

Zagadnienie wyznaczenia odstępów geoidy w Polsce od elipsoidy Krasowskiego biorąc pod uwagę posiadane materiały astronomiczno-geodezyjne i grawimetryczne

1. Wprowadzenie

Badanie geoidy jest zagadnieniem bardzo ważnym zarówno z punktu widzenia naukowego, jak też praktycznego. Geodezję w skali jednego kraju interesuje w tym zagadnieniu przede wszystkim usytuowanie powierzchni geoidy w stosunku do elipsoidy odniesienia.*) Dla określenia wzajemnego usytuowania obu powierzchni wyznaczane są odstępów geoidy od elipsoidy przyjętej jako powierzchnia odniesienia pomiarów geodezyjnych.

Zastanówmy się wpierw nad sposobem i przewidywaną dokładnością określenia tych odstępów geoidy.

Wyjściowymi danymi dla wyznaczenia odstępów geoidy od przyjętej elipsoidy odniesienia są wartości względnych odchyień pionu. Obliczenie bowiem różnicy ΔN tych odstępów pomiędzy dwoma punktami A i B dokonuje się, jak wiadomo, na drodze całkowania wg wzoru:

$$\Delta N = - \int_A^B \zeta \cdot ds,$$

gdzie ζ jest wartością rzutu względnego odchylenia pionu na profil AB , a ds jest różniczkowym elementem długości tego profilu.

*) Odrębnym oczywiście zagadnieniem naukowym jest badanie i wyznaczenie najprawdopodobniejszego kształtu całej naszej planety na podstawie danych obejmujących całą powierzchnię Ziemi lub też np. przy wykorzystaniu odpowiednich wyników obserwacji bliskich sztucznych satelitów Ziemi, jak to opracował w pierwszym przybliżeniu Cook [4].

Wzór na obliczenie różnicy odstępów geoidy ΔN można przedstawić też w postaci następującej:

$$\Delta N_{AB} = -\zeta_{sr} \cdot s_{AB}, \quad \text{przy czym} \quad \zeta_{sr} = \frac{\int_A^B \zeta \cdot ds}{s_{AB}}.$$

Średni błąd obliczenia tego przyrostu odstępów geoidy wynosi:

$$m_{\Delta N_{AB}} = \pm \sqrt{m_{\zeta_{sr}}^2 \cdot s_{AB}^2 + m_s^2 \cdot \zeta_{sr}^2}.$$

Praktycznie można zaniedbać wpływ średniego błędu wyznaczenia odległości odcinka pomiędzy punktami AB , tj. $m_{s_{AB}} \cong 0^*$) i wobec tego:

$$m_{\Delta N_{AB}} = \pm s_{AB} \cdot m_{\zeta_{sr}}.$$

Dokładność obliczenia różnicy odstępów geoidy od elipsoidy odniesienia pomiędzy punktami A i B zależy więc od dokładności określenia średniej wartości ζ_{sr} rzutu względnego odchylenia pionu na profil $A-B$.

Dla dokładnego określenia wielkości ζ_{srAB} trzeba dysponować takimi materiałami, które umożliwiają dokładne wyznaczenie w tym profilu AB przebiegu składowej południkowej (ξ) i składowej w pierwszym wertykale (η) względnego odchylenia pionu. Wartość ζ_i w punkcie i profilu AB oblicza się bowiem, jak wiadomo, ze wzoru: $\zeta_{iAB} = \xi_i \cdot \cos \alpha_{AB} + \eta_i \cdot \sin \alpha_{AB}$, w którym α_{AB} oznacza azymut profilu AB .

Zastanówmy się wprawdzie jaką przewidzieć można dokładność obliczenia odstępów geoidy w Polsce od elipsoidy odniesienia, tylko na podstawie posiadanych dla obszaru naszego kraju materiałów astronomiczno-geodezyjnych.

Rozpatrzmy następnie praktyczny sposób wykorzystania posiadanych materiałów grawimetrycznych, łącznie z danymi astronomiczno-geodezyjnymi, przy obliczeniach odstępów geoidy oraz przewidywaną w tym przypadku dokładność ich wyznaczenia w warunkach naszego kraju.

*) Długość całego odcinka AB może być określona na podstawie współrzędnych punktów A i B , w tym więc przypadku można ją uważać za bezbłędną.

Jeżeli przeprowadzi się przybliżone wyznaczenie długości AB na przykład ze średnim błędem $m_{s_{AB}} = \pm 10$ m, spowoduje to przy $\zeta_{sr} = 10''$ błąd obliczanego przyrostu ΔN rzędu $\pm 0,05$ cm.

Zaniedbanie tego błędu jest więc i w tym przypadku w pełni uzasadnione przy przeprowadzanej analizie dokładnościowej.

2. Zagadnienie obliczenia odstępów geoidy w Polsce od elipsoidy odniesienia na podstawie posiadanych materiałów astronomiczno-geodezyjnych

2.1. Posiadane materiały astronomiczno-geodezyjne

Do opracowania przebiegu geoidy w Polsce dysponujemy stukilkudziesięcioma punktami astronomiczno-geodezyjnymi, dla których posiadamy dane wystarczająco dokładne do tych celów.

Do punktów tych zaliczamy:

- a) punkty Laplace'a i inne punkty astronomiczno-geodezyjne sieci triangulacji głównej [10],
- b) dodatkowe punkty astronomiczno-geodezyjne, na których obserwacje astronomiczne wykonane były w okresie późniejszym, tj. w roku 1956 i 1958 ([5], [11]) i które nie zostały już uwzględnione przy obliczaniu sieci triangulacyjnej, oraz
- c) kilka punktów dawnych pomiarów niemieckich, które nie zostały wzięte pod uwagę przy opracowaniu sieci triangulacyjnej, ale mogą być wykorzystane dla potrzeb badań geoidy.

Należy zaznaczyć, iż dodatkowe pomiary astronomiczne na kilkudziesięciu punktach triangulacyjnych wykonane były w roku 1956 i 1958 specjalnie dla potrzeb badania figury Ziemi. Mianowicie na podstawie posiadanych wg stanu na rok 1955 danych astronomiczno-geodezyjnych, opracowano w Instytucie Geodezji i Kartografii przybliżony przebieg izolinii składowej ξ i składowej η względnego odchylenia pionu na obszarze Polski. W oparciu o to przybliżone opracowanie map ξ i η zaprojektowano zakres dodatkowych pomiarów astronomicznych i wytypowano punkty triangulacyjne, na których przewidziano wyznaczenie szerokości (φ^a) i długości geograficznej (λ^a) dla potrzeb dokładniejszego zbadania figury Ziemi w Polsce. Jako dodatkowe punkty astronomiczno-geodezyjne wybrane zostały przez nas: punkty triangulacji I rzędu w terenie górskim i podgórskim (Karpaty i Sudety), odpowiednio wytypowane punkty triangulacji I rzędu wzdłuż południka $\lambda = 18^\circ$ i południka $\lambda = 21^\circ$ oraz punkty triangulacyjne usytuowane jako uzupełnienie i pewne zagęszczenie powierzchniowe punktów astronomiczno-geodezyjnych sieci triangulacji głównej w kraju.

Pomiary astronomiczne na tych dodatkowych punktach wykonane zostały, jak już poprzednio podaliśmy, w roku 1956 i 1958 i traktowane były jako pomiary II rzędu. Średni błąd wyznaczenia szerokości geograficznej wyniósł przeciętnie $m_{\varphi^a} = \pm 0'',22$, a długości geograficznej (w nawiązaniu do punktu wyjściowego Borowa Góra) $m_{\lambda^a} = \pm 0'',40$ [5].

Wszystkie wyniki obserwacji astronomicznych zostały zredukowane do średniego bieguna, a szerokości geograficzne zredukowano na poziom morza korzystając ze wzoru przybliżonego.

Dla wszystkich punktów astronomiczno-geodezyjnych dysponowano wyrównanymi wartościami współrzędnych geodezyjnych (φ^g i λ^g) na elipsoidzie Krasowskiego.

Na podstawie danych astronomicznych oraz wyrównanych współrzędnych geodezyjnych wyznaczone zostały dla omawianych stukilkudziesięciu punktów astronomiczno-geodezyjnych składowe względnego odchylenia pionu*).

Średni błąd obliczonych w ten sposób składowych ξ i η wynosi przeciętnie $\pm 0'',2 - 0'',3^{**}$ (poza niektórymi punktami w górach, gdzie lokalnie średnie błędy będą większe).

Należy podkreślić, że dodatkowe pomiary astronomiczne z 1956 i 1958 r. wraz z pomiarami dla potrzeb sieci triangulacyjnej dają dość duże nasycenie punktami astronomiczno-geodezyjnymi na obszarze naszego kraju. Przeciętne odległości pomiędzy punktami astronomiczno-geodezyjnymi wynoszą 70—80 km, a w terenie górskim i podgórskim około 30 km. Duża ilość i wysoka stosunkowo jakość danych astronomiczno-geodezyjnych stwarza dobrą podstawę do dokładnych badań nad geoidą w Polsce.

2.2. Przewidywana dokładność obliczenia odstępów geoidy od elipsoidy odniesienia na podstawie posiadanych materiałów astronomiczno-geodezyjnych w Polsce

Zastanówmy się, z jaką dokładnością mogą być obecnie obliczone odstępów geoidy na obszarze Polski od elipsoidy Krasowskiego przy wykorzystaniu omówionych w p. 2.1 materiałów astronomiczno-geodezyjnych.

Przy wyznaczeniach odstępów geoidy N elementem obliczeniowym będzie w tym wypadku odcinek łączący sąsiednie punkty astronomiczno-geodezyjne. Odległości s_{AB} będą przeciętnie na całym obszarze kraju wynosiły około 70 km, a w terenie górskim i częściowo podgórskim około 30 km.

Średni błąd $m_{\Delta N}$ określenia przyrostu odstepu ΔN pomiędzy punktami A i B jest zależny, jak to wykazaliśmy w p. 1, od dokładności określenia średniej wartości ζ_{sr} odchylenia pionu w profilu AB .

*) Mianowicie składowa południkowa wynosi: $\xi_i = \varphi_i^a - \varphi_i^g$, a składowa w pierwszym wertykale: $\eta_i = (\lambda_i^a - \lambda_i^g) \cos \varphi_i$.

**) Przy tej ocenie dokładności można praktycznie uważać wyrównane współrzędne geodezyjne za bezbłędne. Wobec tego:

$$m_{\xi} \cong m_{\varphi^a} \quad \text{i} \quad m_{\eta} \cong \cos \varphi \cdot m_{\lambda^a}.$$

Wartość ζ_{sr} musi być w tym przypadku wyznaczona przy założeniu liniowej zmiany wartości ζ pomiędzy punktami A i B .

Możemy ją określić albo:

- jako średnią arytmetyczną, tj. $\frac{1}{2} (\zeta_A + \zeta_B)$, albo
- przy pomocniczym wykorzystaniu map izolinii ξ i η , opracowanych na podstawie danych na punktach astronomiczno-geodezyjnych (tj. określeniu ξ_i i η_i z tych map dla punktów profilu AB celem obliczenia $\zeta_i = \xi_i \cdot \cos \alpha_{iB} + \eta_i \cdot \sin \alpha_{iB}$, potrzebnego do wyznaczenia

$$\zeta_{sr} = \frac{1}{s_{iB}} \sum_{i=1}^B \zeta_i \cdot \Delta s_i.$$

Przy obu tych postępowaniach dokładność określenia ζ_{sr} będzie praktycznie taka sama, bowiem dane wyjściowe są identyczne, a różnica polega tylko na sposobie pomocniczego przygotowania i wykorzystania materiałów. Zastanówmy się więc jaką wielkość można uważać za reprezentatywną dla średniego błędu $m\zeta_{sr}$ w tych warunkach.

Rozważania przeprowadzone przez autora w odrębnej pracy opublikowanej w tym samym Zeszytcie Prac Instytutu Geodezji i Kartografii [3] wykazały, że zmienność składowych odchylenia pionu pomiędzy punktami astronomicznymi w naszych warunkach nie ma charakteru liniowego. Średni błąd określenia — dla dowolnego punktu wzdłuż łańcuchów triangulacyjnych — składowych ξ i η , tylko na podstawie interpolacji liniowej pomiędzy 52 punktami astronomicznymi naszej sieci, osiąga wg tych rozważań wartość $\pm 2,4 \div 3,6$.

Dla opracowania geoidy dysponujemy wprawdzie — jak to wynika z p. 2.1 — większą ilością punktów astronomiczno-geodezyjnych, niż wykorzystana dla obliczenia sieci triangulacji głównej, lecz przeciętne odległości pomiędzy tymi punktami na obszarze całego kraju są obecnie w przybliżeniu takie same jak wzdłuż łańcuchów triangulacyjnych [10].

Aby określić dla odcinka AB przewidywaną wielkość średniego błędu $m\zeta_{sr}$ przyjmijmy dla uproszczenia następujące założenia:

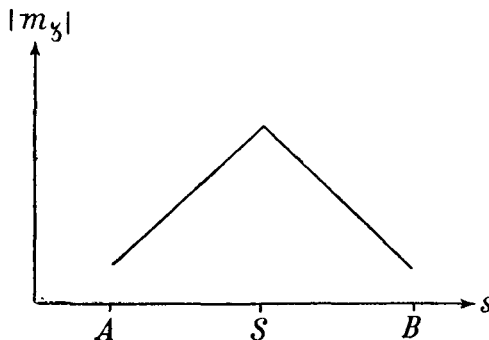
- średni błąd $m\zeta_i$ na tym odcinku jest maksymalny w punkcie środkowym S odcinka AB ,
- wielkość $m\zeta_i$ w punkcie S zgodnie z w/w poprzednią analizą autora [3] osiąga wartość $\pm 2,4 - 3,6$.
- zmienność bezwzględnej wartości średniego błędu $|m\zeta_i|$ między początkiem i środkiem odcinka ($A - S$) oraz między środkiem i końcem odcinka ($S - B$) przyjmujemy za liniową.

Rysunek 11 ilustruje przyjęte założenie liniowej zmienności bezwzględnej wartości $|m\zeta_i|$ na odcinkach AS i SB .

Zastępując przy obliczaniu odstępów geoidy całkowanie sumowaniem elementarnych iloczynów można określić ogólnie średni błąd ζ_{sr} na profilu 1-n wg wzoru:

$$m_{\zeta_{sr}} = \pm \frac{1}{2} \frac{\Delta s}{s_{1-n}} \sqrt{m^2 \zeta_1 + 4 m^2 \zeta_2 + 4 m^2 \zeta_3 + \dots + 4 m^2 \zeta_{n-1} + m^2 \zeta_n},$$

przy założeniu podziału długości s całego profilu 1-n na jednakowe odcinki Δs .



Rys. 11

W przypadku naszej analizy, tj. dla $\frac{\Delta s}{s} = \frac{1}{2}$, wzór na średni błąd przyjmie postać:

$$m_{\zeta_{sr}} = \pm \frac{1}{4} \sqrt{m_{\zeta_A}^2 + (2 m_{\zeta_S})^2 + m_{\zeta_B}^2}.$$

Jak wynika z wzoru na ζ_i dla $m_{\xi_i} = m_{\eta_i} = \mu$ otrzymujemy także $m_{\zeta_i} = \mu$.

Wobec tego, średni błąd wyznaczonego rzutu względnego odchylenia pionu w punkcie A na profil AB będzie praktycznie równy średniemu błędowi określenia składowych w tym punkcie odchylenia pionu.

Dla punktów astronomiczno-geodezyjnych (tj. dla punktów A i B naszej analizy) średnie błędy określenia składowych względnego odchylenia pionu wynoszą przeciętnie, zgodnie z podanymi w punkcie 2.1 wynikami:

$$|m_{\xi}| = |m_{\eta}| = 0'',2 \div 0'',3.$$

Wobec powyższego możemy w naszej analizie przyjąć:

$$m_{\zeta_A} = m_{\zeta_B} = \pm 0'',3.$$

Przy tych założeniach otrzymujemy na podstawie powyższego wzoru na $m_{\zeta_{sr}}$:

$$\begin{aligned} &\text{dla } m_{\zeta_S} = \pm 2'', 4 \dots \dots m_{\zeta_{sr}}^{AB} = \pm 1'', 2, \\ &\text{a dla } m_{\zeta_S} = \pm 3'', 6 \dots \dots m_{\zeta_{sr}}^{AB} = \pm 1'', 8. \end{aligned}$$

Jak wynika więc z tych rozważań $m_{\zeta_{sr}} = \pm 1'', 2 \div 1'', 8$.

Dla przekonania się o realności wyników uzyskanych z powyższej analizy dokładnościowej, dokonamy dla wybranych profili pomiędzy punktami astronomiczno-geodezyjnymi A i B, o typowych w naszych warunkach odległościach (tj. od 30 do około 100 km), następujące badania porównawcze.

Dla każdego z tych profili AB obliczamy różnicę pomiędzy wartością ζ_{sr}^{lin} , wyznaczoną na podstawie tylko danych astronomiczno-geodezyjnych (przyjmując liniowość zmiany pomiędzy A i B), a wartością $\zeta_{sr}^{dok.}$, wyznaczoną przy wykorzystaniu dokładnych danych (tj. przy uwzględnieniu dodatkowych punktów na profilu co około 7—10 km o znanych ξ_i i η_i *).

Te różnice określone na podstawie wzoru

$$\delta \zeta_{sr}^{AB} = \frac{\sum_A^B \zeta \cdot ds}{s_{AB}^{dok.}} - \frac{\sum_A^B \zeta \cdot ds}{s_{AB}^{lin}}$$

zestawione są w tabelcy 1.

Tablica 1

Lp.	Odległość s_{AB} km	Wartość różnicy $ \delta \zeta_{sr} $	U w a g i
1	53	0,8	Profil $\alpha = 0^\circ$ teren pagórkowaty
2	97	2,4	„ $\alpha = 90^\circ$ „ „
3	66	1,8	„ $\alpha = 0^\circ$ „ „
4	68	0,7	„ $\alpha = 130^\circ$ „ równinny
5	79	0,8	„ $\alpha = 90^\circ$ „ „
6	61	1,4	„ $\alpha = 90^\circ$ „ podgórski
7	51	0,9	„ $\alpha = 90^\circ$ „ równinny
8	46	2,1	„ $\alpha = 40^\circ$ „ górski i podgórski
9	75	1,7	„ $\alpha = 0^\circ$ „ równinny
10	30	0,4	„ $\alpha = 0^\circ$ „ pagórkowaty
Przeciętnie	62,6	1,3	
Średnio		$\pm 1,5$	

*) Nie omawiając zagadnienia szczegółowo, należy jednak zaznaczyć, iż dodatkowe punkty na profilu AB mają określone ξ i η z dokładnością około 0,5 na podstawie odpowiedniego wykorzystania szczegółowych danych grawimetrycznych.

Dla ilustracji podajemy na rys. 12 przykładowo wykres przebiegu ζ_{tin} i ζ_{dok} dla trzech, dość typowych w naszych warunkach, profili pomiędzy punktami astronomiczno-geodezyjnymi. *)

Na podstawie danych liczbowych tabl. 1 obliczmy jeszcze ile wyniesie średnia wartość różnicy $\delta\zeta_{sr}$ dla profilu o „jednostkowej” długości 70 km, tj. dla przeciętnej odległości $A-B$ w naszych warunkach.

W tym celu dla każdego z profili wymienionych w tabl. 1 obliczamy różnice odpowiadające odległości 70 km:

$$|\delta\zeta_{sr}|_{70} = \sqrt{\frac{70}{s_{AB}}} |\delta\zeta_{sr}|_{AB},$$

a następnie określamy ich średnią wartość, która wynosi mianowicie $\pm 1,5$.

Zakładając tymczasowo bezbłądność obliczeń na podstawie dokładnych materiałów wartości ζ_{sr}^{dok} , możemy uważać różnice $\delta\zeta_{sr}$ jako odpowiadające średnim błędom obliczenia ζ_{sr}^{lin} pomiędzy A i B .

Porównanie uzyskanej z tabl. 1 średniej wartości: $\delta\zeta_{sr} \cong m_{lin} \zeta_{sr} = \pm 1,5$ wykazuje zadowalającą zgodność z wynikiem poprzednio przeprowadzonej analizy (wg której uzyskaliśmy: $m_{lin} \zeta_{sr} = \pm 1,2 - 1,8$).

Należy podkreślić, że określona wartość średniego błędu $m_{lin} \zeta_{sr}$ dotyczy całego 70-kilometrowego profilu pomiędzy punktami astronomicznymi $A-B$. Na poszczególnych odcinkach profilu błędy $m\zeta_i$ mogą być znacznie większe, jak to wynika np. z rys. 12.

Przyjmując te wartości $m_{lin} \zeta_{sr}$ do dalszych rozważań uzyskujemy następujące średnie błędy ($m_{\Delta N} = \pm s \cdot m_{lin} \zeta_{sr}$) obliczenia przyrostu ΔN odstepu geoidy od elipsoidy odniesienia dla odcinka $s_{AB} = 70$ km:

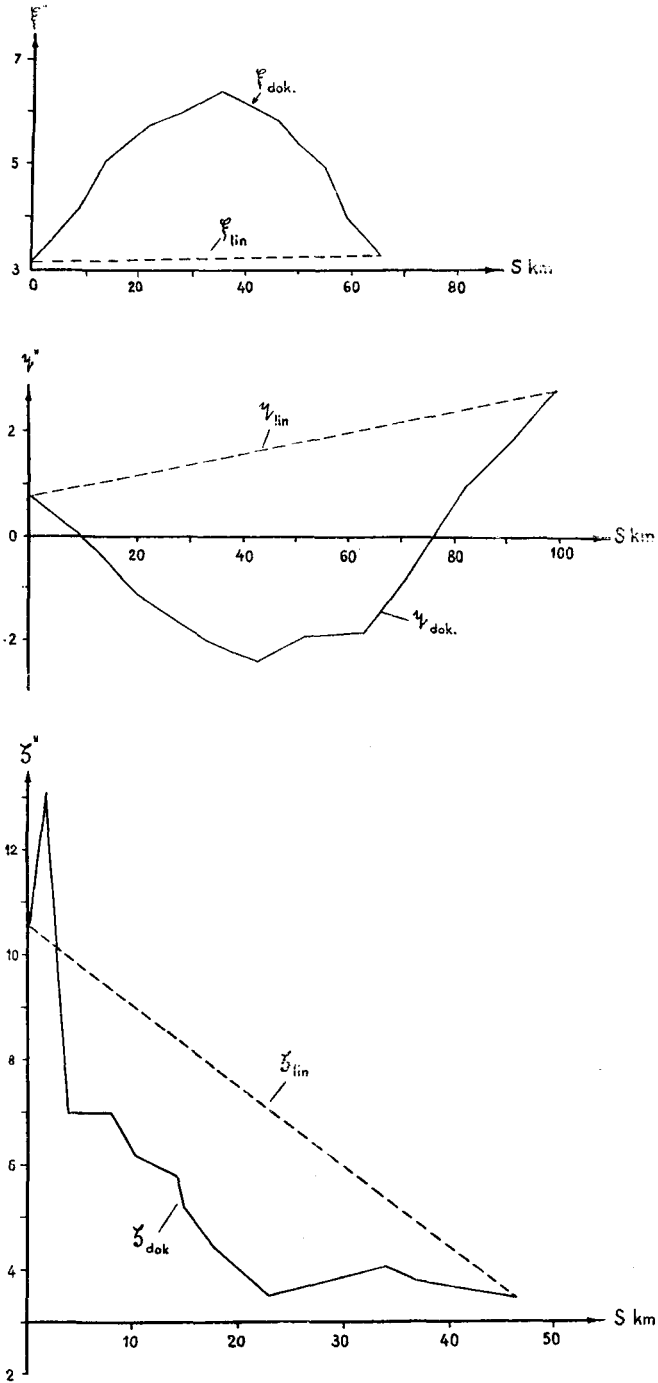
$$\text{przy } m_{lin} \zeta_{sr} = \pm 1,2 \dots m_{\Delta N, AB} = \pm 40,7 \text{ cm}$$

$$m_{lin} \zeta_{sr} = \pm 1,5 \dots m_{\Delta N, AB} = \pm 50,9 \text{ ,,}$$

$$m_{lin} \zeta_{sr} = \pm 1,8 \dots m_{\Delta N, AB} = \pm 61,1 \text{ ,,}$$

Odpowiednio dla odległości $s = 30$ km pomiędzy punktami astronomicznymi w górach dla $m_{lin} \zeta_{sr} = \pm 1,8$ otrzymujemy $m_{\Delta N} = \pm 26,2$ cm, co w przeliczeniu na odcinek $s = 70$ km daje wielkość średniego błędu $m_{\Delta N} = \pm 40,0$ cm.

*) Uwzględniono tu też profile dla $\alpha = 0^\circ$ i $\alpha = 90^\circ$, czyli profil południkowy ξ i pierwszego wertykału η .



Rys. 12. Przebieg składowych odchylenia pionu na trzech profilach

Biorąc pod uwagę wyniki powyższych rozważań możemy przewidywać, że średni błąd obliczenia — na podstawie posiadanych danych astronomiczno-geodezyjnych — przyrostu ΔN odstepu geoidy od elipsoidy odniesienia dla całej rozciągłości obszaru naszego kraju w kierunku północ — południe lub wschód — zachód (tj. dla długości około 600 km) wyniesie średnio $\pm 1,5$ m.

3. Proponowany sposób obliczenia odstepów geoidy od elipsoidy odniesienia przy łącznym wykorzystaniu danych astronomiczno-geodezyjnych i grawimetrycznych

Podwyższenie dokładności wyznaczenia ΔN dla odcinka AB można uzyskać poprzez zmniejszenie średniego błędu $m\zeta_{sr}^{AB}$.

Z dotychczasowych rozważań wynika, że na średni błąd średniej wartości ζ_{sr} , obliczonej dla odcinka AB przy uwzględnieniu tylko samych materiałów astronomiczno-geodezyjnych, wpływa liczbowo w dominującym stopniu błąd spowodowany przyjęciem liniowego przebiegu składowych odchylenia pionu pomiędzy punktami astronomiczno-geodezyjnymi A i B , w porównaniu do wpływu rzeczywistego błędu danych astronomicznych i geodezyjnych na tych punktach. Dla podniesienia więc dokładności określenia ζ_{sr} konieczna jest możliwie pełna informacja o zmienności składowych względnego odchylenia pionu wzdłuż całego profilu AB . W tym celu mogą być wykorzystane materiały grawimetryczne umożliwiające, jak wiadomo przy zastosowaniu znanych metod ([7], [1]), w dość szybki i dokładny sposób obliczenie składowych względnego odchylenia pionu dla dowolnych punktów wzdłuż profilu AB .

Wobec powyższego dla dokładniejszego wyznaczenia ζ_{sr} , a tym samym dokładniejszego określenia odstepów geoidy, należy odpowiednio wziąć pod uwagę i wykorzystać posiadane materiały grawimetryczne, łącznie z danymi astronomiczno-geodezyjnymi.

Do badań geoidy dysponujemy materiałami grawimetrycznymi przygotowanymi i specjalnie opracowanymi dla potrzeb polskich geodezyjnych pomiarów podstawowych *).

Oprócz tych materiałów mogą być także uwzględnione uzupełniające pomiary wykonane w latach 1956—59 grawimetrem Askania Gs-11 w niektórych rejonach naszego kraju **).

*) Materiały te zostały szczegółowo przedstawione przez autora w jednym z poprzednich Zeszytów „Prac Instytutu Geodezji i Kartografii” [1].

**) Mamy na myśli pomiary przeprowadzone przez Instytut Geodezji i Kartografii oraz przez instytucje geologiczno-poszukiwawcze.

Łącznie materiał grawimetryczny stanowią dane dla kilkunastu tysięcy punktów grawimetrycznych oraz mapy anomalii siły ciężkości Faye'a i anomalii Bouguera w różnych skalach.

Odpowiednie wykorzystanie tych materiałów grawimetrycznych umożliwia, przy zastosowaniu znanych metod [7], wyznaczenie składowych względnego odchylenia pionu dla dowolnego punktu, nie będącego punktem astronomiczno-geodezyjnym. Przeprowadzona przez autora w odrębnej pracy [3] analiza dokładności wykazała, że składowe ξ i η — określone dla poszczególnych punktów przy wykorzystaniu tych danych grawimetrycznych — obciążone są przeciętnie średnim błędem rzędu $\pm 0,5''$ — $0,7''$, a w niektórych wypadkach $\pm 0,3''$.

Zastanówmy się nad sposobem łącznego uwzględnienia materiałów astronomiczno-geodezyjnych i grawimetrycznych przy praktycznie przeprowadzonych obliczeniach odstępów geoidy oraz przewidywaną dokładnością tych obliczeń.

Dla dokładniejszego obliczenia przyrostu odstepu $\Delta N_{AB} = - \int_A^B \zeta \cdot ds$ możemy — naszym zdaniem — przeprowadzić następujące postępowanie.

Na profilu pomiędzy sąsiednimi punktami astronomiczno-geodezyjnymi A i B wybieramy punkty pośrednie, dla których obliczamy, przy odpowiednim wykorzystaniu materiałów grawimetrycznych, składowe ξ i η *). Wybór tych punktów pośrednich powinien być taki, aby wartości ξ i η wyznaczone na nich umożliwiły dokładne określenie zmienności ζ na profilu $A-B$ **).

W praktyce, dla większości obszaru naszego kraju (poza obszarami górskim) wystarczą odległości 7—14 km pomiędzy punktami pośrednimi na profilu dla zadowalającego przedstawienia zmienności ζ .

Dysponując takimi danymi przy wyznaczaniu przyrostu odstepu:

$$\Delta N_{AB} = - \sum_A^B \zeta \cdot \Delta s,$$

*) Ponieważ celem obliczenia ξ i η dla punktów pośrednich jest umożliwienie przeprowadzenia interpolacji ζ pomiędzy A i B (odległymi średnio o ok. 70 km) z uwzględnieniem regionalnej anomalności pola siły ciężkości na profilu, obliczenia te możemy przeprowadzić w uproszczony sposób. Przy wyznaczaniu składowych częściowego grawimetrycznego odchylenia pionu dla niektórych z tych punktów użyć możemy materiały grawimetryczne z obszaru o promieniu do 100 km, a nawet w pewnych przypadkach tylko do 50 lub do 30 km od rozważanego punktu pośredniego. Takie postępowanie ułatwia i znacznie przyspiesza obliczenia.

**) Przy wyborze punktów pośrednich trzeba zwrócić uwagę na zależność zmienności składowej odchylenia pionu w profilu od wielkości rzutu gradientu horyzontalnego anomalii Faye'a na ten profil.

Przy tych pracach można często abstrahować od zupełnie lokalnych undulacji ζ , a tym samym i geoidy, ale należy dbać o określenie ogólnego jej przebiegu.

będziemy posługiwać się iloczynami ($\zeta_{i, i+1} \cdot \Delta s$), obliczonymi dla poszczególnych odcinków ($i, i+1$) na które został podzielony profil AB przez punkty pośrednie. Średni błąd obliczenia ΔN_{AB} dla profilu AB określić

można ze wzoru: $m_{\Delta N_{AB}} = \pm \sqrt{\sum_A^B m_{i, i+1}^2}$, gdzie $m_{i, i+1}$ jest średnim błędem obliczenia przyrostu odstepu geoidy dla odcinka $i, i+1$.

Celem określenia średniego błędu $m_{i, i+1}$ rozważyć musimy wielkość średniego błędu $m_{\zeta_{i, i+1}}$, który jest zależny od anomalności pola siły ciężkości i długości tego odcinka $i, i+1$, a więc od właściwego obioru punktów pośrednich na profilu.

Biorąc pod uwagę przytoczone wyniki poprzednich rozważań dokładnościowych autora, dotyczących wyznaczenia ξ i η [3], można przyjąć wielkość średniego błędu:

$$m_{\zeta_{i, i+1}} \cong \pm 0''5 \text{ dla odcinka o długości } s_{i, i+1} \cong 7 \text{ km}$$

$$\text{oraz } m_{\zeta_{i, i+1}} \cong \pm 0''7 \text{ dla } s_{i, i+1} \cong 12 - 14 \text{ km. *)}$$

Przyjmując powyższe wartości obliczamy $m_{i, i+1}$ przy założeniu podziału profilu AB przez punkty pośrednie na równe odcinki o długości $s_{i, i+1}$. Następnie wyznaczamy średni błąd obliczenia przyrostu odstepu geoidy od elipsoidy $m_{\Delta N_{AB}}$ dla całego profilu AB o długości 70 km (uważając $s_{AB} = 70$ km za „jednostkową” długość profilu). Wyniki tych obliczeń przedstawione są w tabl. 2.

W terenie górskim odległości pomiędzy punktami astronomiczno-geodezyjnymi wynoszą przeciętnie 30 km ($s_{AB} = 30$ km). W tym przypadku przyjmując $s_{i, i+1} = 7$ km oraz $m_{\zeta_{i, i+1}} = \pm 0''7$ (ze względu na dużą zmienność pola siły ciężkości) otrzymujemy — w oparciu o poprzednie założenia — wielkość przewidywanego średniego błędu $m_{\Delta N_{AB}} =$

*) Obliczenie składowych częściowego grawimetrycznego odchylenia pionu dla punktów pośrednich możemy przeprowadzić w tym przypadku wykorzystując materiały grawimetryczne z obszaru tylko do 30, 50 lub 100 km od rozważanego punktu (np. dla punktu pośredniego w środku — obliczenia z materiałow do 100 km, dla 2 punktów — do 50 km, a dla pozostałych punktów pośrednich na profilu — do 30 km). Średni błąd tych obliczeń wyniesie przeciętnie $\pm 0''25 \div 0''30$ (zgodnie z tabl. 4 cytowanej pracy autora [3]).

Uwzględniając także błędy astronomicznych wyznaczeń na punktach A i B oraz błędy interpolacji na odcinku $i, i+1$, przekonujemy się, że przyjęte wartości $m_{\zeta_{i, i+1}} = 0''5 \div 0''7$ dla długości odcinka 7—14 km są dla przeciętnych warunków polskich zupełnie realne, a dla terenów równinnych oszacowane z dość dużą ostrożnością.

$= \pm 4,9$ cm. Przeliczając następnie na przyjętą „jednostkową” długość profilu $s = 70$ km, otrzymujemy średni błąd $m_{\Delta N} = \pm 7,5$ cm.

Tablica 2

Długość odcinka $s_{i, i+1}$	$m_{s_{i, i+1}}$	$m_{\Delta N_{i, i+1}}$	$m_{\Delta N_{AB}}$ dla $s_{AB} = 70$ km
7 km	$\pm 0,5''$	$\pm 1,70$ cm	$\pm 5,4$ cm
14 km	$\pm 0,7''$	$\pm 4,75$ cm	$\pm 10,6$ cm

Przy uwzględnieniu materiałów grawimetrycznych zgodnie z proponowanym sposobem, możemy więc przewidywać, że obliczenie różnicy odstepu geoidy od elipsoidy odniesienia dla całej rozciągłości obszaru Polski, tj. dla $s \cong 600$ km, obarczone będzie średnim błędem wynoszącym ± 23 cm.

4. Porównanie przewidywanej dokładności obliczeń odstępów geoidy na podstawie samych materiałów astronomiczno-geodezyjnych oraz przy łącznym wykorzystaniu danych astronomiczno-geodezyjnych i grawimetrycznych

Porównajmy obecnie wyniki uzyskane w toku naszych rozważań, a mianowicie dokładność obliczenia odstępów geoidy od elipsoidy odniesienia w Polsce przy wykorzystaniu samych danych astronomiczno-geodezyjnych z przewidywanymi dokładnościami tego obliczenia przeprowadzonego przy wykorzystaniu także omawianych materiałów grawimetrycznych, zgodnie z zaproponowanym w p. 3 sposobem.

Oprócz porównania średniego błędu $m_{\Delta N_{AB}}$ dla profilu AB o długości 70 km, należy też wziąć pod uwagę średnie błędy $m_{\Delta N_{cal}}$ dla całej rozciągłości obszaru naszego kraju oraz przewidywane niezamknięcia ω poligonów, powstałych z przecięcia odpowiednio dobranych profili.

Praktycznie, przy obliczeniach odstępów N najdogodniej jest przeprowadzić profile ξ (południkowe — NS) oraz profile η (pierwszego wertykału — EW) ^{*)}, które następnie tworzą odpowiednie poligony zamknięte, umożliwiając wyrównanie obliczonych wartości ΔN .

^{*)} Mówimy tu o obliczaniu metodą profilową. Może być także zastosowane obliczenie N przy wykorzystaniu poligonów. W tym przypadku zamknięty poligon tworzyłyby boki łączące odpowiednio wybrane punkty astronomiczno-geodezyjne. Na każdym z boków mogą być zakładane punkty pośrednie, analogicznie do proponowanego postępowania na profilu. Dokładności opracowania metodą poligonową i profilową są praktycznie tego samego rzędu.

Długość przekroju w kierunku SN i EW, na obszarze całej Polski, wynosi średnio około 600 km. Tą długość przyjmujemy do obliczeń porównawczych $m_{\Delta N}^{cal.}$.

Przy rozważaniach przewidywanej wartości niezamknięcie poligonów weźmy dla uproszczenia poligon o bokach 210×210 km (tj. około $2^\circ \times 3^\circ$).

Wyniki tych obliczeń zestawione są dla porównania w tabelicy 3.

Tabela 3

Obliczenie ΔN		Średni błąd		Przewidywane niezamknięcie ω poligonu ok. 210×210 km
		$m_{\Delta N}^{AB}$ dla $s_{AB} = 70$ km cm	$m_{\Delta N}^{cal.}$ dla $s = 600$ km cm	
przy wykorzystaniu danych:	przy założeniach:			
	$m_{\zeta}^{sr} = \pm 1''{,}2$	$\pm 40,7$	$\pm 119,1$	$\pm 140,8$
	$m_{\zeta}^{sr} = \pm 1''{,}8$	$\pm 61,1$	$\pm 178,8$	$\pm 211,4$
	średnio	$\pm 50,9$	$\pm 149,0$	$\pm 176,1$
b) astronomiczno-geodezyjnych i grawimetrycznych	$s = 7$ km; $m_{\zeta} = \pm 0''{,}5$	$\pm 5,4$	$\pm 15,8$	$\pm 18,7$
	$s = 14$ km; $m_{\zeta} = \pm 0''{,}7$	$\pm 10,6$	$\pm 31,0$	$\pm 36,7$
	średnio	$\pm 8,0$	$\pm 23,4$	$\pm 27,7$

Należy zwrócić uwagę, że przy obliczaniu odstępów geoidy metodą poligonową średnie błędy dla boku o długości 70 km odpowiadają wartościom $m_{\Delta N}^{AB}$ z tabl. 3, a niezamknięcia poligonu o obwodzie około 840 km — odpowiedniej wartości ω z tej tabelicy.

Porównanie wielkości liczbowych przedstawionych w tabl. 3 doprowadza do wniosku, że średnie błędy obliczenia odstępów geoidy N będą przy proponowanym uwzględnieniu danych grawimetrycznych przeszło sześciokrotnie mniejsze, niż średnie błędy tych obliczeń, przeprowadzonych tylko na podstawie samych danych astronomiczno-geodezyjnych.

Wykorzystanie materiałów grawimetrycznych łącznie z danymi astronomiczno-geodezyjnymi jest więc konieczne w celu dokładnego opracowania przebiegu geoidy w stosunku do elipsoidy odniesienia.

Zrealizowanie proponowanego zastosowania punktów pośrednich na profilu obliczeniowym (lub boku poligonu), np. o odległościach co 7—14 km, przy odpowiednim wykorzystaniu posiadanych materiałów grawimetrycznych, pozwoli w warunkach naszego kraju na obliczenie odstępów

geoidy od elipsoidy odniesienia na krańcach obszaru Polski z dokładnością rzędu 15 cm w stosunku do punktu wyjściowego obliczeń, przyjętego odpowiednio w środku obszaru kraju (dla którego wartość N jest znana, bądź założona, np. $N = 0$).

Zastosowanie proponowanego sposobu postępowania przy większym zagęszczeniu punktów pośrednich wzdłuż profilów obliczeniowych oraz uzupełnieniu w miarę potrzeb dodatkowymi danymi grawimetrycznymi może podnieść odpowiednio dokładność opracowania odstępów geoidy od elipsoidy odniesienia.

5. Wyznaczenie odstępów geoidy w Polsce od elipsoidy Krasowskiego przy wykorzystaniu danych astronomiczno-geodezyjnych i grawimetrycznych

Posiadane materiały astronomiczno-geodezyjne i grawimetryczne dają możliwość, przy zastosowaniu zaproponowanego sposobu postępowania, szczegółowego badania usytuowania powierzchni geoidy w stosunku do elipsoidy odniesienia na obszarze naszego kraju.

W przeprowadzonym przez nas pierwszym wyznaczeniu odstępów geoidy w Polsce od elipsoidy Krasowskiego zostały wykorzystane omawiane materiały oraz częściowo była zrealizowana koncepcja przedstawiona w p. 3 niniejszej pracy.

Dla właściwego pod względem technicznym zorganizowania całości obliczeń geoidy na obszarze kraju postanowiliśmy utworzyć w pierwszej kolejności, składającą się z odpowiednio wytypowanych głównych profili. Jako zasadę przyjęto, aby wzdłuż głównych profili dokładniej wyznaczyć przyrosty odstępów geoidy oraz aby w celu ich wyrównania profile te utworzyły sieć zamkniętych poligonów.

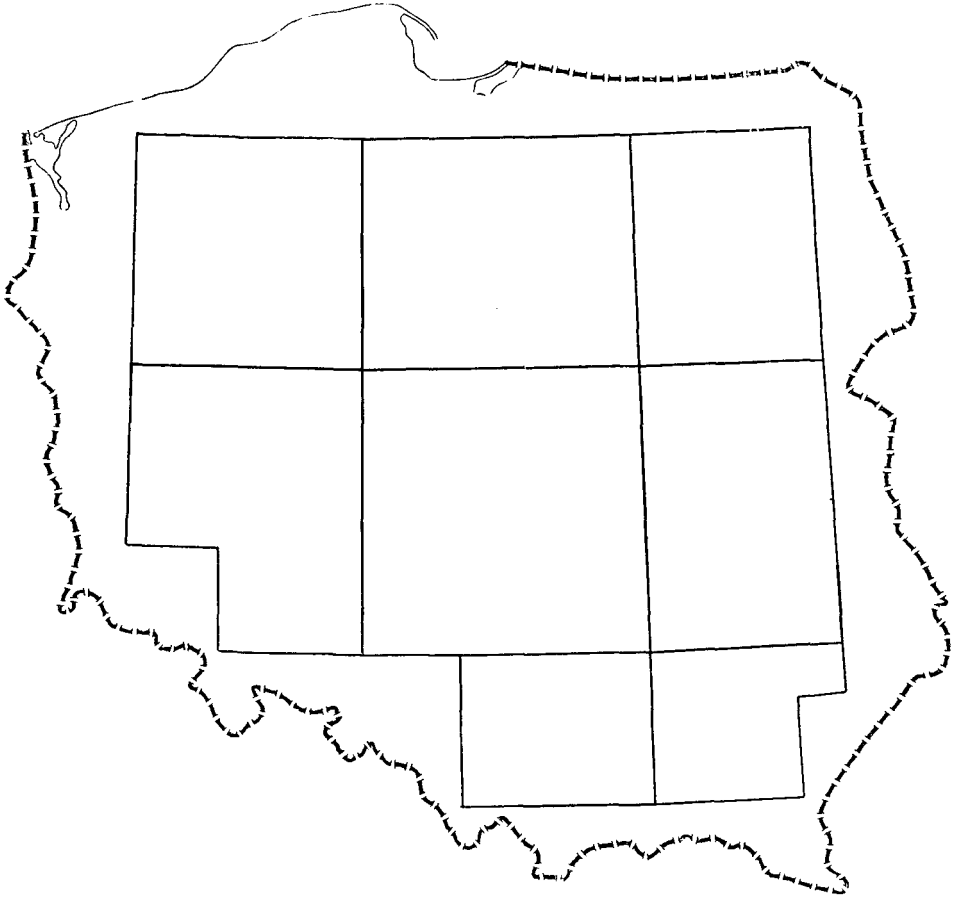
Dla udogodnienia praktycznych obliczeń wybraliśmy profile południkowe (SN) oraz pierwszego wertykału (EW), wzdłuż których dysponowaliśmy większą, niż dla innych obszarów kraju, ilością i gęstością punktów o wyznaczonych składowych ξ i η względnego odchylenia pionu.

Składowe te określone były dla punktów astronomicznych na podstawie danych astronomiczno-geodezyjnych, a dla innych punktów triangulacyjnych przy odpowiednim wykorzystaniu materiałów grawimetrycznych podczas obliczenia sieci triangulacji głównej ([1], [10]).

Wybrane profile tworzą sieć 8 zamkniętych poligonów.

Dla ilustracji przedstawiamy na rys. 13 usytuowanie profili głównych i utworzoną sieć poligonów.

Realizując koncepcję podaną powyżej w p. 3 obraliśmy odpowiednio na profilach głównych punkty pośrednie. W obecnie przeprowadzonym pierwszym opracowaniu odstępów geoidy wybraliśmy punkty pośrednie niezbyt gęsto. Utworzyły mianowicie one na profilach głównych odcinki



Rys. 13. Szkic profili głównych

wynoszące przeciętnie około 15 km. Zgodnie z proponowanym uprzednio przez nas sposobem postępowania, wyznaczyliśmy dla tych punktów pośrednich składowe względne odchylenia pionu, przy wykorzystaniu materiałów grawimetrycznych *).

Na podstawie wartości ξ i η , uzyskanych z danych astronomiczno-geodezyjnych i grawimetrycznych, opracowano wzdłuż głównych profili

*) Należy zaznaczyć, że dla obliczenia składowych częściowego grawimetrycznego odchylenia pionu dla punktów pośrednich użyte były materiały grawimetryczne w promieniu tylko do 100, 50, a nawet niekiedy 30 km od obliczonego punktu — zgodnie z wynikiem rozważań p. 3 niniejszej pracy.

Dla punktów pośrednich położonych na profilach SN obliczano składową ξ , a na profilach EW — składową η względne odchylenia pionu.

przebieg izolinii tych składowych. Mianowicie wzdłuż profili południkowych opracowano mapę linii równych wartości składowych ξ , a wzdłuż profili pierwszego wertykału — mapę linii równych wartości składowych η względnego odchylenia pionu *).

Opracowane izoliny ξ i η stanowiły podstawę do obliczenia odstępów geoidy od elipsoidy Krasowskiego wzdłuż głównych profili. Obliczenia te przeprowadziliśmy następująco.

Na profilu południkowym (SN) wartości przyrostów odstępów geoidy ΔN obliczano dla odcinka $\Delta\varphi = 20'$, a na profilu pierwszego wertykału (EW) dla odcinka $\Delta\lambda = 30'$ **).

Wartości ΔN dla tych odcinków wyznaczono jako sumę elementarnych iloczynów. Mianowicie dla profilu SN wg wzoru $\Delta N_{SN} = -\sum \xi \cdot \Delta s$, a dla profilu EW wg wzoru $\Delta N_{EW} = -\sum \eta \cdot \Delta s$.

Przy tych obliczeniach jako elementarny odcinek do wyznaczenia iloczynu $\xi \cdot \Delta s$ (lub $\eta \cdot \Delta s$) przyjmowano odcinek o długości Δs ***), wzdłuż którego przebieg zmian izolinii składowej ξ (lub składowej η) można było uważać za liniowy.

Na podstawie wyznaczonych wartości ΔN dla $\Delta\varphi = 20'$ lub $\Delta\lambda = 30'$ określono następnie, odpowiednio je zsumowując, przyrosty odstępów geoidy ΔN dla boków poligonów, utworzonych przez główne profile.

Zastanówmy się nad przewidywaną dokładnością przeprowadzanych w ten sposób obliczeń przyrostów odstępów geoidy.

Na podstawie rozważań p. 3 niniejszej pracy oraz cytowanej już uprzednio poprzedniej pracy autora [3] można przyjąć, że średni błąd wyznaczenia średniej wartości składowej $\xi_{i, i+1}$ (lub $\eta_{i, i+1}$) dla odcinka $\Delta s_{i, i+1} \cong 15$ km profilu głównego wynosi przeciętnie:

$$m_{\xi_{i, i+1}}^{\xi} = m_{\eta_{i, i+1}}^{\eta} \cong \pm 0''7.$$

*) Przyjęto roboczą skalę opracowania 1 : 500 000 mając na względzie w przyszłości ewentualne bardziej szczegółowe przeprowadzenie badań geoidy. Cięcie izolinii składowych ξ i η zastosowano co 1'', z tym że w przypadku małego gradientu poziomych składowych na profilu uwzględniano pomocniczo także linie równych wartości składowych co 0,5.

**) W tym przypadku długość s odcinka profilu — odpowiadającą łukowi $\Delta\varphi = 20'$ lub $\Delta\lambda = 30'$ — obliczaliśmy ściśle ze współrzędnych, jako długość łuku południka lub odpowiednio długość łuku równoleżnika na elipsoidzie Krasowskiego.

***) Długość elementarnego odcinka Δs wyznaczono graficznie z mapy izolinii w skali 1 : 500 000. Następnie długości Δs wyrównano dla każdego odcinka zgodnie z warunkiem, że $\sum \Delta s$ musi być równa długości łuku odcinka profilu głównego, tj. łuku południka $\Delta\varphi = 20'$ lub łuku równoleżnika odpowiadającego $\Delta\lambda = 30'$. Do dalszych obliczeń brano oczywiście wyrównane długości Δs tych elementarnych odcinków.

Przy przyjęciu tej wartości możemy obliczyć przewidywaną wartość średniego błędu wyznaczenia ΔN dla boku poligonu sieci głównych profili o długości $s = 150\text{--}200$ km. Wyniesie on $m_{\Delta N} = \pm 16,1\text{--}18,6$ cm. Odpowiednio, przewidywane niezamknięcie takiego poligonu (o wymiarach 150×150 km lub 200×200 km) osiągnie wielkość około $32\text{--}37$ cm.

Dla całej rozciągłości profili głównych od południowego do północnego lub od zachodniego do wschodniego krańca obszaru Polski (tj. dla $s \cong 600$ km) można przewidywać, że średni błąd różnicy odstepu geoidy wyniesie około $m_{\Delta N} = \pm 32$ cm.

Skonfrontujmy przewidywane dokładności z praktycznie otrzymanymi.

Jak wyżej podaliśmy główne profile obliczeniowe tworzą sieć 8 zamkniętych figur. Obliczone niezamknięcia ω_N tych figur sieci kształtują się w granicach od 7 do 42 cm, a przeciętnie 20 cm.

Cała sieć 8 poligonów profili głównych została wyrównana jako sieć niezależna.

Następnie obliczono wyrównane wartości ΔN dla boków sieci i dla poszczególnych odcinków profili głównych (tj. odpowiadających łukom $\Delta\varphi = 20'$ lub $\Delta\lambda = 30'$).

Średni błąd przyrostu odstepu geoidy ΔN dla boku poligonu po wyrównaniu wyniósł przeciętnie ± 16 cm.

Porównanie uzyskanych konkretnie wartości niezamknięć poligonów ω oraz średniego błędu $m_{\Delta N}$ boku poligonu z wynikami przeprowadzonej analizy dokładnościowej wykazuje ich pełną zgodność.

Obliczenia odstępów N geoidy od elipsoidy Krasowskiego dla poszczególnych punktów profili głównych przeprowadzono w oparciu o wyrównane wartości przyrostów ΔN sieci profili oraz przyjmując dla punktu Borowa Góra odstep geoidy $N = 0$.

Sieć profili głównych zapewniła, jak wynika z przeprowadzonej analizy, dokładność rzędu 30 cm obliczenia różnicy odstępów geoidy ΔN na całej rozciągłości naszego kraju oraz stanowiła równocześnie podstawę do obliczenia tych odstępów wewnątrz utworzonych poligonów sieci.

Wewnątrz każdego poligonu przeprowadziliśmy wyznaczenie przyrostów odstępów ΔN dla profili południkowych (SN) odległych od siebie o $\Delta\lambda = 30'$ oraz dla profili EW odległych o $\Delta\varphi = 20'$. Proces obliczeniowy był zasadniczo analogiczny jak dla profili głównych. Na podstawie wartości składowych ξ i η na punktach astronomiczno-geodezyjnych i triangulacyjnych, leżących w pobliżu rozważanego profilu wewnętrznego, oraz wyznaczonych wartości tych składowych na wybranych na tych profilach punktach pośrednich, opracowano na mapach przebieg linii równych wartości ξ (lub wartości η) wzdłuż odpowiednich profili wewnętrznych. Użyto przy tym te same mapy 1 : 500 000 co przy obliczeniach profili głównych, uzupełniając je przebiegiem izolinii ξ i η na profilach

wewnętrznych. Należy podkreślić, że odległości pomiędzy punktami pośrednimi na profilach wewnętrznych były większe niż na profilach głównych. Wobec tego dokładność określenia ΔN wzdłuż tych profili jest mniejsza niż profili głównych.

Obliczone wartości przyrostów odstepu geoidy ΔN dla profili wewnętrznych wyrównaliśmy dla każdego poligonu odrębnie. Wyrównanie przeprowadzono w oparciu o odstepy N punktów profili głównych tego poligonu, a następnie obliczono odstepy N dla poszczególnych punktów profili wewnętrznych.

Średni błąd określenia wartości odstepu N dla punktów tych profili, położonych w środkowych obszarach wewnątrz poligonu, wynosi średnio ± 15 cm w stosunku do wartości N punktów profili głównych tego poligonu.

Dla obszarów położonych na zewnątrz sieci profili głównych, aż do granicy państwowej, przeprowadziliśmy zasadniczo analogiczne postępowanie obliczeniowe jak dla profili wewnętrznych. Gęstość profili SN i EW była jednak w razie potrzeby większa niż przy profilach wewnętrznych. Profile zewnętrzne utworzyły łącznie z przylegającymi profilami głównymi zamknięte poligony. Wyrównano je opierając się na wartościach N punktów profili głównych, a następnie obliczono odstepy N dla punktów profili położonych na zewnątrz założonej osnowy profili głównych.

Wszystkie przeprowadzone obliczenia i uzyskane wartości odstępów N pozwoliły na sporządzenie odpowiedniej mapy.

Na podstawie obliczonych wartości opracowaliśmy mianowicie dla obszaru Polski mapę odstępów geoidy od elipsoidy Krasowskiego w skali 1 : 2 000 000. Linie jednakowych wartości odstępów N przeprowadzono na tej mapie co 0,5 m.

Na całym obszarze kraju wartości odstępów geoidy od elipsoidy Krasowskiego wynoszą od -4 do $+7,5$ m.

Linie równych odstępów geoidy mają — prócz niektórych obszarów północnych i wschodnich Polski — kierunek w przybliżeniu zbliżony do równoleżnikowego.

Omówicne wyznaczenie odstępów geoidy od elipsoidy Krasowskiego na obszarze naszego kraju traktujemy jako pierwsze opracowanie. Przewidujemy w najbliższej przyszłości dalsze, szczegółowsze badanie odstępów geoidy w Polsce przy łącznym wykorzystaniu danych astronomiczno-geodezyjnych i grawimetrycznych.

LITERATURA

- [1] Bokun J. Przygotowanie i opracowanie materiałów grawimetrycznych dla potrzeb polskiej sieci astronomiczno-geodezyjnej i sieci niwelacji precyzyjnej I klasy. Prace IGiK, t. VI, nr 1(13), 1958.

- [2] *Bokun J.* Détermination des écartements entre le géoïde et l'ellipsoïde de Krassovsky en Pologne avec l'utilisation des données astronomiques, géodésiques et gravimétriques. Communication présentée à XII Assemblée Générale de UGGI, Helsinki 1960.
- [3] *Bokun J.* Analiza i wnioski wynikające z wykorzystania materiałów grawimetrycznych przy opracowaniu geodezyjnych pomiarów podstawowych w Polsce. Prace IGiK, t. VIII, nr 1(17), 1961.
- [4] *Cook A.* Free Air Geoid Heights in Meters with reference to an Ellipsoid from Gravimetry + Hypsometry + Satellites. Intern. Gravimetric Commission, Paris, 1959.
- [5] *Dulian B.* Mesures astronomiques sur les points de Laplacea et de nivellement astro-gravimétrique en Pologne. Communication présentée à XII Assemblée Générale de UGGI, Helsinki, 1960.
- [6] *Fischer I.* The Hough ellipsoid or the figure of the earth from geoidal heights. Bulletin géodésique, nr 54, 1959.
- [7] *Mołodeński M. S.* Osnownyje woprosy geodieziczeskoj grawimetrii. Trudy CNIIGAiK, wyp. 42, Moskwa 1945.
- [8] *Pick M.* Vorläufige Karte des Geoids auf dem Gebiet der Tschechoslowakischen Republik. Geofisikální Sborník 1954, nr 15, Praha 1955.
- [9] *Wolf H.* Astronomisch-geodätische Lotabweichungen in mittleren Europa. Deutsche Geod. Komm. Reihe B, nr. 39, Frankfurt 1957.
- [10] Rapport sur les travaux géodésiques exécutés de 1945 à 1957. Présenté à XI Assemblée Générale, UGGI, Toronto 1957.
- [11] Rapport sur les travaux géodésiques exécutés en Pologne de 1957 à 1960. Présenté à XII Assemblée Générale UGGI, Helsinki 1960.

Rękopis dostarczono Redakcji w październiku 1960 r.

ВОПРОС ОПРЕДЕЛЕНИЯ ВЫСОТ ГЕОИДА В ПОЛЬШЕ
ОТНОСИТЕЛЬНО ЭЛЛИПСОИДА КРАСОВСКОГО УЧИТЫВАЯ
ИМЕЮЩИЕСЯ В РАСПОРЯЖЕНИИ АСТРОНОМО-ГЕОДЕЗИЧЕС-
КИЕ И ГРАВИМЕТРИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ

Резюме

Исследование геоида является очень важной проблемой, как с точки зрения научных потребностей, так и с точки зрения практических нужд. Геодезию — в масштабе одной страны — интересуют прежде всего высоты геоида по отношению к эллипсоиду, принятому как поверхность относимости для геодезических измерений.

Вычисление приращения ΔN высоты геоида над эллипсоидом относимости между пунктами A и B отдаленными друг от друга на расстояние s_{AB} можно выразить формулой:

$$\Delta N_{AB} = -\zeta_{AB}^{cp} \cdot s_{AB} \quad \text{принимая, что} \quad \zeta_{AB}^{cp} = \frac{\int_A^B \zeta \cdot ds}{s_{AB}}$$

Через ζ мы обозначили проекцию относительного уклонения отвеса на профил $A — B$.

Среднюю кв. ошибку ΔN_{AB} , пренебрегая ошибкой при определении длины s_{AB} , что с практической точки зрения является правильным, мы можем вычислить на основании формулы:

$$m_{\Delta N_{AB}} = \pm s_{AB} \cdot m_{AB}^{\zeta_{cp}}$$

Точность вычисления приращения ΔN высоты геоида между A и B зависит от точности определения значения ζ_{AB}^{cp} на профиле $A — B$.

В данной работе мы рассмотрели прежде всего предвиденную точность определения высот геоида в Польше на основании имеющихся астрономо-геодезических материалов.

Для обработки геоида имеем в своем распоряжении сто и несколько десятков астрономо-геодезических пунктов [5], [11]. На основании

астрономических данных, а также уравненных геодезических координат на эллипсоиде Красовского для этих пунктов были определены составляющие ξ и η относительного уклонения отвеса в среднем со средней кв. ошибкой $\pm 0''{,}2 \div 0''{,}3$.

Вычислительным элементом при определении приращения высот ΔN является отрезок AB , связующий соседние астрономо-геодезические пункты. Пользуясь только астрономо-геодезическими данными принимаем $\zeta_{cp} = \frac{\zeta_A + \zeta_B}{2}$ предполагая этим самым линейность изменения уклонения отвеса в профиле между астрономическими пунктами A и B .

Произведенный подробный анализ действительной изменчивости составляющих уклонения отвеса в польских условиях выказал значительную ее разность от линейной изменчивости. (табл. 1 и рис. 12). В условиях нашей страны для среднего расстояния между астрономическими пунктами $s_{AB} = 70$ км. значение ζ_{cp} , определенное как среднее арифметическое из ζ_A и ζ_B , обременено, согласно этому анализу, средней кв. ошибкой порядка $\pm 1''{,}5$. Это вызывает для $s_{AB} = 70$ км. среднюю ошибку приращения высоты геоида $m_{\Delta N} = \pm 50,9$ см.

Повышение точности определения высот геоида (N) можно получить посредством более точного определения значения ζ_{cp} , а следовательно определения точного хода ζ вдоль профиля AB .

Для этой цели могут быть использованы соответствующие имеющиеся в распоряжении гравиметрические материалы, а именно, прежде всего гравиметрические данные, приготовленные специально для потребностей польских основных геодезических измерений, а также соответствующие гравиметрические карты в различных масштабах [1].

Для уточнения вычислений геоида предлагаем следующий способ действия.

На профиле между двумя соседними астрономо-геодезическими пунктами A и B выбираем промежуточные пункты, для которых определяем при соответственным, известным использовании гравиметрических материалов ([7], [1]) — составляющие относительного уклонения отвеса ξ и η . Выбор промежуточных пунктов должен быть таким, чтобы определенные на них значения ξ и η давали возможность точного определения изменчивости ζ на профиле $A - B$.

В условиях нашей страны между промежуточными пунктами на профиле практически вполне достаточными являются расстояния 7—14 км.

Учитывая рассуждения автора о точности, представленные в отдельном труде [3], можно принять, что средняя кв. ошибка $\zeta_{i, i+1}$ —

для длины отрезка между промежуточными пунктами 7—14 км — будет: $m_{\xi, i+1} = \pm 0,5 : 0,7$.

В таблице 2 приведены средние кв. ошибки для ΔN , вычисленные при использовании гравиметрических данных и при предложенном учете промежуточных пунктов. Для $s_{AB} = 70$ км в этом случае получаем в среднем среднюю кв. ошибку $m_{\Delta N} = \pm 8,0$ см.

Произведено сравнение предвиденной точности вычислений высот геоида на основании самых астрономо-геодезических материалов, а также при совместном использовании астрономо-геодезических и гравиметрических данных. Результаты были сопоставлены в табл. 3.

Сравнение численных величин приведенных в этой таблице дает возможность сделать вывод, что средние ошибки вычисления высот геоида над эллипсоидом относимости в польских условиях при предлагаемом учитывании гравиметрических данных будут более чем шестикратно меньшими, нежели средние ошибки тех вычислений, которые были выполнены только на основании астрономо-геодезических данных.

При произведенном нами первом определении высот геоида в Польше относительно эллипсоида Красовского [2] использовано совместно упомянутые астрономо-геодезические и гравиметрические данные, а также была частично применена вышепредложенная концепция.

Типизировано главные профили SN и WE, которые создали сеть 8 замкнутых полигонов (рис. 13). Вдоль этих главных профилей мы располагаем большим, чем на иных, количеством и густотой пунктов с определенными составляющими ξ и η относительного уклонения отвеса.

На этих профилях были выбраны соответствующие промежуточные пункты. В произведенной в настоящем времени первой обработке геоида этим способом были выбраны промежуточные пункты не слишком густо (в среднем каждый из отрезков равнялся около 15 км.) и для них были определены ξ и η при соответствующем использовании гравиметрических данных.

На основании значений ξ и η , полученных из астрономо-геодезических, а также гравиметрических данных, был обработан вдоль главных профилей ход изолиний ξ и η на карте в масштабе 1 : 500 000. Затем определено $\Delta N = -\sum \xi \cdot \Delta s$ или $\Delta N = -\sum \eta \cdot \Delta s$, причем как элементарный отрезок для определения произведения $\xi \cdot \Delta s$ (или $\eta \cdot \Delta s$) был принят отрезок, на котором ход изменений ξ (или η) носил линейный характер. Значения ΔN определено как сумму элементарных произведений — для отрезков профиля SN с длиной дуги $\Delta \varphi = 20'$, а для отрезка профиля WE с длиной дуги $\Delta \lambda = 30'$. Затем, соответственно их

суммируя, получены приращения высот геоида (ΔN) сторон полигонов, созданных главными профилями.

Невязки ω_N полигонов сети главных профилей равны от 7 до 42 см, а в среднем 20 см.

Уравнивание сети главных профилей было нами выполнено как для независимой сети. Средняя кв. ошибка $m_{\Delta N}$ стороны полигона (со средней длиной 150—200 км) равнялась ± 16 см. Сеть главных профилей обеспечила точность порядка 30 см при вычислении ΔN на всем протяжении нашей страны.

Вычисления высот геоида над эллипсоидом относимости (N) для отдельных пунктов на главных профилях были произведены, принимая для пункта Борова Гура высоту $N = 0$.

Внутри каждого полигона сети были выполнены вычисления ΔN для профилей SN, расположенных друг от друга на расстоянии $\Delta \lambda = 30'$, а также для профилей WE на расстоянии $\Delta \varphi = 20'$. Расстояния между промежуточными пунктами на внутренних профилях были большими, нежели при обработке главных профилей. Внутренние профили были уравнены для каждого полигона, опираясь на ранее определенных высотах N пунктов главных профилей этого полигона.

Средняя ошибка определения N для средних районов внутри полигона в среднем равняется ± 15 см по отношению к значению N пунктов главных профилей полигона.

На основании результатов этих вычислений была обработана для территории Польши карта высот геоида относительно эллипсоида Красовского. Принято при обработке масштаб 1 : 2 000 000 причем линии одинаковых высот N были проведены через каждые 0,5 м.

На всей территории страны значения высот N равны от -4 до $+7,5$ м. Линии равных высот имеют, за исключением северных и восточных областей страны, направление близкое к параллелям.

В недалеком будущем предвидятся дальнейшие подробные исследования высот геоида на территории нашей страны при совместном использовании астрономо-геодезических и гравиметрических данных.

JERZY BOKUN

DETERMINATION OF INTERVALS BETWEEN THE GEOID AND THE
ELLIPSOID OF KRASOVSKI IN POLAND IN THE LIGHT OF
EXISTING ASTRONOMIC-GEODETIC AND GRAVIMETRIC DATA

S u m m a r y

Investigation of the geoid is a most important work for the scientific and practical purposes alike. The geodesy — taken in one country only — is interested mainly in the intervals between the geoid and ellipsoid accepted as a surface of reference for the geodetic surveys.

The increase ΔN of the interval between the geoid and the ellipsoid of reference between the points A and B situated at a distance s_{AB} can be expressed by the formula:

$$\Delta N_{AB} = - \zeta_{AB}^{sr} \cdot s_{AB}, \quad \text{assuming} \quad \zeta_{AB}^{sr} = \frac{\int_A^B \zeta \cdot ds}{s_{AB}}$$

where ζ is a projection of the relative deflection of vertical on the profile $A-B$.

One can set apart the error of distance s_{AB} and then the mean square error of ΔN_{AB} can be calculated from the formula:

$$m_{\Delta N_{AB}} = \pm s_{AB} \cdot m_{\zeta_{AB}^{sr}}$$

The accuracy of calculation of the increase ΔN of the geoid's interval between A and B depends on the accuracy of the determination of the mean value of ζ_{AB}^{sr} on the profile $A-B$.

In this paper there is considered the expected accuracy of computations of the geoid's interval in Poland, based on the existing astronomical and geodetical materials.

For the computation of the geoid we possess about hundred astronomic points [5], [11]. From the astronomic observations and from the adjusted

co-ordinates on the Krasovski's ellipsoid, there were determined the components ξ and η of the relative deflection of vertical with a mean square error of $\pm 0,2''$ to $\pm 0,3''$.

The value of the increase ΔN of the interval was computed from the distance $A - B$. Taking into account the astronomical and geodetic observations only one gets $\zeta_{sr} = \frac{\zeta_A + \zeta_B}{2}$ assuming the linearity of variation of the deflection of vertical on the profile between the points A and B .

The performed analysis of the real variability of the components of the deflection of vertical proved that its difference from the linearity was great (tabl. 1 and fig. 12). In our country's conditions for the average distance between the points of about 70 km the value of ζ_{sr} determined as the arithmetic mean of ζ_A and ζ_B , is according to this analysis, charged with the mean square error of $\pm 1,5''$. The mean square error of the geoid's interval for the distance of 70 km is therefore: $m_{\Delta N} = \pm 50,9$ cm.

The rise of accuracy of determination of the geoid's intervals (N) one can get by more accurate determination of the value of ζ_{sr} , i. e. a more accurate survey of the variability of ζ along the profile $A-B$.

To this end one can adapt the gravimetric data, above all the materials prepared especially for the Polish triangulation and the appropriate gravimetric maps in different scales [1].

For more accurate computation of the geoid we propose a following procedure. On the profile between the adjacent astronomic-geodetic points A and B one selects some intermediate points, for which one determines the relative components of the deflection of vertical ζ and η , based on the gravimetric materials [7], [1]. The choice of the points should be such, as to made possible an accurate determination of the variability of ζ on the profile $A-B$. In our conditions the distances of 7 to 14 km will be sufficient.

Taking into account the analysis of accuracy performed by the author one can assume that the mean square error of $\zeta_{i, i+1}$ on the distance of 7—14 km does not exceed: $m \zeta_{i, i+1} = \pm 0,5'' \div 0,7''$.

Table 2 displays the expected mean square errors of ΔN , computed for the use of gravimetric materials and the proposed intermediate points. For the distance of 70 km we get a mean square error of $\pm 8,0$ cm.

We compared the expected accuracy of computation of the geoid's intervals based on these materials and gravimetric jointly. The results are presented in table 3.

The comparison of the numerical values given in this table leads to the conclusion that the mean square errors of the intervals between the geoid and the ellipsoid of reference in Poland by the proposed use of gravimetric observations will amount to one sixth only of the mean

square errors which were obtained by the use of sole astronomic and geodetic materials.

The first determination of the geoid's intervals in Poland [2], was based on the joint astronomic, geodetic and gravimetric materials and partially by the proposed method.

We selected main profiles SN and WE, which formed a net of 8 closed loops (fig. 13). Along these profiles we have a greater number and density of points with determined components ξ and η of relative deflection of vertical.

On these profiles a number of intermediate points were selected. These points were taken about 15 km apart and the components ξ and η were computed for them on the base of gravimetric materials. From these values the isolines of ξ and η were drawn on a map in the scale of 1 : 1 000 000. Then the values of $\Delta N = -\sum \xi \Delta s$ and $\Delta N = -\sum \eta \Delta s$ were determined; as an elementary segment for the calculation of the products $\xi \Delta s$ and $\eta \Delta s$ there were taken the segments on which the variability of ξ and η had a linear character. The values of ΔN were found out as the sums of elementary products — for the segments of the profile SN of the length of arc $\Delta \varphi = 20'$, for the segments of the profile WE of the length of arc $\Delta \lambda = 30'$. Then summing up, the increase of the geoid's intervals (ΔN) of the legs of polygons formed by the profiles were obtained.

The discrepancies ω_N of the loops in the net of main profiles are of 7 to 42 cm, in average 20 cm.

The net of main profiles was adjusted as an independent one. Mean square error $m_{\Delta N}$ of a leg in the polygon (of a length about 150—200 km) was ± 16 cm. This net secured an accuracy of about 30 cm for the computation of ΔN on the whole our country.

The computation of the intervals between the geoid and the ellipsoid of reference (N) for the points on individual main profiles was made with the assumption of the interval $N = 0$ for the point of Borowa Góra.

Inside each loop of the net there were computed ΔN for the profiles SN distant of $\Delta \lambda = 30'$ apart and for the profiles WE distant of $\Delta \varphi = 20'$ apart. The distances between the intermediate points on the inner profiles were greater than these on the main profiles. The inner profiles were adjusted in each loop to the distances of the points on the main profiles, which were determined previously. The mean square error of the determination of N for the central areas inside the loops amount to ± 15 cm in relation to the value of N of the points on the main profiles.

With these results we drafted for the territory of Poland a map of intervals between the geoid and the Krasowski's ellipsoid. The assumed

scale was of 1 : 2 000 000, the isolines of N were drawn in the intervals of 0,5 m. The values of intervals for the whole country vary between -4 m and $+7,5$ m.

The isolines apart of some areas in the North and East, have in general the direction along the parallels.

In the near future a further detailed investigations of the intervals between the geoid and the ellipsoid of reference by the method described here are foreseen in our country.