

ALBIN BRODOWICZ

526.46 : 526.49

### Wzory i tablice pomocnicze do przenoszenia współrzędnych geodezyjnych na dalekie odległości metodą Bessela

Spośród znanych w literaturze metod przenoszenia współrzędnych geodezyjnych na dalekie odległości, metoda Bessela należy do jednej z dokładniejszych. Żmudne obliczenia współczynników wzorów Bessela są jednak powodem dużej pracochłonności obliczeń. Zrozumiałe jest więc, że ułożenie tablic tych współczynników ułatwi poważnie rachunek; odpadnie bowiem obliczanie współczynników, pozostanie jedynie mało pracochłonna interpolacja liniowa.

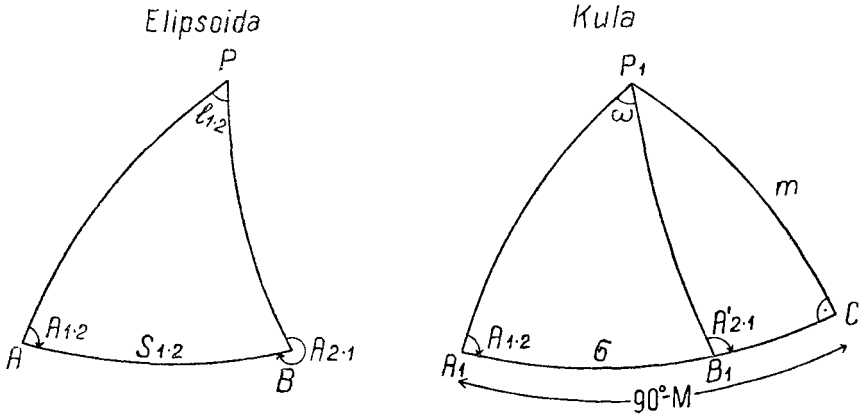
Poniżej podane są wzory Bessela, tablice pomocnicze oraz przykład zadania zwykłego i odwrotnego dla odległości  $S = 8\ 000$  km.

Wzorami Bessela i tablicami pomocniczymi możemy przenosić współrzędne geodezyjne i azymuty na odległość do 20 000 km, z błędami nie przekraczającymi  $0,001 - 0,003$  we współrzędnych oraz  $0,03$  w azymucie. Do obliczeń należy stosować ośmiocyfrowe tablice funkcji trygonometrycznych.

#### Rozwiązanie zwykłego zadania geodezyjnego

Plan tego rozwiązania przedstawia się następująco: najpierw odwzorowuje się żądane elementy elipsoidy na kulę, według praw odwzorowania Bessela, następnie na kuli rozwiązuje się zadanie zwykłe; odwrotne przejście od znalezionych elementów na kuli do odpowiadających im elementów na elipsoidzie jest końcowym etapem rozwiązania zadania.

Oznaczmy szerokość geodezyjną punktu  $A$  przez  $B_1$ , długość geodezyjną punktu  $A$  przez  $L_1$ , azymut linii geodezyjnej w punkcie  $A$  przez  $A_{1.2}$  oraz długość linii geodezyjnej między punktami  $A$  i  $B$  przez  $S_{1.2}$ . Wielkościami szukanymi są: szerokość geodezyjna  $B_2$  punktu  $B$ , różnica długości  $l_{1.2}$  punktów  $B$  i  $A$  oraz azymut odwrotny linii geodezyjnej  $A_{2.1}$  w punkcie  $B$ .



Rys. 14

Związki pomiędzy wielkością  $S$  i  $l$  na elipsoidzie, a  $\sigma$  i  $\omega$  na kuli są następujące:

$$\frac{d\sigma}{dS} = \frac{V}{a}, \quad (1)$$

$$\frac{d\omega}{dl} = V, \quad (2)$$

i dają nam zależności pomiędzy elementami trójkąta sferycznego i elipsoidalnego.

Metodę rozwiązania tych równań pomija się, ponieważ znajdują się one w publikacjach [2], [4] i [5].

Po scałkowaniu równania [1] i odwróceniu szeregu otrzymujemy:

$$\sigma'' = \alpha \cdot S + \beta \sin \sigma \cos(2M + \sigma) + \gamma \sin 2\sigma \cos 2(2M + \sigma) + \delta \sin 3\sigma \cos 3(2M + \sigma). \quad (3)$$

gdzie:

$$\alpha = \frac{q''}{b \cdot A}, \quad \beta = \frac{q'' B}{A}, \quad \gamma = \frac{q'' C}{A}, \quad \delta = \frac{q'' D}{A},$$

$$A = 1 + \frac{k^2}{4} - \frac{3}{64} k^4 + \frac{5}{256} k^6,$$

$$B = \frac{k^2}{4} - \frac{k^4}{16} + \frac{15}{512} k^6,$$

$$C = \frac{k^4}{128} - \frac{3}{512} k^6,$$

$$D = \frac{k^6}{1536},$$

$$k^2 = e'^2 \cos^2 m.$$

Ostatni człon rozwinięcia szeregowego zaniedbujemy, gdyż jego wartość maksymalna wynosi  $\sigma_{max} = 0'',00005$ .

Obliczenie  $\sigma$  możemy wykonać metodą kolejnych przybliżeń:

$$\begin{aligned}\sigma_0'' &= \alpha \cdot S, \\ \sigma_1'' &= \sigma_0'' + \beta \sin \sigma_0 \cos(2M + \sigma_0), \\ \sigma_2'' &= \sigma_0'' + \beta \sin \sigma_1 \cos(2M + \sigma_1) + \gamma \sin 2\sigma_1 \cos 2(2M + \sigma_1).\end{aligned}$$

Wygodniej jest jednak nie posługiwać się kolejnymi przybliżeniami. Rozwijając  $\sigma$  w szereg Taylora otrzymamy:

$$\sigma'' = f(\sigma_0'' + \Delta\sigma'') = f(\sigma_0'') + f'(\sigma_0'')\Delta\sigma'' + \dots,$$

gdzie:

$$\begin{aligned}\sigma_0'' &= \alpha \cdot S, \\ f'(\sigma_0'') &= \beta \cos 2(M + \sigma_0) + 2\gamma \cos 4(M + \sigma_0), \\ \Delta\sigma'' &= \beta \sin \sigma_0 \sin(2M + \sigma_0).\end{aligned}$$

Ostatecznie wartość  $\sigma$  obliczamy według wzoru:

$$\begin{aligned}\sigma'' &= \sigma_0'' + \beta \sin \sigma_0 \cos(2M + \sigma_0) + \gamma \sin 2\sigma_0 \cos 2(2M + \sigma_0) + \\ &+ \beta_0 \sin \sigma_0 \cos(2M + \sigma_0) \cos 2(M + \sigma_0),\end{aligned}$$

gdzie:

$$\beta_0 = \frac{\beta^2}{\varrho''}$$

Po scałkowaniu równania (2) wzór końcowy przyjmuje postać:

$$\omega - l = \sin m [\alpha_1 \sigma'' + \beta_1 \sin \sigma \cos(2M + \sigma) + \gamma_1 \sin 2\sigma \cos 2(2M + \sigma)], \quad (4)$$

gdzie:

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= \left( \frac{e^2}{2} + \frac{e^4}{8} + \frac{e^6}{16} \right) - \frac{e^4}{16} (1 + e^2) \cos^2 m, \\ \beta_1 &= \frac{\varrho'' e^4}{16} (1 + e^2) \cos^2 m - \frac{\varrho'' e^4}{32} \cos^4 m, \\ \gamma_1 &= \frac{\varrho'' e^6}{256} \cos^4 m.\end{aligned}$$

Ostatni wyraz rozwinięcia szeregowego możemy zaniedbać, gdyż  $\gamma_{1max} = 0'',0003$ .

Kolejność obliczeń zadania zwykłego jest następująca:

Dane:  $B_1, L_1, A_{1.2}, S_{1.2}$ . Szukane:  $B_2, L_2, A_{2.1}$ .

## I. Przejście z elipsoidy na kulę.

1.  $\operatorname{tg} u_1 = \sqrt{1 - e^2} \cdot \operatorname{tg} B_1,$
2.  $\sin m = \cos u_1 \cdot \sin A_{1.2}, \quad \operatorname{tg} M = \operatorname{tg} u_1 \cdot \sec A_{1.2},$
3.  $\sigma'' = \alpha \cdot S + \beta \sin \sigma_0 \cos (2M + \sigma_0) + \gamma \sin 2\sigma_0 \cos 2(2M + \sigma_0) +$   
 $+ \beta_0 \sin \sigma_0 \cos (2M + \sigma_0) \cos 2(M + \sigma_0),$
4.  $\omega - l = \sin m [\alpha_1 \sigma'' + \beta_1 \sin \sigma \cos (2M + \sigma)].$

## II. Rozwiązanie na kuli.

1.  $\operatorname{tg} \frac{1}{2}(A'_{2.1} + \omega) = \frac{\sin \frac{1}{2}(90^\circ - u_1 + \sigma)}{\sin \frac{1}{2}(90^\circ - u_1 - \sigma)} \cdot \operatorname{tg} \frac{1}{2} A_{1.2},$   
 $\operatorname{tg} \frac{1}{2}(A'_{2.1} - \omega) = \frac{\cos \frac{1}{2}(90^\circ - u_1 + \sigma)}{\cos \frac{1}{2}(90^\circ - u_1 - \sigma)} \cdot \operatorname{tg} \frac{1}{2} A_{1.2},$
2.  $\operatorname{tg} \frac{1}{2}(90^\circ - u_2) = \frac{\sin \frac{1}{2}(A'_{2.1} - \omega)}{\sin \frac{1}{2}(A'_{2.1} + \omega)} \cdot \operatorname{tg} \frac{1}{2}(90^\circ - u_1 + \sigma),$   
 $\operatorname{tg} \frac{1}{2}(90^\circ - u_2) = \frac{\cos \frac{1}{2}(A'_{2.1} - \omega)}{\cos \frac{1}{2}(A'_{2.1} + \omega)} \cdot \operatorname{tg} \frac{1}{2}(90^\circ - u_1 - \sigma),$

## III. Przejście z kuli na elipsoidę.

1.  $\operatorname{tg} B_2 = \operatorname{tg} u_2 : \sqrt{1 - e^2},$
2.  $l_{1.2} = \omega - (\omega - l),$
3.  $L_2 = L_1 + l_{1.2},$
4.  $A_{2.1} = A'_{2.1} + 180^\circ.$

**Rozwiązanie zadania odwrotnego**

Dane są szerokości geodezyjne  $B_1$  i  $B_2$  i długości  $L_1$  i  $L_2$  dwóch punktów na elipsoidzie; należy określić długość linii geodezyjnej  $S_{1.2}$  łączącej te punkty oraz azymut wprost i odwrotny  $A_{1.2}$  i  $A_{2.1}$ .

W publikacji [3] podaje się ogólne zasady rozwiązania tego zadania.

Wobec braku szczegółowego opracowania podaję pełne wyprowadzenie wzorów do rozwiązania zadania odwrotnego.

Kolejność obliczeń jest następująca:

Ze wzoru cosinusowego dla trójkąta  $A_1 B_1 P_1$  (rys. 15) obliczamy  $\sigma$ ,

$$\cos \sigma = \sin u_1 \sin u_2 + \cos u_1 \cos u_2 \cos \omega.$$

W pierwszym przybliżeniu przyjmujemy:

$$\omega = l,$$

wówczas:

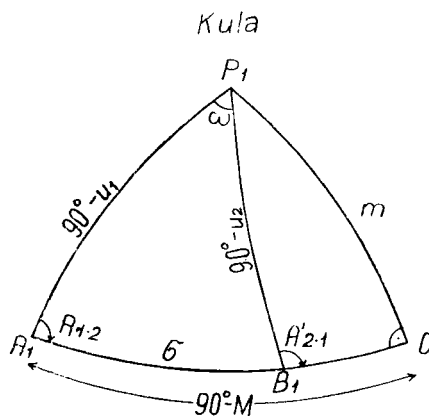
$$\cos \sigma_0 = \sin u_1 \sin u_2 + \cos u_1 \cos u_2 \cos l. \quad (5)$$

Następnie wprowadzamy poprawkę do  $\sigma_0$ .

$$-\sin \sigma_0 \Delta \sigma_0 = -\cos u_1 \cos u_2 \sin l \Delta l,$$

skąd:

$$\Delta \sigma_0 = \cos u_1 \cos u_2 \frac{\sin l}{\sin \sigma_0} \cdot \Delta l. \quad (6)$$



Rys. 15

Wiemy, że:

$$\sin m = \cos u_1 \cdot \sin A_{1.2}.$$

Ze wzoru sinusów dla trójkąta  $A_1 B_1 P_1$  mamy:

$$\sin A_{1.2} = \cos u_2 \cdot \frac{\sin \omega}{\sin \sigma}.$$

Otrzymujemy pierwsze przybliżenie wartości  $m$ :

$$\sin m_0 = \cos u_1 \cos u_2 \frac{\sin l}{\sin \sigma_0}. \quad (7)$$

Możemy teraz obliczyć  $\Delta l_0$  i  $\Delta \sigma_0$ :

$$\Delta l_0 = \alpha_1 \cdot \sigma_0'' \cdot \sin m_0, \quad (8)$$

$$\Delta \sigma_0 = \Delta l_0 \cdot \sin m_0.$$

Otrzymujemy drugie przybliżenie  $\omega$  i  $\sigma$ :

$$\omega_1 = l + \Delta l_0, \quad (9)$$

$$\sigma_1 = \sigma_0 + \Delta \sigma_0.$$

Następnie obliczamy drugie przybliżenie wartości  $m$ :

$$\sin m_1 = \cos u_1 \cos u_2 \frac{\sin \omega_1}{\sin \sigma_1}. \quad (10)$$

Mając  $m_1$  obliczamy  $M$ :

$$\sin M = \frac{\sin u_1}{\cos m_1}. \quad (11)$$

Przechodzimy do obliczenia  $\Delta l$  i  $\Delta \sigma$ :

$$\begin{aligned} \Delta l &= [\alpha_1 \sigma_1'' + \beta_1 \sin \sigma_1 \cos (2M + \sigma_1)] \sin m_1, \\ \Delta \sigma &= \Delta l \cdot \sin m_1. \end{aligned} \quad (12)$$

Mamy więc trzecie przybliżenie wartości  $\omega$  i  $\sigma$ :

$$\begin{aligned} \omega &= l + \Delta l, \\ \sigma &= \sigma_0 + \Delta \sigma. \end{aligned} \quad (13)$$

Praktycznie trzecie przybliżenie wystarcza dla określenia  $\omega$  i  $\sigma$  z dokładnością do 0''001.

Długość linii geodezyjnej znajdujemy ze wzoru:

$$S = \frac{1}{\alpha} [\sigma'' - \beta \sin \sigma \cos (2M + \sigma) - \gamma \sin 2\sigma \cos 2(2M + \sigma)]. \quad (14)$$

Następnie przechodzimy do obliczenia azymutów wzorami:

$$\begin{aligned} \operatorname{ctg} A_{1.2} &= \frac{\cos u_1 \cdot \operatorname{tg} u_2 - \sin u_1 \cos \omega}{\sin \omega}, \\ \operatorname{ctg} A_{2.1} &= \frac{\sin u_2 \cos \omega - \operatorname{tg} u_1 \cos u_2}{\sin \omega}, \end{aligned} \quad (15)$$

lub ze wzorów Nepera:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \frac{1}{2} (A'_{2.1} - A_{1.2}) &= \frac{\sin \frac{1}{2} (u_2 + u_1)}{\cos \frac{1}{2} (u_2 - u_1)} \cdot \operatorname{tg} \frac{1}{2} \omega, \\ \operatorname{tg} \frac{1}{2} (A'_{2.1} + A_{1.2}) &= \frac{\cos \frac{1}{2} (u_2 + u_1)}{\sin \frac{1}{2} (u_2 - u_1)} \cdot \operatorname{tg} \frac{1}{2} \omega. \end{aligned} \quad (16)$$

Metoda ta pozwala obliczyć zadanie odwrotne dla odległości do 20 000 km.

Należy zaznaczyć, że przy małych odległościach wartość  $\sigma$  jest rzędu kilku stopni i wówczas kąt  $\sigma$  należy określać z funkcji  $\operatorname{tg} \sigma_0$  lub  $\sin \sigma_0$ .

### Objaśnienia tablic

Tablice przeznaczone są do rozwiązywania zwykłego zadania geodezyjnego i odwrotnego metodą Bessela na elipsoidzie Krasowskiego. Zawierają wartości liczbowe współczynników:  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\beta_0$ ,  $\gamma$ ,  $\alpha_1$  i  $\beta_1$ , i są przystosowane do obliczeń na arytmetrze. Tablice zostały obliczone przy takim odstępnie argumentu  $\sin^2 m$ , aby dopuszczalne było stosowanie interpolacji liniowej. Kryterium dopuszczalności interpolacji liniowej określa się wzorem:

$$\begin{Bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{Bmatrix} \leq 0,5 \text{ j. s. ,}$$

gdzie  $j$  oznacza jednostkę ostatniego rzędu tabeli funkcyjnej, zaś  $s$  sumę wartości bezwzględnych krakowianu newtonowskiego.

Wobec tego spełniony jest warunek:

$$\begin{Bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{Bmatrix} \leq 2 \text{ (jednostki ostatniego miejsca).}$$

Tablice zostały obliczone według następujących wzorów:

$$\alpha = \frac{\varrho''}{b \cdot A}, \quad A = 1 + \frac{k^2}{4} - \frac{3}{64} k^4 + \frac{5}{256} k^6,$$

$$\beta = \frac{\varrho'' B}{A}, \quad B = \frac{k^2}{4} - \frac{1}{16} k^4 + \frac{15}{512} k^6,$$

$$\gamma = \frac{\varrho'' C}{A}, \quad C = \frac{k^4}{128} - \frac{3}{512} k^6,$$

$$\beta_0 = \frac{\beta^2}{\varrho''}, \quad k^2 = e'^2 \cos^2 m,$$

$$\alpha_1 = \left( \frac{e^2}{2} + \frac{e^4}{8} + \frac{e^6}{16} \right) - \frac{e^4}{16} (1 + e^2) \cos^2 m,$$

$$\beta_1 = \frac{\varrho'' e^4}{16} (1 + e^2) \cos^2 m - \frac{\varrho'' e^6}{32} \cos^4 m.$$

Dla elipsoidy Krasowskiego mamy:

$$b = 6\,356\,863 \text{ m}$$

$$e^2 = 0,006\,693\,421\,62$$

$$e'^2 = 0,006\,738\,525\,41$$

Po podstawieniu wartości liczbowych wzory przyjmują postać:

$$\alpha = 0,03244\,75776\,A^{-1},$$

$$A = 1 + 1684\,6314 \cdot 10^{-10} \cdot \cos^2 m - 212\,85 \cdot 10^{-10} \cos^4 m + \\ + 60 \cdot 10^{-10} \cos^6 m,$$

$$B = 1684\,6314 \cdot 10^{-10} \cos^2 m - 28380 \cdot 10^{-10} \cos^4 m + 90 \cdot 10^{-10} \cos^6 m,$$

$$C = 3547 \cdot 10^{-10} \cos^4 m - 18 \cdot 10^{-10} \cos^6 m,$$

$$\alpha_1 = 0,0033\,5233 - 282 \cdot 10^{-8} \cos^2 m,$$

$$\beta_1 = 0,5814 \cos^2 m - 0,0019 \cos^4 m.$$

1. *Przykład interpolacji współczynnika  $\alpha$ .*

Znaleźć  $\alpha$  dla  $\sin^2 m = 0,51632$ .

W tablicy dla  $\sin^2 m = 0,5125$  znajdujemy:

0,03242 09 680	różnice	6813
+ 2 082		6813
$\alpha = 0,03242\,11\,762$		

$$n = \frac{0,00382}{0,0125} = 0,3056$$

$$n \cdot \Delta_{gr} = 2082 \cdot 10^{-10}$$

2. *Przykład interpolacji współczynnika  $\beta$ .*

Znaleźć  $\beta$  dla  $\sin^2 m = 0,51632$ .

W tablicy dla  $\sin^2 m = 0,500$  znajdujemy:

173,448	różnice	-8,657
-5,652		-8,658
$\beta = 167,796$		

$$n = \frac{0,01632}{0,025} = 0,6528$$

$$n \cdot \Delta_{gr} = -5,651.6$$

Do interpolacji współczynników  $\alpha_1$  i  $\beta_1$  ułożono odpowiednie tabelki interpolacyjne.



## ELIPSOIDA KRASOWSKIEGO

Tablica 1. Wartości współczynnika  $\alpha$ .

Tablica 2. Wartości współczynników  $\beta$  i  $\beta_0$ .

Tablica 3. Wartości współczynników  $\alpha_1$ ,  $\beta_1$  i  $\gamma$ .

Tablica 1

$\sin^2 m$	$\alpha$	$A$	$\sin^2 m$	$\alpha$	$A$
0,0000	0,03239 30760	6793	0,5000	0,03242 02867	6813
0125	37553	6793	5125	09680	6813
0250	44346	6794	5250	16493	6814
0375	51140	6794	5375	23307	6815
0500	57934	6795	5500	30122	6815
0625	64729	6796	5625	36937	6815
0750	71525	6796	5750	43752	6816
0875	78321	6796	5875	50568	6817
0,1000	85117	6797	0,6000	57385	6817
1125	91914	6797	6125	64202	6817
1250	98711	6798	6250	71019	6818
1375	40 05509	6799	6375	77837	6818
1500	12308	6799	6500	84655	6819
1625	19107	6799	6625	91474	6820
1750	25906	6800	6750	98294	6820
1875	32706	6801	6875	43 05114	6820
0,2000	39507	6801	0,7000	11934	6821
2125	46308	6801	7125	18755	6821
2250	53109	6802	7250	25576	6822
2375	59911	6802	7375	32398	6823
2500	66713	6803	7500	39221	6823
2625	73516	6804	7625	46044	6823
2750	80320	6804	7750	52867	6824
2875	87124	6804	7875	59691	6825
0,3000	93928	6805	0,8000	66516	6825
3125	41 00733	6805	8125	73341	6825
3250	07538	6806	8250	80166	6826
3375	14344	6807	8375	86992	6827
3500	21151	6807	8500	93819	6827
3625	27958	6807	8625	44 00646	6827
3750	34765	6808	8750	07473	6828
3875	41573	6809	8875	14301	6829
0,4000	48382	6809	0,9000	21130	6829
4125	55191	6809	9125	27959	6829
4250	62000	6810	9250	34788	6830
4375	68810	6810	9375	41618	6831
4500	75620	6811	9500	48449	6831
4625	82431	6812	9625	55280	6831
4750	89243	6812	9750	62111	6832
4875	96055	6812	9875	68943	6833
0,5000	0,03242 02867	6812	1,0000	0,03244 75776	6833

Tablica 2

$\sin^2 m$	$\beta$	$\lambda$	$\beta_0$	$\lambda$
0,000	346,314		0,581	—
025	337,685	8,629	0,553	28
050	329,054	8,631	0,525	28
075	320,421	8,633	0,498	27
100	311,787	8,634	0,471	27
125	303,152	8,635	0,445	26
150	294,515	8,637	0,420	25
175	285,877	8,638	0,396	24
		8,640		23
0,200	277,237		0,373	
225	268,596	8,641	0,350	23
250	259,953	8,643	0,328	22
275	251,309	8,644	0,306	22
300	242,664	8,645	0,285	21
325	234,017	8,647	0,266	21
350	225,369	8,648	0,246	20
375	216,719	8,650	0,228	18
		8,651		18
0,400	208,068		0,210	
425	199,415	8,653	0,193	17
450	190,761	8,654	0,176	17
475	182,105	8,656	0,161	15
500	173,448	8,657	0,146	15
525	164,789	8,659	0,131	15
550	156,129	8,660	0,118	13
575	147,467	8,662	0,105	13
		8,662		12
0,600	138,805		0,093	
625	130,141	8,664	0,082	11
650	121,475	8,666	0,071	11
675	112,808	8,667	0,061	10
700	104,139	8,669	0,052	9
725	95,469	8,670	0,044	8
750	86,797	8,672	0,036	8
775	78,123	8,674	0,029	7
		8,674		6
0,800	69,449		0,023	
825	60,773	8,676	0,018	5
850	52,095	8,678	0,013	5
875	43,416	8,679	0,009	4
900	34,736	8,680	0,006	3
925	26,054	8,682	0,003	3
950	17,371	8,683	0,001	2
975	8,686	8,685	0,000	1
		8,686		0
1,000	0,000		0,000	



## OBJAŚNIENIA PRZYKŁADÓW

Posługując się obliczonymi tablicami współczynników wykonano przykład zadania zwykłego i odwrotnego dla  $S = 8\ 000$  km. Dane wyjściowe do zadania zwykłego — w celu porównania wyników otrzymanych wzorami Bessela i Wirowca — wzięto z pracy [1] \*).

W przykładach zamieszczono wzory pomocnicze, służące do określenia ćwiartki kąta  $M$ , azymutu  $A_{2.1}$  i  $A_{1.2}$ . Mogą one również służyć jako wzory kontrolne. W schematach obliczeniowych kolejność wykonywanych czynności jest ponumerowana.

---

\*) Zauważono błąd w znaku w przykładzie 5 poz. 26 tej pracy (powinno być  $+0,099$ , a nie  $-0,099$ ). Błąd ten wpływa na wynik końcowy i dlatego nie otrzymano wyników zgodnych.

Przykład Nr 1. Zadanie zwykłe:  $S = 8000$  km

Lp.	Wzory	Obliczenie	Lp.	Wzory	Obliczenie
1	$B_1$	68°58'10",376	42	$\sigma_0''$	259 134'',594.4
2	$L_1$	20°10'00'',100	43	$\Delta\sigma$	132'',119.3
3	$A_{1,2}$	170°58'52'',200	44	$\sigma = \sigma_0 + \Delta\sigma$	259 266'',714
4	$S_{1,2}$	7 999 648,15 m	45	$\Delta\omega_1 = \alpha_1 \cdot \sigma''$	868'',421.6
5	$\sqrt{1-e^2}$	0,996 647 67	46	$\Delta\omega_2 = \beta_1 \cdot q$	0'',220.9
6	$\text{tg} B_1$	2,600 956 49	47	$\Delta\omega = \Delta\omega_1 + \Delta\omega_2$	868'',642.5
7	$\sin A_{1,2}$	0,156 759 11	48	$\omega - l = \Delta\omega \cdot \sin m$	49'',009
8	$\cos A_{1,2}$	-0,987 636 86	49	$p = 90^\circ - u_1$	21°05'41'',916
9	$\text{tg } u_1 =  1 - e^2 \cdot \text{tg } B_1$	2,592 237 22	50	$\sigma$	72°01'06'',714
10	$u_1$	68°54'18'',084	51	$p + \sigma$	93°06'48'',630
11	$\cos u_1$	0,359 915 01	52	$p - \sigma$	-50°55'24'',798
12	$\sin m = \sin A_{1,2} \cdot \cos u_1$	0,056 419 96	53	$\frac{1}{2}(p + \sigma)$	46°33'24'',315
13	$\arg \sin^2 m$	0,003 18	54	$\frac{1}{2}(p - \sigma)$	-25°27'42'',399
14	$\alpha$	0,032 39 32 490	55	$\frac{1}{2} A_{1,2}$	85°29'26'',100
15	$\beta$	345'',215	56	$\sin \frac{1}{2}(p + \sigma)$	0,726 055 86
16	$\beta_0$	0'',577	57	$\sin \frac{1}{2}(p - \sigma)$	-0,429 908 88
17	$\gamma$	0'',073	58	$\cos \frac{1}{2}(p + \sigma)$	0,687 635 72
18	$\alpha_1$	0,003 349 53	59	$\cos \frac{1}{2}(p - \sigma)$	0,902 872 28
19	$\beta_1$	0'',578	60	$\text{tg } \frac{1}{2} A_{1,2}$	12,679 562
20	$\text{tg } M = \text{tg } u_1 \cdot \cos A_{1,2}$	-2,624 686 59	61	$\sin \frac{1}{2}(p + \sigma) \cdot \sin \frac{1}{2}(p - \sigma)$	-1,688 859 88
21	$M^*$	-69°08'35'',757	62	$\cos \frac{1}{2}(p + \sigma) \cdot \cos \frac{1}{2}(p - \sigma)$	0,761 609 07
22	$M$	110°51'24'',243	63	$\text{tg } \frac{1}{2}(A'_{2,1} + \omega) = (61) \cdot \text{tg } \frac{1}{2} A_{1,2}$	-21,414 0035
23	$\sigma_0'' = \alpha \cdot S_{1,2}$	259 134'',594.4	64	$\text{tg } \frac{1}{2}(A'_{2,1} - \omega) = (62) \cdot \text{tg } \frac{1}{2} A_{1,2}$	9,656 8694
24	$\sigma_0^*$	71°58'54'',594	65	$\frac{1}{2}(A'_{2,1} + \omega)$	92°40'25'',250
25	$2M$	221°42'48'',486	66	$\frac{1}{2}(A'_{2,1} - \omega)$	84°05'16'',474
26	$2\sigma_0$	143°57'49'',2	67	$A'_{2,1}$	176°45'41'',724
27	$2M + \sigma_0$	293°41'43'',1	68	$\omega$	8°35'08'',776
28	$2(2M + \sigma_0)$	227°23'	69	$l_{1,2} = \omega - (\omega - l)$	8°34'19'',767
29	$2(M + \sigma_0)$	5°40'	70	$\sin \frac{1}{2}(A'_{2,1} - \omega)$	0,994 681 11
30	$\sin \sigma_0$	0,950 958	71	$\sin \frac{1}{2}(A'_{2,1} + \omega)$	-0,998 911 41
31	$\sin 2\sigma_0$	0,5883	72	$\text{tg } \frac{1}{2}(p + \sigma)$	1,055 872 81
32	$\cos(2M + \sigma_0)$	0,401 873	73	$\sin \frac{1}{2}(A'_{2,1} - \omega) \cdot \sin \frac{1}{2}(A'_{2,1} + \omega)$	-0,995 765 09
33	$\cos 2(2M + \sigma_0)$	-0,6770	74	$\text{tg } \frac{1}{2}(90^\circ - u_2) = (73) \cdot \text{tg } \frac{1}{2}(p + \sigma)$	-1,051 401 28
34	$\cos 2(M + \sigma_0)$	0,9951	75	$\frac{1}{2}(90^\circ - u_2)$	-46°26'07'',227
35	$q = \sin \sigma_0 \cos(2M + \sigma_0)$	0,382 164	76	$u_2$	-2°52'14'',454
36	$r = \sin 2\sigma_0 \cdot \cos 2(M + \sigma_0)$	-0,3983	77	$\text{tg } u_2$	-0,050 144 82
37	$t = q \cdot \cos 2(M + \sigma_0)$	0,3803	78	$\text{tg } B_2 = \text{tg } u_2 \cdot  1 - e^2 $	-0,050 313 49
38	$\Delta\sigma_0 = \beta \cdot q$	131'',929.0	79	$B_2$	-2°52'49'',158
39	$\Delta\sigma_{0,1} = \gamma \cdot r$	-0'',029.1	80	$L_2 = L_1 + l_{1,2}$	28°44'19'',867
40	$\Delta\sigma_{0,2} = \beta_0 \cdot t$	+0'',219.4	81	$A_{2,1} = A'_{2,1} + 180^\circ$	356°45'41'',72
41	$\Delta\sigma = \Delta\sigma_0 + \Delta\sigma_{0,1} + \Delta\sigma_{0,2}$	132'',119.3			

Wzory pomocnicze

$$\cos M^* = \frac{\cos u_1 \cos A_{1,2}}{\cos m}; \quad \sin A'_{2,1} = \frac{\sin \omega \cdot \cos u_1}{\sin \sigma}; \quad \text{tg } u_2 = \text{tg}(M + \sigma) \cos A'_{2,1}$$

Przykład Nr 2. Zadanie odwrotne:  $S = 8000$  km

Lp.	Wzory	Obliczenie	Lp.	Wzory	Obliczenie
1	$B_1$	68°58'10",376	43	$m_1$	3°14'03",601
2	$L_1$	20°10'00",100	44	$\cos m_1$	0,998 407 14
3	$B_2$	- 2°52'49",158	45	$\sin M - \sin u_1 : \cos m_1$	0,934 473 59
4	$L_2$	28°44'19",867	46	$M^*$	69°08'35",756
5	$l_{1,2} = L_2 - L_1$	8°34'19",767	47	$M$	110°51'24",244
6	$\sqrt{1-e^2}$	0,996 647 67	48	$2M$	221 42'48",5
7	$\text{tg } B_1$	2,600 956 49	49	$\sigma_1$	72°01'06",7
8	$\text{tg } B_2$	-0,050 313 49	50	$2M + \sigma_1$	293°43'55",2
9	$\text{tg } u_1 = \sqrt{1-e^2} \cdot \text{tg } B_1$	2,592 237 22	51	$2(2M + \sigma_1)$	227°28'
10	$u_1$	68°54'18",084	52	$2\sigma_1$	144°02'
11	$\text{tg } u_2 = -\sqrt{1-e^2} \cdot \text{tg } B_2$	-0,050 144 82	53	$\sin \sigma_1$	0,951 156
12	$u_2$	-2°52'14",454	54	$\cos(2M + \sigma_1)$	0,402 459
13	$\sin u_1$	0,932 985 10	55	$\sin 2\sigma_1$	0,5873
14	$\cos u_1$	0,359 915 01	56	$\cos 2(2M + \sigma_1)$	-0,6760
15	$\sin u_2$	-0,050 081 89	57	$q = \sin \sigma_1 \cdot \cos(2M + \sigma_1)$	0,382 801
16	$\cos u_2$	0,998 745 12	58	$r = \sin 2\sigma_1 \cdot \cos 2(2M + \sigma_1)$	-0,3970
17	$\sin u_1 \cdot \sin u_2$	-0,046 725 66	59	$\sigma_1''$	259 266",706
18	$\cos u_1 \cdot \cos u_2$	0,359 463 36	60	$\Delta l_1 = \alpha_1 \cdot \sigma_1''$	868",422
19	$\cos l_{1,2}$	0,988 828 92	61	$\Delta l_2 = \beta_1 \cdot q$	0",221
20	$\sin l_{1,2}$	0,149 054 84	62	$\Delta l = \Delta l_1 + \Delta l_2$	868",643
21	$\cos \sigma_0 = (17) + (18) \cdot (19)$	0,303 722 11	63	$\Delta l_k = \Delta l \cdot \sin m_1$	49",009
22	$\sigma_0$	72°01'03",950	64	$\Delta \sigma = \Delta l_k \sin m_1$	2",765
23	$\sin \sigma_0$	0,951 152 27	65	$\sigma = \sigma_0 + \Delta \sigma$	72°01'06",715
24	$\sin l_{1,2} : \sin \sigma_2$	0,156 709 75	66	$\omega = l_{1,2} + \Delta l_k$	8°35'08",776
25	$\sin m_0 = (18) \cdot (24)$	0,055 331 41	67	$\Delta \sigma_e' = \beta \cdot q$	132",149
26	$\arg \sin^2 m_0$	0,00 317	68	$\Delta \sigma_e'' = \gamma \cdot r$	-0",029
27	$\alpha_1$	0,0033 4953	69	$\Delta \sigma_e = \Delta \sigma_e' + \Delta \sigma_e''$	132",120
28	$\beta_1$	0",578	70	$\sigma_e = \sigma - \Delta \sigma_e$	259 134",595
29	$\sigma_0''$	259 263",950	71	$S_{1,2} = \sigma_e : \alpha$	7 999 648,16 m
30	$\alpha_1 \cdot \sigma_0''$	868",412	72	$\sin \omega$	0,149 289 79
31	$\Delta l_0 = \alpha_1 \cdot \sigma_0'' \cdot \sin m_0$	48",919	73	$\cos \omega$	0,988 793 49
32	$\Delta \sigma_0 = \Delta l_0 \cdot \sin m_0$	2",756	74	$\cos u_1 \cdot \text{tg } u_2$	-0,018 047 87
33	$\omega_1 = l_{1,2} + \Delta l_0$	8°35'08",686	75	$\sin u_1 \cdot \cos \omega$	0,922 529 59
34	$\sigma_1 = \sigma_0 + \Delta \sigma_0$	72°01'06",706	76	$\cos u_2 \cdot \text{tg } u_1$	2,588 984 27
35	$\sin \omega_1$	0,149 289 36	77	$\sin u_2 \cdot \cos \omega$	-0,049 520 65
36	$\sin \sigma_1$	0,951 156 40	78	(74) - (75)	-0,940 577 46
37	$\sin \omega_1 : \sin \sigma_1$	0,156 955 64	79	(77) - (76)	-2,638 504 92
38	$\sin m_1 = (18) \cdot (37)$	0,056 419 80	80	$\text{ctg } A_{1,2} = (78) : \sin \omega$	-6,300 346 86
39	$\arg \sin^2 m_1$	0,00318	81	$\text{ctg } A_{2,1} = (79) : \sin \omega$	-17,673 7130
40	$\alpha$	0,032 39 32 490	82	$A_{1,2}^*$	-9°,01'07",802
41	$\beta$	345",215	83	$A_{2,1}^*$	-3°14'18",281
42	$\gamma$	0",073	84	$A_{1,2}$	170°58'52",20
			85	$A_{2,1}$	356°45'41",72

## Wzory pomocnicze

$$\cos M^* = \frac{\sin u_2 - \sin u_1 \cdot \cos \sigma}{\sin \sigma \cos m}; \quad \sin A_{1,2}^* = \frac{\sin \omega \cdot \cos u_2}{\sin \sigma}; \quad \sin A_{2,1}^* = -\frac{\sin \omega \cdot \cos u_1}{\sin \sigma}$$

## LITERATURA

- [1] *Bagratuni G. W.* Formuły dla reszenija priamoj i obratnoj gieodieziczieskich zadacz, Trudy CNIIGAIK, wyp. 93, Moskwa 1952.
- [2] *Jordan-Eggert.* Handbuch der Vermessungskunde, Bd. III, Stutgart 1941.
- [3] *Kamela Cz.* Geodezja, cz. III, Warszawa 1952.
- [4] *Krasowski F. N.* Izbrannyje soczinienija, Tom IV, Moskwa 1955.
- [5] *Warchałowski E.* Geodezja wyższa, Warszawa 1952.

*Rękopis dostarczono Redakcji w sierpniu 1960 r.*



АЛЬБИН БРОДОВИЧ

ФОРМУЛЫ И ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ТАБЛИЦЫ ДЛЯ ПЕРЕНЕСЕНИЯ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ КООРДИНАТ НА БОЛЬШИЕ РАССТОЯНИЯ МЕТОДОМ БЕССЕЛЯ

Резюме

В прямой задаче, имея данные геодезические координаты точки  $A$  ( $B_1, L_1$ ), азимут  $A_{1.2}$  и расстояние  $S_{1.2}$  между точкой  $A$  и искомой точкой  $B$  ( $B_2, L_2$ ), вычисляем редуцированную широту ( $u_1$ ) на основании известной формулы, а также величины:

$$\begin{aligned}\sigma'' &= \alpha \cdot S + \beta \sin \sigma_0 \cos (2M + \sigma_0) + \gamma \sin 2\sigma_0 \cos 2(2M + \sigma_0) + \\ &+ \beta_0 \sin \sigma_0 \cos (2M + \sigma_0) \cos 2(M + \sigma_0), \\ \omega - l &= \sin m [\alpha_1 \sigma'' + \beta_1 \sin \sigma \cos (2M + \sigma)]\end{aligned}$$

Решая сферический треугольник получаем величины  $A_{2.1}$ ,  $\omega$  и  $u_2$ . Перехода на эллипсоид получим окончательно:

$$\begin{aligned}\operatorname{tg} B_2 &= \operatorname{tg} u_2 : \sqrt{1 - e^2}, \\ l_{1.2} &= \omega - (\omega - l).\end{aligned}$$

Обратная задача решается при помощи обращения формул прямой задачи. Имея данные геодезические координаты точки  $A$  ( $B_1, L_1$ ), а также точки  $B$  ( $B_2, L_2$ ) вычисляем  $u_1, u_2$ , а затем получаем  $\omega$  и  $\sigma$  методом последовательных приближений.

Длину геодезической линии ( $S$ ) выражаем как функцию  $\sigma$ :

$$S = \frac{1}{\alpha} [\sigma'' - \beta \sin \sigma \cos (2M + \sigma) - \gamma \sin 2\sigma \cos 2(2M + \sigma)].$$

Решая сферический треугольник получаем окончательно значения азимутов  $A_{1.2}$  и  $A_{2.1}$ .

Для упрощения задачи перенесения геодезических координат приведены вычисленные по аргументу  $\sin^2 m$  вспомогательные таблицы. Вспомогательные таблицы предназначены для решения прямой и обратной геодезической задачи методом Бесселя на эллипсоиде Красовского. Они содержат численные значения коэффициентов:  $\alpha, \beta, \beta_0, \alpha_1, \beta_1, \gamma$  и приспособлены для вычислений на арифмометре.

Вспомогательные таблицы были вычислены с соблюдением такого интервала аргумента, чтобы было допустимо применение линейного интерполирования. При помощи формул Бесселя и вспомогательных таблиц можно переносить геодезические координаты и азимуты с ошибками, которые не превосходят  $0''001$ — $0''003$  для координат, а также  $0''03$  для азимута, независимо от расстояния перенесения.

Для вычислений следует применять восьмизначные таблицы тригонометрических функций.

Пользуясь вспомогательными таблицами были решены, как пример, прямая и обратная задачи при расстоянии  $S = 8\,000$  км.

В примерах помещены вспомогательные формулы, служащие для определения четверти полного угла, в которой лежат угол  $M$ , азимут  $A_{1.2}$  и  $A_{2.1}$ .

В вычислительных схемах последовательность выполняемых действий нумерована.

ALBIN BRODOWICZ

FORMULAE AND AUXILIARY TABLES FOR THE CONVERSION  
OF GEODETIC CO-ORDINATES OF LONG LINES BY THE METHOD  
OF BESSEL

S u m m a r y

Having the geodetic co-ordinates of the point  $A (B_1, L_1)$ , the azimuth  $A_{1.2}$  and the distance  $S_{1.2}$  between the known point  $A$  and the unknown point  $B (B_2, L_2)$ , in the direct problem of conversion, the reduced latitude ( $u_1$ ) can be computed from the known formula:

$$\begin{aligned}\sigma'' &= \alpha \cdot S + \beta \sin \sigma_0 \cos (2M + \sigma_0) + \gamma \sin 2\sigma_0 \cos 2(2M + \sigma_0) + \\ &\quad + \beta_0 \sin \sigma_0 \cos (2M + \sigma_0) \cos 2(M + \sigma_0), \\ \omega - l &= \sin m [\alpha_1 \sigma'' + \beta_1 \sin \sigma \cos (2M + \sigma)]\end{aligned}$$

Solving the spherical triangle we can determine the values of  $A_{2.1}$ ,  $\omega$  and  $u_2$ .

Going to the ellipsoid we get eventually:

$$\begin{aligned}\operatorname{tg} B_2 &= \operatorname{tg} u_2 : \sqrt{1 - e^2}, \\ l_{1.2} &= \omega - (\omega - l)\end{aligned}$$

The inverse problem can be solved by the mean of reversing the formulae for the direct problem. Having the geodetic co-ordinates of the points  $A (B_1, L_1)$  and  $B (B_2, L_2)$ , we compute the components  $u_1$  and  $u_2$  and further we find  $\omega$  and  $\sigma$  by the method of iteration.

The length of the geodetic line ( $S$ ) can be expressed as a function of  $\sigma$ :

$$S = \frac{1}{\alpha} [\sigma'' - \beta \sin \sigma \cos (2M + \sigma) - \gamma \sin 2\sigma \cos 2(2M + \sigma)]$$

Solving the spherical triangle we obtain the final values of azimuth  $A_{1.2}$  and  $A_{2.1}$ .

To facilitate the problem there are computed the auxiliary tables according to the argument  $\sin^2 m$ . These tables are destined for the solution of

the direct and inverse problems by the method of Bessel and on the ellipsoid of Krasovski. They contain the numerical values of the coefficients:  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\beta_0$ ,  $\alpha_1$ ,  $\beta_1$ ,  $\gamma$  and are adapted to the calculations with the arithmometer.

The auxiliary tables are computed with such an interval of argument as to allow the linear interpolation.

With the formulae of Bessel and the auxiliary tables there is possible a conversion of geodetic co-ordinates and azimuths with the errors not exceeding  $0''001$  to  $0''003$  in the co-ordinates and  $0''03$  in the azimuth — independently of the length of conversion.

An eight-places table of trigonometric functions shall be used.

With the auxiliary tables there is computed an example of the direct problem and inverse one for a length of 8 000 km.

In these computations the auxiliary formulae for the determination of a quarter of the angle  $M$  and the azimuths  $A_{1.2}$  and  $A_{2.1}$  are given.

The sequence of computation is indicated in the forms by numbers.

## SPIS TREŚCI

### JULIAN RADECKI

Teoria metody bezpośredniego wyznaczenia różnic długości geograficznych . . . . . 3

### JERZY BOKUN

Analiza i wnioski wynikające z wykorzystania materiałów grawimetrycznych przy opracowaniu geodezyjnych pomiarów podstawowych w Polsce . . . . . 24

### JERZY NIEWIAROWSKI, TADEUSZ WYRZYKOWSKI

Wyznaczenie współczesnych ruchów pionowych skorupy ziemskiej na obszarze Polski przez porównanie wyników powtarzanych niwelacji precyzyjnych . . . . . 102

### JERZY BOKUN

Zagadnienie wyznaczenia odstępów geoidy w Polsce od elipsoidy Krasowskiego biorąc pod uwagę posiadane materiały astronomiczno-geodezyjne i grawimetryczne . . . . . 113

### ALBIN BROWICZ

Wzory i tablice pomocnicze do przenoszenia współrzędnych geodezyjnych na dalekie odległości metodą Bessela . . . . . 141

## СО Д Е Р Ж А Н И Е

### ЮЛИАН РАДЭЦКИ

Теория непосредственного метода определения разностей географических долгот . . . . . 3

### ЕЖЫ БОКУН

Анализ и выводы вытекающие с использования гравиметрических материалов и обработки основных геодезических измерений в Польше 24

### ЕЖЫ НЕВЯРОВСКИ, ТАДЭУШ ВЫЖЫКОВСКИ

Определение современных вертикальных движений земной коры на территории Польши при помощи сравнения результатов повторных высокоточных нивелировок . . . . . 102

### ЕЖЫ БОКУН

Вопрос определения высот геоида в Польше относительно эллипсоида Красовского учитывая имеющиеся в распоряжении астрономо-геодезические и гравиметрические материалы . . . . . 113

### АЛЬБИН БРОДОВИЧ

Формулы и вспомогательные таблицы для перенесения геодезических координат на большие расстояния методом Бесселя . . . 141

## CONTENTS

### JULIAN RADECKI

- Theory of the method of determination of differences of geographic longitudes . . . . . 3

### JERZY BOKUN

- Analysis and inferences resulting from the usage of gravity materials to elaborations of geodetic frame work in Poland . . . . . 24

### JERZY NIEWIAROWSKI, TADEUSZ WYRZYKOWSKI

- The determination of the vertical movements of the Earth's crust on the territory of Poland by the comparison of repeated precise levellings 102

### JERZY BOKUN

- Determination of intervals between the geoid and the ellipsoid of Krasowski in Poland in the light of existing astronomic-geodetic and gravimetric data . . . . . 113

### ALBIN BRODOWICZ

- Formulae and auxiliary tables for the conversion of geodetic co-ordinates of long lines by the method of Bessel . . . . . 141