktu astronomiczno-geodezyjnego (zgodnie z wartościami tych błędów przewidywanymi podczas przygotowania materiałów grawimetrycznych [4]).

Obliczenia w tablicy 4 przeprowadzono dla wielkości  $\xi_{gr}$  i  $\eta_{gr}$  wyznaczanych na podstawie materiałów grawimetrycznych z obszaru o promieniu 300 km od rozważanego punktu triangulacyjnego.

#### 2.1.1.5. Określenie średniego błędu wyznaczenia składowych odchylenia pionu dla punktu triangulacyjnego $m_{\xi_A}$ i $m_{\eta_A}$ .

Zgodnie z poprzednimi rozważaniami (p. 2.1.1.1.) średnie błędy wyznaczenia składowych odchylenia pionu dla punktu triangulacyjnego obliczymy ze wzorów:

$$m_{\xi_A} = \pm \sqrt{m_{\xi_{gr.A}}^2 + m_{\Delta\xi_A}^2}; \quad m_{\eta_A} = \pm \sqrt{m_{\eta_{gr.A}}^2 + m_{\Delta\eta_A}^2}.$$

W wyniku przeprowadzonej analizy (p. 2.1.1.2 i 2.1.1.3.) uzyskaliśmy średnie błędy  $m_{\Delta\xi_A} = m_{\Delta\eta_A} = \pm 0''45$ .

Przyjmując wartości  $m_{\xi_{gr}}$  i  $m_{\eta_{gr}}$ , obliczone w tabl. 4, możemy określić średni błąd wyznaczenia składowych odchylenia pionu dla punktu triangulacyjnego nie będącego punktem astronomiczno-geodezyjnym sieci triangulacyjnej ( $m_{\xi_A}$  i  $m_{\eta_A}$ ) dla poszczególnych kategorii terenu. Wyniki obliczeń podane są w tabl. 5.

Przeprowadzona powyżej analiza wykazała, że przewidywany średni błąd  $m_{\xi_A}$  i  $m_{\eta_A}$  wynosi  $\pm 0''5 - 0''7$ . Przy naszych rozważaniach i obliczeniach dokładności zakładaliśmy, że dla obszaru w promieniu 300 km od każdego punktu triangulacyjnego dysponowano materiałami grawimetrycznymi analogicznymi jak przygotowane materiały polskie [4].

W rzeczywistości jakość przygranicznych materiałów grawimetrycznych sąsiednich krajów mogła się różnić od naszych materiałów. Szczególnie dotyczy to obszarów górskich.

Tablica 5

|                                   | Kategoria terenu |             |            |            |
|-----------------------------------|------------------|-------------|------------|------------|
|                                   | równinny         | pagórkowaty | podgórski  | górski     |
| $m_{\xi_A}^{\eta_A} = m_{\eta_A}$ | $\pm 0,54$       | $\pm 0,54$  | $\pm 0,60$ | $\pm 0,69$ |

Brak pomiarów grawimetrycznych na morzu Bałtyckim przy naszym wybiżżu może wyraźnie obniżyć dokładność wyznaczeń  $\xi_A$  i  $\eta_A$  dla niektórych punktów triangulacyjnych położonych w pobliżu brzegu morza (o czym mówiliśmy już w cytowanej pracy [4] na s. 47 i s. 74).

*2.1.2. Porównanie wartości składowych odchyłeń pionu dla punktów triangulacyjnych obliczonych przy wykorzystaniu materiałów grawimetrycznych i obliczonych niezależnie na podstawie późniejszych pomiarów astronomicznych (z 1956 i 1958 r.)*

Przeprowadzona dotychczas analiza dokładności wyznaczenia składowych odchyłeń pionu przy wykorzystaniu danych grawimetrycznych (p. 2.1.1.) opierała się na analogii do rozważań teoretycznych, które były przeprowadzone podczas przygotowywania i opracowywania materiałów grawimetrycznych [4]. Słuszność założeń i przewidywanych teoretycznie dokładności można stwierdzić przez porównanie z wyznaczeniami dokonanymi niezależnie i w inny sposób.

Dla obiektywnej oceny słuszności rezultatów naszych dotychczasowych rozważań wykorzystamy wyniki pomiarów astronomicznych wykonanych w 1956 i 1958 r. dla potrzeb geodezyjnych. Te pomiary astronomiczne, obejmujące wyznaczenie szerokości geograficznej ( $\varphi^u$ ) i długości geograficznej ( $\lambda^u$ ) przeprowadzone były na kilkudziesięciu punktach triangulacji głównej\*). Celem tych wyznaczeń było uzyskanie dodatkowych danych dla badania figury Ziemi oraz częściowo dla skontrolowania odchyłeń pionu otrzymanych przy użyciu materiałów grawimetrycznych.

Wyniki pomiarów astronomicznych z 1956 i 1958 r. nie były już oczywiście uwzględnione w żadnych obliczeniach związanych z wyrównaniem

---

\*) Omawiane pomiary astronomiczne wykonane były przez Państwowe Przedsiębiorstwo Geodezyjne pod nadzorem naukowo-technicznym Instytutu Geodezji i Kartografii. Pomiary przeprowadzono w 1956 roku instrumentami Wild T4 oraz Tavistock, a w 1958 r. instrumentami Wild 74 oraz AU2"/10". Obserwacje wykonano ustawiając instrumenty na statywach. Wyznaczenia szerokości geograficznej instrumentami Wild T4 i AU"/10" przeprowadzono metodą Horrebow-Talcotta (obserwacja przeciętnie 8—10 par Talcotta), a instrumentem Tavistock metodą Piewcowa (obserwując 8—10 par Piewcowa). Wyznaczenie różnicy długości geograficznej  $\Delta\lambda$  (punkt obserwowany — Borowa Góra) wykonano wszystkimi w/w instrumentami stosując obserwacje par (8—10) metodą Cingera [34].

sieci triangulacji głównej. Stanowią więc one cenny, zupełnie niezależny materiał dla przeprowadzenia analizy. Dla kilkudziesięciu punktów triangulacji — nie będących punktami astronomiczno-geodezyjnymi sieci triangulacji głównej — dokonamy porównania wartości składowych odchylenia pionu  $\xi_A$  i  $\eta_A$  obliczonych przy wykorzystaniu:

- a) wyznaczeń astronomicznych  $\varphi^a$  i  $\lambda^a$  z 1956—1958 r. \*) i wyrównanych współrzędnych geodezyjnych  $\varphi^g$  i  $\lambda^g$ , oraz
- b) materiałów grawimetrycznych przygotowanych i opracowanych dla potrzeb triangulacji [4].

Dla porównania podzielimy 59 punktów triangulacji głównej — dla których możemy przeprowadzić analizę — w zależności od rzeźby terenu w jakim się znajdują. Rozważmy więc zgodności wartości składowych odchylenia pionu, obliczonych na podstawie innych materiałów i niezależnymi metodami, oddzielnie dla rejonu równinnego (10 punktów), pagórkowatego (9 punktów), podgórskiego (26 punktów) i górskiego (14 punktów).

Wyniki przeprowadzonego porównania podane są w tablicach 6a, 6b, 6c i 6d. W tablicach tych przyjęto następujące oznaczenia:

$m_{\varphi^a}$ ,  $m_{\lambda^a}$  — średni błąd astronomicznego wyznaczenia szerokości geograficznej ( $m_{\varphi^a}$ ) i długości geograficznej ( $m_{\lambda^a}$ ) (błąd wyznaczony przez obserwatorów na podstawie wewnętrznej zgodności na stanowisku podczas obserwacji, które trwały przeważnie 1—2 noce).

$m_{\lambda^a} \cdot \cos \varphi$  — obliczony średni błąd iloczynu ( $\lambda^a \cdot \cos \varphi$ ) przy przyjęciu wartości  $\cos \varphi$  jako bezbłędnej,

$$\delta \xi = \xi_{astr. 1956, 1958} - \xi_{s. trig.},$$

$$\delta \eta = \eta_{astr. 1956, 1958} - \eta_{s. trig.},$$

gdzie:

$\xi_{astr. 1956, 1958}$  i  $\eta_{astr. 1956, 1958}$  wartości składowych odchylenia pionu obliczone przy wykorzystaniu pomiarów astronomicznych z 1956 i 1958 r.,

$\xi_{s. trig.}$  i  $\eta_{s. trig.}$  — wartości tych składowych wyznaczone (zgodnie z p. 2.1.1.) przy wykorzystaniu materiałów grawimetrycznych [4] w ramach prac obliczeniowych sieci triangulacji głównej.

\*) Dla obliczenia astronomiczno-geodezyjnych odchylenia pionu zostały odpowiednio zredukowane pomierzone przez PPG w 1956 i 1958 r. szerokości i długości geograficzne. Zaobserwowane szerokości geograficzne zredukowano do średniego położenia bieguna oraz do poziomu geoidy (stosując uproszczony wzór).

Do zaobserwowanych różnic długości geograficznych wprowadzono redukcję do średniego położenia bieguna oraz redukcje uwzględniające poprawki nadawanych radiowych sygnałów czasu.

Tablica 6a

Teren równinny

| Lp.                | Nr<br>kolejny<br>punktu<br>triang. | Pomiary astronomiczne |                 |                 |                              | Różnice      |               |
|--------------------|------------------------------------|-----------------------|-----------------|-----------------|------------------------------|--------------|---------------|
|                    |                                    | Rok<br>pomiaru        | $m_{\varphi^a}$ | $m_{\lambda^a}$ | $m_{\lambda^a \cos \varphi}$ | $\delta \xi$ | $\delta \eta$ |
| 1                  | 1                                  | 1958                  | $\pm 0,23$      | $\pm 0,26$      | $\pm 0,15$                   | $\pm 0,49$   | $-0,15$       |
| 2                  | 2                                  | „                     | 0,11            | 0,23            | 0,14                         | $\pm 0,20$   | 0,08          |
| 3                  | 3                                  | „                     | 0,19            | 0,43            | 0,26                         | $-1,25$      | $\pm 0,81$    |
| 4                  | 4                                  | „                     | 0,16            | 0,32            | 0,20                         | $\pm 0,04$   | $\pm 0,67$    |
| 5                  | 5                                  | „                     | 0,27            | 0,46            | 0,28                         | $-0,69$      | $\pm 0,31$    |
| 6                  | 6                                  | „                     | 0,18            | 0,23            | 0,14                         | $\pm 0,16$   | $-0,44$       |
| 7                  | 7                                  | „                     | 0,28            | 0,57            | 0,34                         | $-0,90$      | 0,00          |
| 8                  | 8                                  | „                     | 0,22            | 0,30            | 0,18                         | $\pm 0,44$   | $\pm 1,01$    |
| 9                  | 9                                  | „                     | 0,22            | 0,54            | 0,32                         | $-0,56$      | $\pm 0,62$    |
| 10                 | 10                                 | „                     | 0,45            | 0,16            | 0,09                         | $\pm 0,06$   | $-0,21$       |
| przeciętna wartość |                                    |                       | $0,23$          |                 | $0,21$                       | $0,48$       | $0,43$        |
| średnia wartość    |                                    |                       | $\pm 0,26$      |                 | $\pm 0,24$                   | $0,60$       | $\pm 0,53$    |

Tablica 6b

Teren pagórkowaty

| Lp.                | Nr<br>kolejny<br>punktu<br>triang. | Pomiary astronomiczne |                 |                 |                              | Różnice      |               |
|--------------------|------------------------------------|-----------------------|-----------------|-----------------|------------------------------|--------------|---------------|
|                    |                                    | Rok<br>pomiaru        | $m_{\varphi^a}$ | $m_{\lambda^a}$ | $m_{\lambda^a \cos \varphi}$ | $\delta \xi$ | $\delta \eta$ |
| 1                  | 11                                 | 1958                  | $\pm 0,18$      | $\pm 0,35$      | $\pm 0,22$                   | $\pm 0,32$   | $-0,17$       |
| 2                  | 12                                 | „                     | 0,16            | 0,40            | 0,25                         | $\pm 0,47$   | $\pm 0,11$    |
| 3                  | 13                                 | „                     | 0,13            | 0,15            | 0,10                         | $\pm 0,03$   | $\pm 0,38$    |
| 4                  | 14                                 | „                     | 0,31            | 0,14            | 0,09                         | $-0,44$      | $-0,61$       |
| 5                  | 15                                 | „                     | 0,31            | 0,45            | 0,28                         | $-0,31$      | $\pm 0,53$    |
| 6                  | 16                                 | „                     | 0,12            | 0,40            | 0,25                         | $-0,45$      | $-0,17$       |
| 7                  | 17                                 | „                     | 0,28            | 0,47            | 0,30                         | $-0,73$      | $-0,50$       |
| 8                  | 18                                 | „                     | 0,19            | 0,44            | 0,28                         | $-0,08$      | $-0,08$       |
| 9                  | 19                                 | 1956                  | 0,17            | 0,39            | 0,25                         | $\pm 0,27$   | $-0,37$       |
| przeciętna wartość |                                    |                       | $0,21$          |                 | $0,23$                       | $0,34$       | $0,29$        |
| średnia wartość    |                                    |                       | $\pm 0,23$      |                 | $\pm 0,25$                   | $\pm 0,40$   | $\pm 0,37$    |

Tablica 6c

## Teren podgórski

| Lp.                | Nr<br>kolejny<br>punktu<br>triang. | Pomiary astronomiczne |                 |                 |                              | Różnice      |               |
|--------------------|------------------------------------|-----------------------|-----------------|-----------------|------------------------------|--------------|---------------|
|                    |                                    | Rok<br>pomiaru        | $m_{\varphi}^a$ | $m_{\lambda}^a$ | $m_{\lambda}^a \cos \varphi$ | $\delta \xi$ | $\delta \eta$ |
|                    |                                    |                       | $\pm$           | $\pm$           | $\pm$                        |              |               |
| 1                  | 20                                 | 1958                  | 0",14           | 0",40           | 0",25                        | -1",06       | +1",43        |
| 2                  | 21                                 | 1956                  | 0,12            | 0,20            | 0,13                         | -0,22        | +2,07         |
| 3                  | 22                                 | „                     | 0,12            | 0,16            | 0,10                         | +0,90        | +1,24         |
| 4                  | 23                                 | „                     | 0,10            | 0,16            | 0,10                         | +0,01        | -0,76         |
| 5                  | 24                                 | „                     | 0,07            | 0,28            | 0,18                         | +0,90        | +1,05         |
| 6                  | 25                                 | „                     | 0,19            | 0,41            | 0,26                         | +0,54        | -0,66         |
| 7                  | 26                                 | „                     | 0,35            | 0,48            | 0,31                         | +0,85        | -0,34         |
| 8                  | 27                                 | „                     | 0,15            | 0,13            | 0,08                         | +1,18        | +1,02         |
| 9                  | 28                                 | „                     | 0,52            | 0,46            | 0,30                         | -1,29        | +0,24         |
| 10                 | 29                                 | „                     | 0,12            | 0,30            | 0,19                         | +0,10        | +1,22         |
| 11                 | 30                                 | „                     | 0,10            | 0,70            | 0,45                         | +3,09        | +0,80         |
| 12                 | 31                                 | „                     | 0,10            | 0,41            | 0,26                         | +0,11        | +0,74         |
| 13                 | 32                                 | „                     | 0,21            | 0,39            | 0,25                         | -0,39        | +2,51         |
| 14                 | 33                                 | „                     | 0,54            | 0,84            | 0,55                         | -0,16        | +0,27         |
| 15                 | 34                                 | „                     | 0,22            | 0,58            | 0,37                         | -0,64        | -0,72         |
| 16                 | 35                                 | „                     | 0,24            | 0,31            | 0,20                         | +0,36        | +0,76         |
| 17                 | 36                                 | „                     | 0,17            | 0,30            | 0,19                         | +0,57        | +0,75         |
| 18                 | 37                                 | „                     | 0,19            | 0,31            | 0,20                         | +0,15        | +0,11         |
| 19                 | 38                                 | „                     | 0,59            | 0,43            | 0,28                         | -0,01        | -0,63         |
| 20                 | 39                                 | „                     | 0,14            | 0,36            | 0,23                         | -0,71        | +0,74         |
| 21                 | 40                                 | „                     | 0,24            | 0,83            | 0,54                         | -1,40        | +0,24         |
| 22                 | 41                                 | „                     | 0,31            | 0,55            | 0,38                         | -0,25        | -1,03         |
| 23                 | 42                                 | „                     | 0,35            | 0,89            | 0,58                         | -0,25        | -0,50         |
| 24                 | 43                                 | „                     | 0,54            | 0,44            | 0,29                         | +0,27        | -1,00         |
| 25                 | 44                                 | „                     | 0,31            | 0,53            | 0,34                         | -0,25        | 0,00          |
| 26                 | 45                                 | „                     | 0,36            | 0,40            | 0,26                         | -0,75        | +0,30         |
| przeciętna wartość |                                    |                       | 0",25           |                 | 0",28                        | 0",63        | 0",81         |
| średnia wartość    |                                    |                       | $\pm 0",30$     |                 | $\pm 0",32$                  | $\pm 0",89$  | $\pm 0",98$   |

W tablicach 6a—6d obliczone zostały dla  $m_{\varphi^a}$ ,  $m_{\lambda^a \cos \varphi}$ ,  $\delta\xi$  i  $\delta\eta$  — ich przeciętne bezwzględne wartości oraz ich wartości średnie \*) dla każdej kategorii terenu.

Z tablic 6a, 6b, 6c, 6d wynika, że różnice  $\delta\xi$  i  $\delta\eta$  mają zasadniczo charakter przypadkowy. Obliczone dla każdego z 59 punktów triangulacyjnych różnice oraz ich przeciętne i średnie wartości dla poszczególnych kategorii terenu charakteryzują wielkość występujących różnic.

Dla dodatkowego, przejrzystego zobrazowania obliczonych w tabl. 6 różnic przedstawimy w procentach otrzymane wielkości  $\delta\xi$  i  $\delta\eta$  w zależności od ich wartości bezwzględnych.

Tablica 6 d

Teren górski

| L.p.               | Nr kolejny punktu triang. | Rok pomiaru | Pomiary astronomiczne |                 |                              | Różnice     |              |
|--------------------|---------------------------|-------------|-----------------------|-----------------|------------------------------|-------------|--------------|
|                    |                           |             | $m_{\varphi^a}$       | $m_{\lambda^a}$ | $m_{\lambda^a \cos \varphi}$ | $\delta\xi$ | $\delta\eta$ |
|                    |                           |             | $\pm$                 | $\pm$           | $\pm$                        |             |              |
| 1                  | 46                        | 1956        | 0",16                 | 0",12           | 0",08                        | +1",63      | -0",50       |
| 2                  | 47                        | "           | 0,09                  | 0,26            | 0,16                         | +1,73       | 0,00         |
| 3                  | 48                        | "           | 0,11                  | 0,20            | 0,13                         | +1,03       | -0,11        |
| 4                  | 49                        | "           | 0,09                  | 0,11            | 0,07                         | +0,59       | -2,43        |
| 5                  | 50                        | "           | 0,18                  | 0,34            | 0,22                         | +0,27       | +1,39        |
| 6                  | 51                        | "           | 0,36                  | 0,48            | 0,31                         | -0,63       | +1,57        |
| 7                  | 52                        | "           | 0,18                  | 0,17            | 0,11                         | -0,06       | +1,52        |
| 8                  | 53                        | "           | 0,22                  | 0,41            | 0,27                         | +0,37       | +2,77        |
| 9                  | 54                        | "           | 0,15                  | 0,46            | 0,30                         | -1,93       | +0,05        |
| 10                 | 55                        | "           | 0,44                  | 0,47            | 0,31                         | -1,74       | +0,37        |
| 11                 | 56                        | "           | 0,12                  | 0,57            | 0,37                         | +0,21       | -1,84        |
| 12                 | 57                        | "           | 0,12                  | 0,37            | 0,24                         | -0,04       | +1,16        |
| 13                 | 58                        | "           | 0,46                  | 0,50            | 0,33                         | +0,12       | +1,13        |
| 14                 | 59                        | "           | 0,48                  | 0,69            | 0,45                         | +0,85       | -0,39        |
| przeciętna wartość |                           |             | 0",23                 |                 | 0",24                        | 0",80       | 1",09        |
| średnia wartość    |                           |             | $\pm 0",28$           |                 | $\pm 0",28$                  | $\pm 1",04$ | $\pm 1",38$  |

\*) Przy określaniu przeciętnych bezwzględnych wartości stosowano wzór

$$\delta_{przec.} = \frac{\sum_{i=1}^n |\delta_i|}{n}, \quad m_{przec.} = \frac{\sum_{i=1}^n |m_i|}{n}.$$

Przy obliczaniu średnich błędów wynaczeń astronomicznych użyto wzór  $m_{sr} = \pm \sqrt{\frac{[mm]}{n-1}}$ , a obliczanie średnich wartości różnic przeprowadzono wg wzoru  $\delta_{sr} = \pm \sqrt{\frac{[\delta \cdot \delta]}{n}}$ , gdzie przez  $n$  oznaczamy ilość punktów wziętych do porównania w każdej grupie.

W tablicy 7 zestawiamy dla poszczególnych kategorii terenu dane co do procentowego występowania  $\delta\xi$  i  $\delta\eta$  w zależności od ich wartości bezwzględnych. Wartości te podzieliliśmy na grupy co  $0''25$ . Dla ogólnej charakterystyki podano też w tabl. 7 średnie wartości i analogiczny podział procentowy dla wszystkich wziętych do analizy 59 punktów triangulacyjnych (tj. nie uwzględniając podziału na kategorie terenu).

Wyniki porównania zestawione w tabl. 6 i 7 wykazują na ogół dobre zgodności wartości składowych odchyłeń pionu obliczonych (w ramach sieci triangulacji głównej) na podstawie przygotowanych danych grawimetrycznych [4] oraz obliczonych z późniejszych niezależnych wyznaczeń astronomicznych. Różnice  $\delta\xi$  i  $\delta\eta$  w 60% nie przekraczają wielkości  $0''5$ , a w 75% wielkości  $0''75$  (jeżeli pominąć obszary górskie, to w około 90% różnice te nie przekraczają  $1''$ ).

Występujące większe różnice ( $1''$ — $2''$ ) mają jedynie charakter lokalny i szczególnie dotyczą obszaru górskiego (co jest uzasadnione, biorąc pod uwagę poprzednie rozważania p. 2.1.1.).

\*

\*

\*

Zastanówmy się obecnie nad zgodnością wyników rozważań w p. 2.1.1. (tabl. 5), dotyczących dokładności wyznaczenia składowych odchylenia pionu na podstawie przewidywań teoretycznych, oraz uzyskanych z wyżej przeprowadzonego porównania średnich różnic  $\delta\xi$  i  $\delta\eta$  (tabl. 6).

Obliczone w tablicach 6 średnie wartości średnich błędów pomiarów astronomicznych  $m_{\varphi a}$  i  $m_{\lambda^a \cos \varphi}$  można uważać jako równe średnim błędom odpowiednich składowych odchyłeń pionu  $m_{\xi \text{ astr. } 1956, 1958}$  i  $m_{\eta \text{ astr. } 1956, 1958}$ .\*)

Przyjmujemy też w tym przypadku, że ocenione na podstawie wewnętrznej zgodności obserwacji na punkcie średnie błędy  $m_{\varphi a}$  i  $m_{\lambda a}$  są

\*)

$$\xi = \varphi^a - \varphi^g; \quad m_{\xi} = \pm \sqrt{m_{\varphi a}^2 + m_{\varphi g}^2};$$

$$\eta = (\lambda^a - \lambda^g) \cos \varphi; \quad m_{\eta} = \pm \sqrt{m_{\lambda^a \cos \varphi}^2 + m_{\lambda^g \cos \varphi}^2}$$

Ponieważ w naszym przypadku użyto do obliczenia  $\xi$  i  $\eta$  wyrównane współrzędne geodezyjne o średnim błędzie rzędu kilkudziesięciu centymetrów, więc  $m_{\varphi g} = \pm 0''02 - 0''03$ , a  $m_{\lambda g} = \pm 0''03 - 0''04$ . W stosunku do wartości  $m_{\varphi a}$  i  $m_{\lambda a \cos \varphi}$  wynoszących  $\pm 0''23 - 0''32$  (tabl. 6) można wpływ błędów współrzędnych geodezyjnych zaniedbać i przyjąć:

$$m_{\xi \text{ astr. } 1956, 1958} = m_{\varphi a};$$

$$m_{\eta \text{ astr. } 1956, 1958} = m_{\lambda a \cos \varphi}.$$

Tablica 7

| Wartość $ \delta $ | Kategoria terenu       |                         |                        |                         |                        |                         |                        |                         |                        |                         | Średnia z wszystkich kategorii terenu |                         | Łącznie dla wszystkich punktów |                         |
|--------------------|------------------------|-------------------------|------------------------|-------------------------|------------------------|-------------------------|------------------------|-------------------------|------------------------|-------------------------|---------------------------------------|-------------------------|--------------------------------|-------------------------|
|                    | równinny               |                         | pagórkowaty            |                         | podgórski              |                         | górski                 |                         |                        |                         | $\delta\xi$                           | $\delta\eta$            | $\delta\xi$                    | $\delta\eta$            |
|                    | $\delta\xi$            | $\delta\eta$            | $\delta\xi$            | $\delta\eta$            | $\delta\xi$            | $\delta\eta$            | $\delta\xi$            | $\delta\eta$            | $\delta\xi$            | $\delta\eta$            |                                       |                         |                                |                         |
|                    | $\frac{\delta\xi}{\%}$ | $\frac{\delta\eta}{\%}$ | $\frac{\delta\xi}{\%}$ | $\frac{\delta\eta}{\%}$ | $\frac{\delta\xi}{\%}$ | $\frac{\delta\eta}{\%}$ | $\frac{\delta\xi}{\%}$ | $\frac{\delta\eta}{\%}$ | $\frac{\delta\xi}{\%}$ | $\frac{\delta\eta}{\%}$ | $\frac{\delta\xi}{\%}$                | $\frac{\delta\eta}{\%}$ | $\frac{\delta\xi}{\%}$         | $\frac{\delta\eta}{\%}$ |
| 0—0",25            | 40                     | 40                      | 22                     | 44                      | 39                     | 15                      | 29                     | 22                      | —                      | —                       | 33                                    | 30                      | 34                             | 26                      |
| 0",26—0",50        | 20                     | 20                      | 67                     | 33                      | 11                     | 15                      | 14                     | 22                      | —                      | —                       | 28                                    | 23                      | 22                             | 20                      |
| 0",51—0",75        | 20                     | 20                      | 11                     | 23                      | 19                     | 24                      | 14                     | —                       | —                      | —                       | 16                                    | 17                      | 17                             | 17                      |
| 0",76—1",00        | 10                     | 10                      | —                      | —                       | 11                     | 15                      | 7                      | —                       | —                      | —                       | 7                                     | 6                       | 8                              | 8                       |
| 1",01—1",25        | 10                     | 10                      | —                      | —                       | 8                      | 19                      | 7                      | 14                      | —                      | —                       | 6                                     | 11                      | 7                              | 14                      |
| 1",26—1",50        | —                      | —                       | —                      | —                       | 8                      | 4                       | —                      | 7                       | —                      | —                       | 2                                     | 3                       | 3                              | 3                       |
| 1",51—2",00        | —                      | —                       | —                      | —                       | —                      | —                       | 29                     | 21                      | —                      | —                       | 7                                     | 5                       | 7                              | 5                       |
| > 2",00            | —                      | —                       | —                      | —                       | 4                      | 8                       | —                      | 14                      | —                      | —                       | 1                                     | 5                       | 2                              | 7                       |

realną oceną dokładności astronomicznych wyznaczeń szerokości i długości geograficznej dla poszczególnego punktu triangulacyjnego \*).

Wobec powyższego, przewidywane średnie wartości różnic  $\delta\xi$  powinny w przybliżeniu wynosić:  $|m_{\varphi a}^2 + m_{\xi s.trg.}^2|$ , a różnic  $\delta\eta$  w przybliżeniu  $|m_{\lambda a \cos \varphi}^2 + m_{\eta s.trg.}^2|$ .

Rozważmy obecnie czy zachodzi zgodność pomiędzy teoretycznymi rozważaniami (p. 2.1.1.), a podanymi w tabl. 6 różnicami  $\delta\xi$  i  $\delta\eta$  dla poszczególnych kategorii terenu. Wyniki tych porównań zostały zestawione w tabl. 8.

Tablica 8

| Kategoria terenu | $\xi$           |                               |                                        |                                | $\eta$                       |                                |                                                      |                                 |
|------------------|-----------------|-------------------------------|----------------------------------------|--------------------------------|------------------------------|--------------------------------|------------------------------------------------------|---------------------------------|
|                  | $m_{\varphi a}$ | $m_{\xi s.trg.}$<br>(tabl. 5) | $ m_{\varphi a}^2 + m_{\xi s.trg.}^2 $ | $\delta\xi$ średn.<br>(przec.) | $m_{\lambda a \cos \varphi}$ | $m_{\eta s.trg.}$<br>(tabl. 5) | $ m_{\lambda a \cos \varphi}^2 + m_{\eta s.trg.}^2 $ | $\delta\eta$ średn.<br>(przec.) |
| Równinny         | $\pm 0,26$      | $\pm 0,54$                    | $\pm 0,60$                             | $\pm 0,60$<br>(0,48)           | $\pm 0,24$                   | $\pm 0,54$                     | $\pm 0,59$                                           | $\pm 0,53$<br>(0,43)            |
| Pagórkowaty      | $\pm 0,23$      | $\pm 0,54$                    | $\pm 0,59$                             | $\pm 0,40$<br>(0,34)           | $\pm 0,25$                   | $\pm 0,54$                     | $\pm 0,59$                                           | $\pm 0,37$<br>(0,29)            |
| Podgórski        | $\pm 0,30$      | $\pm 0,60$                    | $\pm 0,67$                             | $\pm 0,89$<br>(0,63)           | $\pm 0,32$                   | $\pm 0,60$                     | $\pm 0,67$                                           | $\pm 0,98$<br>(0,81)            |
| Górski           | $\pm 0,28$      | $\pm 0,69$                    | $\pm 0,74$                             | $\pm 1,04$<br>(0,80)           | $\pm 0,28$                   | $\pm 0,69$                     | $\pm 0,74$                                           | $\pm 1,38$<br>(1,09)            |

Dane zestawione w tabl. 8 wykazują dobrą zgodność różnic w odchyleniach pionu, obliczonych na podstawie rozważań analogicznych do przeprowadzonych w cytowanej pracy autora [4], z różnicami uzyskanymi w wyniku porównania z nowymi niezależnymi pomiarami astronomicznymi z 1956 i 1958 r. (biorąc pod uwagę średnie i przeciętne różnice  $\delta\xi$  i  $\delta\eta$ ).

Dla terenu równinnego i pagórkowatego (tj. przeważającego na obszarze naszego kraju) uzyskane średnie wartości  $\delta\xi$  i  $\delta\eta$  są mniejsze od przewidywanych teoretycznie. Sugeruje to przypuszczenie, iż średnie

\*) W rzeczywistości średnie błędy  $m_{\varphi a}$  i  $m_{\lambda a}$  mogą być większe, niż ocenione tylko na podstawie zgodności wewnętrznej na stanowisku, biorąc pod uwagę charakter obserwacji, jako wyznaczeń tzw. II rzędu oraz wpływ błędów redukcji.

błędy wyznaczeń  $\xi_{s.trg.}$  i  $\eta_{s.trg.}$  są w rzeczywistości mniejsze dla tego terenu niż wg rozważań poprzednich (tabl. 5) i wynoszą  $\pm 0''3-0''5$ . Natomiast dla terenu podgórskiego i górskiego uzyskane wartości przeciętne  $\delta\xi$  i  $\delta\eta$  są tego samego rzędu co przewidywane różnice, a różnice średnie  $\delta\xi$  i  $\delta\eta$  są zasadniczo większe od przewidywanych.

Należy zaznaczyć, że dla niektórych punktów w tych obszarach średnie błędy wyznaczonych astronomicznie w 1956 r. szerokości i długości geograficznych (biorąc pod uwagę trudności terenowe, użyte instrumenty i program obserwacji oraz redukcje), mogą być znacznie większe niż uzyskane na podstawie wewnętrznej zgodności obserwacji na stanowisku [34].

Obszary podgórskie i górskie leżą na południu Polski w pobliżu granicy. Na błąd obliczenia  $\xi_{gr}$  i  $\eta_{gr}$  w tych obszarach mają duży wpływ błędy materiałów grawimetrycznych zagranicznych. Dla niektórych punktów lokalne duże gradienty horyzontalne anomalii mogą także wpłynąć i na obniżenie dokładności wyznaczeń  $\xi_{s.trg.}$  i  $\eta_{s.trg.}$

Reasumując rozważania można stwierdzić, że przeprowadzone porównanie dla wszystkich kategorii terenu potwierdziło stosunkowo wysoką dokładność wyznaczeń  $\xi_{s.trg.}$  i  $\eta_{s.trg.}$  przy wykorzystaniu danych grawimetrycznych, zgodną z rozważaniami teoretycznymi (tabl. 5).

### *2.1.3. Porównanie wartości składowych odchylen pionu dla punktów triangulacyjnych obliczonych przy wykorzystaniu materiałów grawimetrycznych i obliczonych na podstawie dawnych niemieckich pomiarów astronomicznych (nie uwzględnionych w sieci triangulacji głównej).*

Podobne porównanie, jak w poprzednim punkcie (2.1.2.) naszych rozważań, możemy przeprowadzić wykorzystując wyniki dawnych niemieckich pomiarów astronomicznych, a mianowicie tych, które nie były uwzględnione w sieci triangulacji głównej Polski.

Porównanie takie możemy przeprowadzić dla 11 punktów triangulacyjnych. Punkty te są położone w terenie równinnym, pagórkowatym i podgórskim.

Na podstawie dawnych niemieckich wyznaczeń  $\varphi^a$  i  $\lambda^a$  na tych punktach oraz wyrównanych współrzędnych geodezyjnych  $\varphi^g$  i  $\lambda^g$ , określono składowe odchylen pionu  $\xi_{astr. niem}$  i  $\eta_{astr. niem}$ . Obliczono następnie (analogicznie jak w p. 2.1.2. tabl. 6) różnice  $\delta\xi$  i  $\delta\eta$  pomiędzy tak obliczonymi składowymi odchylen pionu i wartościami tych składowych wyznaczonych przy wykorzystaniu materiałów grawimetrycznych  $\xi_{s.trg.}$  i  $\eta_{s.trg.}$  (zgodnie z p. 2.1.1.). Wyniki przeprowadzonego porównania zestawiono w tabl. 9.

Tablica 9

| Lp.                | Nr<br>kolejny<br>punktu | Różnice      |              |
|--------------------|-------------------------|--------------|--------------|
|                    |                         | $\delta\xi$  | $\delta\eta$ |
| 1                  | 60                      | +0'',62      | +0'',72      |
| 2                  | 61                      | -0,91        | -0,11        |
| 3                  | 62                      | +0,45        | +0,03        |
| 4                  | 63                      | +0,39        | +0,35        |
| 5                  | 64                      | -0,65        | +0,67        |
| 6                  | 65                      | -0,13        | +0,50        |
| 7                  | 66                      | -0,36        | +0,23        |
| 8                  | 67                      | -0,57        | +0,50        |
| 9                  | 68                      | -1,57        | +0,04        |
| 10                 | 69                      | -0,27        | -0,25        |
| 11                 | 70                      | -0,42        | -1,89        |
| przeciętna wartość |                         | 0'',57       | 0'',48       |
| średnia wartość    |                         | $\pm 0'',69$ | $\pm 0'',70$ |

Nie podajemy średnich błędów dawnych niemieckich pomiarów astronomicznych ( $m_{pa}$  i  $m_{la}$ ), gdyż nie są nam one dokładnie znane. Z uwagi na charakter tych pomiarów można przewidywać, że są one tego samego rzędu dokładności co nasze nowe wyznaczenia szerokości i długości geograficznej.

Dla przejrzystości przedstawiamy w procentach otrzymane wielkości  $\delta\xi$  i  $\delta\eta$  w zależności od ich wartości bezwzględnych (tabl. 10).

Tablica 10

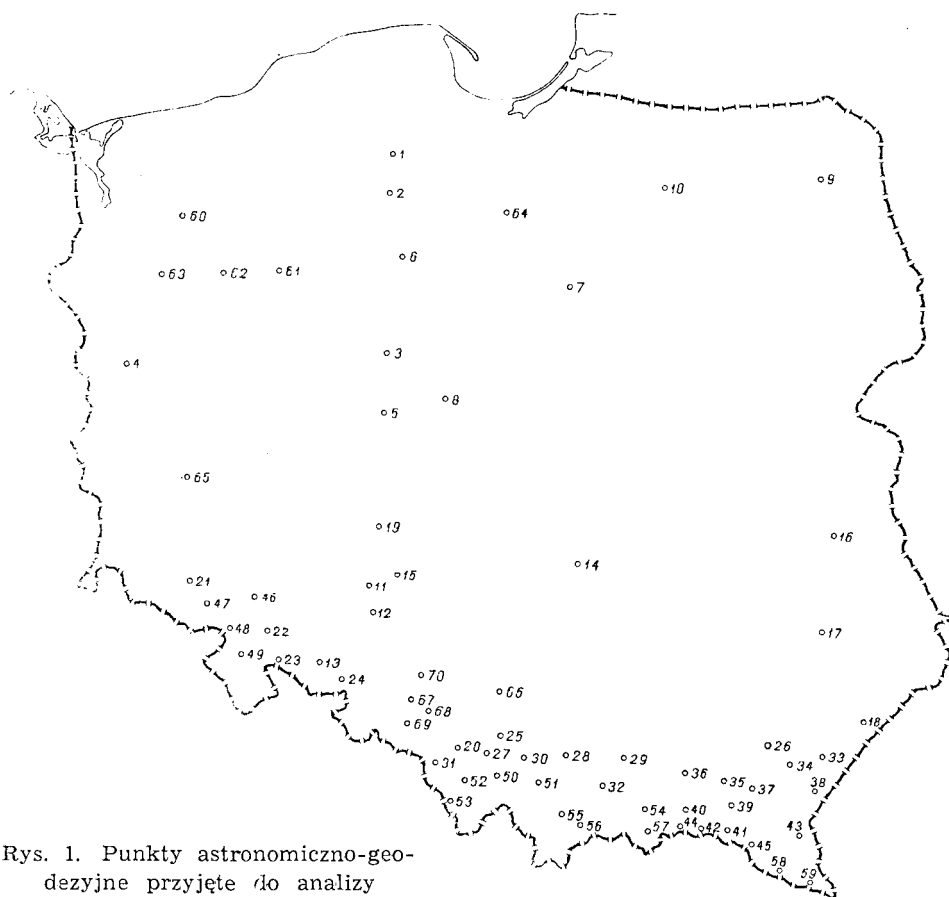
| Wartości bezwzględne | $\delta\xi$ | $\delta\eta$ |
|----------------------|-------------|--------------|
|                      | %           | %            |
| 0-0'',25             | 9           | 46           |
| 0'',26-0'',50        | 46          | 27           |
| 0'',51-0'',75        | 27          | 18           |
| 0'',76-1'',00        | 9           | —            |
| 1'',01-1'',25        | —           | —            |
| 1'',26-1'',50        | —           | —            |
| 1'',51-2'',00        | 9           | 9            |
| >2'',00              | —           | —            |

Przeprowadzone porównanie (tabl. 9 i 10) wykazuje, że średnie wartości różnic  $\delta\xi$  i  $\delta\eta$  są średnio rzędu  $\pm 0,7''$ , a przeciętne wartości rzędu  $\pm 0,5'' - 0,6''$ .

Przyjmując dokładność niemieckich obserwacji astronomicznych analogiczną do naszych pomiarów z 1956 i 1958 roku, tj.  $m_{\varphi^a} = m_{\lambda^a \cos \varphi} = \pm 0,3''$ , możemy obliczyć średnie błędy składowych odchyłeń pionu, wyznaczonych przy wykorzystaniu materiałów grawimetrycznych wg wzoru:

$$m_{\xi_{s.trg.}} = m_{\eta_{s.trg.}} = \pm \sqrt{(0,7'')^2 - (0,3'')^2} = \pm 0,6''.$$

Dla tych kategorii terenu przewidywane są, wg rozważań p. 2.1.1. (tabl. 5), średnie błędy wyznaczonych składowych rzędu  $\pm 0,5'' - 0,6''$ . Zgodności są więc w pełni zadowalające.



Rys. 1. Punkty astronomiczno-geodezyjne przyjęte do analizy

Wyniki przeprowadzonych powyżej porównań z dawnymi niemieckimi pomiarami astronomicznymi potwierdzają więc rezultaty uzyskane na podstawie poprzednio wykonanego porównania z nowymi pomiarami astronomicznymi z roku 1956 i 1958.

Na rys. 1 przedstawiono usytuowanie na terenie kraju 70 punktów astronomicznych przyjętych do powyższych analiz (w p. 2.1.2 i 2.1.3).

*2.1.4. Analiza porównawcza określenia składowych odchyleń pionu dla punktów triangulacyjnych na podstawie interpolacji liniowej pomiędzy punktami astronomiczno-geodezyjnymi (tj. bez uwzględnienia danych grawimetrycznych) z wyznaczeniami tych składowych przy wykorzystaniu danych grawimetrycznych.*

Dla punktów astronomiczno-geodezyjnych sieci triangulacji głównej odchylenia pionu obliczone są, jak wiadomo, na podstawie pomierzonych astronomicznie szerokości i długości geograficznych oraz przybliżonych współrzędnych geodezyjnych. W oparciu o obliczone w ten sposób składowe  $\xi_{p.L}$  i  $\eta_{p.L}$  dla 52 punktów astronomiczno-geodezyjnych naszej sieci można opracować szkicową mapę  $\xi$  i mapę  $\eta$  dla obszaru kraju. (Na mapach tych izolinie  $\xi$  i izolinie  $\eta$  przeprowadzone mogą być np. przy przyjęciu cięcia co 1" lub 2").

Na podstawie tych szkicowych map można określić — z ograniczoną oczywiście dokładnością — wartość składowych  $\xi_A$  i  $\eta_A$  dla każdego punktu triangulacyjnego. W ten sposób przeprowadzone postępowanie nie uwzględnia oczywiście żadnych danych grawimetrycznych.

Składowe określone dla punktu  $A$  na podstawie w/w interpolacji oznaczmy przez  $\xi_{A \text{ int. a. g.}}$  i  $\eta_{A \text{ int. a. g.}}$ .

Zastanówmy się, jakie popełnilibyśmy błędy w wyznaczaniu składowych, gdyby zastosowano ten sposób postępowania i nie uwzględniano materiałów grawimetrycznych.

W tym celu porównamy dla kilkudziesięciu punktów triangulacyjnych wartości  $\xi_{A \text{ s. tr.}}$  i  $\eta_{A \text{ s. tr.}}$  (obliczone przy wykorzystaniu danych grawimetrycznych w związku z pracami dotyczącymi wyrównania triangulacji głównej) z wartościami  $\xi_{A \text{ int. a. g.}}$  i  $\eta_{A \text{ int. a. g.}}$ . Porównanie przeprowadzamy dla punktów triangulacyjnych z 3 wybranych obszarów, a mianowicie: 1) teren częściowo równinny a częściowo pagórkowaty (część Pomorza i Mazur) — dla 27 punktów, 2) teren podgórski (część Dolnego Śląska) — dla 15 punktów, 3) teren częściowo podgórski a częściowo górski (część Podkarpacia i Karpat) — dla 20 punktów. Wyniki ostateczne przeprowadzonych porównań i wyznaczonych różnic ( $d\xi = \xi_{A \text{ s. tr.}} - \xi_{A \text{ int. a. g.}}$ ;

$d\eta = \eta_{A.s.tr.} - \eta_{A.int.a.g.}$ ) dla poszczególnych obszarów przedstawione są w tabl. 11 \*).

Określmy obecnie ogólne średnie różnice  $d\xi$  i  $d\eta$  dla wszystkich 62 punktów triangulacyjnych, tj. z trzech rozważanych różnych obszarów kraju. Przyjmujemy wagi proporcjonalne do ilości punktów wziętych do analizy. W wyniku obliczenia uzyskujemy: średnią różnicę  $d\xi_{sr} = \pm 3''0$  i średnią różnicę  $d\eta_{sr} = \pm 2''5$

Tablica 11

| Lp. | Teren                     | Ilość p-któw<br>wziętych do<br>analizy | $\xi$       |              |            | $\eta$      |              |            |
|-----|---------------------------|----------------------------------------|-------------|--------------|------------|-------------|--------------|------------|
|     |                           |                                        | $d_{maks.}$ | $d_{przec.}$ | $d_{sr.}$  | $d_{maks.}$ | $d_{przec.}$ | $d_{sr.}$  |
| 1   | Równinny<br>i pagórkowaty | 27                                     | 5,1         | $\pm 2''0$   | $\pm 2''5$ | 5,4         | $\pm 2''1$   | $\pm 2''6$ |
| 2   | Podgórski                 | 15                                     | 5,2         | $\pm 2,2$    | $\pm 2,8$  | 6,8         | $\pm 2,4$    | $\pm 3,0$  |
| 3   | Podgórski<br>i górski     | 20                                     | 6,6         | $\pm 3,3$    | $\pm 3,8$  | 3,2         | $\pm 1,6$    | $\pm 1,9$  |

Dla stwierdzenia realności uzyskanych wartości średnich różnic przeprowadzimy dodatkowe porównanie. Na niektórych punktach triangulacyjnych, wybranych do powyższej analizy, wykonane były w 1956 i 1958 r. — omawiane już uprzednio — pomiary astronomiczne  $\varphi^a$  i  $\lambda^a$ . Na obszarze pierwszym mamy takich punktów 5, na obszarze drugim — 13 punktów, a na obszarze trzecim — 11 punktów. Dla tych 29 punktów możemy obliczyć z danych astronomicznych składowe odchylenia pionu ( $\xi_{a.g. 1956, 1958}$ ,  $\eta_{a.g. 1956, 1958}$ ), a następnie utworzyć różnice:

$$d\xi = \xi_{a.g. 1956, 1958} - \xi_{inter.a.g.},$$

$$d\eta = \eta_{a.g. 1956, 1958} - \eta_{inter.a.g.}.$$

Wyniki obliczonych w ten sposób różnic  $d\xi$  i  $d\eta$  (maksymalnych, przeciętnych i średnich) zestawione są w tabl. 12.

Analogicznie jak poprzednio (z tabl. 11) obliczono ogólne średnie wartości dla tych 29 punktów.

Uzyskano:

$$d\xi_{sr.} = \pm 3''6,$$

$$d\eta_{sr.} = \pm 2''7.$$

\*) Dla interpolacji składowych  $\xi$  i  $\eta$  między punktami astronomiczno-geodezyjnymi opracowano dla każdego obszaru szkicowy przebieg izolinii  $\xi$  i izolinii  $\eta$  w odstępach co 1". Na tej podstawie oszacowano dla punktów triangulacyjnych  $\xi_{A.int.a.g.}$  i  $\eta_{A.int.a.g.}$  do 0,1.

Podane w tabl. 11  $d_{maks.}$  — przedstawia maksymalną bezwzględną wartość,  $d_{przec.}$  — przeciętną, a  $d_{sr.}$  — średnią wartość różnic  $d$  (obliczenie przeprowadzono analogicznie jak w tabl. 6).

Tablica 12

| Lp. | Teren                     | Ilość p-któw<br>wziętych<br>do analizy | $\xi$         |              |             | $\eta$        |              |             |
|-----|---------------------------|----------------------------------------|---------------|--------------|-------------|---------------|--------------|-------------|
|     |                           |                                        | $ i _{maks.}$ | $d_{przec.}$ | $d_{sr.}$   | $ i _{maks.}$ | $d_{przec.}$ | $d_{sr.}$   |
| 1   | Równinny<br>i pagórkowaty | 5                                      | 4'',9         | $\pm 2'',8$  | $\pm 3'',2$ | 4'',8         | $\pm 2'',3$  | $\pm 2'',7$ |
| 2   | Podgórski                 | 13                                     | 7'',5         | $\pm 2'',7$  | $\pm 3'',3$ | 5'',4         | $\pm 2'',8$  | $\pm 3'',1$ |
| 3   | Podgórski<br>i górski     | 11                                     | 7'',2         | $\pm 3'',7$  | $\pm 4'',2$ | 3'',5         | $\pm 1'',7$  | $\pm 2'',1$ |

Otrzymane z niezależnej obiektywnej analizy wartości  $d\xi_{sr.}$  i  $d\eta_{sr.}$  potwierdzają realność poprzednich wyników z tabl. 11, są nawet od nich o 10—20% większe.

Na podstawie rezultatów przeprowadzonych porównań możemy obliczyć średnie błędy  $m\xi_{int. a. g.}$  i  $m\eta_{int. a. g.}$ , jakie popełnilibyśmy przy wyznaczaniu dla punktu triangulacyjnego składowych odchylenia pionu tylko na podstawie interpolacji liniowej pomiędzy punktami astronomiczno-geodezyjnymi sieci, bez uwzględniania materiałów grawimetrycznych.

Te średnie błędy  $m\xi_{int. a. g.}$  i  $m\eta_{int. a. g.}$ , obliczamy \*) przyjmując — zgodnie z rezultatami poprzednich rozważań — średnie błędy wyznaczenia składowych odchylenia pionu przy wykorzystaniu danych grawimetrycznych ( $m\xi_{s. trg.}$  i  $m\eta_{s. trg.}$ ) równe  $\pm 0'',5 - 0'',7$  oraz średnie błędy tych składowych z wyznaczeń astronomicznych z 1956 i 1958 roku ( $m\xi_{a. g. 1956, 1958}$  i  $m\eta_{a. g. 1956, 1958}$ ) równe około  $\pm 0'',3$ . Rezultaty obliczeń podane są w tabl. 13.

Uzyskane wyniki wykazują, że dla punktu triangulacyjnego — nie będącego punktem astronomiczno-geodezyjnym sieci triangulacji głównej — wyznaczenie składowych odchylenia pionu na podstawie tylko interpolacji liniowej pomiędzy punktami astronomiczno-geodezyjnymi sieci byłoby obciążone przeciętnie sześciokrotnie większymi średnimi błędami ( $\pm 2'',4 - 3'',6$ ) niż średnie błędy obliczenia tych składowych przy wykorzystaniu materiałów grawimetrycznych ( $\pm 0'',3 - 0'',7$ ).

\*) W odniesieniu do wyników tablicy 11 zastosowano wzory:

$$m\xi_{inter. a. g.} = \pm \sqrt{(d\xi_{sr.})^2 - m^2\xi_{s. trg.}}, \quad m\eta_{inter. a. g.} = \pm \sqrt{(d\eta_{sr.})^2 - m^2\eta_{s. trg.}}$$

a w stosunku do wyników tabl. 12:

$$m\xi_{inter. a. g.} = \pm \sqrt{(d\xi_{sr.})^2 - m^2\xi_{a. g. 1956, 1958}}$$

$$m\eta_{inter. a. g.} = \pm \sqrt{(d\eta_{sr.})^2 - m^2\eta_{a. g. 1956, 1958}}$$

Tablica 13

| Średnie błędy wyznaczenia<br>składowych odchylenia<br>pionu | Na podstawie porównania:                                                |                                                          |
|-------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------|
|                                                             | z obliczeniami przy wykorzystaniu danych grawimetrycznych<br>(tabl. 11) | z pomiarami astronomicznymi 1956 i 1958 r.<br>(tabl. 12) |
| $m_{\xi_{int. a. g.}}$                                      | $\pm 2''{,}9$                                                           | $\pm 3''{,}6$                                            |
| $m_{\eta_{int. a. g.}}$                                     | $\pm 2''{,}4$                                                           | $\pm 2''{,}7$                                            |

Kilkakrotne zwiększenie dokładności wyznaczeń  $\xi$  i  $\eta$  ma zarówno praktyczne znaczenie przy redukcjach triangulacyjnych, jak też przy pracach naukowo-badawczych z zakresu figury Ziemi.

2.1.5. *Wnioski z przeprowadzonej analizy dokładności określenia dla punktów triangulacyjnych, nie będących punktami astronomiczno-geodezyjnymi, odchyłeń pionu przy wykorzystaniu materiałów grawimetrycznych.*

Przeprowadzona analiza dokładnościowa doprowadziła do wniosku, że składowe odchylenia pionu  $\xi_{s. trg.}$  i  $\eta_{s. trg.}$  obliczone dla punktów triangulacyjnych — w ramach prac związanych z wyrównaniem sieci triangulacji głównej — przy wykorzystaniu odpowiednio przygotowanych materiałów grawimetrycznych [4] obciążone są średnimi błędami  $\pm 0''{,}5$ — $0''{,}7$  (w zależności od rzeźby terenu).

Porównanie dla kilkudziesięciu punktów wartości  $\xi_{s. trg.}$  i  $\eta_{s. trg.}$  z niezależnie wyznaczonymi wartościami tych składowych na podstawie pomiarów astronomicznych (nie uwzględnionych przy obliczaniu sieci triangulacyjnej) — tj. nowych pomiarów z 1956 i 1958 roku (dla 59 punktów) i dawnych niemieckich pomiarów (dla 11 punktów) — wykazało zadowalającą zgodność wyników.

Rezultaty tych porównań potwierdziły zupełną realność wyników teoretycznej analizy dokładnościowej (p. 2.1.1.) wyznaczenia  $\xi_{s. trg.}$  i  $\eta_{s. trg.}$ .

Dalsze rozważania wykazały słuszność i celowość obliczania składowych odchyłeń pionu dla punktu triangulacyjnego przy wykorzystaniu materiałów grawimetrycznych. Gdyby bowiem przy tych obliczeniach nie uwzględniać danych grawimetrycznych, a przeprowadzać jedynie interpolację tych składowych pomiędzy punktami astronomiczno-geodezyjnymi sieci, to wartości tak wyznaczonych składowych dla punktów triangulacyjnych obciążone byłyby średnimi błędami rzędu  $\pm 3''$  (dla nie-

których punktów do  $\pm 7''$ ). Ta wielkość błędu jest kilkakrotnie większa od średniego błędu wyznaczenia  $\xi_{s. \text{trg.}}$  i  $\eta_{s. \text{trg.}}$  przy uwzględnieniu materiałów grawimetrycznych.

## 2.2. Zagadnienie celowości wprowadzenia w polskiej sieci triangulacji głównej redukcji baz z geoidy na elipsoidę odniesienia.

Pomierzone długości baz triangulacyjnych powinny być, przed uwzględnieniem ich do obliczeń i wyrównania, zredukowane na powierzchnię elipsoidy odniesienia. W dawnych sieciach triangulacyjnych, identyfikując powierzchnię elipsoidy odniesienia z powierzchnią geoidy, popełniano przy tych redukcjach błąd wynikający z nieuwzględnienia odstępów między geoidą, a powierzchnią elipsoidy odniesienia.

Ponieważ długość bazy  $b_e$  zredukowana na elipsoidę wynosi:

$$b_e = b_0 \left\{ 1 - \frac{H^0 + N}{R_a} + \frac{(H^0 + N)^2}{R_a^2} + \dots \right\}$$

gdzie

$b_e$  — długość mierzonej bazy na wysokości  $H^0$  nad poziomem morza

$N$  — odstęp geoidy od elipsoidy odniesienia

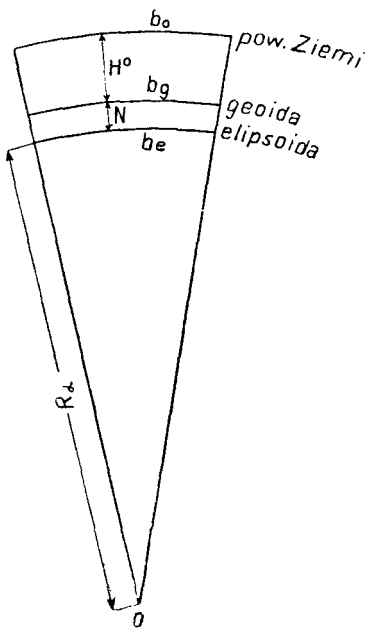
$R_a$  — promień przekroju normalnego elipsoidy w azymucie linii bazy, to nieuwzględnienie odstępów  $N$  powoduje (przy zaniedbaniu wyrazów drugiego rzędu) błąd względny zredukowanej długości bazy:

$$\frac{m_{b_e}}{b_e} \approx - \frac{N}{R_a}.$$

Mapa odstępów geoidy od elipsoidy Krasowskiego, użytej jako powierzchnia odniesienia nowej triangulacji polskiej, wykazuje że odstępów te wynoszą od  $-4,5$  m (na północy kraju) do  $+7,5$  m (na południu). Łącznie daje to różnicę 12 m.

Należy na marginesie zaznaczyć, iż są to stosunkowo małe odstępów. Świadczą one o dobrej zgodności wymiarów i właściwym przyłożeniu elipsoidy Krasowskiego do figury Ziemi na terenie Polski.

Zastanówmy się obecnie jaki wpływ miałyby nieuwzględnienie w re-



Rys. 2

dukcjach baz tych kilkometrowych odstępów geoidy od elipsoidy odniesienia na „skalę” sieci triangulacji głównej.

Na północy mielibyśmy za małe długości baz na elipsoidzie o wielkość  $\frac{N}{R_a} = \frac{4,5}{6370000} = -0,7 \cdot 10^{-6}$ . Na południu mielibyśmy za duże długości baz na elipsoidzie o  $\frac{7,5}{6370000} = 1,2 \cdot 10^{-6}$ . Łącznie wpływ ten daje na obszarze kraju skażenie „skali” o rząd  $2 \cdot 10^{-6}$  (jednostki metryczne przez to byłyby skażone systematycznie dla poszczególnej bazy, a różnica w tym skażeniu od północy do południa Polski dałaby wielkość  $2 \cdot 10^{-6}$ ).

Porównajmy tę wielkość z dokładnością komparacji przymiarów drutowych Jäderina, używanych przy pomiarach baz triangulacyjnych.

Długość tych 24-metrowych przymiarów wyznaczona jest na komparatorze geodezyjnym (w warunkach polskich — w Pracowni Długości i Kąta Głównego Urzędu Miar w Warszawie) ze średnim błędem rzędu  $\pm 15-20 \mu$ , co daje średni błąd względny około  $0,6-0,8 \cdot 10^{-6}$ . Praktycznie osiągalna dokładność względna pomiaru baz w terenie jest rzędu  $1 \cdot 10^{-6}$ .

Porównanie powyższych względnych błędów wykazuje, że nieuwzględnienie w/w odstępów geoidy od elipsoidy przy redukcji baz dałoby systematyczne skażenie skali sieci triangulacji głównej 2,5—3,5 razy większe niż względny średni błąd komparacji przymiarów drutowych Jäderina, a dwukrotnie większe niż względny średni błąd pomiaru bazy w terenie.

Dla sieci triangulacji wypełniającej należy — naszym zdaniem — również wziąć pod rozwagę uwzględnienie przy redukcji baz odstępów geoidy od elipsoidy odniesienia w tych obszarach, gdzie bezwzględne wartości tych odstępów są większe od 2—3 metrów.

### 2.3. Analiza celowości wprowadzenia do kątów poziomych triangulacji głównej redukcji ze względu na odchylenie pionu.

Wszystkie kąty poziome triangulacji głównej w Polsce przed obliczeniem sieci zostały, jak wiadomo, zredukowane na powierzchnię elipsoidy odniesienia.

Redukcję uwzględniającą wpływ odchylenia pionu wyrazić można następującymi wzorami:

dla kierunku 1·2:

$$\Delta_{1,2} = (\eta_1 \cos \alpha_{1,2} - \xi_1 \sin \alpha_{1,2}) \operatorname{ctg} z_{1,2},$$

*o.p*

a dla kąta  $3 \cdot 1 \cdot 2$ :

$$\Delta_{3 \cdot 1 \cdot 2, o.p.} \cong [\eta_1 (\cos \alpha_{1 \cdot 3} - \cos \alpha_{1 \cdot 2}) - \xi_1 (\sin \alpha_{1 \cdot 3} - \sin \alpha_{1 \cdot 2})] \operatorname{ctg} z$$

(przy założeniu  $\operatorname{ctg} z_{1 \cdot 2} = \operatorname{ctg} z_{1 \cdot 3}$ \*)

Wartość bezwzględna tych poprawek  $\Delta_{o.p.}$  dla kątów polskiej sieci triangulacyjnej dochodzi do  $0''3$ . Te maksymalne wartości występują dla punktów triangulacji głównej w górach, to jest gdy różnice wysokości pomiędzy sąsiednimi punktami triangulacyjnymi są przeciętnie rzędu kilkuset metrów. Dla obszarów podgórskich i pagórkowatych poprawki  $\Delta_{o.p.}$  wynoszą przeciętnie około  $0''1$ .

Średni błąd Ferrero w polskiej sieci triangulacji głównej oscyluje od  $\pm 0''40$  do  $\pm 0''53$  [35]. W porównaniu do tej wartości średniego błędu Ferrero, wartości poprawek ze względu na odchylenie pionu — dochodzące do  $0''3$  — nie można zaniedbać. Słuszne więc było i praktycznie konieczne uwzględnienie ich przy przeprowadzonych obliczeniach sieci triangulacji głównej, a szczególnie dla obszarów górskich i podgórskich.

Zastanówmy się czy nie można by zaniedbać wprowadzania tej poprawki redukcyjnej dla kątów w terenie równinnym, nie obniżając praktycznie dokładności całości opracowania.

Ponieważ  $\operatorname{ctg} z = \frac{H_2 - H_1}{s} - \frac{s(1-k)**)}{2R}$ , więc przy przyjęciu przeciętnie  $s = 30$  km obliczymy poprawki kątów  $\Delta_{o.p.}$  jako funkcję  $(H_2 - H_1) = \Delta H$  i wyrażenia:

$$f(\xi, \eta) = [\eta_1 (\cos \alpha_{13} - \cos \alpha_{12}) - \xi_1 (\sin \alpha_{13} - \sin \alpha_{12})].$$

Wyrażenie zależne od składowych odchylenia pionu nie przekroczy praktycznie  $10''$  dla dominującej części obszaru kraju (np. dla  $\xi = \eta = 7''$ , co jest już dużą wartością jak na warunki polskich terenów równinnych, oraz dla  $\alpha_{13} = 70^\circ$ ,  $\alpha_{12} = 10^\circ$  uzyskujemy  $f(\xi, \eta) = 9''87$ ).

Tablica 14 podaje dla  $s = 30$  km wartości poprawki do kątów ze względu na odchylenie pionu w zależności od  $\Delta H = H_2 - H_1$  i  $f(\xi, \eta)$ .

Jak widać z tabl. 14 na punktach, dla których różnice wysokości między sąsiednimi punktami triangulacyjnymi wynoszą do 100 m, można praktycznie nie wprowadzać poprawek do kątów ze względu na odchylenie

\*) Oznaczenia są następujące:

$Z_{ik}$  — odległość zenitalna dla kierunku  $ik$ ,

$a_{ik}$  — azymut kierunku  $ik$ ,

$\xi_1, \eta_1$  — składowe odchylenia pionu w punkcie triangulacyjnym, na którym pomierzono rozważany kąt poziomy.

\*\*) Przyjęto następujące oznaczenia:

$H_i$  — wysokość n.p.m. punktu triangulacyjnego,

$s$  — odległość między punktami 1—2,

$k$  — współczynnik refrakcji,

$R$  — promień ziemski.

Tablica 14

| $f(\xi, \eta)$ | $\Delta H$ (w metrach) |       |       |       |       |
|----------------|------------------------|-------|-------|-------|-------|
|                | 100                    | 150   | 200   | 300   | 600   |
| 10''           | 0,013                  | 0,030 | 0,047 | 0,080 | 0,180 |
| 5''            | 0,006                  | 0,015 | 0,024 | 0,040 | 0,090 |
| 2'',5          | 0,003                  | 0,008 | 0,012 | 0,020 | 0,045 |

pionu, (zaniedbana redukcja będzie rzędu  $\pm 0,01$  co w stosunku do średniego błędu Ferrero może być wielkością pomijaną jako mała wyższego rzędu). Natomiast uzyskane wyniki potwierdziły celowość wprowadzenia tych redukcji w tym przypadku, gdy różnice wysokości pomiędzy sąsiednimi punktami triangulacyjnymi są większe od 100 m.

Zastanówmy się obecnie nad wpływem średnich błędów wyznaczenia  $\xi$  i  $\eta$  na błąd poprawki do kątów poziomych ze względu na odchylenie pionu.

Składowe  $\xi$  i  $\eta$  wyznaczone są dla punktów polskiej sieci triangulacyjnej przy wykorzystaniu danych grawimetrycznych, jak wynika z rozważań p. 2.1, ze średnim błędem  $\pm 0,5 - 0,7$ . Ten błąd wpłynie na błąd omawianej poprawki kątowej ( $\Delta_{o.p.}$ ) — przy założeniu  $s = 30$  km oraz praktycznym przyjęciu  $m_{(\xi, \eta)} = m_{\xi} = m_{\eta}$  — w sposób następujący:

$$\text{dla } \Delta H = 300 \text{ m} \dots m_{\Delta_{o.p.}} = \pm 0,004 - 0,005,$$

$$\text{dla } \Delta H = 600 \text{ m} \dots m_{\Delta_{o.p.}} = \pm 0,009 - 0,012.$$

Uzyskane błędy obliczenia poprawki są zupełnie znikome.

Jak wiadomo z rozważań zawartych w p. 2.1.4, w przypadku ewentualnego zrezygnowania z wykorzystania danych grawimetrycznych przy obliczaniu odchyleń pionu dla punktów triangulacyjnych, średnie błędy określenia składowych  $\xi$  i  $\eta$  osiągnęłyby w naszej sieci rząd  $\pm 2,7 - 3,5$  (a maksymalnie do  $\pm 7''$ ).

W tym przypadku, przy przyjęciu analogicznych do poprzednich założeń, uzyskalibyśmy następujące średnie błędy obliczenia rozpatrywanych poprawek kątowych  $\Delta_{o.p.}$ :

$$\text{dla } \Delta H = 300 \text{ m} \dots m'_{\Delta_{o.p.}} = \pm 0,03 \text{ (maks. } \pm 0,06),$$

$$\text{dla } \Delta H = 600 \text{ m} \dots m'_{\Delta_{o.p.}} = \pm 0,06 \text{ (maks. } \pm 0,13).$$

Pełnienie tego rzędu błędów, często o charakterze systematycznym, przy obliczaniu poprawek do kątów poziomych ze względu na odchylenia pionu, wpłynęłoby wyraźnie ujemnie na dokładność całości sieci triangulacyjnej.

Jak wynika z przeprowadzonych rozważań, dla potrzeb obliczenia omawianych poprawek kątowych, celowym było w warunkach polskich

uwzględniać materiały grawimetryczne przy wyznaczaniu składowych odchyłeń pionu dla punktów triangulacyjnych.

#### 2.4. Wpływ zmiany wartości wyjściowej grawimetrycznego systemu poczdamskiego oraz wartości normalnej siły ciężkości na obliczenie odchyłeń pionu przy wykorzystaniu materiałów grawimetrycznych.

Materiały grawimetryczne dla potrzeb triangulacji głównej i niwelacji precyzyjnej opracowane były w ogólnie przyjętym systemie poczdamskim, a anomalie grawimetryczne obliczone w odniesieniu do wartości normalnej siły ciężkości  $\gamma_0$  wg wzoru Helmerta z lat 1901—03.

Zastanówmy się jak wpłynie zmiana wartości  $g$  w Poczdamie oraz zmiana wzoru na  $\gamma_0$  na obliczenia składowych  $\xi$  i  $\eta$ .

##### 2.4.1. Zmiana wartości $g$ w Poczdamie

Dotychczas przyjmowana wartość wyjściowa przyspieszenia siły ciężkości  $g$  dla wyjściowego punktu w Poczdamie (wyznaczona przez Kühnena i Furtwänglera [13]) jest wg nowych badań wyraźnie za duża. W oparciu o rezultaty nowych pomiarów obsolutnych w Teddington, Leningradzie, Ottawie, Waszyngtonie i Sevre — C. Morelli obliczył i przedstawił na Zebraniu Międzynarodowej Komisji Grawimetrycznej we wrześniu 1959 r. [16] wielkość poprawki  $C_1$ , o jaką należałoby poprawić wartość  $g$  stosowanego systemu poczdamskiego, aby uzyskać wartość obecnie najprawdopodobniejszą ( $g^* = g + C_1$ ).

Prawdopodobną wartość tej poprawki, wg stanu na rok 1959, ocenia C. Morrelli na  $C_1 = -12,9$  mgal ze średnim błędem  $\pm 0,4$  mgal.

Wobec tego wszystkie obecnie przyjmowane wartości przyspieszenia siły ciężkości należałoby zmniejszyć o 12,9 mgal.

##### 2.4.2. Zmiana wzoru na $\gamma_0$

Stosowany u nas dotychczas wzór Helmerta z 1901—1908 r. na wartość normalną siły ciężkości ( $\gamma_{0H}$ ) jest już obecnie przestarzały. Biorąc pod uwagę inne, nowsze wzory na  $\gamma_0$ , np. tzw. wzór międzynarodowy Cassinisa z 1930 r. ( $\gamma_{0C}$ ), wzór Heiskanena z 1928 r. ( $\gamma_{0Heis. 1928}$ ) i 1933 r. ( $\gamma_{0Heis. 1933}$ ), czy też wzór Żongołowicza z 1952 r. ( $\gamma_{0Z}$ )\*, możemy określić dla obszaru

---

\*)  $\gamma_{0Heis. 1928} = 978,014 [1 + 0,005301 \sin^2 \varphi - 0,000007 \sin^2 2\varphi]$  gal,

$\gamma_{0Heis. 1933} = 978,0524 [1 + 0,0052970 \sin^2 \varphi - 0,0000059 \sin^2 2\varphi +$   
 $+ 0,0000277 \cos^2 \varphi \cdot \cos 2(\lambda + 25^\circ)]$  gal,

$\gamma_{0Z} = 978,0573 [1 + 0,0052682 \sin^2 \varphi - 0,0000059 \sin^2 2\varphi + 0,0000155 \cos^2 \varphi \cdot \cos 2(\lambda + 6^\circ)]$  gal

Polski średnią różnicę pomiędzy wartościami  $\gamma_0$ , obliczonymi wg tych wzorów i wg wzoru Helmerta.

Uzyskujemy średnio:

$$\gamma_{0C} - \gamma_{0H} = + 12 \text{ mgal}$$

$$\gamma_{0Heis. 1928} - \gamma_{0H} = + 13 \text{ mgal}$$

$$\gamma_{0Heis. 1938} - \gamma_{0H} = + 20 \text{ mgal}$$

$$\gamma_{0Z} - \gamma_{0H} = + 11 \text{ mgal.}$$

Jak wynika z powyższego porównania, dokonanego dla średniej szerokości geograficznej Polski, wartości  $\gamma_0$ , wg stosowanego u nas wzoru Helmerta, są o rząd kilkunastu miligali za małe.

Należy mieć nadzieję, że w niedalekiej przyszłości wyznaczony zostanie nowy wzór na wartość normalną siły ciężkości na podstawie najnowszych pomiarów grawimetrycznych i geodezyjnych. Wzór na tę nową wartość można przedstawić w formie  $\gamma_0^* = \gamma_{0H} + C_2$ , gdzie  $C_2$  jest funkcją szerokości i długości geograficznej. Na podstawie dokonanych poprzednio porównań można przewidywać, że wartość średnia funkcji  $C_2$  dla obszaru Polski będzie prawdopodobnie wynosić  $C_2 \simeq 11\text{--}20$  mgal.

#### 2.4.3. Zmiana wartości anomalii Faye'a.

Nową wartość anomalii Faye'a można więc będzie w takim przypadku, tj. uwzględniając zmianę wartości wyjściowej  $g$  w Poczdamie i nowy wzór  $\gamma_0$ , wyrazić wzorem:

$$(g_0^* - \gamma_0^*) = (g_0 + C_1) - (\gamma_{0H} + C_2) = (g_0 - \gamma_{0H}) + K,$$

gdzie  $K = C_1 - C_2$ .

Dla poprzednio przytoczonych wartości, średnia wartość  $K$  dla obszaru Polski będzie wynosić w przybliżeniu  $- 25$  mgal. Możemy więc przewidywać, że łączny wpływ zmiany wartości wyjściowej grawimetrycznego systemu poczdamskiego oraz przyjęcia nowego (jeszcze dotychczas nie wyznaczonego) wzoru na wartość normalną siły ciężkości spowoduje zmniejszenie liczbowych wartości anomalii grawimetrycznej Faye'a na obszarze naszego kraju średnio o około  $25\text{--}30$  mgal\*).

---

\*) Warto zwrócić uwagę na mapę anomalii grawimetrycznej Faye'a obszaru Polski [4]. Zdecydowaną przewagę na tej mapie mają dodatnie wartości anomalii. Po ewentualnym wprowadzeniu w przyszłości nowej wartości  $g$  w Poczdamie i nowej wartości  $\gamma_0$ , tj. po zmniejszeniu wartości anomalii o rząd  $25\text{--}30$  mgal, na obszarze Polski powierzchniowo wartościowo anomalie Faye'a dodatnie i ujemne będą się wtedy w przybliżeniu wzajemnie kompensować.

#### 2.4.4. Wpływ na obliczenie składowych odchylenia pionu

Zastanówmy się obecnie, jaki wpływ na obliczenie składowych odchylenia pionu przy wykorzystaniu materiałów grawimetrycznych miałyby wprowadzenie powyższych zmian do wartości anomalii Faye'a. Mianowicie czy składowe  $\xi_A^*$ ,  $\eta_A^*$ , obliczone w oparciu o zmienione w wyżej opisany sposób anomalie Faye'a, różnić się będą od wartości  $\xi_A$  i  $\eta_A$ , obliczonych przy wykorzystaniu dotychczasowych materiałów grawimetrycznych.

Przyjmując zmienione wartości anomalii Faye'a  $(g_0^* - \gamma_0^*) = (g_0 - \gamma_0) + K$ , obliczenie np. składowej południkowej grawimetrycznego odchylenia pionu przeprowadzonoby (zgodnie z [28] i [4]) wg wzoru:

$$\begin{aligned}\xi_{gr}^* &= a \iint (g_0^* - \gamma_0^*) \cos \alpha \cdot da \cdot dr = \\ &= a \iint (g_0 - \gamma_0) \cos \alpha \cdot da \cdot dr + a \iint K \cdot \cos \alpha \cdot da \cdot dr.\end{aligned}$$

Praktycznie  $a \iint K \cdot \cos \alpha \cdot da \cdot dr = \text{const.}$  (abstrahując od zmienności różnic  $\gamma_{0H} - \gamma_0^*$ , w zależności od zmian szerokości geograficznej dla obszaru Polski \*), oraz zakładając użycie identycznego diagramu obliczeniowego grawimetrycznych odchylenia pionu na wszystkich punktach).

Wobec tego:

$$\xi_{gr}^* = \xi_{gr} + C.$$

Składowe grawimetrycznego odchylenia pionu będą się więc różnić od siebie o wielkość  $C$ .

Stosując oznaczenia i wzory użyte uprzednio (tj. w cytowanej poprzedniej pracy autora [4] oraz w p. 2.1 niniejszej pracy) możemy napisać następująco:

$$\begin{aligned}\xi_A^* &= \xi_{gr.A}^* + \Delta \xi_A^*, \\ \Delta \xi_A^* &= \Delta \xi_{p.L}^* + \delta_{\Delta \xi_{int.A}}^* = \xi_{a.g.p.L} - \xi_{gr.p.L}^* + \delta_{\Delta \xi_{int.A}}^*\end{aligned}$$

Praktycznie można przyjąć:  $\delta_{\Delta \xi_{int.A}}^* = \delta_{\Delta \xi_{int.A}}$ ,

$$\text{więc: } \Delta \xi_A^* = \xi_{a.g.p.L} - (\xi_{gr.p.L} + C) + \delta_{\Delta \xi_{int.A}} = \Delta \xi_A - C.$$

W rezultacie uzyskujemy:

$$\xi_A^* = \xi_{gr} + C + \Delta \xi_A - C = \xi_A$$

Dla składowej pierwszego wertykału można dokonać analogicznego dowodu.

---

\*) Zmienność tej różnicy dla obszaru między sąsiednimi punktami astronomiczno-geodezyjnymi powinna być znikoma. Np. różnica  $\gamma_{0H} - \gamma_{0C}$  dla  $\varphi = 49^\circ$  wynosi 12,5 mgal, a dla  $\varphi = 55^\circ$  — 11,1 mgal, czyli zmienia się dla całego obszaru naszego kraju jedynie o 1,4 mgal.

W rezultacie praktycznie mamy:

$$\xi_A^* = \xi_A \quad \text{i} \quad \eta_A^* = \eta_A.$$

Słownie można to sformułować w sposób następujący. Ewentualna zmiana w przyszłości wartości anomalii Faye'a o wielkość stałą w całym materiale grawimetrycznym, użytym do wyznaczeń  $\xi_{gr}$  i  $\eta_{gr}$ , nie spowoduje praktycznie zmiany obliczonych obecnie wartości składowych  $\xi_{s.trg.}$  i  $\eta_{s.trg.}$  względnego odchylenia pionu.

Jest to ważne stwierdzenie, gdyż wobec tego raz dokonane obliczenia składowych  $\xi$  i  $\eta$  w oparciu o dane grawimetryczne (naturalnie odpowiednio jednolicie i dokładnie opracowane) mogą być później zawsze wykorzystane dla celów praktycznych i badawczych.

## 2.5. Wnioski

Przeprowadzone rozważania możemy podsumować w postaci następujących wniosków.

**Wniosek 1.** Przeprowadzone rozważania szczegółowe konkretnych warunków polskich wykazały, zarówno z punktu widzenia praktycznego, jak i naukowego, słuszność i konieczność wykorzystania danych grawimetrycznych w pracach związanych z obliczeniem triangulacji głównej.

**Wniosek 2.** Materiały grawimetryczne, przygotowane i opracowane po raz pierwszy specjalnie dla potrzeb geodezyjnych pomiarów podstawowych w Polsce [4], pozwoliły na wyznaczenie składowych względnego odchylenia pionu dla punktów triangulacyjnych (nie będących punktami astronomiczno-geodezyjnymi) ze średnim błędem  $\pm 0,5 - 0,7$ , a dla części punktów w rejonie równinnym  $\pm 0,3$ .

Gdyby nie uwzględniać pomiarów grawimetrycznych, a wykorzystać tylko dane astronomiczno-geodezyjne (dla 52 punktów Laplace'a i punktów astronomicznych sieci triangulacyjnej) wyznaczenie składowych tych odchyleń obarczone byłoby wtedy przeciętnie średnim błędem rzędu  $\pm 3''$ .

Kilkakrotnie zwiększona dokładność wyznaczenia składowych  $\xi_A$  i  $\eta_A$  ma istotne i duże znaczenie zarówno praktyczne przy uwzględnianiu redukcji pomiarów triangulacyjnych na elipsoidę odniesienia, jak też przy badaniach nad geoidą na obszarze naszego kraju.

**Wniosek 3.** Wprowadzenie redukcji ze względu na odchylenie pionu do kątów poziomych triangulacji głównej było w warunkach polskich zasadniczo słuszne, jeżeli wziąć pod uwagę wysoką dokładność pomiarów kątowych sieci triangulacyjnej. Poprawkę tę można zaniedbać dla punktów na obszarach równinnych w tym przypadku, gdy różnice wysokości pomiędzy sąsiednimi punktami triangulacyjnymi są mniejsze niż 100 m.

Ze względu na stosunkowo dużą dokładność określenia składowych odchylenia pionu przy wykorzystaniu danych grawimetrycznych, zapewnione jest obliczenie omawianych poprawek kątowych w warunkach polskich ze średnim błędem nie przekraczającym praktycznie rzędu  $\pm 0''01$ .

**Wniosek 4.** Biorąc pod uwagę przebieg geoidy na obszarze Polski, celowym było uwzględnienie przy redukcjach baz triangulacyjnych na powierzchnię odniesienia, odstępów geoidy od elipsoidy odniesienia (Kraśowskiego). Nieuwzględnienie przy redukcjach baz tych odstępów spowodowałoby skażenie skali sieci triangulacyjnej, którego wielkość ( $2 \cdot 10^{-6}$ ) byłaby liczbowo dwu-trzykrotnie większa niż dokładność komparacji i pomiaru bazy w terenie przymiarami drutowymi Jäderina.

**Wniosek 5.** Ewentualne wprowadzenie w przyszłości przewidywanej zmiany wartości wyjściowej  $g$  grawimetrycznego systemu poczdamskiego oraz nowego wzoru na wartość normalną siły ciężkości  $\gamma_0$  nie spowoduje praktycznie zmiany w obliczonych obecnie dla punktów triangulacyjnych wartościach składowych  $\xi$  i  $\eta$  względnego odchylenia pionu.

### **3. Analiza i wnioski wynikające z wykorzystania materiałów grawimetrycznych w polskiej sieci niwelacji precyzyjnej**

Sieć niwelacji precyzyjnej Polski jest jak wiadomo opracowana w systemie wysokości normalnych. Obliczenie sieci niwelacji precyzyjnej I klasy w tym systemie wysokości dokonane zostało przy wykorzystaniu odpowiednio przygotowanych materiałów grawimetrycznych [4].

Należy zaznaczyć, że podobne przygotowanie i opracowanie materiałów grawimetrycznych, jak dla sieci I klasy, przeprowadzone było dla sieci niwelacji precyzyjnej II klasy. Całość opracowania grawimetrycznego dla potrzeb niwelacji II klasy wykonana była w Instytucie Geodezji i Kartografii sukcesywnie w latach 1956—59 \*). Dla całej sieci niwelacji precyzyjnej w kraju, tj. I i II klasy, dysponujemy więc homogenicznym opracowaniem grawimetrycznym.

Obecnie po obliczeniu sieci niwelacji precyzyjnej możemy zastanowić się czy przygotowane materiały grawimetryczne zapewniły wystarcza-

---

\*) Kryterium gęstości punktów grawimetrycznych usytuowanych wzdłuż linii niwelacji II klasy przyjęto zasadniczo, analogicznie jak dla I klasy, wg założeń p. 2.1. cytowanej pracy [4]. Dla niwelacji II klasy wykorzystano materiały grawimetryczne z katalogu punktów grawimetrycznych dla potrzeb geodezji, uzupełnione wynikami nowych pomiarów. Uzupełniające pomiary grawimetryczne dla potrzeb niwelacji II klasy wykonane były przez Instytut Geodezji i Kartografii (J. Bokun i T. Chojnicki) na kilkuset punktach w okresie 1956—59 r. Pomiary te przeprowadzano grawimetrem Askania Gs-11 oraz częściowo grawimetrem Nörngaarda w oparciu o punkty podstawowe. Obliczenia wykonano w poziomie zgodnym z poziomem przyjętym podczas przygotowania materiałów grawimetrycznych dla praktycznych potrzeb triangulacji i niwelacji precyzyjnej I klasy [4].

jącą dokładność obliczeń niwelacyjnych. Należy też zwrócić uwagę na wielkość wpływu rzeczywistego pola siły ciężkości w Polsce na obliczone rzędne w systemie wysokości normalnych oraz rozpatrzyć zagadnienie ich wykorzystania w warunkach polskich, jako wysokości dla potrzeb praktyki.

Pod rozwagę można wziąć możliwość wykorzystania przygotowanych materiałów grawimetrycznych dla obliczenia niwelacji w innych systemach wysokości, jak również rozważyć jakie zmiany w obliczeniach niwelacji spowodowałaby zmiana wartości wyjściowej systemu poczdamskiego oraz wzoru na wartość normalną siły ciężkości.

### 3.1. Analiza przewidywanej dokładności obliczenia w sieci niwelacji precyzyjnej poprawki niwelacyjnej w systemie wysokości normalnych na podstawie przygotowanych materiałów grawimetrycznych.

Przewyższenie pomiędzy punktami A i B w systemie wysokości normalnych uzyskuje się (co było już omówione w p. 2.1 cytowanej pracy autora [4]) przez dodanie do pomierzonego przewyższenia poprawki  $PN_{AB}$  ze względu na nierównoległość powierzchni poziomowych, wyrażonej wzorem:

$$PN_{AB} = - \frac{\gamma_0^B - \gamma_0^A}{\gamma_{sr}} \cdot H_{sr} + \frac{(g_0 - \gamma_0)_{sr}}{\gamma_{sr}} \Delta h_{AB}.$$

Rozważmy, z jaką dokładnością na podstawie przygotowanych materiałów grawimetrycznych mogły być obliczone poprawki  $PN$ . Średni błąd obliczenia tej poprawki wynosi  $m_{PN} = \pm 1 m_1^2 + m_{II}^2$ , gdzie  $m_I$  — jest średnim błędem pierwszego członu poprawki (zależnego od  $\varphi$  i  $H$ ), a  $m_{II}$  — drugiego członu poprawki (będącego funkcją anomalii Faye'a i przewyższenia).

Obliczamy wpierw  $m_I$  jako funkcję  $H$ , przyjmując realne założenia wg p. 2.1 pracy [4], tj.  $m_{\Delta\varphi} = \pm 3''$ .

Obliczenia zestawione są w tabl. 15.

Tablica 15

| $H$<br>w metrach | $m_I$<br>w milimetrach |
|------------------|------------------------|
| 100              | $\pm 0,01$             |
| 250              | $\pm 0,02$             |
| 500              | $\pm 0,04$             |
| 750              | $\pm 0,05$             |
| 1000             | $\pm 0,08$             |

Średni błąd drugiego członu poprawki  $m_{II}$  jest funkcją średniego błędu wyznaczenia średniej wartości anomalii Faye'a  $m_{(g_0-\gamma_0)sr}$ , gdyż wpływ błędu pomiaru przewyższenia  $\Delta h_{AB}$  można w tym przypadku zaniedbać \*).

Średni błąd  $m_{(g_0-\gamma_0)sr}$  wyrazić możemy wzorem:

$$m_{(g_0-\gamma_0)sr} = \pm 1 \cdot m_{(g_0-\gamma_0)p}^2 \pm m_{lin.(g_0-\gamma_0)}^2,$$

gdzie:  $m_{(g_0-\gamma_0)p}$  — średni błąd przypadkowy anomalii Faye'a w stosunku do systemu poczdamskiego dla punktów grawimetrycznej sieci regionalnej, w nawiązaniu do których wyznaczane były przyspieszenia siły ciężkości dla szczegółowych punktów grawimetrycznych, leżących na linii niwelacyjnej w pobliżu reperów  $A$  i  $B$ ; wartość liczbowa tego błędu przypadkowego ma charakter systematyczny dla całej grupy punktów sieci, przy założeniu jednakowej dokładności określenia wysokości npm tych punktów,

$m_{lin(g_0-\gamma_0)}$  — średni błąd przypadkowy, wynikający z przyjęcia liniowej zmiany anomalii Faye'a pomiędzy sąsiednimi punktami grawimetrycznymi.

Rozważania dokładnościowe przeprowadzone przez autora w p. 7 (tabl. 8) cytowanej pracy [4] doprowadziły do wniosku, że dla punktów grawimetrycznych, położonych wzdłuż linii niwelacji precyzyjnej, średni błąd anomalii Faye'a — w odniesieniu do systemu poczdamskiego — wynosi od  $\pm 0,3$  do  $\pm 1,0$  mgal, a przeciętnie  $\pm 0,6$  mgal.

Wielkości te przyjmujemy do dalszej analizy jako odpowiadające średniemu błędowi  $m_{(g_0-\gamma_0)p}$ .

Rozważmy obecnie jakiej wielkości może być średni błąd przypadkowy, wynikający z przyjęcia liniowości zmiany anomalii Faye'a, tj.  $m_{lin(g_0-\gamma_0)}$ .

Profil anomalii Faye'a wzdłuż linii niwelacyjnej jest w przybliżeniu podobnego charakteru jak profil terenu tej linii.

Dla potwierdzenia powyższego praktycznym przykładem, przedstawiamy na rys. 3 oba profile, tj. profil wysokości terenu  $H$  npm. oraz profil

---

\*) Wpływ na  $m_{II}$  średniego błędu pomierzonego w wyniku niwelacji przewyższenia ( $m_{\Delta h_{AB}pom.} = \pm 1$  mm), przy maksymalnej wartości anomalii Faye'a rzędu 100 mgal, będzie wynosił  $1 \cdot 10^{-4}$  mm. Jest to wielkość, którą praktycznie w tej analizie można uważać za bliską zera. Wobec tego przyjmujemy średni błąd:

$$m_{II} = \pm \frac{\Delta h}{\gamma_{sr}} \cdot m_{(g_0-\gamma_0)sr}.$$

anomalii Faye'a — dla jednej z linii niwelacji precyzyjnej w terenie górskim \*) o długości około 30 km.

Z rysunku tego wynika duża zgodność w charakterze zmian profilu wysokościowego i profilu anomalii Faye'a.

Decydującym więc czynnikiem umożliwiającym przyjęcie liniowości zmian anomalii Faye'a jest usytuowanie pomiarowych punktów grawimetrycznych w charakterystycznych punktach profilu wysokościowego linii niwelacyjnej. Kryterium to było w miarę możliwości zrealizowane przy przygotowaniach materiałów grawimetrycznych dla potrzeb polskiej sieci niwelacji precyzyjnej, aby możliwie zmniejszyć błąd wynikły z interpolacji anomalii Faye'a pomiędzy pomiarowymi punktami grawimetrycznymi.

Celem określenia średniej wielkości  $m_{lin(g_0-\gamma_0)}$  dla linii niwelacyjnych w różnych kategoriach terenu przeprowadzono następujące badania.

Na odcinku pomiędzy punktami grawimetrycznymi  $A$  i  $B$ , leżącymi w typowej dla danej kategorii terenu odległości od siebie (wg p. 2.1 [4]), pomierzono dodatkowo punkt grawimetryczny  $C$  znajdujący się w przybliżeniu w środku tego odcinka. Dla tego punktu  $C$  wyznaczono wartość anomalii Faye'a na podstawie przeprowadzonego pomiaru —  $(g_0 - \gamma_0)_{pom}$  oraz drugi raz, na podstawie interpolacji liniowej wartości anomalii między  $A$  i  $B$  —  $(g_0 - \gamma_0)_{lin}$ .

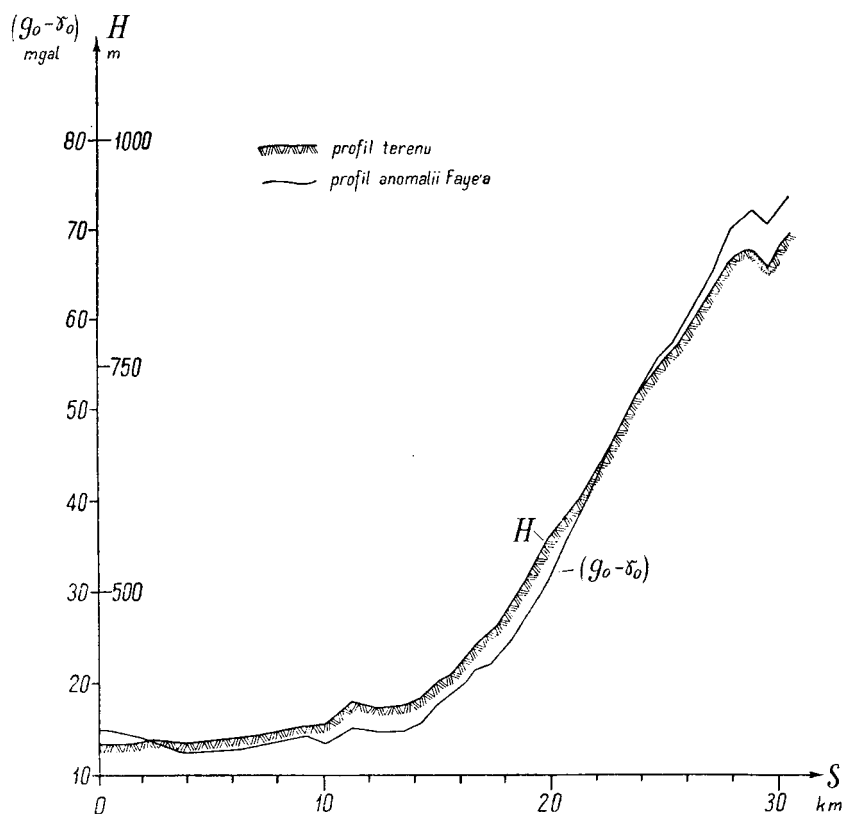
Utworzone zostały następnie dla punktu  $C$  różnice:

$$\delta_{an.F} = (g_0 - \gamma_0)_{pom} - (g_0 - \gamma_0)_{lin}.$$

Ponieważ pomiar dodatkowy na punkcie  $C$  wykonano precyzyjnym grawimetrem, więc błędu wyznaczenia wartości  $(g_0 - \gamma_0)_{pom}$  rzędu  $\pm 0,05$  mgal (w stosunku do punktu  $A$ ) można przy tych rozważaniach nie uwzględ-

\*) Na tej linii niwelacji precyzyjnej, położonej na Dolnym Śląsku, przeprowadziliśmy w lecie 1958 roku, specjalnie dla celów badawczych, precyzyjne pomiary grawimetryczne. Punkty pomiarowe grawimetryczne były zakładane przy każdym reperze tej linii niwelacyjnej, tj. w odstępach od 0,25 do 1,50 km. Pomiary wykonaliśmy grawimetrem precyzyjnym Askania Gs-11 wykorzystując do transportu odpowiednio przystosowany samochód osobowy marki „Warszawa”. Specjalny otwór w podłodze podwozia tego samochodu, oraz zawieszenie statywu instrumentu pod podwoziem, umożliwia przeprowadzenie obserwacji na punkcie pomiarowym bez potrzeby wynoszenia grawimetru z samochodu. Pomiary wykonano metodą punktów pośrednich. Średni błąd wyznaczenia przyspieszenia siły ciężkości w stosunku do punktów podstawowego sieci (Jelenia Góra) wyniósł  $\pm 0,03$  mgal. Biorąc pod uwagę określenie wysokości każdego punktu grawimetrycznego — na podstawie wysokości reperu niwelacyjnego i ocenianego z dokładnością 0,1 m przewyższenia pomiędzy reperem i punktem grawimetrycznym — anomalia Faye'a tego punktu, w stosunku do punktu podstawowego została wyznaczona ze średnim błędem  $\pm 0,05$  mgal.

Należy zaznaczyć, że wyniki omawianych pomiarów grawimetrycznych wzdłuż tej linii niwelacji precyzyjnej, łącznie z danymi niwelacyjnymi, stanowią cenny materiał do przeprowadzenia szeregu badań i analiz.



Rys. 3. Profil anomalii Faye'a wzdłuż linii niwelacji precyzyjnej w terenie górskim

niać. Wobec tego różnice  $\delta_{an.F}$  można przyjąć jako równe wartości błędu  $m_{lin}(g_0 - \gamma_0)$ .

Takie postępowanie przeprowadziliśmy dla różnych linii niwelacyjnych. W tabl. 16 zestawione są te wartości  $\delta_{an.F}$  dla 31 punktów oraz ich wartości przeciętne i średnie, przy podziale na dwie kategorie terenu: a) równinny i pagórkowaty, b) podgórski i górski.

Opierając się na średnich wartościach uzyskanych w tabl. 16 możemy przyjąć:

dla terenu równinnego i pagórkowatego  $m_{lin}(g_0 - \gamma_0) = \pm 0,45$  mgal

dla terenu podgórskiego i górskiego  $m_{lin}(g_0 - \gamma_0) = \pm 1,03$  mgal,

a przeciętnie  $\pm 0,7$  mgal.

Określimy teraz dla charakterystycznych przypadków średni błąd średniej wartości anomalii Faye'a  $m_{(g_0 - \gamma_0)sr}$ , przyjętej do obliczenia poprawki FN. Obliczenia te zestawiono w tabl. 17.

Tablica 16

| Teren równinny i pagórkowaty |                        |                            | Teren podgórski i górski |                        |                            |
|------------------------------|------------------------|----------------------------|--------------------------|------------------------|----------------------------|
| Lp.<br>p-ktu                 | Odległość<br>A-B<br>km | $ \delta_{an.F.} $<br>mgal | Lp.<br>p-ktu             | Odległość<br>A-B<br>km | $ \delta_{an.F.} $<br>mgal |
| 1                            | 6,0                    | 0,28                       | 1                        | 6,2                    | 1,56                       |
| 2                            | 4,5                    | 0,42                       | 2                        | 6,8                    | 0,02                       |
| 3                            | 5,1                    | 0,47                       | 3                        | 6,6                    | 0,98                       |
| 4                            | 3,1                    | 0,31                       | 4                        | 7,0                    | 1,40                       |
| 5                            | 3,1                    | 0,22                       | 5                        | 4,1                    | 1,13                       |
| 6                            | 3,2                    | 0,60                       | 6                        | 2,1                    | 0,91                       |
| 7                            | 2,4                    | 0,59                       | 7                        | 2,1                    | 0,39                       |
| 8                            | 2,5                    | 0,35                       | 8                        | 2,1                    | 0,28                       |
| 9                            | 1,3                    | 0,12                       | 9                        | 2,2                    | 0,68                       |
| 10                           | 4,5                    | 0,08                       | 10                       | 2,2                    | 1,12                       |
| 11                           | 1,6                    | 0,02                       | 11                       | 2,2                    | 0,58                       |
| 12                           | 6,0                    | 0,38                       | 12                       | 2,0                    | 1,22                       |
| 13                           | 5,7                    | 1,16                       | 13                       | 2,1                    | 0,06                       |
| 14                           | 7,5                    | 0,34                       | 14                       | 2,1                    | 1,66                       |
| 15                           | 4,4                    | 0,26                       | 15                       | 2,2                    | 0,91                       |
| przeciętnie                  | 4,0                    | 0,37 mgal                  | 16                       | 2,6                    | 1,77                       |
|                              | średnio                | $\pm 0,45$ mgal            | przeciętnie              | 3,4                    | 0,92 mgal                  |
|                              |                        |                            | średnio                  |                        | $\pm 1,03$ mgal            |

Tablica 17

| Rodzaj terenu          | $m_{(g_0-\gamma_0)p}$<br>mgal | $m_{lin(g_0-\gamma_0)}$<br>mgal | $m_{(g_0-\gamma_0)sr}$<br>mgal |
|------------------------|-------------------------------|---------------------------------|--------------------------------|
| Równinny i pagórkowaty | $\pm 0,3$                     | $\pm 0,45$                      | $\pm 0,5$                      |
| Podgórski i górski     | $\pm 1,0$                     | $\pm 1,03$                      | $\pm 1,4$                      |
| Przeciętnie            | $\pm 0,6$                     | $\pm 0,7$                       | $\pm 0,9$                      |

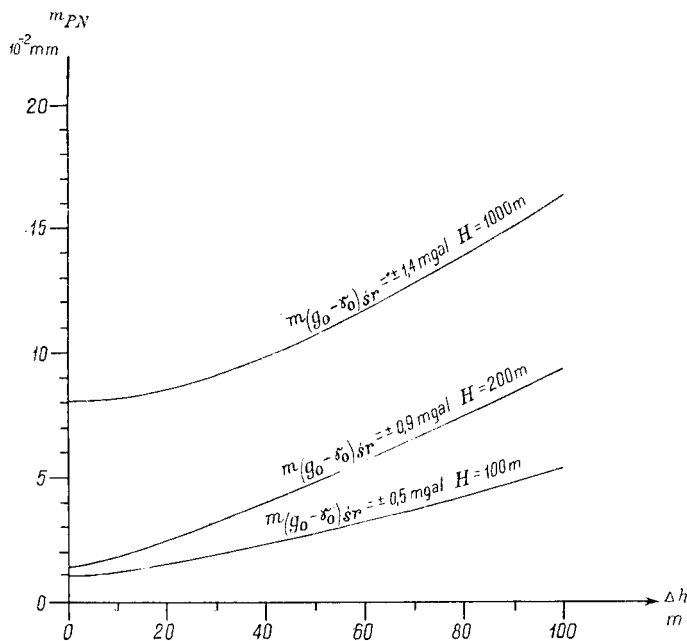
Na podstawie powyższych rozważań (a w szczególności tabl. 15 i tabl. 17) obliczamy średnie błędy określenia poprawki niwelacyjnej ( $m_{PN}$ ) w systemie wysokości normalnych dla charakterystycznych w naszych warunkach 3 wartości:

- minimalnych, tj. dla  $m_{(g_0-\gamma_0)sr} = \pm 0,5$  mgal i  $H_{sr} = 100$  m,
- przeciętnych dla warunków polskich, tj. dla  $m_{(g_0-\gamma_0)sr} = \pm 0,9$  mgal i  $H_{sr} = 200$  m,
- maksymalnych (w terenie górskim), tj. dla  $m_{(g_0-\gamma_0)sr} = \pm 1,4$  mgal i  $H_{sr} = 1000$  m.

Na rys. 4 przedstawiony jest wykres  $m_{PN}$  jako funkcji przewyższenia dla wyżej wymienionych 3 charakterystycznych przypadków.

Dla przeciętnych, w warunkach polskich, przewyższeń pomiędzy sąsiednimi reperami niwelacyjnymi, rzędu 20—50 m, średni błąd obliczenia

poprawki  $PN$  na podstawie przygotowanych materiałów grawimetrycznych (zgodnie z [4]) wynosi przeciętnie  $\pm 0,05$  mm, a maksymalnie dla



Rys. 4. Średnie błędy poprawki  $PN$  w zależności od wartości  $H$  i  $m(g_0 - \gamma_0) \delta r$

terenów górskich  $\pm 0,10$  mm. Dla zupełnie wyjątkowych w naszych warunkach przewyższeń  $\Delta h_{AB} = 100$  m w terenach górskich średni błąd  $m_{PN}$  osiągnąć może  $\pm 0,16$  mm.

Jak wynika z powyższych rozważań przygotowane materiały grawimetryczne zabezpieczyły w pełni wystarczającą dokładność obliczenia poprawki niwelacyjnej w systemie wysokości normalnych dla polskiej sieci niwelacji precyzyjnej, biorąc pod uwagę dokładności pomiarów niwelacyjnych i fakt podawania w katalogu wysokości punktów niwelacyjnych do 0,1 mm.

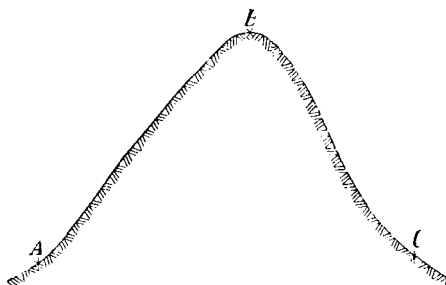
Rozważania powyższe przeprowadziliśmy przy słusznym założeniu obliczania poprawek  $PN$  dla każdego przewyższenia pomiędzy sąsiednimi reperami na linii niwelacyjnej. Z wzoru na poprawkę  $PN$  wynika bowiem, że dokładne jej obliczenie wymaga operowania różniczkowymi elementami, tj. praktycznie odcinkami pomiędzy dwoma, kolejnie położonymi na linii niwelacyjnej, reperami. Dla linii niwelacyjnej  $A-N$  poprawka niwelacyjna, jak wiadomo, wyraża się wzorem:

$$PN_{A,N} = \sum_A^N P\tilde{N}_{i,i+1}.$$

Błędnym założeniem jest więc np. przyjęcie zasady podziału linii niwelacyjnej na odcinki 6—7 km, tj. łączące co 3—4 reper niwelacyjny, i bezpośrednie obliczanie dla tych odcinków, jako elementarnych, poprawki niwelacyjnej ( $PN_{i,i+3}$ ) zamiast  $\sum_1^3 PN_{i,i+1}$  \*). W tym przypadku popełniony będzie błąd znacznie przekraczający średnie błędy  $m_{PN}$  przedstawione na rys. 4.

Zbadaliśmy wielkość tego błędu przeprowadzając dla kilku linii polskich obliczenia dokładne poprawki  $PN$  co reper i co trzeci — czwarty reper. Różnice tych obliczeń dla odcinka o długości 6 km wyniosły od kilku dziesiątych części milimetra do 1 mm. Należy też zauważyć, że takie postępowanie spowodowałoby błędy w wyznaczeniu wysokości punktów pośrednich, tj. reperów położonych wewnątrz tych 6 kilometrowych odcinków.

Weźmy przykład odcinka  $ABC$  (rys. 5), dla uproszczenia zakładając położenie jego na linii przebiegającej równoleżnikowo.



Rys. 5

Przyjmując dla punktu  $A$  wartości:  $(g_0 - \gamma_0) = 60$  mgal i  $H_A = 300$  m,

|   |   |   |     |   |                         |   |   |             |   |
|---|---|---|-----|---|-------------------------|---|---|-------------|---|
| „ | „ | „ | $B$ | „ | $(g_0 - \gamma_0) = 68$ | „ | i | $H_B = 360$ | „ |
| „ | „ | „ | $C$ | „ | $(g_0 - \gamma_0) = 60$ | „ | i | $H_C = 300$ | „ |

uzyskujemy następujące poprawki  $PN$ :

$PN_{AC} = 0,00$  mm, a  $PN_{AB} = +3,91$  mm,  $PN_{BC} = -3,91$  mm.

Z tego przykładu wynika, że dla obliczenia reperów pośrednich pomiędzy końcowymi punktami odcinka 6—7 km należałoby też obliczać poprawki  $PN_{AB}$  pomiędzy sąsiednimi reperami, aby je następnie wyrównać do wartości  $PN_{i,i+3}$ , obliczonej uprzednio. Ewentualne „rozzrucenie” wartości  $PN_{i,i+3}$  na poszczególne przewyższenia, proporcjonalnie do ich długości, spowodowałoby bowiem powstanie dodatkowych, często grubych

\*) Poruszamy to zagadnienie, gdyż w praktyce zasada obliczania poprawki  $PN$  co reper bywa niestety nie zawsze stosowana.

błędów (rzędu kilku milimetrów) w obliczonej wysokości reperu pośredniego.

Rozważmy następnie, jaki wpływ na obliczenia poprawek  $PN$  miałyby ewentualne niewykonanie pomiarów grawimetrycznych szczegółowych wzdłuż linii niwelacyjnych, a przyjęcie dla określenia średniej wartości  $(g_0 - \gamma_0)_{sr}$  tylko ogólnej mapy grawimetrycznej o rzadkiej gęstości zdjęcia (punkty np. w odległościach 10—12 km). W tym celu przeprowadziliśmy dla 2 linii niwelacyjnych w terenie podgórskim (Sudety i Ziemia Kłodzka) porównanie wartości poprawek  $PN$  obliczonych co reper na podstawie: a) szczegółowych, dokładnych materiałów grawimetrycznych i b) ogólnej mapy grawimetrycznej. Różnice wartości  $PN$  obliczonych wg materiałów a) i b) dla jednego przewyższenia dochodzą do 1,5 mm a dla odcinka 10 km linii niwelacyjnej do 6 mm, przy różnicy wysokości 200 m. Wpływ ten ma charakter systematyczny.

Jak widać z powyższego, zrezygnowanie ze szczegółowego zdjęcia grawimetrycznego wzdłuż linii niwelacyjnej spowodowałoby powstanie dużych błędów systematycznych, które wyraźnie obniżyłyby jakość obliczanej sieci niwelacji precyzyjnej.

Reasumując przeprowadzone rozważania dochodzimy do wniosku, że przygotowane i opracowane dla potrzeb niwelacji materiały grawimetryczne [4] zabezpieczyły dokładność 0,05—0,10 mm obliczenia poprawki niwelacyjnej w systemie wysokości normalnych. Koniecznym warunkiem jest obliczanie tych poprawek dla każdego przewyższenia, tj. pomiędzy sąsiednimi reperami, aby uzyskać dokładne wyniki obliczenia  $PN$  dla całej linii niwelacyjnej.

### 3.2. Wpływ rzeczywistego pola siły ciężkości w Polsce na obliczenie niwelacji w systemie wysokości normalnych

Wpływ anomalności pola siły ciężkości na rzędne punktów w systemie wysokości normalnych przedstawia wielkość drugiego członu poprawki ze względu na nierównoległość powierzchni poziomowych, tj.:

$$(g_0 - \gamma_0)_{sr} dh.$$

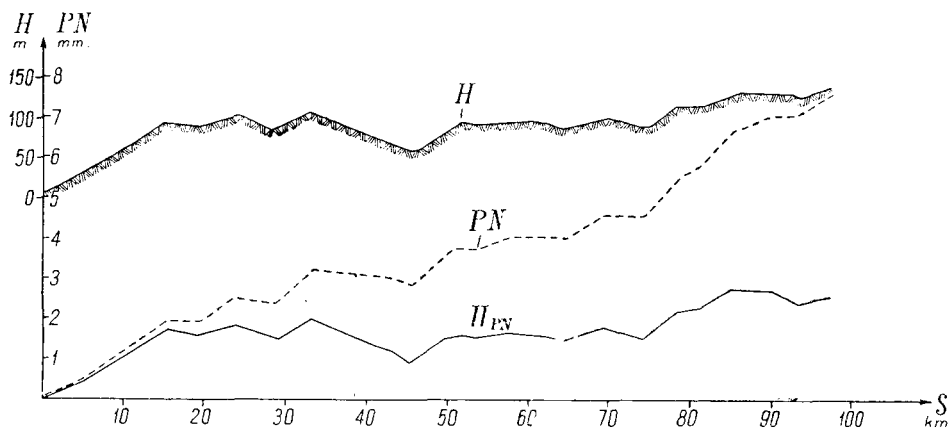
Dla poszczególnych przewyższeń pomiędzy sąsiednimi reperami w sieci niwelacji precyzyjnej w Polsce wielkość tego członu może osiągnąć kilka milimetrów. Na przykład dla maksymalnych w naszych warunkach wartości przewyższenia pomiędzy sąsiednimi reperami  $\Delta h = 100$  m oraz wartości anomalii Faye'a 80 mgal — wielkość tego członu poprawki, czyli wpływu anomalności pola grawitacyjnego, wyniesie 8,2 mm.

Wpływ ten na linie niwelacyjne, jako suma drugiego członu poprawek dla poszczególnych przewyższeń, zależy przede wszystkim od profilu wy-

sokościowego tej linii oraz od wielkości anomalii Faye'a. Zagadnienie to przykładowo zilustrujemy na rysunkach dla trzech linii niwelacji przechodzących po terenach różnych kategorii. Przedstawiamy na nich dla poszczególnej linii wykres: poprawek niwelacyjnych w systemie wysokości normalnych ( $PN$ ), drugiego członu tej poprawki ( $II_{PN}$ ) oraz profilu wysokościowego ( $H$ ).

Dla jednej z linii niwelacji precyzyjnej w terenie pagórkowatym, o małych wartościach anomalii Faye'a, omawiane wartości przedstawione zostały na rys. 6. Rys. 7 obrazuje wykres poprawki  $PN$ , II członu tej poprawki oraz wysokości  $H$  dla jednej z linii niwelacji precyzyjnej w terenie podgórskim (Podkarpacie) o wartości anomalii Faye'a dość dużej — średnio około 60 mgal.

Omawiane wykresy dla jednej z linii niwelacji precyzyjnej w terenie górskim (Karkonosze) podane zostały na rys. 8. (Przytoczona na tym rysunku linia została poprzednio omówiona w p. 3.1, a na rys. 3 przedstawiony został profil anomalii Faye'a wzdłuż tej linii.)

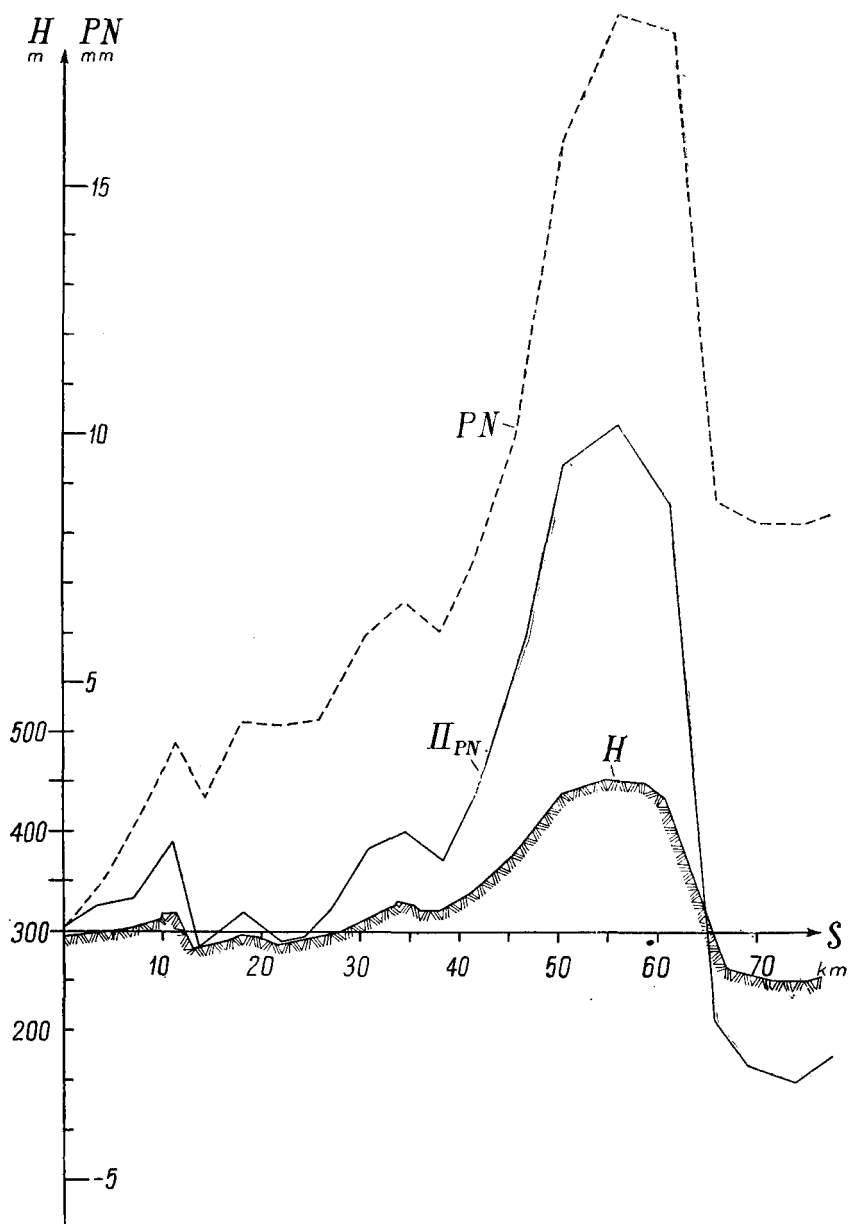


Rys. 6. Wykres poprawki niwelacyjnej dla jednej z linii w terenie pagórkowatym

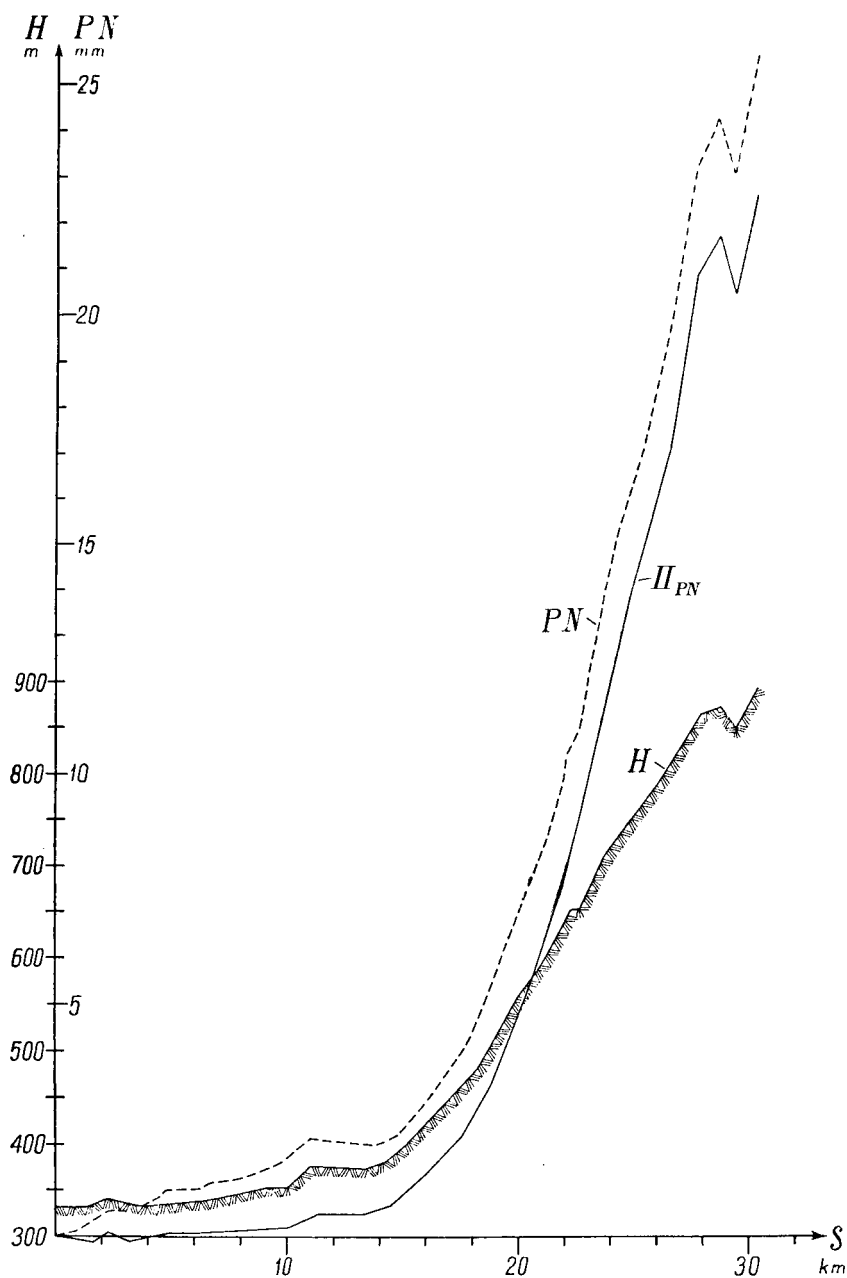
Dla linii w terenie równinnym przykładu nie podajemy, gdyż w tym przypadku wpływ anomalii pola grawitacyjnego, przy małych wartościach przewyższeń, jest dla całej linii, w porównaniu do innych kategorii terenu, stosunkowo mały.

Jak wynika z rys. 6, 7, 8 wpływ anomalności pola grawitacyjnego na wysokości normalne dla przykładowo podanych linii niwelacji precyzyjnej kształtuje się następująco:

a) dla linii w terenie pagórkowatym wynosi 2,5 mm (cała poprawka  $PN$  — 7,5 mm) — przy długości linii 97 km,



Rys. 7. Wykres poprawki niwelacyjnej dla jednej z linii w terenie podgórskim



Rys. 8. Wykres poprawki niwelacyjnej dla jednej z linii w terenie górskim

b) w terenie podgórskim — 2,5 mm na całą linię o długości 85 km, a lokalnie na poszczególnych odcinkach tej linii wpływ jest dość duży i np. dla odcinka 10 km wynosi około 10 mm,

c) dla linii w terenie górskim, o długości 30 km, wynosi 22,5 mm (przy całej poprawce  $PN$  — 25,5 m), a lokalnie dla odcinka 10 km osiąga aż 18 mm.

Wpływ II członu poprawki  $PN$ , tj. anomalności pola grawitacyjnego, na zamknięcie poligonów sieci niwelacyjnej zależy oczywiście od charakteru linii (pod względem rzeźby terenu i przebiegu anomalii), wchodzących w skład poligonu. Dla przykładu weźmy zamknięty poligon sieci niwelacji I klasy składający się z linii przebiegających w terenie pagórkowatym oraz częściowo w terenie podgórskim. Obwód tego poligonu wynosi 1049 km.

W poligonie tym otrzymaliśmy następujące wielkości.

Suma pomierzonych przewyższeń:  $\Sigma \Delta h_{pom} = +30,27$  mm.  
Suma poprawek ze względu na nierównoległość powierzchni poziomych:

Suma członu I poprawki  $\Sigma_{IPN} = -11,86$  mm

Suma członu II poprawki  $\Sigma_{IIPN} = -12,94$  mm

Niezamknięcie w systemie wysokości normalnych  $\omega = +5,47$  mm

Dla poligonu tego uwzględnienie tylko I członu poprawki (który jest praktycznie identyczny z poprawką ortometryczną normalną, wprowadzaną w przedwojennej sieci niwelacji precyzyjnej w Polsce) dałoby niezamknięcie poligonu 18,4 mm. Uwzględnienie anomalności pola siły ciężkości do pomierzonych przewyższeń powoduje wyraźne zmniejszenie się wielkości niezamknięcia poligonu (5,47 mm).

Zamknięcia innych poligonów sieci I i II klasy potwierdzają na ogół powyższe stwierdzenia, tj. że uwzględnienie II członu poprawki  $PN$  zmniejsza wielkość niezamknięcia poligonu sieci niwelacyjnej.

### 3.3. Zagadnienie zastosowania systemu wysokości normalnych dla potrzeb praktyki w Polsce

Zagadnienie odpowiedniego obliczenia sieci niwelacji precyzyjnej w jednym z teoretycznie słusznych systemów wysokości — które wymagają wprowadzenia do pomierzonych przewyższeń dość znacznych liczbowo wartości poprawek, uwzględniających nierównoległość powierzchni poziomowych — wiąże się bezpośrednio z zagadnieniem praktycznego wykorzystania sieci niwelacji precyzyjnej, jako podstawowej osnowy wysokościowej. Jeżeli przyjęty system wysokości powoduje wprowadzenie dużych, co do wartości liczbowych, poprawek do pomierzonych różnic wysokości, zaistnieje wtedy trudność dowiązania linii

niwelacyjnych niższych klas (tj. półprecyzyjnych i technicznych niwelacji, w których ze względów praktycznych w zasadzie poprawki te nie powinny być uwzględniane) do punktów obliczonej w takim systemie niwelacji precyzyjnej.

Zagadnienie to może być zasadniczo, naszym zdaniem, w dwojaki sposób rozwiązane. Mianowicie:

— albo pomierzona sieć niwelacji precyzyjnej zostaje obliczona dwukrotnie, tj. raz specjalnie dla celów naukowo-badawczych, ściśle w teoretycznie przyjętym systemie wysokości (bez względu na duże nawet wielkości poprawek), oraz drugi raz dla potrzeb praktyki w systemie wysokości zapewniającym możliwie małe różnice pomiędzy przewyższeniami pomierzonymi a obliczonymi w tym systemie,

— albo pomierzona sieć niwelacji precyzyjnej obliczona zostaje zarówno dla potrzeb naukowych, jak i praktycznych w jednym systemie wysokości.

Sprawy wzajemnej korelacji wymagań ściśle teoretycznych i praktycznych w zakresie systemów wysokości są dość szeroko dyskutowane w geodezyjnej literaturze światowej\*) i dotychczas generalnie nie zostały rozstrzygnięte. W różnych bowiem krajach, zależnie od charakteru rzeźby terenu, zagadnienia te inaczej się przedstawiają.

Nowa sieć niwelacji precyzyjnej I i II klasy w Polsce została, jak wiadomo, obliczona tak dla potrzeb naukowych, jak i praktycznych, w systemie wysokości normalnych.

Zastanówmy się, jakie znaczenie ma zastosowanie tego systemu u nas dla potrzeb praktyki, przy sprawach związanych z dowiązaniem niwelacji niższych klas.

Zagadnienie sprowadza się do wielkości różnic pomiędzy pomierzonymi przewyższeniami, a obliczonymi w systemie wysokości normalnych.

Rozważania p. 3.2 doprowadziły do wniosku, że różnice te dla linii niwelacyjnych w terenie równinnym i pagórkowatym, tj. dla przeważającej części obszaru kraju, są małe w porównaniu do średnich błędów

---

\*) Ramsayer wprowadza pojęcie minimalnie zredukowanych wysokości uzasadniając następująco [21]: „... die orthometrischen Meereshöhen nach Niethammer und die genäherten orthometrischen Höhen nach Helmert im Mittel- und Hochgebirge von den nivellierten Höhenunterschieden so stark abweichen, dass sie als Gebrauchshöhen nicht verwendbar sind. Es wurde deshalb auch noch minimal reduzierte Höhen berechnet, d. h. es wurde eine Minimalreduktion berechnet, die streng den theoretischen Schleifenschlussfehler liefert und die Nivellements-ergebnisse möglichst wenig ändert.” Bodemüller [3] stosuje także pojęcie wysokości dwu rodzajów, a mianowicie: „Wissenschaftliche Höhen sind definiert..... „.....Gebrauchshöhen sind dagegen nur für den praktischen Gebrauch bestimmt”.

Baeschlin [2] dla określenia wysokości stosowanych dla potrzeb praktyki używa pojęcia „les altitudes usuelles”.

pomiarów niwelacji III i IV klasy [31]. W tych więc rejonach nawiązanie niwelacji niższych klas do reperów niwelacji precyzyjnej nie nastręcza żadnych dodatkowych trudności ze względu na system wysokości, to znaczy do pomiarów niwelacji III i IV klasy nie potrzeba wprowadzać żadnych poprawek ze względu na system wysokości normalnych.

W terenie podgórskim i górskim zagadnienie komplikuje się, gdyż — jak to wynika z rys. 7 i 8 — różnice te (tj. sumy poprawek *PN*) dla odcinków 10—20 kilometrowych mogą dochodzić do 1—2 cm. W tym więc terenie dla linii niwelacji półprecyzyjnej (mamy tu na myśli adaptowane dawne linie niwelacji precyzyjnej tzw. II kategorii o średnim błędzie  $\pm 2,5$  mm/km) należy wprowadzić poprawki *PN*, aby można było obliczyć te linie z zadowalającą dokładnością w nawiązaniu do punktów sieci niwelacji precyzyjnej. Natomiast dla niwelacji technicznej, z uwagi na jej dokładność, można zasadniczo zaniedbać obliczenia poprawki *PN*, z wyjątkiem linii w bardzo górzystym terenie, dla których należy w każdym poszczególnym przypadku przeprowadzić odpowiednią analizę.

Na marginesie tego zagadnienia, wydaje się celowe przyjęcie zasady praktycznej, aby w katalogu niwelacji precyzyjnej w terenie podgórskim i górskim podawane były oprócz wysokości *H* także pomierzone przewyższenia i wartości poprawek.

Jak wynika z powyższego, zastosowanie systemu wysokości normalnych w warunkach polskich, jako wysokości dla potrzeb praktyki, jest zupełnie odpowiednie i nie powoduje specjalnych trudności przy obliczaniu niwelacji niższych klas.

Należałoby wziąć pod rozwagę zagadnienie wielkości poprawek w systemie wysokości normalnych, w porównaniu do innych systemów stosowanych dla potrzeb praktyki. Zastosowanie różnych systemów wysokości w warunkach polskich jest z punktu widzenia naukowo-badawczego tematem bardzo interesującym i wymagającym obszernego naświetlenia w ramach odrębnej pracy.

Warto przytoczyć wyniki przeprowadzonych dla 2 linii niwelacji precyzyjnej porównań obliczenia w systemie wysokości normalnych i w systemie wysokości ortometrycznych, wg wzoru Helmerta (przytoczonego w p. 2.1. cytowanej pracy autora [4]). Dla linii w terenie podgórskim (Podkarpacie) o długości 80 km suma poprawek niwelacyjnych wg wzoru Helmerta wyniosła 58,9 mm, a w systemie wysokości normalnych 32,8 mm. Różnica wynosi więc 26,1 mm.

Dla linii w terenie górskim o długości 30 km (omówionej w p. 3.1) suma poprawek wg wzoru Helmerta wyniosła 41,2 mm, a w systemie wysokości normalnych 25,6 mm, czyli różnica wynosi 15,6 mm.

Przykłady te wykazują znacznie mniejsze (o około 40%) zmiany pomierzonych różnic wysokości przy zastosowaniu systemu wysokości normalnych w porównaniu do zmian przy zastosowaniu systemu wysokości ortometrycznych wg wzoru Helmerta.

#### 3.4. Zagadnienie obliczenia wartości geopotencjalnych przy wykorzystaniu przygotowanych dla obszaru Polski materiałów grawimetrycznych

Rozważmy możliwość ewentualnego obliczenia dla naszej sieci niwelacyjnej wartości geopotencjalnych przy wykorzystaniu przygotowanych i opracowanych materiałów grawimetrycznych (zgodnie z [4]).

Definicja wartości geopotencjalnych \*) została przyjęta na X Zgromadzeniu Ogólnym Międzynarodowej Unii Geodezji i Geofizyki w Rzymie w 1954 roku [29]. W tych też wartościach obliczono, dla celów naukowo-badawczych, sieć niwelacji Europy zachodniej i północnej ([33], [23]).

Do obliczenia wartości geopotencjalnych niezbędne są dla obliczanej linii oprócz danych niwelacyjnych także wartości przyspieszenia siły ciężkości, umożliwiające określenie z wystarczającą dokładnością, dla elementarnego odcinka pomiędzy sąsiednimi reperami  $A$  i  $B$ , średniej wartości  $g_{sr} = \frac{1}{2}(g_A + g_B)$ .

W polskiej sieci niwelacji precyzyjnej mamy — jak wiadomo — wzdłuż wszystkich linii punkty grawimetryczne (od 1,5—2 km w terenie górzystym, do 3—6 km w terenie równinnym), usytuowane w miarę możliwości w charakterystycznych miejscach profilu wysokościowego linii. Wartości  $g$  tych punktów pozwalają wyznaczyć potrzebne do obliczeń wartości  $g_{sr}$  dla każdego przęsła pomiędzy sąsiednimi reperami. W terenie o regularnej, zbliżonej do liniowej, zmianie profilu wysokościowego linii

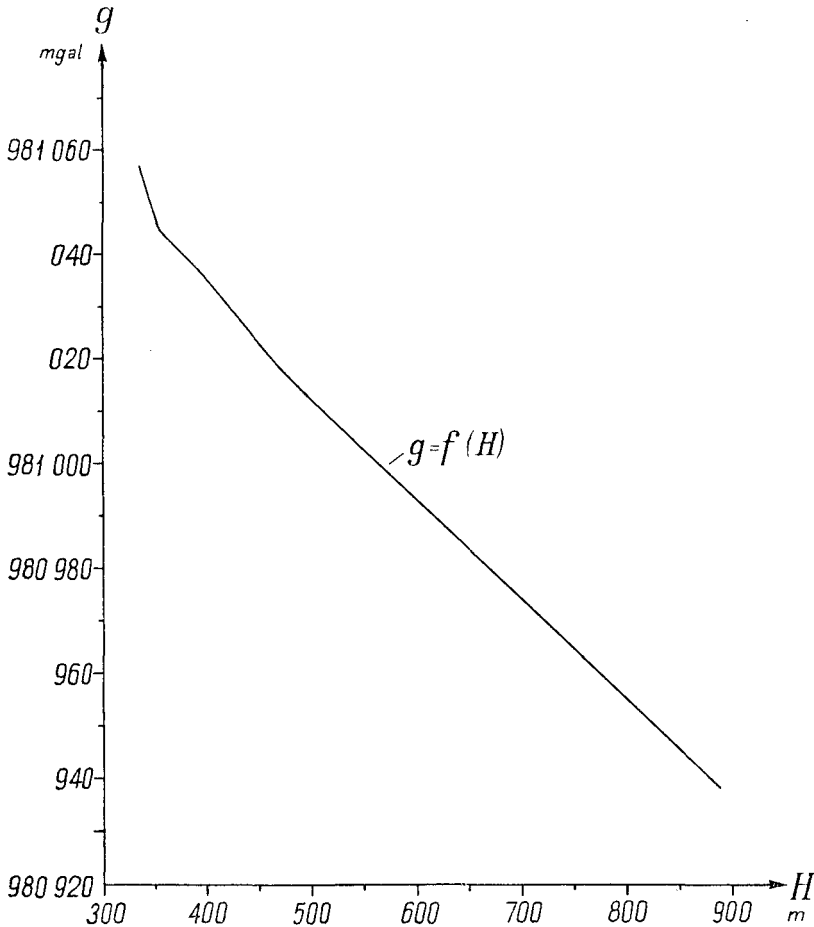
---

\*) Terminologia w języku polskim nie jest ustalona. Zgodnie z Uchwałami MUGG „cote geopotentielle” — w języku francuskim („geopotential number” — w angielskim, „geopotentielle Kote” — w niemieckim) punktu  $P$  oznacza  $C_P = \int_0^P g_{i, sr} \cdot dh_i$ , gdzie  $dh_i$

jest pomierzonym przewyższeniem pomiędzy sąsiednimi punktami  $A$  i  $B$  położonymi w różniczkowej od siebie odległości, a  $g_{i, sr}$  — średnią wartością przyspieszenia siły ciężkości na niwelowanym odcinku  $A$ — $B$ . Punkt  $O$ , jako punkt odniesienia, jest punktem wyjściowym obliczeń (powinien być w średnim poziomie morza).

Przyjęliśmy tu termin „wartości geopotencjalne”, a nie „wysokości geopotencjalne”, aby odróżnić od systemów metrycznych wysokości. Wartości geopotencjalne, jako różnice wartości potencjałów siły ciężkości, są bowiem w jednostkach  $\text{cm}^2 \cdot \text{sek}^{-2}$ .

niwelacyjnej pomiędzy sąsiednimi punktami grawimetrycznymi można by zastosować do obliczenia  $g_{sr}$  interpolację liniową. Zmienność wartości  $g$  jako funkcji wysokości  $H$  nrm. ma bowiem charakter zbliżony do liniowego.



Rys. 9. Wykres wartości przyspieszenia siły ciężkości ( $g$ ), jako funkcji wysokości ( $H$ ), wzdłuż jednej z linii niwelacji precyzyjnej w terenie górskim

Dla zorientowania jak kształtuje się zależność  $g$  od  $H$  na konkretnej linii niwelacyjnej opracowaliśmy dla jednej z linii w terenie górskim (omówionej poprzednio w p. 3.1) wykres  $g = f(H)$ . Wykres ten przedstawiony na rys. 9 wykazuje w przybliżeniu liniowy charakter tej funkcji.

Jeżeli pomiędzy punktami grawimetrycznymi profil wysokościowy linii niwelacyjnej jest urozmaicony, wtedy dla określenia  $g_{sr}$  można pomoc-

niczo zastosować interpolację zredukowanych wartości przyspieszenia  $g''_0$  (tj. wartości  $g$  zredukowanej o redukcję Faye'a i redukcję Bouguer'a ale bez uwzględnienia redukcji topograficznej) \*).

Z jaką dokładnością mogą być wyznaczone z naszych materiałów grawimetrycznych wartości  $g_{sr}$  dla poszczególnych odcinków niwelacyjnych? Na to pytanie daje w zasadzie odpowiedź analiza dokładnościowa przeprowadzona przez autora w p. 7, tabl. 8 cytowanej pracy [4] oraz rozważania p. 3.1. niniejszej pracy. Praktycznie dokładność wyznaczenia  $g_{sr}$  (przy zachowaniu sposobów postępowania omówionych powyżej) będzie tego samego rzędu jak dokładność określenia średniej anomalii Faye'a dla przewyższenia pomiędzy sąsiednimi reperami (omówiona w p. 3.1).

Wobec tego średni błąd  $m_{g_{sr}}$  w stosunku do systemu poczdamskiego można przyjąć, że będzie wynosił dla optymalnych warunków  $\pm 0,5$  mgal, dla przeciętnych  $\pm 0,9$  mgal, a dla niektórych terenów górskich  $\pm 1,4$  mgal.

Ponieważ różnica wartości geopotencjalnych pomiędzy dwoma sąsiednimi reperami  $A$  i  $B$  obliczyć można ze wzoru:  $\Delta C_{AB} = g_{sr} \cdot \Delta h_{AB}$ , więc, nie biorąc pod uwagę błędów pomiaru niwelacyjnego, średni błąd wyznaczenia przyrostu wartości geopotencjalnej wyniesie:  $m_{\Delta c} = \pm \Delta h \cdot m_{g_{sr}}$ .

Dla przewidywanych typowych średnich błędów wyznaczenia wartości średniej  $g_{sr}$  i dla różnych wzniesień  $\Delta h$ , obliczyliśmy średnie błędy  $m_{\Delta c}$  w jednostkach u.g.p. \*\*). Wyniki tych obliczeń zilustrowano wykresami na rys. 10.

Jak wynika z rys. 10 średnie błędy  $m_{\Delta c}$  obliczenia różnic wartości geopotencjalnych wyniosą przeciętnie około  $\pm 5 \cdot 10^{-5}$  u.g.p., a dla maksymalnych wartości około  $\pm 14 \cdot 10^{-5}$  u.g.p. Przeliczając na średnie błędy określenia różnic wysokości (tj. dla  $\Delta H = \frac{\Delta C}{g}$ , przy czym wartości  $H$  są liczbowo o około 20% większe od wartości geopotencjalnych  $C$ ) otrzy-

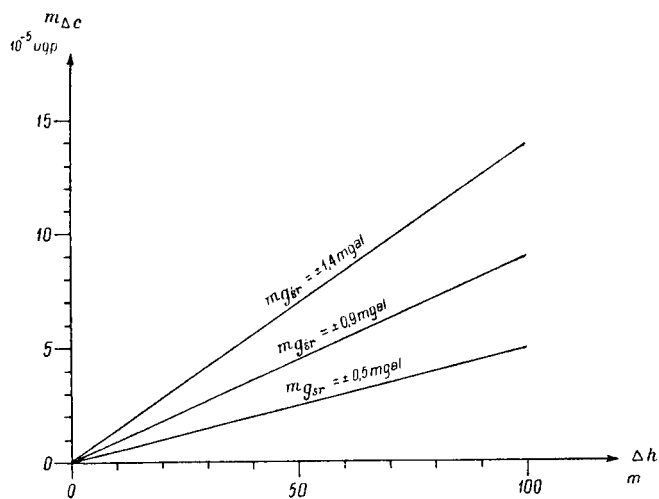
\*) Oblicza się wprawdzie  $g''_0$  dla punktów grawimetrycznych, po czym interpoluje liniowo określając  $g''_0$  dla reperów pośrednich. Wartość  $g$  dla tych reperów uzyskuje się następnie przez odliczenie od wyinterpolowanej wartości  $g''_0$  redukcji Faye'a i redukcji Bouguera tego punktu.

\*\*) Przyjęte zostało przez MUGG [33] wyrażać wartości geopotencjalne w jednostkach u.g.p (skrót od „unites geopotentielles”).  
Mianowicie  $1 \text{ u.g.p.} = \text{Kgal} \cdot \text{m} = 10^5 \cdot \text{cm}^2 \cdot \text{sek}^{-2}$ .

malibyśmy średnie błędy odpowiednio  $5 \div 14 \cdot 10^{-2}$  mm. Dokładności byłyby więc praktycznie zadowalające.

Podsumowując powyższe rozważania możemy stwierdzić, że przygotowane dla potrzeb polskiej sieci niwelacji precyzyjnej materiały grawimetryczne [4] umożliwiają wykonanie ewentualnych obliczeń wartości geopotencjalnych dla polskiej sieci niwelacyjnej, z zapewnieniem wystarczającej dokładności.

Wobec tego, omawiane materiały grawimetryczne pozwalają przeprowadzić dla celów naukowych ewentualne obliczenia fragmentu, lub całej naszej sieci, z odpowiednią dokładnością w różnych systemach wysokości, opierających się na wartościach geopotencjalnych.



Rys. 10

### 3.5. Wpływ zmiany wartości wyjściowej grawimetrycznego systemu poczdamskiego i wzoru na wartość normalną siły ciężkości na obliczenie poprawek niwelacyjnych w systemie wysokości normalnych

Poprzednie rozważania, przeprowadzone w p. 2.4 niniejszej pracy, doprowadziły do wniosku, że ewentualna zmiana wartości  $g_{Poczd\ddot{a}m}$  oraz wzoru na  $\gamma_0$  da w rezultacie nową wartość anomalii Faye'a dla każdego punktu, różniącą się od obecnej wartości o funkcję  $K$ .

$$(g_0^* - \gamma_0^*) = (g_0 - \gamma_0) + K.$$

Przyjmując powyższą zmianę, nową wartość poprawki ze względu na nierównoległość powierzchni poziomowych w systemie wysokości normalnych wyrazić można wzorem:

$$PN_{AB}^* = PN + \frac{K}{\gamma_{sr}} \int_A^B dh. ^*)$$

Praktycznie zmianę wartości poprawki niwelacyjnej (tj.  $PN^* - PN$ ) pomiędzy punktami  $A$  i  $N$  przedstawić można jako:

$$\frac{K}{\gamma_{sr}} \cdot \sum_A^N \Delta h.$$

Srednia wartość funkcji  $K$  prawdopodobnie wyniesie, wg poprzednich rozważań ( p. 2.4), dla obszaru Polski około  $-30$  mgal. Przy przyjęciu tej wartości otrzymamy różnice  $PN^* - PN \cong -3 \cdot 10^{-5} \cdot \sum_A^N \Delta h$ .

Rozpatrując dla obszaru Polski wpływ tych zmian dla linii niwelacyjnej pomiędzy brzegiem morza i granicą południową, tj. praktycznie dla  $\sum_A^N \Delta h \cong 1000$  m, otrzymujemy  $PN^* - PN = -30$  mm.

Wpływ natomiast zmiany wartości anomalii Faye'a o wielkość  $K$  na teoretyczny błąd niezamknięcia poligonu niwelacyjnego wyniesie praktycznie zero (pomijając minimalną zmienność funkcji  $K$  i  $\gamma_{sr}$ ), ponieważ  $\int_A^A dh = 0$ .

Jak wynika z powyższej analizy, przewidywana w przyszłości zmiana wartości wyjściowej grawimetrycznego systemu poczdamskiego oraz wzoru na  $\gamma_0$  będzie miała wyraźny praktyczny wpływ na wartości poprawek  $PN$  dla przeseł niwelacyjnych, co w konsekwencji wpłynie na całe linie niwelacyjne. Bez względu na wielkości tych zmian na poszczególnych liniach, obecne niezamknięcia poligonów sieci niwelacyjnej nie ulegną zmianie, co eliminuje potrzebę nowego wyrównania sieci.

### 3.6. Wnioski

Zreasumowanie wyników przeprowadzonych rozważań doprowadza do następujących wniosków.

Wniosek 1. Materiały grawimetryczne — przygotowane i opracowane dla potrzeb geodezyjnych pomiarów podstawowych [4] — umożliwiły

\*) Zmianie ulega drugi człon poprawki, a mianowicie:

$$\Pi_{p_N}^* = \int_A^B \frac{(g_0 - \gamma_0) + K}{\gamma_{sr}} \cdot dh = \int_A^B \frac{g_0 - \gamma_0}{\gamma_{sr}} dh + \int_A^B \frac{K}{\gamma_{sr}} dh = \Pi_{p_N} + \frac{K}{\gamma_{sr}} \int_A^B dh,$$

przy praktycznie słusznym założeniu stałości funkcji  $K$  pomiędzy  $A$  i  $B$ .

w polskiej sieci niwelacji precyzyjnej obliczanie z wystarczającą dokładnością poprawek niwelacyjnych  $PN$  ze względu na nierównoległość powierzchni poziomowych w przyjętym systemie wysokości normalnych.

Przy wykorzystaniu tych materiałów grawimetrycznych poprawki niwelacyjne  $PN$ , dla poszczególnych przewyższeń pomiędzy sąsiednimi reperami linii niwelacyjnej, mogły być realnie obliczone ze średnim błędem  $m_{PN} = \pm 0,05 - 0,10$  mm. Jest to praktycznie w pełni zadowalająca dokładność obliczenia poprawki  $PN$ , biorąc pod uwagę dokładności pomiarów niwelacyjnych i fakt podawania w katalogu wysokości punktu do 0,1 mm.

Dla zachowania podanej dokładności konieczne jest jednak obliczanie poprawek  $PN$  w przyjętym systemie wysokości normalnych dla każdego przewyższenia, pomiędzy sąsiednimi reperami sieci niwelacji precyzyjnej.

**Wniosek 2.** Wartość liczbową poprawek  $PN$  w systemie wysokości normalnych, dla poszczególnych przewyższeń pomiędzy sąsiednimi reperami, zależna jest przede wszystkim od wysokości i deniwelacji terenu, jak też od anomalności pola siły ciężkości. W terenach równinnych i pagórkowatych oraz przy małych wartościach anomalii Faye'a poprawki te dla jednego przesła wynoszą przeciętnie dziesiąte części milimetra, a dla całych linii kilka milimetrów. Dla linii niwelacyjnych w terenach górskich i podgórskich oraz o dużej anomalności pola siły ciężkości poprawki te — dla przewyższenia pomiędzy sąsiednimi reperami — mogą osiągnąć lokalnie do 5—8 mm, a dla odcinków 10 kilometrowych do 20 mm.

Przeważająca część obszaru naszego kraju ma charakter terenu równinnego i pagórkowatego, dlatego też przewyższenia w systemie wysokości normalnych w większości różnią się niewiele od przewyższeń pomierzonych. Zastosowanie systemu wysokości normalnych przy obliczaniu sieci niwelacji precyzyjnej, jako podstawowej osnowy wysokościowej, dla potrzeb praktyki, jest więc zupełnie uzasadnione. W związku z tym w niwelacji niższych klas, oprócz wyjątkowo górzystych obszarów, nie jest potrzebne wprowadzanie poprawek niwelacyjnych  $PN$  dla nawiązania tych sieci do punktów niwelacji precyzyjnej, obliczonej w przyjętym systemie wysokości normalnych.

**Wniosek 3.** Przygotowane materiały grawimetryczne umożliwiają ewentualne obliczenie dla celów naukowych fragmentu, bądź też całej sieci niwelacji precyzyjnej Polski, w innym systemie wysokości z wystarczającą dokładnością. Przyrosty wartości geopotencjalnych (stanowiące podstawę do obliczeń w różnych systemach wysokości) dla poszczególnych odcinków pomiędzy sąsiednimi reperami naszej sieci mogą być obliczone, przy wykorzystaniu tych materiałów grawimetrycznych, ze średnim błędem przeciętnie  $m_{\Delta c} = \pm 0,05 \div 0,10 \cdot 10^{-3}$  u.g.p. Jest to dokładność praktycznie całkowicie zadowalająca.

**Wniosek 4.** Ewentualna zmiana wartości wyjściowej  $g$  grawimetrycznego systemu poczdamskiego oraz wzoru na wartość normalną siły ciężkości  $\gamma_0$  spowodowałaby zmianę liczbowych wartości poprawek PN ze względu na nierównoległość powierzchni poziomowych w systemie wysokości normalnych dla każdego przesła niwelacyjnego. Można przewidywać, iż wpływ tych zmian spowodowałby dla linii niwelacyjnej rozciągającej się od północy do południa naszego kraju zmianę wysokości w tym systemie o wielkość rzędu 3 cm. Zmiany te jednak nie wpłyną na wielkość niezamknięć poligonów sieci niwelacyjnych.

#### **4. Sugestie dotyczące projektowania i zakładania przyszłych sieci triangulacji głównej i sieci niwelacji precyzyjnej biorąc pod uwagę charakter rzeczywistego pola siły ciężkości**

Przeprowadzone dotychczas rozważania wykazały celowość uwzględniania wpływu pola siły ciężkości przy obliczeniach sieci triangulacji głównej i sieci niwelacji precyzyjnej. Wyniki tych badań pozwalają na sformułowanie uwag, dotyczących projektowania i zakładania przyszłych sieci triangulacji głównej i sieci niwelacji precyzyjnej przy uwzględnieniu charakteru rzeczywistego pola siły ciężkości.

##### *4.1. Sugestie dotyczące projektowania i zakładania przyszłych sieci triangulacji głównej mając na względzie charakter pola siły ciężkości*

Zagadnienie ilości, rozłożenia oraz odpowiedniego obrania punktów Laplace'a w sieci triangulacji głównej jest szeroko dyskutowane i jest przedmiotem szeregu rozważań naukowych. Przy tych rozważaniach dotyczących obrania punktów Laplace'a, rozważaniach często czysto matematycznych, nie można jednak — naszym zdaniem — pomijać charakteru rzeczywistego pola siły ciężkości obszaru, na którym projektujemy sieć triangulacyjną.

Na obszarze naszego kraju jest dość znaczna anomalność pola siły ciężkości oraz stosunkowo duża zmienność gradientu poziomego anomalii grawimetrycznej (prosimy porównać mapę anomalii [4]), co powoduje dość dużą zmienność wartości składowych względnego odchylenia pionu.

Różnice wartości składowych odchylenia pionu ( $\xi$ ,  $\eta$ ) oraz rzutu odchylenia w profilu ( $\zeta$ ) dla punktów odległych o parę kilometrów może osiągnąć lokalnie w niektórych regionach kraju do paru sekund łuku.

Zbadaliśmy dla przykładu dwa profile charakterystyczne w terenie podgórskim i górskim.

W jednym z tych profili przy zmianie położenia punktu wzdłuż profilu o 2 km wartość  $\zeta$  zmienia się maksymalnie o rząd 5". Na omawianym

profilu różnica wartości na początkowym punkcie astronomiczno-geodezyjnym i na punkcie odległym o 2,1 km od niego wynosi 2'',7.

Dla jednego z profili południkowych w górach uzyskaliśmy — przy przesunięciu od punktu astronomiczno-geodezyjnego o 2 km — różnicę w  $\xi$  wynoszącą 2'',9.

W tych przypadkach różnice wartości składowych  $\xi$  i  $\eta$  na punktach blisko odległych od siebie powstały na skutek zaburzeń zupełnie lokalnego charakteru, w stosunku do całego regionu. Na wartość składowych odchylenia pionu na punkcie astronomiczno-geodezyjnym wpływa bowiem, poza orientacją elipsoidy odniesienia oraz ogólnym polem siły ciężkości Ziemi i polem regionalnym, także lokalne zaburzenie w polu siły ciężkości najbliższego otoczenia tego punktu.

Składowe względne odchylenia pionu na punkcie astronomiczno-geodezyjnym można przedstawić jako równe  $\xi = \xi' + \xi_{lok}$  oraz  $\eta = \eta' + \eta_{lok}$ , gdzie  $\xi_{lok}$  i  $\eta_{lok}$  obrazują wartości liczbowe wpływu na te składowe lokalnych zaburzeń w rozkładzie mas (a tym samym i w polu siły ciężkości) w najbliższym obszarze otaczającym ten punkt, a  $\xi'$  i  $\eta'$  przedstawiają wartości składowych odchylenia pionu przeciętnie dla całego regionu, w którym jest położony ten punkt astronomiczno-geodezyjny.

Jeżeli wpływ tych lokalnych zaburzeń na kierunek linii pionu w rozważanym punkcie astronomiczno-geodezyjnym jest liczbowo duży, wtedy wartości składowych odchylenia pionu na tym punkcie różnią się znacznie od przeciętnej wartości składowych dla całego regionu. Tym samym wartości  $\xi$  i  $\eta$  na takim punkcie astronomiczno-geodezyjnym nie będą dla tego regionu reprezentatywne.

Rozważmy wpływ tych lokalnych zaburzeń na równanie Laplace'a. Dla punktu astronomiczno-geodezyjnego  $A$ , przyjętego jako punkt Laplace'a, możemy przedstawić równanie Laplace'a w postaci:

$$(\alpha_{AN}^a - \alpha_{AN}^g) - \eta_A \cdot \operatorname{tg} \varphi_A = 0$$

Zmieniając położenie punktu Laplace'a o parę kilometrów na profilu  $AN$  o azymucie  $\alpha_{AN}^a$ , tj. przesuwając z punktu  $A$  do punktu  $B$ , w którym składowa odchylenia pionu w pierwszym wertykale wynosi  $\eta_B = \eta_A + \Delta\eta$ , uzyskamy zmianę wartości równania Laplace'a o  $\Delta\eta \cdot \operatorname{tg} \varphi$  (zaniedbaliśmy przy tych rozważaniach zmianę wielkości różnicy  $\alpha^a - \alpha^g$  pomiędzy punktami  $A$  i  $B$ , ze względu na małą odległość między nimi).

W wypadku zaburzenia lokalnego na punkcie  $A$ , zmiana lokalizacji punktu Laplace'a z  $A$  na punkt  $B$  położony w pobliżu, na którym wartości składowych odchylenia pionu nie są już zniekształcone lokalnym zaburzeniem, spowodować może zmianę wartości składowej w pierwszym wertykale o  $\Delta\eta$ , która osiągnąć może — dla niektórych punktów w górach i w terenie podgórskim — wielkość 2"—3" (przy odległości  $AB$  rzędu 2—3 km).

Dla średniej szerokości geograficznej w Polsce, tj.  $\varphi = 52^\circ$ , otrzymamy w tym wypadku dla  $\Delta\eta = 2''$  zmianę wartości równania Laplace'a o wielkość  $\Delta\eta \cdot \operatorname{tg} \varphi = 2,6$ , a dla  $\Delta\eta = 3''$  zmianę o wielkość  $3,8$ .

Powstałe różnice w wartościach równania Laplace'a mają charakter systematycznego błędu. Wielkości tych różnic, które — jak wynika z powyższych rozważań — mogą osiągnąć w naszych warunkach rząd  $3''$ — $4''$ , są w porównaniu do dokładności pomiaru kątów w triangulacji głównej (rzędu  $0,4''$ — $0,5''$ ), zdecydowanie duże i w przypadku ich występowania spowodowałyby pewne obniżenie dokładności opracowania całej sieci triangulacyjnej. Powodem powstania tych znacznych co do liczbowej wartości błędów, byłoby niewłaściwe obranie lokalizacji punktu Laplace'a, tj. w miejscu o dużym lokalnym zaburzeniu pola siły ciężkości.

Wniosek praktyczny z tych rozważań jest — naszym zdaniem — następujący. Punkt Laplace'a należy obierać w takim miejscu, to znaczy w takim punkcie triangulacyjnym, w którym wartość względnego odchylenia pionu (a w szczególności składowej w pierwszym wertykale) reprezentuje przeciętną wartość odchylenia pionu całego regionu, w jakim ten punkt jest położony. W żadnym przypadku wartość składowej nie powinna charakteryzować tylko lokalnych warunków.

Podobna sytuacja występuje przy wyborze punktów triangulacyjnych, na których mają być wykonane obserwacje astronomiczne szerokości i długości geograficznej dla potrzeb opracowania przebiegu geoidy wzdłuż łańcuchów triangulacyjnych, czyli tzw. punktach astronomiczno-geodezyjnych niwelacji astronomiczno-grawimetrycznej. Dla wykorzystania wartości  $\xi$  i  $\eta$  na tych punktach do dokładnego obliczenia odstępów geoidy od elipsoidy odniesienia, wartości te — analogicznie jak dla punktów Laplace'a — powinny reprezentować i charakteryzować cały region \*).

Przy decyzji dotyczącej wyboru i zakładania punktów Laplace'a oraz punktów astronomiczno-geodezyjnych należy, jak wynika z przeprowadzonej analizy, zwrócić uwagę na anomalność pola siły ciężkości i gradient anomalii, od których zależy lokalne zaburzenie w wartości składowej \*).

---

\*) Wartości  $\xi$  i  $\eta$  na tych punktach astronomiczno-geodezyjnych służą do określenia poprawek dla przejścia od grawimetrycznego do względnego odchylenia pionu (co było omówione w p. 2.1. niniejszej pracy). Należy zwrócić uwagę, że ewentualne lokalne zaburzenie  $\xi_{lok}$  i  $\eta_{lok}$  na punkcie astronomiczno-geodezyjnym nie wpłynie na wartości omawianych poprawek. Wpływ bowiem lokalnego zaburzenia na punkcie astronomiczno-geodezyjnym będzie zasadniczo identyczny na wartości  $\xi$  i  $\eta$ , uzyskane na podstawie obserwacji astronomicznych, oraz obliczone z materiałów grawimetrycznych.

Uwagi powyższe mają charakter ogólny i dotyczą nie tylko warunków polskich, ale także wszystkich sieci triangulacyjnych.

W naszych warunkach, ze względu na zakończenie prac nad siecią triangulacji głównej, możemy obecnie mówić o sugestiach dotyczących przyszłego projektowania sieci, bądź też dodatkowego nowego wyrównania i — wiążącym się z tym zagadnieniem — wyborem najodpowiedniejszych punktów Laplace'a ze względu na charakter pola siły ciężkości.

W tym celu można zasugerować przeanalizowanie przede wszystkim opracowanych obecnie map izolinii składowej  $\xi$  i składowej  $\eta$  \*) oraz mapy anomalii Faye'a, zwracając szczególną uwagę na zmienność gradientu poziomego \*\*). W wypadku wymagającym dodatkowych wyjaśnień można zalecić przeprowadzenie w otoczeniu projektowanego punktu Laplace'a obliczenia — dla szeregu punktów — składowych odchylen pionu  $\xi_{lok}$  i  $\eta_{lok}$  na podstawie szczegółowych materiałów grawimetrycznych z najbliższych stref wokół tych punktów. W oparciu o wyniki tych obliczeń można wyodrębnić zaburzenia o charakterze lokalnym od zaburzeń regionalnych i ocenić ich wielkość.

W wypadku stwierdzenia lokalnego zaburzenia o dużych stosunkowo wartościach liczbowych (np. 1,"5—3") na punkcie przewidywanym jako punkt Laplace'a, można zasugerować następujące postępowanie:

- a) zmienić lokalizację punktu Laplace'a (czy też punktu astronomiczno-geodezyjnego) z tego punktu na sąsiedni, dogodniejszy punkt triangulacyjny, albo
- b) przesunąć położenie punktu Laplace'a o parę kilometrów do punktu, w którym zaburzenie lokalne nie występuje (można tak postąpić w tym przypadku gdy pozwala na to sprawa zabudowy wieży triangulacyjnej i obserwacji kątów triangulacyjnych czy też boków przy trilateracji), albo
- c) pozostawić punkt Laplace'a w projektowanym miejscu, lecz wprowadzić do wyznaczonych na tym punkcie wartości  $\xi$  i  $\eta$  odpowiednie poprawki redukcyjne ze względu na lokalne zaburzenia (tj.  $\xi_{lok}$  i  $\eta_{lok}$ ).

W tym ostatnim przypadku te poprawki redukcyjne można określić odpowiednio wykorzystując obliczenie składowych częściowego odchylenia pionu z dokładnych materiałów grawimetrycznych dla szeregu punk-

---

\*) Zmienność wartości składowej  $\xi$  i  $\eta$  jest dla obszaru Polski dość duża, a szczególnie składowej  $\eta$  (wpływającej na równanie Laplace'a), której wartości kształtują się od + 10" do - 9", a regionalny gradient poziomy tej składowej osiąga w niektórych obszarach kraju rząd 3"/10 km.

\*\*) Należy mieć na uwadze, że kierunek wektora odchylenia pionu na mapie jest zbliżony do kierunku prostopadłego do izolinii anomalii Faye'a, co podkreśla między innymi także St. Pawłowski [19] dla warunków polskich.

tów w otoczeniu projektowanego punktu Laplace'a. W razie potrzeby należałoby oczywiście w tym rejonie dokonać uzupełniających szczegółowych pomiarów grawimetrycznych. Można ewentualnie rozważyć też sprawę obliczenia tzw. topograficznego odchylenia pionu w celu określenia tych poprawek, co jednak — naszym zdaniem — dałoby zbyt mało dokładne rezultaty.

Ewentualne poprawki redukcyjne należałoby oczywiście wprowadzić do składowych względnego odchylenia pionu na punkcie Laplace'a, lub też punkcie astronomiczno-geodezyjnym, przed ich wykorzystaniem do ułożenia równań Laplace'a, jak też przed obliczeniem odstępów geoidy.

Praktycznie wygodniejsze jest naszym zdaniem rozwiązanie podane powyżej w p. a) lub b), tj. zmiana lokalizacji punktu Laplace'a lub punktu astronomiczno-geodezyjnego.

Reasumując nasze rozważania pozwolimy sobie jeszcze raz podkreślić, że przy projektowaniu i zakładaniu punktów Laplace'a w sieci triangulacyjnej nie można ograniczyć się tylko do warunków czysto geometrycznych, ale należy zwracać też uwagę na charakter pola siły ciężkości.

#### 4.2. Sugestie dotyczące zakładania przyszłych sieci niwelacji precyzyjnych biorąc pod uwagę charakter pola siły ciężkości

Przy obliczaniu niwelacji precyzyjnej przyjmuje się jako element różniczkowy odcinek pomiędzy sąsiednimi reperami. Takie postępowanie ma miejsce zarówno przy obliczaniu wartości geopotencjalnych  $C$ , jak też poprawek  $PN$ , wprowadzanych do pomierzonych przewyższeń ze względu na nierównoległość powierzchni poziomowych\*). Przy tych obliczeniach przyjmuje się więc, że zmiana wartości przyspieszenia siły ciężkości albo anomalii grawimetrycznej Faye'a pomiędzy sąsiednimi reperami niwelacyjnymi jest liniowa.

Aby zapewnić tę liniowość, a tym samym odpowiednią dokładność obliczeń  $PN$  lub  $\Delta C$ , należy przy projektowaniu i zakładaniu sieci niwelacji precyzyjnej zwracać też uwagę na wpływ pola siły ciężkości.

Ponieważ projektowanie dotyczy linii niwelacyjnych oraz lokalizacji reperów niwelacyjnych na tych liniach, rozważmy je kolejno.

Linie niwelacji precyzyjnej projektuje się z reguły wzdłuż ważniejszych dróg bitych. Przy projektowaniu tych linii bierze się pod uwagę konfigurację sieci i potrzeby gospodarcze. Charakter pola siły ciężkości

---

\*) Właściwym elementem różniczkowym jest interwał pomiędzy sąsiednimi stanowiskami lat niwelacyjnych podczas przeprowadzania pomiaru. Obliczanie wartości  $\Delta C$  lub też poprawki niwelacyjnej  $PN$  dla wszystkich tych małych odcinków między stanowiskami lat — teoretycznie zasadniczo słuszne — jest jednak ze względów praktycznych i ekonomicznych nierealne.

może być praktycznie wtedy brany pod uwagę, gdy istnieją różne warianty zaprojektowania pewnej części linii niwelacyjnej. W takim wypadku — zgodnie z dotychczasowymi rozważaniami — powinniśmy wybrać ten wariant, który zapewni przebieg linii niwelacyjnej w terenie o bardziej regularnym profilu wysokości terenu i profilu anomalii grawimetrycznej w stosunku do innych wariantów.

Założenie punktów niwelacyjnych wzdłuż zaprojektowanych linii jest już zagadnieniem, które praktycznie można rozpatrywać także przy uwzględnieniu charakteru pola siły ciężkości.

Mając na względzie zapewnienie liniowości zmiany wartości  $g$  oraz wartości anomalii Faye'a pomiędzy sąsiednimi punktami niwelacyjnymi na linii, należy koniecznie zakładać znaki niwelacyjne w charakterystycznych miejscach profilu wysokościowego \*).

Sugestie te mogą mieć ogólne zastosowanie przy projektowaniu i zakładaniu nowych sieci niwelacji precyzyjnej.

Zastanówmy się, jakie praktyczne znaczenie mogą mieć te uwagi w warunkach takich, jak w naszym kraju, gdzie prace nad siecią niwelacyjną zostały już zakończone.

Rozważania naukowe i praktyczne doprowadzają do wniosków, że sieć niwelacji precyzyjnej powinna być mierzona powtórnie co 15—20 lat. W związku z tym uwagi nasze można odnieść praktycznie do przyszłych powtórnych pomiarów sieci niwelacji precyzyjnej. Ze względów praktycznych, ekonomicznych i naukowych (wykorzystanie wyników powtarzanej niwelacji dla wyznaczania współczesnych ruchów pionowych skorupy ziemskiej) następne pomiary niwelacyjne należy przeprowadzać wzdłuż identycznych linii z siecią obecną i przy wykorzystaniu reperów niwelacyjnych obecnej sieci.

Repery niwelacyjne usytuowane są jednak nie wszędzie w charakterystycznych miejscach profilu wysokościowego. W obecnej naszej sieci szczególnie występuje ta okoliczność w terenie podgórskim i górskim. Wobec tego należałoby przed przyszłym powtórным pomiarem naszej sieci dokonać szczegółowej analizy poszczególnych odcinków na wzniesionych liniach niwelacji precyzyjnej. Dla tych odcinków, które w wyniku analizy wykażą znaczne odstępstwo od liniowej zmiany wysokości oraz od liniowej zmiany anomalii grawimetrycznej Faye'a, właściwe byłoby — naszym zdaniem — następujące postępowanie.

---

\*) Oczywiście w przypadkach dużych odległości pomiędzy tymi charakterystycznymi punktami zakładanoby gęściej repery niwelacyjne, w odległościach wynikających z potrzeb gospodarczych i uregulowanych odpowiednimi przepisami instrukcyjnymi. Istotne jest, aby pomiędzy sąsiednimi reperami profil wysokościowy linii zmieniał się w sposób zbliżony do liniowego.

Pomiędzy obecnie istniejącymi reperami na takim odcinku powinien być założony dodatkowy pośredni pomocniczy punkt niwelacyjny (w razie potrzeby nawet dwa lub trzy) w charakterystycznych załamaniach profilu wysokościowego rozważanego odcinka (np. na lokalnym wzniesieniu lub w dolinie). Te dodatkowe punkty niwelacyjne, o ewentualnie uproszczonej stabilizacji, służyłyby wyłącznie do dokładnego obliczenia różniczkowych wartości poprawki  $PN$  lub też przyrostu wartości geopotencjalnej  $AC$ . W ramach nowych pomiarów niwelacyjnych zostałyby te punkty pomierzone (jako stanowiska łat przy pomiarze tego całego odcinka) oraz ewentualnie przy nich założonoby również punkty grawimetryczne.

Sugerowany sposób postępowania pozwoli uwzględnić zmienności pola siły ciężkości przy projektowaniu i zakładaniu sieci niwelacyjnej, co z kolei odpowiednio przyczyni się do podniesienia dokładności przyszłego nowego opracowania sieci niwelacji precyzyjnej w naszym kraju.

### **5. Uwagi ogólne dotyczące przyszłych opracowań grawimetrycznych dla potrzeb geodezyjnych pomiarów podstawowych**

Dane grawimetryczne, odpowiednio przygotowane i opracowane, spełniły swe zadanie przy obliczeniu obecnych podstawowych sieci geodezyjnych w Polsce oraz dają możliwość prowadzenia szeregu prac badawczych, opierających się na znajomości rzeczywistego pola siły ciężkości.

W przyszłych pracach nad siecią niwelacji precyzyjnej oraz siecią triangulacyjną (niezależnie od tego, czy będzie to sieć klasyczna, czy też np. trilateracja) powinny być także w dużym zakresie wykorzystane dane grawimetryczne. Będziemy dążyli na pewno w przyszłości do uzyskania wyższych dokładności w sieciach geodezyjnych. W związku z tym zwróćmy uwagę na szereg ogólnych zagadnień, które powinny być przede wszystkim brane pod rozważę przy przyszłym opracowaniu grawimetrycznym dla potrzeb tych sieci.

Główne kierunki rozważań, związanych z przygotowaniem tych danych grawimetrycznych — jak to wynika z przeprowadzonych analiz i postawionych wniosków niniejszej pracy oraz poprzednio cytowanej pracy autora [4] — powinny się skupiać wokół następujących zagadnień:

- a) jednolitego grawimetrycznego poziomu odniesienia na obszarze naszego kraju i państw sąsiednich,
- b) kompleksu spraw związanych z cechowaniem grawimetrów dla zapewnienia jednostki miligala,
- c) gęstości zdjęcia grawimetrycznego, biorąc pod uwagę konkretną sieć niwelacyjną i sieć triangulacyjną,

- d) dokładności określenia wartości przyspieszenia siły ciężkości oraz wartości anomalii grawimetrycznych,
- e) formy opracowania danych grawimetrycznych i ich przedstawienia kartograficznego.

Zagadnienie grawimetrycznego poziomu odniesienia oraz dokładne zapewnienie jednostki miligala jest bardzo obszernym i obecnie aktualnym na świecie problemem grawimetrycznym. Z tym zagadnieniem łączy się sprawa międzynarodowych nawiązań grawimetrycznych podstawowych sieci krajowych, cechowania grawimetrów przy wykorzystaniu baz krajowych, porównania wartości jednostki miligala baz krajowych z jednostką baz międzynarodowych, cechowania całych sieci grawimetrycznych oraz wykorzystania pomiarów wahadłowych przy tych pracach.

Gęstość zdjęcia grawimetrycznego powinna być taka, aby zapewnić odpowiednią dokładność przy opracowaniu sieci geodezyjnych. Sprawa ta była poruszona w p. 2 i p. 4 cytowanej pracy autora [4].

Należy zwrócić uwagę na szczegółowe dane grawimetryczne wzdłuż linii niwelacji precyzyjnej (w miarę możliwości punkt grawimetryczny przy każdym reperze). W celu podniesienia dokładności wyznaczenia składowych  $\xi$  i  $\eta$  trzeba też przewidzieć szczegółowe i odpowiednio dokładne pomiary grawimetryczne w najbliższym otoczeniu nie tylko punktów Laplace'a i punktów astronomiczno-geodezyjnych, ale również w otoczeniu poszczególnych punktów triangulacji głównej.

Dla potrzeb naszego kraju konieczne jest przeprowadzenie pomiarów grawimetrycznych na morzu Bałtyckim, przy polskim wybrzeżu, co ze względu na coraz większy rozwój metod i instrumentów do przeprowadzania morskich pomiarów grawimetrycznych wydaje się być postulatem mającym szanse realizacji w niedalekiej przyszłości.

Obecnie stosowana metodyka pomiarów grawimetrami oraz nowoczesne precyzyjne grawimetry zapewniają bardzo wysoką wewnętrzną dokładność (rzędu setnych części miligala) ewentualnym przyszłym pomiarom. Zagadnienie dokładności wyznaczenia anomalii wiąże się ze sprawą odpowiedniego uzgodnienia dokładności określenia wysokości n.p.m. punktów grawimetrycznych z realną dokładnością wyznaczeń przyspieszenia siły ciężkości.

Zwiększenie gęstości punktów grawimetrycznych i dokładności określenia anomalii przyczyni się do udokładnienia przyszłych opracowań grawimetrycznych dla potrzeb sieci geodezyjnych.

Przewidywaną formą opracowania danych grawimetrycznych byłyby — analogicznie jak obecnie — odpowiednie katalogi i mapy anomalii grawimetrycznych.

Stały rozwój prac grawimetrycznych oraz podniesienie dokładności danych grawimetrycznych umożliwi lepsze i dokładniejsze poznanie pola siły ciężkości w naszym kraju. Szczegółowa znajomość tego pola przyczynia się, jak to wynika z rozważań przeprowadzonych w niniejszej pracy, do dokładniejszego opracowania geodezyjnych pomiarów podstawowych, co jest bardzo istotne zarówno z punktu widzenia ich praktycznego, jak i naukowego wykorzystania.

## L I T E R A T U R A

- [1] *Baeschlin C.* Lehrbuch der Geodäsie. Zurich, 1948.
- [2] *Baeschlin C.* Rapport special sur Nivellement et Pesanteur. Association Intern. de Géodésie Assemblée générale a Toronto, 1957.
- [3] *Bodemüller H.* Beitrag zur Schwere-Korrektion geometrischer Nivellements. Deutsche Geod. Komm., Reihe A, nr. 26, Monachium 1957.
- [4] *Bokun J.* Przygotowanie i opracowanie materiałów grawimetrycznych dla potrzeb polskiej sieci astronomiczno-geodezyjnej i sieci niwelacji precyzyjnej I klasy. Prace IGiK, t. VI, nr 1(13), 1958.
- [5] *Cimbalnik M.* Výpočet redukci naměřených směru na zemský elipsoid. Geodet. Obz. 1958, nr. 8.
- [6] *Cook A.* Free Air Geoid Heights in Meters with reference to an Ellipsoid from Gravimetry + Hypsometry + Satellites. Intern. Gravimetric Commission, Paris 1959.
- [7] *Cook A.* Report on standard gravity formulae. Intern. Gravimetric Commission, Sept. 1959.
- [8] *de Graaff Hunter J.* The Figur of the Earth form Gravity Observations and the Precision Obtainable. Londyn 1935.
- [9] *Izotow A. A.* Forma i rozmiary Ziemi po sowriemionnym dannym. Trudy CNIIGAiK wyp. 73, Moskwa 1950.
- [10] *Jeremiejew W. F.* Tieoria ortometricheskich, dinamiczeskich i normalnych wysot. Trudy CNIIGAiK, wyp. 86, Moskwa 1951.
- [11] *Kamela Cz.* Wyznaczenie geoidy z pomiarów grawimetrycznych. Warszawa, 1950.
- [12] *Kneissl M.* The European Gravity Calibration Lines. Internat. Gravimetric Commission, Paris 1959.
- [13] *Kühnen F., Furtwängler Ph.* Bestimmung der absoluten Grösse der Schwere-kraft zu Potsdam mit Reversionspendel. Berlin 1906.
- [14] *Michajłow A. A.* Kurs grawimetrii i tieorii figury Ziemi. Moskwa, 1939.
- [15] *Motodeński M. S.* Osnownyje woprosy gieodeziczieskoj grawimetrii. Trudy CNIIGAiK wyp. 42, Moskwa 1945
- [16] *Morelli C.* Report of the Special Study Group Nr 5, Section IV Grawimetry, Paris, Sept. 1959.
- [17] *Müller I.* Vorschlag zur Berechnung der Orthometrischen Höhen der Präzisionsvellement — Hauptpunkte. Acta Techn. Acad. Scient. Hungaricae ser. geod. et geoph. t. 1, nr 1—3, 1959.
- [18] *Niethammer Th.* Nivellement und Schwere als Mittel zur Berechnung wahrer Meereshöhen. Berno 1932.

- [19] *Pawłowski St.* Problem właściwej i zorientowanej elipsoidy w Polsce. Prace GINB, nr 3, 1948.
- [20] *Ramsayer K.* Die Schwerereduktion von Nivellements. Deutsche Geod. Komm. Reihe A, nr 6, Monachium 1953.
- [21] *Ramsayer K.* Schwerereduktion des Badisch-Württembergischen Haupthöhen-netzes. Deutsche Geod. Komm. Reihe A, nr 22, Monachium 1957.
- [22] *Reicheneder K.* Zur Definition des Potsdamer Schweresystems. Mitteil. Geodät. Inst. Potsdam, nr. 27, 1959.
- [23] *Simonsen O.* Report on establishment and adjusment of European Levelling Networks. Association Intern. de Geodesie Section II, Symposium in Liver-pool, 1959.
- [24] *Stokes G. G.* On the Variation of Gravity of the Surface of the Earth. Lon-dyn 1849.
- [25] *Wolf H.* Astronomisch-geodätische Lotabweichungen in mittleren Europa Deutsche Geod. Komm. Reihe B, nr. 39, Frankfurt, 1957.
- [26] *Wolf H.* Versuch einer Geoidbestimmung im mittleren Europa aus astrono-misch-geodätischen Lotabweichungen. Inter. Union f. Geodäsie u. Geophysik, Toronto, 1957.
- [27] *Vening Meinesz F.* A formula expressing the deflection of the plumb — lins in the gravity anomalies and some formulae for the gravity — field and the gravity Potential outside the geoid. Amsterdam 1928.
- [28] *Zakatow P. S.* Kurs wysszej gieodiezji. Moskwa 1953.
- [29] Comptes rendus d'Ensemble de la X<sup>e</sup> Assemblée Générale (Rome 1954), Section II Bull. géodésique, nr. 35, 1955.
- [30] Instrukcja o wykonywaniu pomiarów astronomiczno-geodezyjnych. GUGiK, Warszawa, 1957.
- [31] Instrukcja techniczna o wykonywaniu niwelacji III i IV klasy. GUGiK, War-szawa 1959.
- [32] Liste des stations de déviation de la verticale rattachées an Réseau Européen. Association Inter. de Géodésie, Section V, 1957.
- [33] Le réseau Européen unifié de nivellement. Symposium de Florence 1955. Sym-posium de Copenhague 1957. Bull. géodésique, Nr. 45, 1957.
- [34] Materiały pomiarów astronomicznych z 1956 i 1958 roku. PPG, 1959.
- [35] Raport sur les travaux géodésiques exécutés de 1945 à 1957 présente a XI Assemblée Général de UGGI Warszawa, 1957.
- [36] Réseau Gravimétrique International de Premier Ordre. Système de Potsdam. Bureau Gravimétrique International, Septembre 1959.
- [37] Special Study Group Nr 5, Section IV, Grawimetry, Abstract Report. IUGG, Toronto 1957.

*Rękopis dostarczono Redakcji we wrześniu 1960 r.*

ЕЖЫ БОКУН

## АНАЛИЗ И ВЫВОДЫ ВЫТЕКАЮЩИЕ С ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ГРАВИМЕТРИЧЕСКИХ МАТЕРИАЛОВ И ОБРАБОТКИ ОСНОВНЫХ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ИЗМЕРЕНИЙ В ПОЛЬШЕ

### Резюме

#### 1. Введение

Новые сети основной триангуляции и высокоточного нивелирования в Польше были вычислены с учетом специально подготовленных и обработанных гравиметрических материалов.

Научно-исследовательские вопросы, связанные с подготовкой гравиметрических данных, их соответствующей обработкой, а также с приготовлением документации для практических нужд основных геодезических измерений в Польше были представлены автором в „Трудах Института Геодезии и Картографии” [4].

Практическое использование, впервые в польских условиях, действительных гравиметрических данных при вычислениях основной триангуляции и высокоточного нивелирования дает возможность проанализировать влияние гравиметрических данных при обработке польских основных геодезических измерений и сделать вытекающие из этого выводы.

Рассуждения касающиеся конкретных материалов позволяют ответить на вопрос, являются ли теоретические и практические предположения, принятые во время подготовки и обработки гравиметрических материалов [4], подтвержденными практически полученными результатами и их точностью, а также определить действительное влияние учета гравиметрических данных при обработке основных геодезических измерений в Польше.

#### 2. Анализ и выводы вытекающие с использования гравиметрических материалов в польской сети основной триангуляции

Гравиметрические материалы дали возможность по отношению к триангуляционным пунктам, которые не являются астрономическими пунктами, определения составляющих  $\xi_i$  и  $\eta_i$  относительного

уклонения отвеса при применении известного метода, так называемого астрономо-гравиметрического нивелирования ([8], [15], [28]).

Для определения средних кв. ошибок этих определений произведен анализ, опирающийся на предпосылках теоретического анализа, выполненного автором в цитированной уже работе [4].

Рассмотрено точности гравиметрических материалов, а также других данных, функцией которых являются  $\xi_i$  и  $\eta_i$ . В результате этого подробного анализа (таблица 4 и таблица 5) получено, что средние значения средних квадратических ошибок равняются  $m_{\eta_i} = m_{\xi_i} = \pm 0''5 - 0''7$  в зависимости от рельефа местности, в котором находится данный пункт.

Для объективного подтверждения полученных точностей выполнено для 70 триангуляционных пунктов сравнение значений  $\xi_i$  и  $\eta_i$  со значениями этих составляющих, вычисленными другим независимым путем.

С этой целью были именно использованы произведенные на этих пунктах астрономические определения, которые не были уже приняты во внимание при уравнивании основной триангуляционной сети. Здесь говорим о дополнительных астрономических измерениях широты  $\varphi^a$  и долготы  $\lambda^a$  (в среднем со средней кв. ошибкой  $m_{\varphi^a} = \pm 0''22$ ,  $m_{\lambda^a} = \pm 0''40$ ) выполненных в 1956 и 1958 году на нескольких десятках триангуляционных пунктов для нужд исследования фигуры Земли [34], а также о части неиспользованных давних немецких измерений.

На основании результатов этих астрономических определений, соответственно редуцированных, а также уравненных геодезических координат вычислены для этих нескольких десятков пунктов составляющие относительного уклонения отвеса  $\xi_{a,g}$  и  $\eta_{a,g}$  с точностью  $0''2 - 0''3$ .

Для 59 пунктов полученных на основании новых астрономических измерений 1956 и 1958 года, а также для 11 пунктов давних немецких измерений (локализация этих пунктов приведена на рис. 1) определены разности  $\delta_\xi$  и  $\delta_\eta$  между значениями  $\xi_{a,g}$  и  $\eta_{a,g}$  и значениями соответствующих составляющих, полученных раньше при вышеуказанном использовании гравиметрических данных.

Значения разностей  $\delta_\xi$  и  $\delta_\eta$  соответственно сопоставленные в табл. 6 и 7, а также в таблицах 9 и 10, носят случайный характер, а их абсолютные значения являются в среднем порядка  $0''5 - 0''7$ .

Учитывая величины средних кв. ошибок определения составляющих  $\xi_{a,g}$  и  $\eta_{a,g}$  получаем, что в среднем средняя кв. ошибка определения составляющих относительного уклонения отвеса при соответ-

ствующим использованием гравиметрических данных, равняется  $\pm 0,5'' - 0,6''$ , а для господствующих в польских условиях местностей равнинного и всхолмленного характера —  $\pm 0,3'' - 0,4''$ .

Полученные результаты полностью подтверждают результаты первого анализа точности (табл. 8). Полученные значения средних кв. ошибок  $m_{\xi_i}$  и  $m_{\eta_i}$  можно следовательно считать как совершенно реальные.

В дальнейших рассуждениях было обращено внимание на вопрос, какого порядка была бы сделана ошибка при определении  $\xi_i$  и  $\eta_i$  для триангуляционных пунктов (не являющихся астрономическими пунктами) в случае их определения без использования гравиметрических данных. На основании значения  $\xi_{p.L}$  и  $\eta_{p.L}$  на 52 пунктах Лапласа и пунктах астрономо-геодезической сети основной триангуляции можно ведь обработать эскизную карту  $\xi$  и  $\eta$  и потом, для любого триангуляционного пункта, путем интерполирования можно определить составляющие уклонения отвеса, которые были нами обозначены через  $\xi_{int}$  и  $\eta_{int}$ .

Чтобы определить средние кв. ошибки этих составляющих было произведено для 62 триангуляционных пунктов сравнение значений  $\xi_{int}$  и  $\eta_{int}$  со значениями составляющих  $\xi_i$  и  $\eta_i$ , определенных при вышеупомянутом использовании гравиметрических данных, сопоставляя разности  $d_{\xi} = \xi - \xi_{int}$  и  $d_{\eta} = \eta - \eta_{int}$  (табл. 11).

Затем для 29 триангуляционных пунктов были определены разности  $d_{\xi}$  и  $d_{\eta}$  используя дополнительные астрономические измерения 1956 и 1958 года (табл. 12).

Произведенный анализ и полученные конкретные результаты приводят к заключению, что средняя кв. ошибка, которая была бы сделана при определении составляющих уклонения отвеса для триангуляционного пункта без учета гравиметрических данных, а на основании только упомянутого интерполирования, была бы в условиях нашей страны порядка  $\pm 2,4'' - 3,6''$ .

Следовательно величина этой ошибки является пяти-семикратно большей нежели средняя кв. ошибка определения составляющих относительного уклонения отвеса при использовании гравиметрических данных.

В дальнейшем рассмотрен вопрос целесообразности введения в польскую основную триангуляционную сеть редукции базисов с геоида на эллипсоид относимости и редукции горизонтальных углов, за уклонение отвесной линии.

Анализ геоида на территории Польши по отношению к принятому, как поверхность относимости, эллипсоиду Красовского указывает на

целесообразность учета высот геоида над этим эллипсоидом при редукциях триангуляционных базисов. Эти высоты выражаются в границах от  $-4,5$  до  $+7,5$  м и неучитывание их вызвало бы деформацию единицы масштаба триангуляционной сети, величина которой порядка  $2 \cdot 10^{-6}$  была бы численно дву-троекратно большей нежели точность компарирования и измерения базисов проволочными приборами Едерина.

Абсолютные значения редукции углов за уклонение отвеса в горных районах нашей сети достигают величины до  $0,3$ , а в предгорных и всхолмленных районах в среднем равны  $0,1$ .

Сравнение величин этих угловых редукций с точностью измерений горизонтальных углов в нашей сети (порядка  $0,4'' - 0,5''$  [35]), указывает на целесообразность введения этих редукций при измерениях углов на триангуляционных пунктах, расположенных в горных районах, предгорных и частично на местности, носящей всхолмленный характер. Практически этими редукциями можно пренебречь в том случае, когда разности высот между соседними триангуляционными пунктами являются меньшими чем  $100$  м (табл. 14).

При использовании гравиметрических данных, вследствие сравнительного уклонения отвеса, было обеспечено вычисление вышеупомянутых угловых поправок со средней кв. ошибкой практически порядка  $\pm 0,01$ .

Следующей задачей анализа было рассмотрение влияния возможно-го изменения исходного значения гравиметрической Потсдамской системы, а также значения нормальной силы тяжести  $\gamma_0$  на вычисление уклонений отвеса при использовании гравиметрических материалов. Принимая значение поправки для Потсдамской системы, предложенной С. Морелли [16], а также разность между значением  $\gamma_0$  согласно формуле Гельмерта и согласно новейшим формулам, получаем, что для территории нашей страны, возможные новые значения аномалии силы тяжести в свободном воздухе были бы меньшими чем значения принятые в настоящее время на величину порядка  $25 - 30$  мгл. Введение однако в будущем этих изменений в исходное значение  $g$  в Потсдаме, а также в формулу для значения нормальной силы тяжести практически не привело бы к изменению вычисленных в настоящее время для триангуляционных пунктов значений составляющих  $\xi$  и  $\eta$  относительного уклонения отвеса.

### 3. Анализ и выводы, вытекающие с использования гравиметрических материалов в польской сети высокоточного нивелирования

Сеть высокоточного нивелирования в Польше была вычислена в системе нормальных высот с использованием соответственно приготовленных гравиметрических материалов. В связи с этим был произ-

веден подробный анализ точности вычисления в этой системе высот — на основании обработанных гравиметрических материалов [4] — нивелирных поправок  $PN$  за непараллельность уровенных поверхностей. Результаты рассуждений сопоставлены в табл. 17, а также представлены на рис. 4. Для средних — в польских условиях — превышений между соседними нивелирными реперами средняя кв. ошибка поправки  $PN$  определенной на основании гравиметрических материалов в среднем равняется  $\pm 0,05$  —  $0,10$  мм.

Для сохранения приведенной точности является необходимым вычисление поправок  $PN$  для каждого превышения между соседними реперами высокоточного нивелирования.

Рассмотрено величины поправок  $PN$  в системе нормальных высот, а также величины влияния на эти поправки действительного поля силы тяжести (т. е. другого члена поправки —  $\Pi PN$ ), выступающие в польской сети высокоточного нивелирования в зависимости от рельефа местности (рис. 6, 7 и 8). Для нивелирных линий в горной и предгорной местности эти поправки для превышений между соседними реперами достигают, в зависимости от локальных условий, величины до 5—8 мм.

Затем было обращено внимание на вопрос применения системы нормальных высот для практических нужд высотной основы в Польше. Большая часть территории нашей страны носит равнинный и всхолмленный характер, вследствие чего превышения в системе нормальных высот в большинстве случаев отличаются в незначительной степени от измеренных превышений. В связи с этим для линии нивелирования низших классов [31], кроме исключительно гористых районов, нет надобности введения нивелирных поправок  $PN$  для привязки этих линий к пунктам высокоточного нивелирования, вычисленного в принятой системе нормальных высот.

Приготовленные гравиметрические материалы позволяют произвести в научных цепях вычисления части а также всей сети польского высокоточного нивелирования в геопотенциальных значениях.

Приращения геопотенциальных значений  $\Delta C$  для отдельных отрезков между соседними реперами сети могут быть вычислены при использовании имеющихся гравиметрических материалов — согласно с проведенными рассуждениями — со средней кв. ошибкой в среднем  $\pm 0,05$  —  $0,10 \cdot 10^{-3}$  и. г. р. (рис. 10). Эта точность является практически вполне удовлетворительной, она дает возможность достаточно точно произвести вычисления нивелирной сети также в иной высотной системе.

Проведенные рассуждения указывают на необходимость учета действительного поля силы тяжести при обработке в польских условиях сети высокоточного нивелирования.

Возможное изменение исходного значения  $g$  гравиметрической Потсдамской системы, а также формулы для нормальной силы тяжести  $\gamma_0$  (обсужденное в п. 2) были бы причиной изменения на каждом отрезке нивелировки численных значений поправок  $PN$  за непараллельность уровенных поверхностей в системе нормальных высот. Можно предвидеть, что влияние этих изменений вызвало бы в нивелирной линии, простирающейся от северной до южной границы нашей страны, изменения высоты в этой системе величиной порядка 3 см. Эти изменения не будут однако оказывать влияния на величину невязок полигонов нивелирной сети.

#### *4. Предложения касающиеся проектирования и построения будущих сетей основной триангуляции и высокоточного нивелирования, учитывая характер действительного поля силы тяжести*

Проведенные исследования позволяют сделать ряд замечаний касательно проектирования и построения основных геодезических сетей, учитывая характер действительного поля силы тяжести.

Исследования локальных изменений значения составляющих уклонения отвеса приводят к выводу, что при обсуждениях касающихся соответствующего выбора и локализации пунктов Лапласа нельзя не учитывать характера поля силы тяжести на территории на которой проектируется триангуляционная сеть. Пункт Лапласа следует выбирать в таком месте, в котором значение относительного уклонения отвеса представляет среднее значение уклонения для всего района, в котором этот пункт расположен. Поэтому перед решением выбора пунктов Лапласа, а также других астрономо-геодезических пунктов следует, как это вытекает из проведенных рассуждений, проанализировать ход гравиметрических аномалий и градиент этих аномалий, от которых зависят возможные местные возмущения в значении составляющих  $\xi$  и  $\eta$ . В случае констатирования местных возмущений можно, по нашему мнению, или соответственно изменить локализацию пункта, или же внести соответствующие редуccionные поправки принимая во внимание местные возмущения  $\xi_{lok}$  и  $\eta_{lok}$ .

При проектировании высокоточной нивелирной сети следует обращать также внимание на поле силы тяжести. Нужно ведь обеспечить при вычислениях превышений  $\Delta h$  в принятой системе высот линейность изменения значения ускорения силы тяжести, или же гравиметрической аномалии силы тяжести в свободном воздухе между соседними нивелирными реперами.

Нивелирные реперы должны быть размещены в характерных местах высотного профиля. Предлагается, при производстве в будущем повторной нивелировки польской сети, закладывать в некоторых случаях в горной и предгорной местности дополнительные промежуточные нивелирные пункты.

*5. Общие замечания касающиеся будущих гравиметрических работ для нужд геодезических основных измерений*

В будущих работах по построению сетей высокоточного нивелирования и триангуляции, при проектировании и обработке результатов измерений, должны быть использованы в высокой степени гравиметрические данные. В связи с этим следует подчеркнуть, что в рассуждениях, связанных с подготовкой гравиметрических данных, главное внимание должно быть сосредоточено на следующих проблемах:

- а) унификация гравиметрического уровня относимости,
- б) комплекс вопросов, касающихся эталонирования гравиметров и гравиметрических сетей,
- в) густота гравиметрической съемки для нужд конкретной нивелирной сети,
- г) точность измерений  $g$  и определения значения аномалий,
- д) форма обработки данных и их картографического представления.

JERZY BOKUN

## ANALYSIS AND INFERENCES RESULTING FROM THE USAGE OF GRAVITY MATERIALS TO ELABORATIONS OF GEODETIC FRAME WORK IN POLAND

### Summary

#### *1. Introduction*

New nets of main triangulation and precise levelling in Poland were calculated by using specially arranged and ordered gravity material.

Scientific and research problems connected both with the preparation and a suitable elaboration of gravity data and drawing up a documentation to meet practical needs of main triangulation in Poland, have been presented by the author in "Proceedings of the Institute of Geodesy and Cartography" [4].

A practical application of actual gravimetric data to computation of main triangulation and precise levelling, done for the first time in Poland, has made it possible to analyse the influence of gravity data upon elaboration of Polish main net observations and to deduce out of it some inferences.

Considerations concerning the actual materials permit to answer the question, whether theoretical assumptions and those adopted in practice, while preparing and elaborating gravimetric material [4], have been confirmed by the practically attained results and their accuracy, and to determine true influence of gravity data respected in elaboration of main geodetic surveyings in Poland.

#### *2. Analysis and inferences resulting from the application of gravimetric data to the Polish main triangulation net*

Gravity materials rendered possible to determine the components  $\xi_i$  and  $\eta_i$  of the relative deviation of the vertical — for all non astronomic points — by using well known method called astro-gravimetric levelling ([8], [15], [28]).

To fix mean errors of those determinations an analysis leant on premises of theoretical analysis transacted by the author in his paper already mentioned above [4] was carried out.

It is namely accuracies of gravimetric material and of other arguments, the function of which are  $\xi_i$  and  $\eta_i$  that have been considered.

As result of that detailed analysis (table 4 and 5) it has been attained that the mean values of mean errors amount  $m_{\xi_i} = m_{\eta_i} = \pm 0'',5 - 0'',7$  and vary with the relief of the country where the station is situated. In order to get an unbiased judgement on attained accuracies the values  $\xi_i$  and  $\eta_i$  of 70 trig. stations have been compared with those computed in a different and independent way. The astronomical determinations carried through at those stations, and already disregarded in adjustment of main triangulation net, have been used for the purpose. We think of additional observations of astronomic latitude  $\varphi^a$  and longitude  $\lambda^a$  (their average errors  $m_{\varphi^a} = \pm 0'',22$  and  $m_{\lambda^a} = \pm 0'',40$  carried through in 1956 and 1958 for the purpose of investigation of Earth's figure [34]; a portion of disregarded old german surveyings have been included too.

Based on those adequately reduced astronomic determinations and adjusted geodetic co-ordinates, the components of relative deflection of the vertical  $\xi_{ag}$  and  $\eta_{ag}$  have been computed with an accuracy of from  $0'',2$  to  $0'',3$ .

The differences  $\delta_\xi$  and  $\delta_\eta$  between the values  $\xi_{ag}$  and  $\eta_{ag}$  and the values of appropriate components attained previously by using the gravimetric data have been determined for 59 points belonging to new astronomic surveyings from 1956 and 1958, and for 11 points appertaining to old german surveyings (their sites shown in the graph 1).

The values of differences  $\delta_\xi$  and  $\delta_\eta$  given in the tables 6 and 7 as well as 9 and 10 show an accidental character, and their absolute mean values are of the order of from  $0'',5$  to  $0'',7$ .

If the greatness of mean errors of determination of components  $\xi_{ag}$  and  $\eta_{ag}$  is taken into account and adequate gravity data applied we obtain on an average a mean error of computation of relative deflection of the vertical amounting from  $\pm 0'',5$  to  $\pm 0'',6$  and for flat grounds and undulating areas, prevailing in Poland, from  $\pm 0'',3$  to  $\pm 0'',4$ .

Obtained results fully confirm the effects of the first analysis of accuracy (table 8). Thus the attained values of mean errors  $m_\xi$  and  $m_\eta$  may be supposed to be positively real.

Further on we paid attention to the problem of what order the error of determination of  $\xi_i$  and  $\eta_i$  of trig. points (being non-astronomic points) would have been if they had been deterinated without using gravity data.

Based on the values  $\xi_{p.L}$  and  $\eta_{p.L}$  on 52 Laplace and astro-geodetic points of main triangulation net we can draw a sketch map and determine by means of interpolation the components of the deflection of the vertical, denoted by  $\xi_{int}$  and  $\eta_{int}$  for any geodetic point.

To fix mean errors of obtained components, the values of  $\xi_{int}$  and  $\eta_{int}$  have been compared with those of  $\xi_i$  and  $\eta_i$  determined previously by the above discussed use of gravimetric data. The differences  $d\xi = \xi - \xi_{int}$  and  $d\eta = \eta - \eta_{int}$  have been listed (table 11).

The differences  $d\xi$  and  $d\eta$  have been next determinated for 29 triang. points by using supplementary astronomic surveyings carried out in 1956 and 1958 (table 12).

The analysis and the results obtained make us conclude that the mean error which would have been done at the determination of components of the deflection of the vertical at a triangulation point, applying the above discussed interpolation only without making use of gravity data, would in conditions of our country have been of the order of from  $\pm 2''.4$  to  $3''.6$ .

The greatness of this error is thus 5—7 times larger than the mean error of determination of the relative deflection of the vertical computed by using gravity data.

Then the problem has been taken into consideration whether the introduction of base reductions from geoid to the surface of reference ellipsoid and of reductions of horizontal angles on account of the deviation of the vertical, into Polish main triangulation net will be appropriate.

An analysis of the shape of the geoid in comparison with that of Krasowski's ellipsoid, adopted as reference surface, wholly justifies the introduction of the vertical distances, between geoid and the said ellipsoid, into reductions of triangulation bases. The vertical distances are framed within from  $-4.5$  to  $\pm 7.5$  m., and if disregarded would cause a distortion of the scale unit of triangulation net, which being of the order of  $2 \cdot 10^{-6}$  would numerically be 3—4 times larger than the accuracy of standardization both of Jaederin wires and of measurements on ground.

The absolute values of angle reductions on account of the deflection of the vertical amount in average to  $0''.1$  in undulating country and at the foot of hills, and come up to  $0''.3$  in mountainous part of our net.

A comparison of the greatness of those angle corrections with the accuracy of horizontal angle measurements in our net (of the order of  $0''.4 - 0''.5$  [35]) shows, that the introduction of those corrections into angle observations at trigonometrical points situated in mountainous, hilly and partly in undulating areas, has been appropriate. The reduction

may be practically disregarded if the difference of altitude between neighbouring trigonometrical points does not exceed 100 m (Table 14).

On account of a comparatively high accuracy of determination of the relative deflection of the vertical by using gravity data, a computation of the discussed angle corrections with a mean errors of an actual order of  $\pm 0,01$  has been secured.

Next problem to be analyzed was the influence of a possible alteration of the actual value of Potsdam system as well as of the normal gravity value upon the calculation of the deflection of the vertical by using gravity material. Accepting the value of the correction to Potsdam system suggested by C. Morelli [16] as well as the difference between the value  $\gamma_0$  after Helmert's formula and according to modern formulae, we will find that over the region of our country eventual new values of Faye's anomaly would be of the order 25—30 mgal lower than the values presently accepted.

The future introductions, however, of these alterations in the value of  $g$  in Potsdam and into the formula for the value of the normal gravity would not cause any change in presently computed components and in relative deflection of the vertical for trigonometric points.

### *3. Analysis and inferences resulting from the usage of gravity materials in Polish precise levelling net*

Polish precise levelling net has been computed in the normal height system by making use of adequately arranged gravity material.

In connection with it and based on previously prepared gravity material [4] a detailed analysis has been carried through concerning the accuracy of computation, in that height system, of levelling corrections ( $PN$ ) due to nonparallelity of horizontal surfaces. The results have been taken down in table 17 and presented in graph 4. For average measured height differences between neighbouring bench marks a mean error of the computation of a correction  $PN$ , on ground of gravity material, is on an average  $\pm 0,05$ — $0,10$  mm. For the above accuracy to be preserved it is necessary to compute correction  $PN$  for each measured height difference between the neighbouring bench marks.

Then we considered the greatness of corrections, which appear in Polish levelling net, in normal height system and the influence of gravity field exerted upon them (i.e its second term  $\Pi_{PN}$ ) depending on the relief of the area (graphs 6, 7, 8). The said corrections for the measured height differences between neighbouring bench marks on levelling lines in mountainous and hilly country locally attain an amount of 5—8 mm.

Then we thought over the problem of application of the system of normal height to meet practical needs of vertical control in Poland. A predominating part of our country is of plain or hilly character, and that is why height differences in most instances differ but slightly from the measured ones. In connection with the above the lines of lower levelling class [31] to be tied to the points of precise levelling need not, except particularly mountainous regions, to be given the corrections  $PN$  if computed in adopted normal height system.

Arranged gravity material makes it possible to compute for scientific purposes either fragments or whole Polish precise levelling net in geopotential numbers.

Increases of geopotential values  $\Delta C$  for particular parts between neighboring bench marks can be computed by using available gravity material, — and accordingly to the carried out considerations — with an accuracy of  $\pm 0,05-0,10 \times 10^{-3}$  g.p.u. (graph 10).

This accuracy being practically fully satisfying it enables a sufficiently accurate computation of a levelling net in an other height system too.

In accordance with the above considerations it is necessary, in Polish conditions, to respect real gravity field when computing precise levelling net.

Respective alteration of the reference data  $g$  of Potsdam system and of the formula for normal value of gravity  $\gamma_0$  (discussed in p. 2) would cause an alteration of numerical values of  $PN$  in each levelling section, because of non-parallelity of horizontal surfaces in the normal height system. It may be foreseen that the influence of those alterations would cause an alteration of an order of 3 cm in the height of a levelling line computed in this system and running from extreme north to extreme south point of our country. But the magnitude of discrepancies in levelling polygon closings will not be influenced by those alterations.

#### *4. Suggestions concerning planning and establishment of the future main triangulation and precise levelling net if the character of real gravity field is taken into account*

Taking into account true gravity field, the investigations carried out permit to suggest some remarks concerning planning and foundations of main geodetic nets.

Investigation of local variability of the components of the deflection of the vertical make us infer that when considering choice and location of Laplace stations, the character of gravity field of the region over which triangulation net is planned cannot be disregarded. Laplace station should be chosen at a place where the value of deflection of the vertical repre-

sents an average value of the deflection of the vertical of the whole area concerned. Before the location both of Laplace and astro-geodetic stations has been decided, it is necessary, as it has been shown by analysis, to analyse the run of gravity anomalies and their gradient, the respective local disturbances  $\xi$  and  $\eta$  depend on. In case the local disturbances have been stated one may — to our mind — either change suitably the location of the station or introduce adequate reduction corrections because of local disturbances  $\xi_{loc}$  and  $\eta_{loc}$ .

When planning precise levelling net the gravity field should be taken too into account. So it is necessary to secure, either the linearity of changes in values of the acceleration of gravity or Faye's anomaly of gravity between neighboring bench marks, when computing height differences in adopted system.

Bench marks should be located at characteristic spots of height profile. As to the Polish levelling net, if it is relevelled in the future, it is proposed to establish in certain cases in mountainous regions — intermediate points.

#### *5. General notes concerning future gravimetric elaborations to meet needs of Polish main triangulation surveyings*

In the future work at precise levelling and triangulation net — at their planning and elaboration of surveyings results — gravity information should be used to a large extend. It is to be stressed that the main course of considerations, connected with the elaboration of gravity information should be focussed on following problems:

- a) an uniform gravity reference level
- b) the whole of problems concerning calibration of gravimeters, and calibration system
- c) the density of gravity surveyings to meet needs of definite levelling and triangulation nets
- d) the accuracy of  $g$  surveyings and of anomaly values
- e) relating and recording of gravity data and their cartographic representation.