

Wpływ systematycznych pionowych ruchów skorupy ziemskiej na wyniki i wyznaczone błędy niwelacji precyzyjnej

Motto:

Panta rhei...

Heraklit z Efezu

(ok. 540—480 p. n. e.)

1. Wstęp

Zagadnienie opartych o pomiary geodezyjne badań powolnych ruchów skorupy ziemskiej, o charakterze tektonicznym, jest stosunkowo nowe. Do zadania tego przystąpiono dopiero w bieżącym stuleciu, kiedy to pomiary geodezyjne, a szczególnie pomiary wysokościowe osiągnęły wysoką precyzję, co pozwoliło pokusić się o wyznaczenie tych drobnych zmian w ukształtowaniu skorupy Ziemi, jakie zachodzą w sposób bardzo powolny, prawie niezauważalny, a obejmują rozległe tereny.

Wielkości pionowych ruchów skorupy Ziemi są różne w różnych częściach kontynentów. Przeważnie podatne im są lądy o charakterze wyspiarskim i obszary sejsmiczne, ale też występują niekiedy wyraźnie w innych częściach kontynentów np. jako poglaczalne podnoszenie się lądu, czego wybitnym przykładem może być Skandynawia.

Z uwagi na zróżnicowanie wielkości ruchów pionowych skorupy na różnych obszarach — ruchy te mieszczą się w granicach od zera do jednego centymetra na rok — różne kraje, widząc w tym większą lub mniejszą wagę zagadnienia, w różnym czasie przystąpiły bądź przystępują obecnie do ich wyznaczania. Wykorzystuje się tu niwelację precyzyjną, która z najwyższą możliwą dziś do osiągnięcia dokładnością wyznacza zmiany w pionowym ukształtowaniu powierzchni lądu przez okresowe pomiary wzajemnych wysokości szeregu punktów, w sposób równomierny pokrywających duże obszary.

Wyniki niwelacji, służącej nam jako narzędzie dla wyznaczania ruchów skorupy ziemskiej, są jednak wypaczane na skutek działania tychże ru-

chów zarówno w trakcie dokonywania pomiarów, jak też na skutek zestawiania z sobą w sieci niwelacyjnej linii mierzonych w różnych okresach czasu.

Zagadnienie wpływu systematycznych pionowych ruchów skorupy ziemskiej na wyniki i wyznaczane błędy niwelacji może być więc traktowane jako zagadnienie pochodne w stosunku do zagadnienia wyznaczenia ruchów skorupy, gdyż opierać się musi na ich znajomości, z większym lub mniejszym przybliżeniem.

Rzeczywiście, poniższe opracowanie jest niejako „echem” jednego z wcześniej podjętych przez Pracownię Pomiarów Podstawowych Instytutu tematów, a mianowicie tematu: „Badanie ruchów pionowych skorupy ziemskiej w Polsce przy wykorzystaniu niwelacji precyzyjnej” *).

Badania te dokonywane są z reguły na drodze porównania wyników pomiarów dwu lub więcej niwelacji precyzyjnych, wykonanych w wystarczająco długich odstępach czasu pomiędzy tymi samymi utrwalonymi punktami.

Niedostatecznie zwarte w czasie pomiary w sieci niwelacyjnej — wziętej jako całość — nie tylko utrudniają wyznaczenie ruchów skorupy, ale też wpływają na obniżenie dokładności wyznaczenia wysokości punktów w sieci. Prócz wpływu ruchów skorupy na rzędne punktów niwelacyjnych, znajdują one swe odzwierciedlenie w powiększeniu wyznaczanego błędu pomiaru, szczególnie w wielkości błędu zamknięcia poligonu i błędu wyznaczonego z wyrównania sieci. Błędy te komasują w sobie zarówno błędy techniki pomiaru jak i wpływ zmienności powierzchni na skutek omawianych ruchów skorupy.

O ile wyznaczenie ruchów skorupy ziemskiej jest wśród pomiarów geodezyjnych zagadnieniem specjalnym, o tyle związane z tymi ruchami obniżenie dokładności pomiarów niwelacyjnych posiada znaczenie bardziej ogólne. Niestety, problem zmniejszenia wpływu ruchów skorupy ziemskiej na błędy niwelacji precyzyjnej może być — prócz skrócenia czasu trwania pomiaru — rozwiązany prawie wyłącznie na drodze wprowadzenia odpowiednich redukcji, a te wymagają uprzedniej znajomości ruchów skorupy na objętym niwelacją terenie. Z tego też względu opracowanie zagadnienia wpływu pionowych ruchów skorupy ziemskiej na wyniki niwelacji nabiera wagi i możliwości pełnego praktycznego wykorzystania dopiero wówczas i tylko tam, gdzie wielkości ruchów skorupy są już wyznaczone.

*) Tadeusz Wyrzykowski: „Zagadnienie współczesnych ruchów pionowych skorupy ziemskiej na obszarze Polski i ich badanie metodą powtarzanej niwelacji precyzyjnej”, Biuletyn IGiK, Przegląd Geodezyjny, marzec 1959 r.

Podchodząc do rozwiązywania postawionego zagadnienia należy w nieco odmienny niż zwykle sposób spojrzeć na powierzchnię Ziemi. Ta odmienność polegać będzie na odrzuceniu zwykle milcząco przyjmowanego założenia jej stałości.

Dotychczas przyjmowano, że różnica wysokości pomiędzy dwoma trwale zastabilizowanymi punktami wysokościowymi jest stała. Precyzyjne, rozciągające się na okres dziesiątków lat badania stwierdziły jednak, że przyjęcie niezmienności ukształtowania skorupy ziemskiej jest tylko pewnym przybliżeniem stanu faktycznego. W rzeczywistości zachodzą w niej zmiany o charakterze mniej lub bardziej powolnym, obejmujące swym zasięgiem mniejsze lub większe obszary.

Jak wynika z ich właściwości, pionowe ruchy skorupy o charakterze ogólnym, tektonicznym posiadają na ogół dla danego obszaru cechę stałości, to znaczy, że wykazują stałą prędkość w tak krótkim dla geologii interwale czasu kilkunastu czy kilkudziesięciu lat, jakim operujemy przy porównywaniu dwu sieci niwelacyjnych. Cecha ta jest szczególnie ważna, gdyż pozwala na wykorzystanie matematycznej zależności pomiędzy zmianą wysokości położenia punktu, wielkością ruchów skorupy i czasem.

Ponieważ dalsza analiza oparta będzie na tym właśnie podstawowym założeniu stałej — w interesującym nas interwale czasu — prędkości ruchu skorupy w danym punkcie powierzchni Ziemi, przez to samo wnioski i zalecenia z niej wynikające będą miały pełne zastosowanie jedynie tam, gdzie stałość prędkości ruchu skorupy — w granicach założonego błędu wyznaczenia — będzie zachowana na przestrzeni interwału czasu pomiędzy dwoma pomiarami niwelacji, służącymi do wyznaczenia tych ruchów. Na skutek jednak pewnych możliwości zmiany wielkości ruchu jak i błędu jego wyznaczenia, pewniejszą będzie zawsze redukcja pomiarów niwelacji oparta o interwał leżący wewnątrz interwału czasu między pierwszą i drugą niwelacją, służącą do wyznaczenia ruchów skorupy na rozpatrywanym terenie. Oczywista jest bowiem przewaga interpolacji nad ekstrapolacją, szczególnie w wypadku nieściślej znajomości funkcji.

Z wyżej wspomnianych powodów pewniejsze jest stosowanie redukcji ze względu na ruch powierzchni Ziemi spowodowany siłami tektonicznymi, dla którego okres dziesiątków czy setek lat jest znikomą jednostką czasu, niż redukować pomiary biorąc pod uwagę ruchy lokalne, spowodowane — jak to np. ma miejsce w zagłębiach górniczych — działalnością człowieka. W tym drugim wypadku ruchy są dużo bardziej zróżnicowane pod względem wielkości i ograniczone w zasięgu. Istnieje też duża zmienność ich wielkości w czasie. W celach redukcji operować tu musimy znacznie krótszymi interwałami czasu, a i tak pewność zastosowania właściwej redukcji będzie znacznie mniejsza.

Przedstawiona dalej analiza ma za zadanie w sposób możliwie systematyczny — przez co nawet pewne jej elementy mogą się wydać czytelnikowi zbyt — przedstawić „mechanizm działania”, określić charakter i wielkość wpływu ruchów skorupy na wyniki i błędy niwelacji precyzyjnej. Przeanalizowany zostanie wpływ systematycznych pionowych ruchów skorupy ziemskiej na położenie punktu, na zmianę przewyższenia na linii niwelacji precyzyjnej i na wyznaczany błąd zamknięcia poligonu niwelacyjnego. Omówione zostanie zagadnienie redukcji pomiarów poszczególnych poligonów i całych sieci niwelacyjnych, ze szczególną analizą momentu średniego, stanowiącego moment odniesienia pomiarów niwelacyjnych (epokę). Dokonana zostanie analiza wielkości wpływu ruchów skorupy na wyniki i błędy niwelacji w porównaniu do błędów samego pomiaru.

— Wyniki i wnioski analizy mogą posłużyć jako pewne wytyczne przy przyszłym projektowaniu sieci niwelacji precyzyjnej (kształt sieci, przebieg linii, planowany okres pomiaru sieci) i przy rachunkowym opracowaniu jej wyników (wprowadzenie odpowiednich redukcji).

2. Wpływ systematycznych pionowych ruchów niwelowanej powierzchni na zmiany wysokości punktu i na wielkości przewyższenia na liniach niwelacji precyzyjnej

Jak już wspomnieliśmy uprzednio, opracowanie niniejsze będzie oparte na ujęciu niwelacji precyzyjnej jako pomiaru dokonywanego na powierzchni podlegającej stałemu ruchowi. Przy takim ujęciu zarówno wyznaczone wysokości punktów, jak i ich różnice — przewyższenia, będą zmienne i zależne od momentu pomiaru.

Ogólnie możemy powiedzieć, że zmienna wysokość punktu A (H_A) jest funkcją: wysokości tego punktu w momencie przyjętym za początkowy (H_A^0), prędkości ruchu tego punktu (V_A) oraz czasu (T). Możemy to zapisać matematycznie jako:

$$H_A = f(H_A^0, V_A, T) \quad (1)$$

Dla dowolnego momentu T_i wysokość punktu będzie określona wartością funkcji wziętą dla tego argumentu:

$$H_A^i = f(H_A^0, V_A, T_i) \quad (2)$$

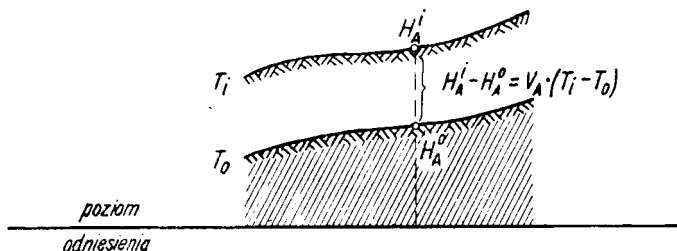
Wysokość punktu w momencie przyjętym za początkowy (T_0), jak wynika z założeń, może być analogicznie zapisana jako:

$$H_A^0 = f(H_A^0, V_A, T_0) \quad (3)$$

Różnica wysokości punktu A pomiędzy jego położeniem w momencie T_0 i momencie T_i jest drogą, jaką ten punkt przebył w linii pionu w inter-

wale czasu równym $T_i - T_o$. Ponieważ jednak założyliśmy stałość prędkości ruchu punktu, więc możemy napisać:

$$H_A^i - H_A^o = \Delta H^{i-o} = f(H_A^o, V_A, T_i) - f(H_A^o, V_A, T_o) = V_A \cdot (T_i - T_o) \quad (4)$$



Rys. 1. Zmiana wysokości punktu

Wysokość punktu w dowolnym momencie możemy więc wyrazić jako:

$$\boxed{H_A^i = H_A^o + V_A \cdot (T_i - T_o)} \quad (5)$$

W ten sposób uzyskaliśmy możliwość redukcji wysokości punktu wyznaczonej w momencie T_o , do dowolnego momentu T_i (i odwrotnie), jeżeli znana jest prędkość ruchu skorupy ziemskiej w tym punkcie *) **).

W celu wyrobienia u czytelnika poglądu z jakimi w praktyce zmianami wysokości punktów i błędami niwelacji na skutek ruchów skorupy ziemskiej mamy do czynienia, wywody teoretyczne ilustrować będziemy odpowiednimi przykładami ich praktycznego zastosowania.

Przykład 1: Obliczymy wartość pionowego przesunięcia punktu A w okresie od roku 1927 do 1936 przy przyjęciu $V_A = + 2$ mm/rok (wielkość realna, często spotykana przy ruchach skorupy o charakterze ogólnym):

$$\Delta H_A^{1936-1927} = V_A (T_{1936} - T_{1927}) = + 2 \text{ mm/rok} \cdot 9 \text{ lat} = + 18 \text{ mm}$$

★

*) Dla zachowania pewnego porządku, za dodatnią prędkość będziemy uważali taką, przy której dodatniemu przyrostowi czasu odpowiada dodatni przyrost wysokości punktu (ruch wznoszący).

**) Zagadnienie rozpatrywane jest przy założeniu, że wysokości punktów i ich ruchy pionowe zostały odniesione do wspólnego, niezmiennego poziomu odniesienia, za jaki najczęściej przyjmowany jest średni poziom morza.

Dotychczasowe nasze rozumowanie rozciągnąć teraz możemy na linię niwelacji precyzyjnej, która jest podstawowym elementem, jakim operujemy przy pomiarze i wyrównaniu sieci.

Przewyższenie na linii jest różnicą pomiędzy wysokością punktu końcowego i początkowego, czyli ogólnie:

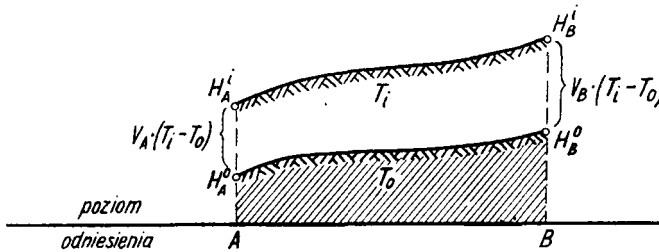
$$h_{AB} = H_B - H_A \quad (6)$$

Ponieważ pomiar linii jest dokonywany w ciągu stosunkowo krótkiego okresu czasu, przyjąć więc możemy wspólny dla obu punktów moment pomiaru (T_0). Otrzymamy wtedy:

$$h_{AB}^0 = H_B^0 - H_A^0 \quad (7)$$

Jeżeli teraz pomiaru tej linii dokonamy w innym czasie (T_i), to otrzymamy nieco inną wartość przewyższenia, gdyż wysokości obu punktów końcowych uległy w międzyczasie zmianie (rys. 2):

$$h_{AB}^i = H_B^i - H_A^i \quad (8)$$



Rys. 2. Zmiana przewyższenia na linii niwelacyjnej

Różnica w wartościach przewyższenia wynosić będzie:

$$h_{AB}^i - h_{AB}^0 = (H_B^i - H_A^i) - (H_B^0 - H_A^0) = (H_B^i - H_B^0) - (H_A^i - H_A^0) \quad (9)$$

Korzystając z podanej uprzednio dla pojedynczego punktu zależności (4), otrzymamy:

$$h_{AB}^i - h_{AB}^0 = V_B \cdot (T_i - T_0) - V_A \cdot (T_i - T_0) = (V_B - V_A) \cdot (T_i - T_0) \quad (10)$$

Po wprowadzeniu pomocniczych oznaczeń:

$$h_{AB}^i - h_{AB}^0 = \Delta h_{AB}^{i-0}; \quad V_B - V_A = \Delta V_{AB} \quad (11)$$

możemy napisać:

$$\Delta h_{AB}^{i-0} = \Delta V_{AB} \cdot (T_i - T_0) \quad (12)$$

Analogicznie jak dla pojedynczego punktu, możemy wyrazić przewyższenie w dowolnym momencie (T_i) przez przewyższenie w momencie wzię-

tym za początkowy (T_0) oraz przez prędkości ruchu punktów końcowych linii, czyli:

$$\boxed{h_{AB}^i = h_{AB}^o + (V_B - V_A) \cdot (T_i - T_0)} \quad (13)$$

Powyższy wzór pozwala na redukcję pomierzonego w momencie T_0 przewyższenia między dwoma końcowymi punktami linii niwelacji precyzyjnej do dowolnego momentu T_i (i odwrotnie).

Jak nie trudno zauważyć, zmiana przewyższenia zależna jest od wielkości ruchów punktów końcowych linii, a ściśle — od zróżnicowania tych wielkości oraz od interwału czasu między porównywanymi momentami.

To co odnosiło się do dwu końcowych punktów linii niwelacyjnej (A, B), jest tak samo słuszne dla dwu dowolnych punktów A, B sieci niwelacyjnej z tym jednak zastrzeżeniem, że każdorazowy pomiar przewyższenia między nimi będzie dokonany w krótkim interwale czasu, upoważniającym do operowania wspólnym momentem pomiaru, jak to miało miejsce dla pojedynczej linii niwelacyjnej. W tym wypadku ma też zastosowanie wzór (13).

Przykład 2: Obliczmy zmianę przewyższenia na linii AB w czasie od 1947 roku do 1952 wiedząc, że: $V_A = +2$ mm/rok, a $V_B = -1$ mm/rok.

$$h_{AB}^{1952} - h_{AB}^{1947} = (V_B - V_A) \cdot (T_{1952} - T_{1947}) = -3 \text{ mm/rok} \cdot 5 \text{ lat} = -15 \text{ mm}$$

3. Wpływ systematycznych pionowych ruchów niwelowanej powierzchni na zamknięcie poligonu niwelacyjnego

Po przeanalizowaniu wpływu ruchu powierzchni na przewyższenie pojedynczej linii niwelacyjnej, możemy przystąpić do podobnej analizy poligonu niwelacyjnego, składającego się z n linii.

Analizę rozpoczniemy — dla uproszczenia rachunku — od mało złożonego poligonu, składającego się z 3 linii niwelacyjnych, pomierzonych pierwszy raz w momencie T_0 i drugi raz — w momencie T_i (rys. 3).

Jest oczywiste, że suma przewyższeń poszczególnych linii w zamkniętym poligonie, wyznaczona w dowolnym momencie, równa się zeru. (Aby nie rozpraszać uwagi, nie będziemy tu uwzględniali teoretycznej poprawki zamknięcia poligonu niwelacji precyzyjnej, związanej z nierównoległością powierzchni poziomowych. Uwzględnienie tej poprawki nie wpłynęłoby na tok postępowania ani na wynik analizy).

Czyli:

$$h_{AB}^o + h_{BC}^o + h_{CA}^o = 0 \quad (14)$$

oraz
$$h_{AB}^i + h_{BC}^i + h_{CA}^i = 0$$

Odejmując od siebie oba równania (14) i korzystając z zależności (12), otrzymamy:

$$\Delta T_{i-o} \cdot (\Delta V_{AB} + \Delta V_{BC} + \Delta V_{CA}) = 0 \quad (15)$$

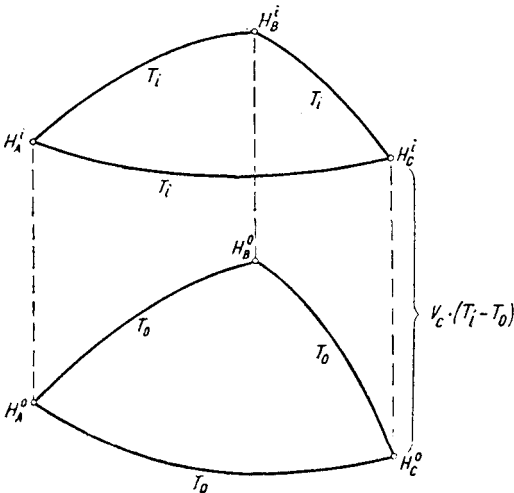
Ponieważ równanie to jest słuszne dla każdej wartości $\Delta T \neq 0$, więc mamy:

$$\Delta V_{AB} + \Delta V_{BC} + \Delta V_{CA} = 0 \quad (16)$$

Równanie (15) mówi, że suma zmian przewyższeń linii niwelacyjnych w zamkniętym poligonie, wzięta dla dowolnego — ale jednakowego dla wszystkich linii — interwału czasu, jest równa zero.

Równanie (16) stwierdza oczywisty fakt, że suma przyrostów prędkości ruchu punktów końcowych, wzięta dla poszczególnych linii zamkniętego poligonu, równa się zero.

Jak widzimy, w wypadku przedstawionym na rys. 3, ruchy niwelowanej powierzchni nie wpływają na wewnętrzną zgodność pomiarów



Rys. 3. Zamknięcie poligonu ABCA
mierzonego w momencie T_0 i T_i

w poligonie, dokonanych w całości w momencie T_0 i drugi raz — w dowolnym momencie T_i . Błąd niezamknięcia poligonu, otrzymany z sumy pomierzonych przewyższeń linii poligonu, należy całkowicie w tym wypadku przypisać błędom pomiaru.

Gdybyśmy, z tych czy innych względów — np. dla porównania dwu pomiarów — chcieli zredukować wysokości punktów poligonu lub przewyższenia na liniach do jakiegoś momentu, różnego od momentu pomiaru, postąpilibyśmy w sposób poprzednio podany.

Inaczej przedstawia się sprawa, jeżeli pomiary poszczególnych linii poligonu są w większych odstępach czasu, które uniemożliwiają przyjęcie tych pomiarów jako dokonanych w jednym wspólnym momencie. Zostaje wtedy naruszona wewnętrzna zgodność pomiarów, co znajduje swój wyraz w powstającym błędzie zamknięcia poligonu, n i e z a l e ż n y m od błędów samego pomiaru niwelacji.

Wypadek taki przedstawia rys. 4, gdzie poszczególne linie w drugim pomiarze mierzone były w momentach: T_1 , T_2 i T_3 .

Pomierzone przewyższenia poszczególnych linii nie tworzą wtedy zamkniętej figury, czyli:

$$h_{AB}^1 + h_{BC}^2 + h_{CA}^3 \neq 0 \quad (17)$$

Zamkniętą figurę przestrzenną otrzymujemy dopiero po uwzględnieniu odcinków: $H_A^3 H_A^1$, $H_B^1 H_B^2$ oraz $H_C^2 H_C^3$, czyli po uwzględnieniu przesunięć pionowych końcowych punktów linii.

Obiegając figurę zgodnie z kierunkiem strzałek — poczynając od punktu H_A^1 — otrzymamy:

$$h_{AB}^1 + V_B(T_2 - T_1) + h_{BC}^2 + V_C(T_3 - T_2) + h_{CA}^3 + V_A(T_1 - T_3) = 0 \quad (18)$$

Po przegrupowaniu będzie:

$$h_{AB}^1 + h_{BC}^2 + h_{CA}^3 + V_A(T_1 - T_3) + V_B(T_2 - T_1) + V_C(T_3 - T_2) = 0 \quad (19)$$

Czyli ostatecznie:

$$h_{AB}^1 + h_{BC}^2 + h_{CA}^3 = V_A(T_3 - T_1) + V_B(T_1 - T_2) + V_C(T_2 - T_3) \quad (20)$$

Prawa strona równania (20) przedstawia wartość niezamknięcia poligonu, wyrażoną przez prędkości ruchu punktów końcowych linii i interwały czasu pomiędzy pomiarami sąsiednich linii, stykających się w tych punktach, czyli inaczej — przedstawia niezamknięcie poligonu wyrażone za pomocą przesunięć punktów końcowych linii.

Wartość niezamknięcia poligonu możemy przedstawić inaczej:

$$A_p = T_1(V_B - V_A) + T_2(V_C - V_B) + T_3(V_A - V_C) \quad (21)$$

czyli

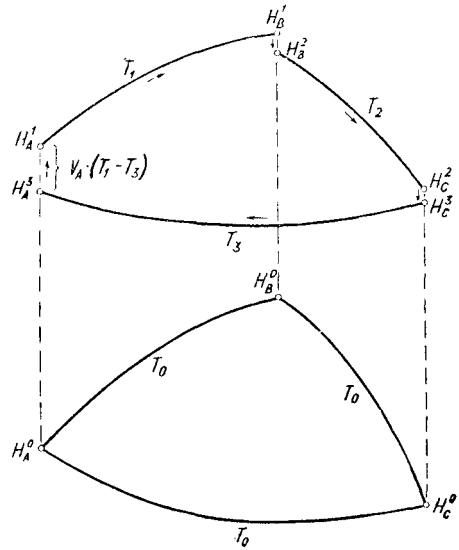
$$A_p = T_1 \cdot \Delta V_{AB} + T_2 \cdot \Delta V_{BC} + T_3 \cdot \Delta V_{CA}$$

Wiemy jednak, że dla dowolnego momentu mamy:

$$\Delta V_{AB} + \Delta V_{BC} + \Delta V_{CA} = 0 \quad (16)$$

Mnożąc to równanie przez dowolne T_0 , nie równe zero, otrzymamy:

$$T_0 \cdot \Delta V_{AB} + T_0 \cdot \Delta V_{BC} + T_0 \cdot \Delta V_{CA} = 0 \quad (22)$$

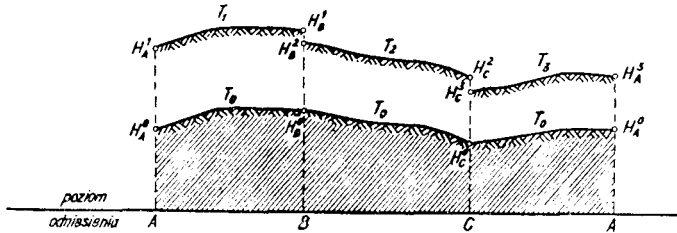


Rys. 4. Niezamknięcie poligonu ABCA, którego poszczególne linie mierzone były w momentach T_1 , T_2 i T_3

Odejmując od wartości niezamknięcia poligonu, w formie (21), równanie (22), otrzymujemy niezamknięcie wyrażone przez przyrosty prędkości na poszczególnych liniach i przez interwały czasu, liczone od dowolnie obranego momentu T_0 .

Mamy więc:

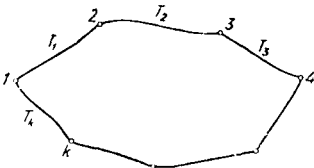
$$\Delta p = (T_1 - T_0) \cdot \Delta V_{AB} + (T_2 - T_0) \cdot \Delta V_{BC} + (T_3 - T_0) \cdot \Delta V_{CA} \quad (23)$$



Rys. 5

Oczywiście wartość niezamknięcia poligonu nie jest zależna od obioru momentu T_0 .

Układ linii przedstawiony przestrzennie na rys. 4 można zobrazować inaczej przez rozwinięcie linii poligonu na płaszczyznę papieru, w rzucie pionowym (rys. 5). Rysunek ten ułatwia zrozumienie „mechaniki” powstawania błędu niezamknięcia poligonu.



Rys. 6

Wzory na niezamknięcie poligonu, wyprowadzone dla szczególnego wypadku trzech linii, uogólnimy teraz na poligon o k liniach niwelacyjnych (podamy je bez wyprowadzenia). Przyjmijemy oznaczenia jak na rys. 6.

Wychodząc ze wzoru (20), czyli wyrażając niezamknięcie poligonu zmianami wysokości punktów końcowych linii poligonu, w interwałach czasu między pomiarami sąsiednich linii, możemy napisać:

$$\Delta p = \sum_{n=1}^k V_n \cdot (T_{n-1} - T_n) = \sum_{n=1}^k \Delta H_n^{(n-1) \cdot n} \quad (24)$$

Z kolei, wychodząc ze wzoru (23), tj. wyrażając niezamknięcie poligonu zmianami przewyższeń na liniach, w interwale czasu między momentem pomiaru linii (T_n) i przy-

jętym wspólnym momentem odniesienia pomiarów (T_0), mamy:

$$\Delta p = \sum_{n=1}^k \Delta V_{n,n+1} \cdot (T_n - T_0) = \sum_{n=1}^k \Delta h_{n,n+1}^{n-0} \quad (25)$$

Wzory (24) i (25) mają różne zastosowania. — Jeżeli chodzi jedynie o obliczenie niezamknięcia pojedynczego poligону, przy danych szybkościach ruchu punktów końcowych linii, to prostszym w użyciu jest wzór (24). Jeżeli natomiast mamy do czynienia z całą siecią niwelacyjną, której pomiar musimy odnieść do pewnego wspólnego momentu T_0 , bardziej celowe jest użycie wzoru (25), który operuje od razu poprawkami przewyższeń poszczególnych linii sieci, redukującymi pomiar do momentu T_0 .

Zamknięcie poligону będzie miało następującą formę ogólną:

$$\sum_{n=1}^k h_{n,n+1}^n - \Delta p = 0 \quad (26)$$

Równanie to mówi, że suma przewyższeń poszczególnych linii poligону zamkniętego, mierzonych w różnych okresach czasu, poprawiona o obliczoną wartość niezamknięcia (Δp) powinna teoretycznie równać się zeru. Z tego równania należy wyjść przy układaniu równań warunkowych dla wyrównania sieci niwelacyjnej metodą spostrzeżeń zawarunkowanych.

Przedstawiony poniżej przykład obliczenia niezamknięcia poligону (przykład 3, wersja *a*, *b* i *c*) daje zobrazowanie jego wielkości i pewien pogląd na zmienność tej wielkości, w zależności od przypadkowego rozkładu momentów pomiaru poszczególnych linii na tle ruchów niwelowanej powierzchni.

Niezamknięcie poligону, powstałe wskutek ruchu niwelowanej powierzchni w interwale czasu zawartym pomiędzy najwcześniejszym i najpóźniejszym pomiarem linii wchodzących w skład poligону, wpływa oczywiście na wyrównanie i wypacza jego wyniki. Jeśli nawet niezamknięcie, co do wartości bezwzględnej równające się sumie redukcji wszystkich linii poligону (wzór (25)), równa się zeru — jak to ma miejsce w wersji *b'* przykładu — to jednak redukcje poszczególnych linii mogą znacznie różnić się od zera.

W wypadku tym, mimo że nie zmieniony zostanie wolny wyraz warunku zamknięcia poligону, niewprowadzenie redukcji pomiarów linii do wspólnego momentu T_0 prowadzi do zestawienia z sobą przypadkowo tylko zgodnych wartości.

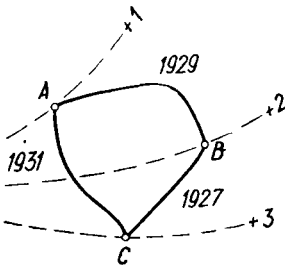
Przykład 3: Obliczymy wartość niezamknięcia poligonu niwelacyjnego, składającego się z trzech linii. Obliczenie dokonamy dla trzech wersji, przy nie zmienionych ruchach punktów końcowych, lecz przy różnym rozłożeniu tych samych dat pomiaru poszczególnych linii.

$$\text{Obliczenie wg wzoru: } A_p = \sum_{n=1}^k V_n \cdot (T_{n-1} - T_n) \quad (24)$$

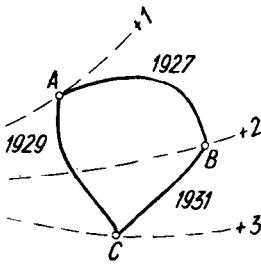
Szkice poligonu niwelacyjnego na tle linii równych wielkości ruchów

Tablica 1

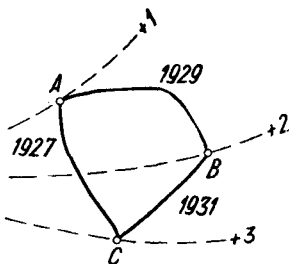
Obliczenie niezamknięć poligonu niwelacyjnego



Wersja	Nr pktu	V_n mm/rok	T_n rok	$T_{n-1} - T_n$ rok	$V_n \cdot (T_{n-1} - T_n)$ mm
a	A	+ 1	1929	+ 2	+ 2
	B	+ 2		+ 2	+ 4
	C	+ 3		- 4	- 12
Σ				0	<u>- 6</u>



b	A	+ 1	1927	+ 2	+ 2
	B	+ 2		- 4	- 8
	C	+ 3		+ 2	+ 6
Σ				0	<u>0</u>



c	A	+ 1	1929	- 2	- 2
	B	+ 2		- 2	- 4
	C	+ 3		+ 4	+ 12
Σ				0	<u>+ 6</u>

Rachunek wersji *b* powtórzymy licząc wzorem:

$$\Delta p = \sum_{n=1}^k \Delta V_{n,n+1} \cdot (T_n - T_o) \quad (25)$$

Obliczamy przy tym wielkości odpowiadające redukcjom poszczególnych linii do średniego momentu pomiarów (T_o) (z przeciwnym znakiem).

Tablica 2

Wersja	Nr pktu	$\Delta V_{n,n+1}$ mm/rok	T_n rok	$T_n - T_o$ rok	$\Delta V_{n,n+1} \cdot (T_n - T_o)$ mm
<i>b'</i>	<i>A</i>	+ 1	1927	- 2	- 2
	<i>B</i>	+ 1	1931	+ 2	+ 2
	<i>C</i>	- 2	1929	0	0
	<i>A</i>				
Σ		0	$T_o = 1929$	0	0

4. Wpływ systematycznych pionowych ruchów niwelowanej powierzchni na wyniki i wyznaczone błędy niwelacji precyzyjnej w porównaniu do błędów pomiaru

Dotychczas analizowaliśmy teoretycznie zmiany, jakie ruchy skorupy ziemskiej wprowadzają do położenia punktów niwelacyjnych i przewyższeń między nimi, nie rozpatrując ich jednak na tle wymagań i dokładności samej niwelacji precyzyjnej. Z tego też powodu nie wprowadzono dotychczas takich elementów, jak rozległość obszaru, na którym ruchy są rozpatrywane, a w związku z tym nie operowano długością linii niwelacyjnej. Chcąc jednak wiedzieć w jakim stosunku mają się do siebie błędy spowodowane ruchem powierzchni do błędów samego pomiaru (bez uwzględnienia czynnika ruchu powierzchni), musimy wprowadzić wspomniane wyżej elementy. Pozwoli to nam, z jednej strony, na operowanie gradientem prędkości ruchu powierzchni: $\frac{\Delta V_i}{L_i} \cdot L_o = \Delta V_o$, z drugiej — na określenie spodziewanego błędu samej niwelacji.

Operowanie gradientem prędkości ruchu, czyli przyrostem jego wielkości na jednostkę odległości między porównywanymi punktami, pozwoli nam na częściowe uogólnienie zagadnienia.

Błędy spowodowane ruchami powierzchni można przedstawić w sposób następujący:

Dla linii:

$$\Delta L_i = \Delta t_i \cdot \left(\frac{\Delta V_o}{L_o} \right) \cdot L_i \quad (27)$$

Dla poligону:

$$\Delta p = \sum_i^k \Delta t_i \cdot \left(\frac{\Delta V_o}{L_o} \right) \cdot L_i \quad (28)$$

Błędy zamknięcia wynikłe z błędów przypadkowych samego pomiaru niwelacji, zarówno dla linii jak i dla poligону mają — biorąc w przybliżeniu — ogólną postać:

$$m_i = \pm c \cdot \sqrt{L_i} \quad (29)$$

Porównanie błędów (27) i (28) z błędem (29) daje miarę wartości błędu nieuwzględnienia redukcji pomiarów do wspólnego momentu, w stosunku do błędu samej niwelacji.

Błąd taki, wyrażony dla linii, ma postać:

$$\frac{\Delta L_i}{m_i} = \pm \frac{\Delta t_i \cdot \left(\frac{\Delta V_o}{L_o} \right) \cdot L_i}{c \cdot \sqrt{L_i}} \quad (30)$$

Dla poligону:

$$\frac{\Delta p}{m} = \pm \frac{\sum_{i=1}^k \Delta t_i \cdot \left(\frac{\Delta V_o}{L_o} \right) \cdot L_i}{c \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^k L_i}} \quad (31)$$

Przyjmując na c dopuszczalną wartość ± 2 mm oraz gradient wielkości ruchu na jednostkę długości L_o równą 100 km, otrzymamy dla linii:

$$\frac{\Delta L_i}{m_i} = \pm \frac{\Delta t_i \cdot \Delta V_o \cdot \sqrt{L_i}}{2} \text{ ‰} \quad (32)$$

Celem zorientowania w wielkości tego procentowego błędu podamy w tablicy 3 jego wartości dla różnych długości linii i wielkości gradientów, przy $\Delta t = 1$ rok.

Tablica 3

Stosunek błędu nieuwzględnienia redukcji do błędu samego pomiaru niwelacji przy przyjęciu $\Delta t = 1$ rok

ΔV_o mm/rok	L_i km	30	60	100	150	250
	0,5		1	2	2	3
1		3	4	5	6	8
2		6	8	10	12	16
4		11	16	20	24	32

(w procentach)

Choć wartości te przy przyjęciu $\Delta t = 1$ rok nie są duże, gdyż mieszczą się w granicach 30% błędu niwelacji, nawet przy przyjęciu $\Delta V_o = 4$ mm/rok oraz przy $L_i = 250$ km, to jednak trzeba pamiętać, że wartość błędu wzrasta proporcjonalnie do Δt . Przy interwale redukcji $\Delta t = 10$ lat już przy $\Delta V_o = 2$ mm/rok i $L_i = 100$ km, błąd nieuwzględnienia redukcji będzie równy dopuszczalnemu błędowi niwelacji mając przy tym charakter błędu systematycznego.

Ponieważ mamy do czynienia z ruchomą powierzchnią, na której dokonujemy pomiarów niwelacyjnych, więc nawet pomiar o wysokiej precyzji wraz z upływem czasu coraz mniej odzwierciedla stan rzeczywisty. Zmiany następujące w ukształtowaniu powierzchni, w zależności od długości interwału czasu, od gradientu i wielkości ruchów, mogą dorównać, a nawet przekroczyć błędy pomiaru niwelacji.

Jako ilustracja niech posłuży tablica 4, której dane obliczone wzorem (32) przedstawiają w procentach stosunek wielkości zmiany przewyższenia na linii, na skutek ruchu powierzchni, do wielkości błędu samego pomiaru niwelacji. Wartości obliczone są dla zmiennego interwału czasu i zmiennej długości linii. Założenia są podobne do poprzednich, czyli: dopuszczalny błąd pomiaru linii $\pm 2 \text{ mm} \cdot \sqrt{L}$, $\Delta V_o = 1$ mm/rok.

Na pierwszy rzut oka wydaje się, że błędy te są nieduże. Pamiętać jednak trzeba o tym, że:

- są to błędy o charakterze systematycznym dla poszczególnych linii,
- wartości tabelki zostały obliczone dla bardzo małego gradientu prędkości ruchów: $\Delta V_o = 1$ mm/rok. Jeżeli gradient będzie 2, 3 czy n -krotnie większy, stosunek błędów tyle samo razy wzrośnie,

Tablica 4

Stosunek błędu zmiany przewyższenia linii do błędu samego pomiaru niwelacji, przy przyjęciu $\Delta V_o = 1$ mm/rok

Δt_i rok	L_i km	30	60	100	150	250
0,5		1	2	2	3	4
1		3	4	5	6	8
2		6	8	10	12	16
5		14	20	25	30	40
10		27	39	50	61	79

(w procentach)

c) przyjęto za podstawę do obliczeń dopuszczalny błąd linii $\pm 2 \cdot \sqrt{L}$ mm. W rzeczywistości błędy niwelacji precyzyjnej mogą być 2 i 3 razy mniejsze, a więc podany w tabelce stosunek błędów przy przyjęciu wartości otrzymywanych z pomiaru, a nie wartości dopuszczalnych, wzrośnie też 2—3 razy.

Wynika z tego, że nawet na terenie stosunkowo w małym stopniu podlegającym ruchom skorupy ($\Delta V_o \approx 1$ mm/rok), już po upływie 5 lat zmiany przewyższeń na linii mogą być równe błędom linii wynikłym z błędów samego pomiaru.

*

Omówimy teraz charakter wpływu ruchów niwelowanej powierzchni na błędy poligonu i na błędy poszczególnych linii niwelacji przed i po wyrównaniu.

a) *Charakter wpływu pionowych ruchów powierzchni na błędy poligonu niwelacyjnego*

Stosunek błędu zamknięcia poligonu — wynikłego z ruchu niwelowanej powierzchni — do błędu przypadkowego pomiaru niwelacji $\left(\frac{\Delta p}{m}\right)$, w porównaniu z analogicznym stosunkiem wziętym dla poszczególnej linii niwelacyjnej poligonu $\left(\frac{\Delta l_i}{m_i}\right)$, jest błędem o charakterze błędu przeciętnego. Z tego też powodu — co wynika również na skutek hamującego

wpływu równania (16) — pierwsza wielkość jest z reguły mniejsza od maksymalnej wartości drugiej wielkości.

Na ogół będzie więc:

$$\sqrt{\frac{\Delta_p}{\sum_{i=1}^k L_i}} < \sqrt{\frac{\Delta_{L_i}^{maks}}{L_i}} \quad (33)$$

Błąd zamknięcia poligonu, wypływający z ruchów powierzchni na objętym niwelacją terenie, jest zależny od zróżnicowania okresów pomiarów linii należących do tego poligonu. Im zróżnicowanie to jest większe, tym większy może być błąd zamknięcia.

Dotychczas, otrzymywany z zestawienia pomierzonych przewyższeń linii niwelacyjnych zamkniętego poligonu, błąd zamknięcia — mieszczący w sobie również wartość Δ_p — był prawie całkowicie przypisywany błędowi pomiaru niwelacji. Na skutek jednak wpływu ruchów skorupy i innych błędów, błąd niwelacji obliczony z zamknięcia poligonu bywa czasami wyraźnie większy od błędu niwelacji, obliczonego na podstawie dwukrotnego pomiaru poszczególnych linii („tam” i „z powrotem”). Różnica pomiędzy wartościami obu błędów wynikać może stąd, że błąd wyznaczony z dwukrotnego pomiaru linii nie zawiera w sobie wpływu ruchu powierzchni, ponieważ oba pomiary dokonywane są w krótkich odstępach czasu. Stąd oba błędy są w zasadzie nieporównywalne.

Ostateczny wpływ nieuwzględnienia redukcji, wyrażający się dla całego poligonu wartością Δ_p , jest redukowany wyrównaniem sieci. Wyrównanie likwiduje w znacznym stopniu, w obrębie poligonu, sumaryczny wpływ nieuwzględnienia redukcji wprowadzając do wolnych wyrazów równań warunkowych wartość Δ_p , zawartą w stwierdzonym na drodze zestawienia pomiarów linii błędzie niezamknięcia poligonu.

Niewprowadzenie jednak do wyrównywanego materiału połowego redukcji ze względu na ruchy — tak do przewyższeń poszczególnych linii jak i do zamknięć poligonów — wypacza wyniki wyrównania i powoduje jego nieściśłość, gdyż nie usuwa błędów o charakterze systematycznym. Jeżeli więc wielkości ruchów usprawiedliwiają konieczność wprowadzenia redukcji, powinny być one wprowadzane przed przystąpieniem do wyrównania.

b) *Charakter wpływu pionowych ruchów powierzchni na błędy poszczególnych linii niwelacyjnych*

Wpływ pionowych ruchów powierzchni na błąd przewyższenia linii — jak już mówiliśmy — jest na ogół większy niż na błąd zamknięcia poligonu. Składa się na to kilka czynników:

- a) dla poszczególnej linii nie ma zastosowania równanie (16),
 b) wielkości redukcji dla poszczególnych linii są zależne od przyjęcia momentu, do którego odnosimy pomiary. W wypadku dużej i powoli realizowanej sieci niwelacyjnej przyjęty moment odniesienia może się znacznie różnić od momentów pomiaru poszczególnych linii, a stąd i wielkości redukcji będą duże.

Wyrównanie sieci tylko częściowo likwiduje wpływ ruchów na wielkość przewyższenia linii. Poprawki wyrównania, równoważące błąd zamknięcia poligonu, który składa się częściowo z błędu powstałego na skutek ruchów powierzchni, są dla poszczególnych linii różne od redukcji, jakie powinny być wprowadzone do przewyższeń tych linii. Wynika to stąd, że wyrównanie sieci rozrzuca poprawki na poszczególne linie w sposób odpowiadający teorii błędów przypadkowych, co — w przypadku błędów systematycznych spowodowanych ruchami — odpowiada do pewnego stopnia rozrzucaniu ich „na ślepo”. Różnica pomiędzy wartością poprawki z wyrównania, a redukcją jest błędem linii pozostałym po wyrównaniu — jeśli odrzucimy w rozumowaniu błędy samego pomiaru niwelacji. (Odrzucenie błędów pomiaru pozwoli nam na łatwe prześledzenie działania „mechanizmu” wyrównania w podanym przykładzie 4).

Przykład 4: Dla poligonu podanego w przykładzie 3, wersja *a*, obliczymy dla poszczególnych linii: wielkości redukcji do momentu średniego, poprawki z wyrównania i błędy pozostałe po wyrównaniu.

Tablica 5

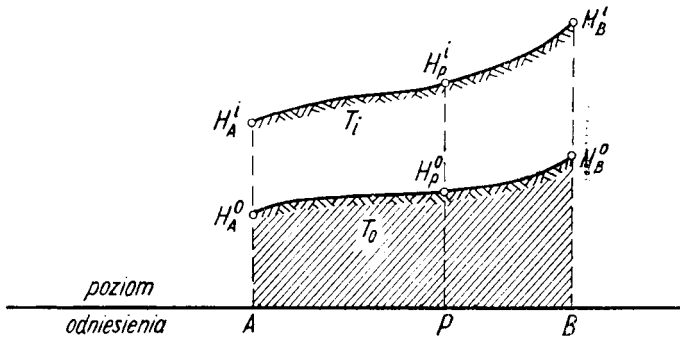
Wersja	Nr pktu	$\Delta V_{n,n+1}$ mm/rok	T_n rok	$(T_n - T_0)$ rok	red. = $-\Delta V_{n,n+1} \cdot (T_n - T_0)$ mm	Poprawki wyrównania mm	Błędy po wyrównaniu mm
<i>a'</i>	<i>A</i>	+ 1	1929	0	0	+ 2	+ 2
	<i>B</i>	+ 1	1927	- 2	+ 2	+ 2	0
	<i>C</i>	- 2	1931	+ 2	+ 4	+ 2	- 2
	<i>A</i>						
Σ		0	$T_0 = 1929$	0	- 6	- 6	0

U w a g a: Poprawki wyrównania posiadają jednakowe wartości na skutek założenia jednakowych długości linii.

*

Ponieważ przeanalizowaliśmy już wpływ ruchów powierzchni na przewyższenie na liniach niwelacyjnych i na wyznaczone błędy niwelacji, pozostaje jeszcze rozpatrzenie wpływu tych ruchów na punkty pośrednie, położone na linii pomiędzy punktami końcowymi (rys. 7).

Oczywiście, przy redukcji możemy podejść do nich tak, jak to zrobiliśmy w stosunku do końcowych punktów linii. W tym wypadku będziemy operowali zmianą przewyższenia między dowolnym punktem linii



Rys. 7. Zmiana wysokości punktu pośredniego na linii niwelacyjnej

(P) a punktem początkowym (A) lub końcowym (B).

Czyli będziemy mieli:

$$h_{AP}^i = h_{AP}^o + (V_P - V_A) \cdot (T_i - T_o) \quad (34)$$

lub

$$h_{BP}^i = h_{BP}^o + (V_P - V_B) \cdot (T_i - T_o)$$

Naturalnie, redukcje te ze względu na stosunkowo małe odległości między punktami A i P czy B i P, czyli przy $V_A \approx V_P$ czy $V_B \approx V_P$, będą miały stosunkowo małe wartości.

Jeżeli wielkości ruchów między końcowymi punktami linii zmieniają się liniowo, to redukcja przewyższeń lub wysokości punktów pośrednich może być też liniowo interpolowana, przy wykorzystaniu danych dotyczących redukcji dla całej linii, jej długości i bieżącego kilometrażu.

Będzie więc

$$h_{AP}^i = h_{AP}^o + (V_B - V_A) \cdot (T_i - T_o) \cdot \frac{L_{AP}}{L_{AB}} = h_{AP}^o - A_L \cdot \frac{L_{AP}}{L_{AB}} \quad (35)$$

Ponieważ dla linii można przyjąć za stałą wartość:

$$\frac{-A_L}{L_{AB}} = q \quad (36)$$

więc będzie:

$$h_{AP}^i = h_{AP}^o + q \cdot L_{AP} \quad (37)$$

oraz:

$$H_P^i = H_A^i + h_{AP}^i = H_A^i + h_{AP}^o + q \cdot L_{AP} \quad (38)$$

Jeżeli w wypadku nieliniowej zmienności wielkości ruchów wzdłuż linii (zmienny gradient) nie byłaby możliwa interpolacja liniowa, należy

wyznaczyć szybkość ruchu każdego interesującego nas punktu wysokościowego i obliczać jego redukcję bezpośrednio wzorami (34).

Przebieg i wyniki wyrównania sieci niwelacyjnej nie są zależne od redukcji punktów pośrednich, toteż moment wprowadzenia tych redukcji jest w zasadzie obojętny.

5. Zagadnienie średniego momentu (epoki) pomiaru poligonu niwelacyjnego i sieci niwelacyjnej

Ze względu na niestałość powierzchni Ziemi, specjalnej wagi nabiera fakt niejednoczesności pomiarów niwelacyjnych. Niejednoczesność ta dotyczy pomiarów linii w poligonie niwelacyjnym, a jeszcze bardziej — poszczególnych linii w całej sieci. Stopniowo, fragmentami realizowana sieć jest w znacznej mierze obciążona systematycznymi błędami, spowodowanymi ruchem niwelowanej powierzchni. Aby przeciwdziałać tym błędom, należy — znając prędkości ruchów — wprowadzać odpowiednie redukcje. Sprowadzają one wartości mierzone w różnych okresach czasu do fikcyjnych pomiarów, dokonanych w jednym wspólnym momencie, czyli sprowadzają wartości mierzone do wspólnej epoki.

Ponieważ w niwelacji wielkością mierzoną są przewyższenia, a przy wyrównaniu operujemy przewyższeniami na liniach, więc też omawiać będziemy redukcje przewyższeń linii.

Wielkość redukcji zależna jest od różnicy prędkości ruchów punktów końcowych linii oraz od wielkości redukcyjnego interwału czasu:

$$h_{AB}^0 = h_{AB}^i - \underbrace{(V_B - V_A) \cdot (T_i - T_0)}_{\text{redukcja}} \quad (39)$$

Ponieważ redukcja jest obciążona błędem, tak ze względu na nieściśle wyznaczenie wielkości ruchów, jak i na błędy określenia momentu pomiaru, więc w dążeniu do zmniejszenia wpływu błędu redukcji na pomiary musimy starać się, aby sama wartość redukcji była możliwie mała. Przy takim postawieniu sprawy oczywiste jest, że należy dążyć do uzyskania możliwie małych redukcyjnych interwałów czasu. Prowadzi to w konsekwencji do przyjęcia za moment odniesienia *średni moment*, obliczony na podstawie rzeczywistych momentów pomiarów linii.

Wyznaczenie średniego momentu ma szczególną wagę, gdy redukcje ze względu na ruchy powierzchni osiągają dużą wartość, czyli gdy: a) wielkości ruchów i ich zróżnicowanie na powierzchni objętej niwelacją jest duże, b) kiedy momenty pomiarów poszczególnych linii niwelacyjnych, wchodzących w skład poligonu czy sieci niwelacyjnej, są bardzo oddalone od siebie w czasie.

Z drugiej strony, małe błędy redukcji, a m. in. możliwie korzystnie

wyznaczony moment średni, ma tym większe znaczenie, im precyzyjniejsze są pomiary niwelacyjne, dla których te redukcje obliczamy.

Redukcje poszczególnych linii poligonu są mniejsze, jeżeli średni moment obliczony zostaje na podstawie momentów pomiaru linii tylko danego poligonu, niżeli wtedy, kiedy zostaje wyznaczony jako średnia z momentów pomiarów linii w całej sieci. Jeżeli jednak mamy do wyrownania sieć niwelacyjną, a nie pojedynczy poligon, moment średni musimy wyznaczyć ze wszystkich pomiarów wchodzących do sieci i przyjmując go za wspólny moment odniesienia pomiarów wszystkich poligonów sieci niwelacyjnej. Gdybyśmy bowiem dla dwu sąsiednich poligonów sieci przyjęli różne momenty odniesienia pomiarów, linia wspólna otrzymałaby dwie różne, a tym samym sprzeczne z sobą redukcje.

W zależności od rodzaju materiału pomiarowego, jakim dysponujemy, od wymagań dokładnościowych i przyjęcia takich czy innych kryteriów, podejście do zagadnienia momentu średniego i jego wyznaczenia jest różne.

Przy spodziewanych małych wartościach redukcji i małych wymaganiach dokładnościowych oraz przy równomiernym rozłożeniu w czasie pomiarów linii wchodzących do sieci, moment średni (T_o) może być obliczony prowizorycznie jako:

$$T_o = \frac{T_p + T_k}{2} \quad (40)$$

gdzie T_p oraz T_k — momenty najwcześniejszego i najpóźniejszego pomiaru linii wchodzącej do sieci.

Jeżeli momenty pomiarów poszczególnych linii w sieci nie mają równomiernego rozłożenia, należy stosować wzór:

$$T_o = \frac{T_1 + T_2 + T_3 + \dots + T_n}{n} = \frac{\sum_1^n T_i}{n} \quad (41)$$

gdzie T_i — moment pomiaru i -tej linii niwelacyjnej

n — ilość linii w poligonie lub w sieci.

Powyższy wzór przyjmuje, że moment pomiaru każdej linii posiada jednakową wagę, bez względu np. na to jak długa jest ta linia. Ponieważ jednak z długością linii — przy założeniu stałości gradientu ruchu powierzchni — łączy się wielkość przyrostu prędkości ruchu, a tym samym i wielkość redukcji, można wprowadzić długość linii jako wagę momentu

jej pomiaru. Przy takim założeniu otrzymujemy moment średni jako średnią z wag:

$$T_o = \frac{T_1 \cdot L_1 + T_2 \cdot L_2 + \dots + T_n \cdot L_n}{L_1 + L_2 + \dots + L_n} = \frac{\sum_1^n T_i \cdot L_i}{\sum_1^n L_i} \quad (42)$$

Oczywiście, przy specjalnie wysokich wymaganiach co do wyznaczenia momentu średniego, nawet wzór (42) należy uważać za przybliżony. Nie uwzględnia on bowiem zróżnicowania linii pod względem wielkości ruchów skorupy na obszarach, przez które te linie przebiegają.

Wagując momenty pomiaru poszczególnych linii, należałoby brać za podstawę dla określenia wag wielkości spodziewanych redukcji lub lepiej — ich stosunek do błędu pomiaru niwelacji.

Odwołując się do poprzednich oznaczeń, możemy przedstawić redukcję linii do momentu średniego T_o jako:

$$- \Delta_{L_i} = - \Delta V_i \cdot (T_i - T_o) \quad (43)$$

Wielkość redukcji, wyrażona w stosunku do błędu pomiaru niwelacji linii, będzie równa:

$$\frac{- \Delta_{L_i}}{m_i} = \pm \frac{\Delta V_i \cdot (T_i - T_o)}{c \cdot \sqrt{L_i}} \quad (44)$$

Wielkość ta może być traktowana jako waga wprowadzenia redukcji do wartości pomierzonej. Tym samym momenty pomiaru linii, dla obliczenia średniego momentu, mogą być wagowane tymi wielkościami.

Wartość c , jeżeli występuje jako jednakowy współczynnik dla wszystkich linii sieci (określa go zwykle wspólna dla całego pomiaru instrukcja), może być wyeliminowana.

Również ze względu na nieznaną wartość $(T_i - T_o)$, na skutek nieznaności szukanego dopiero momentu średniego, musimy z konieczności i ten czynnik odrzucić pozostawiając jako wagę momentu pomiaru:

$$p = \frac{|\Delta V_i|}{\sqrt{L_i}} \quad (45)$$

i obliczając średni moment jako:

$$T_o = \frac{\sum_1^n T_i \cdot \frac{|\Delta V_i|}{\sqrt{L_i}}}{\sum_1^n \frac{|\Delta V_i|}{\sqrt{L_i}}} \quad (46)$$

Wzór ten, mimo dalszego postępu w stosunku do wzorów poprzednich — gdyż uwzględnia już zmienne na różnych obszarach wielkości ruchów powierzchni — stracił znacznie na wartości na skutek wyeliminowania z niego wielkości $(T_i - T_o)$ — czynnika wpływającego w znacznym stopniu na wielkość, a tym samym i wagę redukcji.

Do zagadnienia wyznaczenia średniego momentu, do którego zredukować będziemy wyniki pomiarów linii, możemy podejść jeszcze w inny, bardziej prawidłowy sposób.

Możemy zażądać, aby redukcje linii w całej sieci niwelacyjnej spełniały ogólny warunek:

$$\sum p_r \cdot l_L \cdot \Delta L = \min. \quad (47)$$

Warunek ten jest tu bardzo korzystny, gdyż kładzie nacisk na zmniejszenie dużych redukcji.

Jako wagę redukcji (p_r) możemy przyjąć wagi proporcjonalne do wag pomiarów niwelacyjnych (p_{niw}). W konsekwencji większe redukcje otrzymają linie o większym błędzie niwelacji, a mniejsze — linie o małym błędzie niwelacji.

Powyższe założenie co do wagowania jest słuszne z wielu względów; zarówno ze względu na rzeczywistą proporcjonalną zależność między błędami niwelacji i błędami wyznaczenia wielkości ruchów skorupy ziemskiej, a tym samym i błędami redukcji, jak również ze względu na to, że przy takim ustawieniu wag łączny błąd niwelacji i redukcji będzie możliwie mały *).

Przyjmijmy więc:

$$p_r = \frac{1}{k^2} \cdot p_{niw} = \frac{1}{k^2} \cdot \frac{1}{m_{niw}^2} = \frac{1}{k^2} \cdot \frac{1}{(c \cdot \sqrt{L_i})^2} \quad (48)$$

*) Zależność między błędami redukcji i błędami niwelacji wynika z podstawowego wzoru dla wyznaczenia ruchów powierzchni: $V = \frac{\Delta h}{\Delta t} = \frac{h_2 - h_1}{\Delta t}$. Przy $\Delta t =$

$$= \text{const. mamy: } m_v = \frac{m_{h_2} - h_1}{\Delta t} = \frac{\sqrt{2} \cdot m_{niw}}{\Delta t}$$

Przyjęcie $p_r = \frac{1}{k^2} \cdot p_{niw}$, czyli $m_{red.} = k \cdot m_{niw}$, jest korzystne przy $k < 1$ (co w tym przypadku z reguły jest spełnione), gdyż błąd całkowity wyniku niwelacji (m) wyrazi się błędem pomiaru (m_{niw}) i błędem redukcji ($m_{red.}$) jako: $m = \pm \sqrt{m_{niw}^2 + k^2 m_{niw}^2} = = \pm m_{niw} \sqrt{1 + k^2}$. Przy przyjęciu np. $k = 0,5$ otrzymamy: $m = \pm m_{niw} \sqrt{1 + 0,5^2} \approx \approx \pm 1,1 m_{niw}$. Czyli błąd wyniku wzrasta nawet w tak niekorzystnym wypadku jedynie o 10%.

Równanie (47) będzie wobec tego miało postać:

$$\sum p_r A_L A_L = \sum_1^n \frac{\Delta V_i^2 \cdot (T_i - T_0)^2}{k^2 \cdot c^2 \cdot L_i} = \min. \quad (49)$$

Jednocześnie z równania (47) i z założenia co do sposobu wagowania wyniku warunek:

$$\sum \left(\frac{A_L}{m_{niw.}} \right)^2 = \min. \quad (50)$$

czyli warunek minimum sumy kwadratów stosunku wielkości redukcji do błędów pomiaru niwelacji.

Warunek ekstremum funkcji przedstawionej równaniem (49) zostanie spełniony przez przyrównanie pochodnej względem niewiadomej T_0 do zera:

$$\frac{d(\sum p_r A_L A_L)}{dT_0} = -2 \sum_1^n \frac{\Delta V_i^2 \cdot (T_i - T_0)}{L_i} = 0 \quad (51)$$

Średni moment obliczymy więc z równania:

$$\sum_1^n \frac{\Delta V_i^2 \cdot (T_i - T_0)}{L_i} = 0 \quad (52)$$

Otrzymujemy:

$$T_0 = \frac{\sum_1^n T_i \cdot \frac{\Delta V_i^2}{L_i}}{\sum_1^n \frac{\Delta V_i^2}{L_i}} \quad (53)$$

Jak widzimy, momenty pomiarów linii otrzymały w tym wypadku wagi równe kwadratowi wag użytych do obliczenia momentu średniego wzorem (46).

Wzór (53) jest najkorzystniejszy, gdyż uzyskano go przy założeniu $\sum p_r A_L A_L = \min.$, czyli przy założeniu najmniejszej sumy kwadratów wagowanych wartości redukcji.

Warto na marginesie zaznaczyć, że warunek ten nie prowadzi jednocześnie do uzyskania najprawdopodobniejszej wartości na T_0 — o co w tym wypadku zresztą nie chodzi — ponieważ poszczególne wielkości T_i nie podlegają prawu rozkładu normalnego.

Przedstawione powyżej różne wzory na wyznaczenie momentu średniego wykazują, że moment średni nie jest jedną możliwą wartością dla danego zespołu pomiarów — zmienia się ona w zależności od obioru takiego czy innego kryterium przy wagowaniu momentów pomiaru poszczególnych linii. Oczywiście, jeżeli będzie nam zależało na możliwie najkorzystniejszym wyznaczeniu momentu średniego, zwrócimy się do wzoru (53) wykorzystując dane co do momentów pomiaru linii, ich długości i wielkości ruchów skorupy.

★

Poniżej omówimy przykład 5 (rys. 8, tabl. 6—9), oparty na materiale faktycznym, ilustrujący różne sposoby obliczania momentów średnich oraz otrzymywane w związku z tym różne wielkości redukcji poszczególnych linii.

Jako materiał przykładowy posłużył nam fragment sieci niwelacji precyzyjnej, użytej przez geodetów radzieckich do wyznaczenia ruchów skorupy ziemskiej *) **).

Rys. 8 przedstawia szkic tego fragmentu sieci na tle izolinii określających rozkład prędkości ruchów skorupy Ziemi (w mm/rok) na tym obszarze. Końcowe punkty linii posiadają już określone wielkości ruchów.

W tablicy 6 podajemy obliczenie momentów średnich i redukcji linii dla każdego poligonu sieci z osobna. Momenty średnie obliczono wg wzoru (41), a całe obliczenie dokonano dla dwu pomiarów sieci. W dwu ostatnich kolumnach podano wielkości redukcji, wyrażone w procentach dopuszczalnego błędu niwelacji (przyjęto kryterium $\pm 2 \sqrt{L}$ mm).

Wielkości błędów zamknięcia poligonu — równe sumie redukcji poszczególnych linii, wziętej z odwrotnym znakiem — jak wiemy nie są zależne od momentu średniego. Wielkość tego błędu, jak widzimy z przykładu, mieściła się w granicach 28% błędu niwelacji (prócz jednego wypadku — 145%).

Redukcje poszczególnych linii osiągały większe wartości, np.: 168.9, 49.4, 128.4, 211,1% błędu niwelacji.

W pierwszej części podanego przykładu (tabl. 6) redukcje poszczególnych linii uzyskują swoje minimalne wartości, a to ze względu na operowanie średnim momentem dla pojedynczego poligonu. W wypadku wy-

*) Trudy CNIIGAiK, wyp. 123 „Sowriemiennye wiertikalnyje dwiżeniya ziemnoj kory“, Moskwa 1958.

**) Uwaga: Metodą zastosowaną przez geodetów radzieckich dla wyznaczenia ruchów skorupy eliminowała potrzebę redukcji pomiarów niwelacji do wspólnej epoki.

Tablica 6

Obliczenie momentów średnich i redukcji linii dla poszczególnych poligonów z osobna

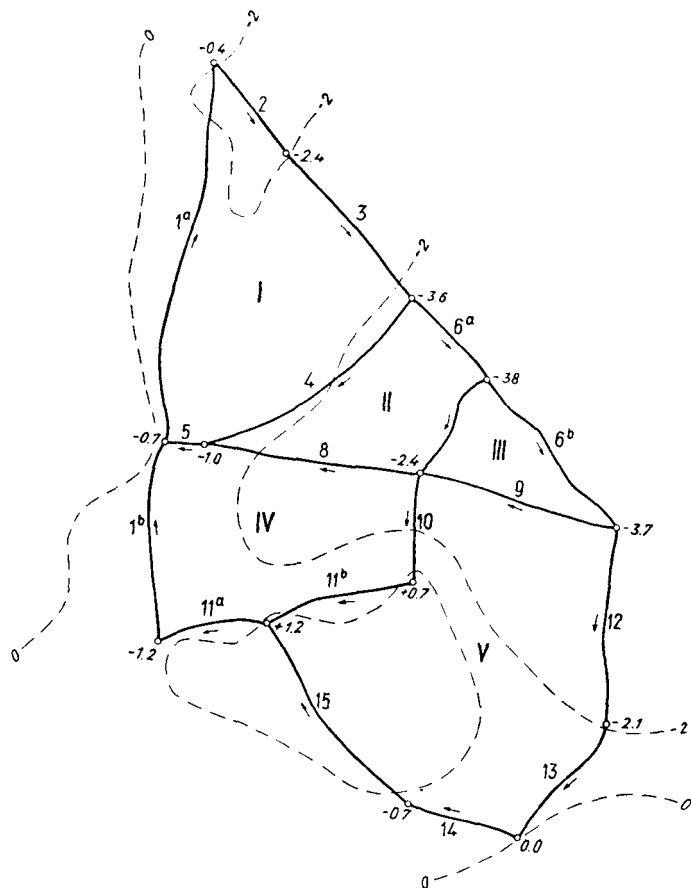
Po- li- gon	Nr linii	Ruchy pun- któw końco- wych ΔV_i	Pierwszy pomiar				Drugi pomiar				L_i	Kry- terium zam- knięcia niwe- lacji 2. $\cdot \sqrt{L_i}$	red. %	
			T_i	T_o	$\Delta t = T_i - T_o$	red.	T_i	T_o	$\Delta t = T_i - T_o$	red.			I pom.	II pom.
		mm/ rok	rok	rok	mm	rok	rok	mm	mm	km	mm			
I	1a	-0.7 0.3	1913	1927	-14	+4.2	1946	-0	0	470	43.4	9.7	0	
	2	-0.4 -2.0	1930		+3	+6.0	1946	0	0	210	29.0	20.7	0	
	3	2.4 -1.2	1936		+9	+10.8	1946	0	0	210	29.0	37.3	0	
	4	-3.6 +2.6	1928		-1	-2.6	1946	0	0	330	36.4	7.1	0	
	5	-1.0 +0.3	1926		-1	+0.3	1946	0	0	20	9.0	3.3	0	
	Σ	-0.7 0.0	133		-2			0					78.1	0
poligon I					+18.7			0		przeciętnie 1240	70.4	26.6	0	
II	4	-1.0 -2.6	1928	1923	+5	+13.0	1946	+1	+2.6	330	36.4	35.6	7.1	
	6a	-3.6 -0.2	1919		-4	-0.8	1946	-1	+0.2	120	22.0	3.6	0.9	
	7	-3.8 +1.4	1918		-5	+7.0	1940	-5	-7.0	160	25.4	27.6	27.6	
	8	-2.4 +1.4	1925.5		-2.5	-3.5	1947	+2	-2.8	280	33.4	10.5	8.4	
	Σ	-1.0 0.0	90.5		-1.5			179	-1				77.3	44.0
poligon II					+15.7			+7.0		przeciętnie 890	59.6	26.3	11.7	
III	6b	-3.8 -0.1	1919	1921	-2	+0.2	1946	+2	-0.2	200	28.4	0.7	0.7	
	9	-3.7 +1.3	1925		+4	-5.2	1946	+2	-2.6	140	23.6	22.0	11.0	
	7	-2.4 -1.4	1918		-3	-4.2	1940	-4	-5.6	160	25.4	16.5	22.1	
	Σ	-3.8 0.0	62		-1			132	0				39.2	33.8
poligon III					-9.2			-8.4		przeciętnie 500	44.8	20.5	18.8	

c.d. tabl. 6

Po- li- gon	Ruchy pun- któw linii końco- wych	ΔV_i	Pierwszy pomiar				Drugi pomiar				L_i	Kry- terium zam- knięcia niwe- lacji $\pm 2 \cdot$ $\sqrt{L_i}$	red.	
			T_i	T_o	$\Delta t = T_i - T_o$	red.	T_i	T_o	$\Delta t = T_i - T_o$	red.			I pom.	II pom.
	mm/ rok	mm/ rok	rok		mm	rok		mm	mm	mm				
IV	5	-0.7	-0.3	1926	-2	-0.6	1946	-1	-0.3	20	\pm 9.0	6.7	3.3	
	8	-1.0	-1.4	1925.5	-2.5	-3.5	1947	0	0.0	280	33.4	10.5	0.0	
	10	-2.4	+3.1	1940	+12	-37.2	1947	0	0.0	120	22.0	168.9	0.0	
	11	+0.7	-1.9	1937	9	+17.1	1948	+1	+1.9	300	34.6	49.4	5.5	
	1b	-1.2	+0.5	1913	-15	+7.5	1946	-1	+0.5	200	28.4	26.4	1.8	
		-0.7												
	Σ		0.0	141.5	+1.5		234	-1				261.9	10.6	
poligon IV					-16.7					przeciętnie	52.4	2.1		
										920	60.6	27.6	3.5	
V	9	-2.4	-1.3	1925	0	0.0	1946	0	0.0	140	23.6	0.0	0.0	
	12	-3.7	+1.6	1921.5	-3.5	+5.6	1946	0	0.0	250	31.6	17.7	0.0	
	13	-2.1	+2.1	1921.5	-3.5	+7.4	1945	-1	-2.1	150	24.6	30.0	8.5	
	14	0.0	-0.7	1926.5	+1.5	+1.0	1946	0	0.0	300	34.6	2.9	0.0	
	15	-0.7	+1.9	1902.5	-22.5	+42.8	1947	+1	-1.9	280	33.4	128.4	5.7	
	11b	+1.2	-0.5	1937	+12	+6.0	1948	+2	+1.0	180	26.8	22.4	3.7	
	10	+0.7	-3.1	1940	+15	+46.5	1947	+1	+3.1	120	22.0	211.1	14.1	
	-2.4													
Σ		0.0	174	-1		325	+3				412.5	32.0		
poligon V					+109.3					przeciętnie	58.9	4.6		
										1420	75.4	145.0	5.7	

równania sieci, moment średni musi być jednak obliczony dla zespołu linii całej sieci; wymaga tego warunek jednakowych wartości redukcji tych samych linii, obliczonych z przyległych poligonów. W tym wypadku redukcje będą z reguły większe.

Podana dalej tablica 7 przedstawia obliczenie momentu średniego dla sieci niwelacyjnej, wziętej jako całość. Momenty średnie obliczone zostały wg wzorów: (41), (42), (46) i (53). W kolumnach 11—26 w celach



Rys. 8 Szkic fragmentu sieci niwelacyjnej na tle izolacji wielkości ruchów skorupy ziemskiej

analizy dokonano zestawienia: redukcyjnych interwałów czasu, wielkości redukcji dla poszczególnych linii, stosunków tych redukcji do wielkości błędów niwelacji oraz kwadratów tych stosunków; wszystkie te wielkości uzyskane zostały w oparciu o różne momenty średnie, obliczone wyżej wymienionymi wzorami.

Obliczenie średnich momentów i redukcji linii, dla całej sieci w oparciu o różne wzory wyjściowe

Wielkości dane				Wielkości pomocnicze dla obliczenia momentów średnich						Obliczenie i porównanie redukcji do różnych momentów średnich															
Nr linii	T rok	ΔV mm/rok	L km	1 √L	ΔV √L	ΔV ² L	T · L	T · ΔV √L	T · ΔV ² L	T _o = 1924.4				T _o = 1922.7				T _o = 1927.5				T _o = 1930.6			
										Δt	red. = Δt · ΔV mm	red. m _{niw} %	(red.) ² (m _{niw}) ²	Δt	red. = Δt · ΔV mm	red. m _{niw} %	(red.) ² (m _{niw}) ²	Δt	red. = Δt · ΔV mm	red. m _{niw} %	(red.) ² (m _{niw}) ²	Δt	red. = Δt · ΔV mm	red. m _{niw} %	(red.) ² (m _{niw}) ²
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26
1a	1913	+0.3	470	0.001	0.001	0.00001	6110	0.001	0.0001	-11.4	-3.42	7.8	61	-9.7	-2.91	6.7	45	-14.5	-4.35	10.0	100	-17.6	-5.28	12.1	146
1b	1913	+0.5	200	70.4	35.2	125	2600	458	162	-11.4	-5.70	20.1	404	-9.7	-4.85	17.1	292	-14.5	-7.25	25.5	650	-17.6	-8.80	31.0	961
2	1930	-2.0	210	69.0	138.0	1905	6300	4140	5715	+5.6	-11.20	38.6	1490	+7.3	-14.60	50.4	2540	+2.5	-5.00	17.2	296	-0.6	+1.20	4.1	17
3	1936	-1.2	210	69.0	82.8	686	7560	2981	2470	+11.6	-13.92	48.0	2304	+13.3	-15.96	55.1	3036	+8.5	-10.20	35.2	1239	+5.4	-6.48	22.4	502
4	1928	+2.6	330	54.9	142.7	2048	9240	3996	5734	+3.6	+9.36	25.6	655	+5.3	+13.78	37.8	1429	+0.5	+1.30	3.6	13	-2.6	-6.76	18.5	342
5	1926	+0.3	20	222.2	66.7	450	520	1734	1170	+1.6	+0.48	5.3	28	+3.3	+9.90	110.0	12100	-1.5	-0.45	4.5	20	-4.6	-1.38	15.3	234
6a	1919	-0.2	120	90.9	18.2	33	2280	346	63	-5.4	+1.08	4.9	24	-3.7	+0.74	3.4	12	-8.5	+1.70	7.7	59	-11.6	+2.32	10.5	110
6b	1919	+0.1	200	70.4	7.0	5	3800	133	10	-5.4	-0.54	1.9	4	-3.7	-0.37	1.3	2	-8.5	-0.85	3.0	9	-11.6	-1.16	4.1	17
7	1918	+1.4	160	78.7	110.2	1225	2880	1984	2205	-6.4	-8.96	35.3	1246	-4.7	-6.58	25.9	671	-9.5	-13.30	52.4	2746	-12.6	-17.64	69.5	4830
8	1925.5	+1.4	280	59.9	83.9	700	7140	2139	1785	+1.1	+1.54	4.6	21	+2.8	+3.92	11.8	139	-2.0	-2.80	8.4	71	-5.1	-7.14	21.4	458
9	1925	+1.3	140	84.7	110.1	1207	3500	2752	3017	+0.6	+0.78	3.3	11	+2.3	+2.99	12.7	161	-2.5	-3.25	13.8	190	-5.6	-7.28	30.8	949
10	1940	+3.1	120	90.9	281.8	8008	4800	11272	32032	+15.6	+48.36	219.5	48180	+17.3	+53.63	243.5	59292	+12.5	+38.75	175.9	30941	+9.4	+29.14	132.3	17503
11a	1937	-2.4	120	90.9	218.2	4808	4440	8073	17790	+12.6	-30.24	137.3	18851	+14.3	-34.32	155.8	24274	+9.5	-22.80	103.5	10712	+6.4	-15.36	69.7	4858
11b	1937	+0.5	180	74.6	37.3	139	6660	1380	514	+12.6	+6.30	23.5	552	+14.3	+7.15	26.7	713	+9.5	+4.75	17.7	313	+6.4	+3.20	11.9	142
12	1921.5	+1.6	250	63.1	101.3	1024	5375	2178	2202	-2.9	-4.64	14.7	216	-1.2	-1.92	6.1	37	-6.0	-9.60	30.3	918	-9.1	-14.56	46.0	2116
13	1921.5	+2.1	150	81.3	170.7	2940	3225	3670	6321	-2.9	-6.09	24.7	610	-1.2	-2.52	10.2	104	-6.0	-12.60	51.2	2621	-9.1	-19.11	77.6	6022
14	1926.5	-0.7	300	57.8	40.5	163	7950	1073	432	+2.1	-1.47	4.2	18	+3.8	-2.66	7.7	59	-1.0	+0.70	2.0	4	-4.1	+2.87	8.3	69
15	1902.5	+1.9	280	59.9	113.8	1289	700	284	322	-21.9	-41.61	124.8	15575	-20.2	-38.38	115.1	13248	-25.0	-47.50	142.5	20306	-28.1	-53.39	160.2	25664
Σ	438.5		3740		1772.2	26774	85080	48772	81969	134.7	195.69	744.1	90252	138.1	217.18	897.3	118154	142.5	187.15	704.4	71208	167.5	203.07	745.7	64940

$$T_o = \frac{\sum_1^n T_i}{n} = \frac{438.5}{18} = 24.4$$

$$T_o = \frac{\sum_1^n T_i \cdot L_i}{\sum_1^n L_i} = \frac{85080}{3740} = 22.7$$

$$T_o = \frac{\sum_1^n T_i \cdot \frac{|\Delta V_i|}{\sqrt{L_i}}}{\sum_1^n \frac{|\Delta V_i|}{\sqrt{L_i}}} = \frac{48772}{1772.2} = 27.5$$

$$T_o = \frac{\sum_1^n T_i \cdot \frac{\Delta V_i^2}{L_i}}{\sum_1^n \frac{\Delta V_i^2}{L_i}} = \frac{81969}{2677.4} = 30.6$$

Uwaga: Znaki wartości ΔV w rubryce 3 wynikły z przyjęcia kierunków linii tak, jak wskazują strzałki na rys. 8.

Analizując sumy wspomnianych wielkości widzimy, że:

a) dla momentu średniego obliczonego wzorem (41) ($T_o = 1924,4$), otrzymujemy najmniejszą sumę redukcyjnych interwałów czasu ($\Sigma |\Delta t| = 134,7$),

b) wzór (42) ($T_o = 1932,7$) zakładający jednakowy na całym terenie gradient (ΔV_o), a wobec tego — redukcję proporcjonalną do długości linii, okazał się tu najmniej korzystny. Powodem tego — jak łatwo stwierdzić — jest występowanie dużych gradientów, a tym samym — dużych redukcji, właśnie na liniach krótkich, co nie odpowiadało założeniom.

c) najkorzystniejsze są wzory (46) ($T_o = 1927,5$) oraz (53) ($T_o = 1930,6$). Z pierwszego otrzymaliśmy najmniejszą sumę stosunków $\left(\frac{red.}{m_{niw.}}\right)$, z drugiego — najmniejszą sumę kwadratów tych stosunków.

Wszystkie stwierdzenia, zawarte w punktach a)—c), są oczywiście konsekwencją założeń co do sposobu wagowania momentów pomiaru linii.

Celem bardziej wyraźnego porównania wyników redukcji uzyskanych w oparciu o momenty średnie, obliczone różnymi wzorami, podajemy procentowe porównanie odpowiednich sum w stosunku do sum uzyskanych dla $T_o = 1930,6$ (tabl. 8).

Tablica 8

Porównanie charakterystycznych wielkości uzyskanych w oparciu o różne momenty średnie (sumy obliczone dla wszystkich linii)

Momenty średnie obliczone różnymi wzorami		$\Sigma \Delta t $	$\Sigma red. $	$\Sigma \left(\frac{red.}{m_{niw.}}\right)$	$\Sigma \left(\frac{red.}{m_{niw.}}\right)^2$
		%	%	%	%
$T_o = 1924,4$	wzór (41)	80.4	96.4	99.8	139.0
$T_o = 1922,7$	wzór (42)	82.4	106.9	120.3	181.9
$T_o = 1927,5$	wzór (46)	85.1	92.2	94.5	109.6
$T_o = 1930,6$	wzór (53)	100.0	100.0	100.0	100.0

Widoczna tu przewaga momentów średnich $T_o = 1927,5$ oraz $T_o = 1930,6$ jeszcze bardziej się uwypukli, jeśli do zestawienia, zamiast wszystkich linii — jak w tablicy 8 — weźmiemy jedynie te linie, których redukcje obliczone w odniesieniu do któregośkolwiek momentu średniego, przekraczają 50% błędu pomiaru niwelacji.

Przy takim założeniu (odpowiada mu 8 linii na ogólną ilość 18) otrzymujemy tablicę 9, jeszcze bardziej przemawiającą za wzorami (46) i (53), a szczególnie za tym ostatnim.

Tablica 9

Porównanie charakterystycznych wielkości, uzyskanych w oparciu o różne momenty średnie (sumy obliczone dla linii, których redukcje przekraczają 50% wartości błędu niwelacji)

Momenty średnie obliczone różnymi wzorami	$\Sigma \Delta t $	$\Sigma red. $	$\Sigma \left(\frac{red.}{m_{niw.}} \right)$	$\Sigma \left(\frac{red.}{m_{niw.}} \right)^2$
$T_o = 1924.4$ wzór (41)	102.6	111.9	115.0	148.0
$T_o = 1922.7$ wzór (42)	107.1	122.4	139.0	193.0
$T_o = 1927.5$ wzór (46)	98.4	104.8	105.7	115.5
$T_o = 1930.6$ wzór (53)	100.0	100.0	100.0	100.0

6. Wykorzystanie wyników analizy. Wnioski

Przeprowadzona analiza w znacznej swej części miała charakter teoretyczny, aczkolwiek rozpatrywana była pod kątem realnych wielkości ruchów skorupy Ziemi i praktycznie uzyskiwanych dokładności niwelacji precyzyjnej. Miała ona za zadanie określenie wielkości i charakteru wpływu długookresowego pionowego ruchu skorupy Ziemi na wyniki i wyznaczone błędy niwelacji. W poszczególnych rozdziałach omówiono wpływ tych ruchów na zmianę wysokości punktu, na zmianę przewyższenia na linii niwelacyjnej oraz na zamknięciu poligonu. Dalej omówiono wielkość wpływu tych ruchów w stosunku do przypadkowych błędów samego pomiaru niwelacji, zarówno przed jak i po wyrównaniu. Specjalny rozdział poświęcono wyznaczaniu tzw. momentu średniego, od którego zależą wielkości i rozkład poprawek redukcyjnych w sieci niwelacyjnej.

Znając wielkości pionowych ruchów skorupy ziemskiej na obszarze objętym niwelacją oraz korzystając z wyników analizy, można w każdym wypadku określić czy dane pomiary niwelacyjne, ze względu na rozkład pomiarów w czasie, wymagają redukcji do średniego momentu, czy — biorąc pod uwagę dokładność techniki pomiaru — można z tej redukcji zrezygnować. W tym celu korzystać można ze wzoru w postaci (30) lub (44) oraz z danych w tablicy 3 i 4 — po ich odpowiedniej adaptacji do konkretnych warunków i wymagań. Przy ocenie celowości wprowadzenia redukcji należy też brać pod uwagę wielkość błędu wyznaczenia ruchu skorupy ziemskiej.

Podstawą dla określenia wielkości redukcji powinna być mapa z izoliami wielkości ruchów powierzchni skorupy ziemskiej oraz dane dotyczące okresów pomiaru poszczególnych linii niwelacyjnych w sieci. Na

podstawie mapy należy wyinterpolować wielkości ruchów dla końcowych punktów linii.

Jeżeli okaże się, że wprowadzenie redukcji ze względu na ruchy skorupy jest celowe, należy określić moment średni dla poligonu czy sieci niwelacyjnej. W zależności od wymagań dokładnościowych korzystając możemy ze wzorów (41), (42), (46) lub (53) wiedząc, że ten ostatni jest najściślejszy i daje najkorzystniejsze rezultaty.

Obliczenie momentu średniego i redukcji dla poszczególnych linii niwelacji można przeprowadzić wzorując się na tablicy 6 lub 7, przystosowując je do obliczenia momentu średniego jednym z omówionych wzorów.

Wielkości redukcji ze względu na ruchy pionowe skorupy powinny być wprowadzane jako poprawka do przewyższeń na poszczególnych liniach, przed przystąpieniem do wyrównania sieci.

Obliczenie redukcji dla poszczególnych linii, a następnie dla poligonów niwelacyjnych, jest pierwszym etapem eliminacji wpływu ruchów skorupy na wyniki niwelacji. Etap ten jest potrzebny dla prawidłowego wyrównania sieci, gdyż usuwa błędy o wyraźnie systematycznym charakterze.

Wprowadzanie redukcji wysokości dla punktów pośrednich, leżących pomiędzy punktami końcowymi, jest dalszym etapem, który — w zasadzie — może być zrealizowany zarówno przed jak i po wyrównaniu sieci. Redukcje dla punktów pośrednich mogą być często obliczane na drodze proporcjonalnego rozrzucenia redukcji obliczonej dla punktów końcowych linii. Ma to miejsce w wypadku jednokierunkowych i regularnych zmian wielkości ruchów w obrębie linii, a także w wypadku małego gradientu tej wielkości. Stosowanie liniowej interpolacji redukcji powinno być poprzedzone analizą dokładności w odniesieniu do dokładności samego pomiaru niwelacji.

Wprowadzenie do niwelacji precyzyjnej redukcji ze względu na ruchy powierzchni może być dokonywane w typowo różnych wypadkach i mieć różne aspekty.

A więc:

1) Znając wielkości ruchów skorupy — np. z porównania uprzednich pomiarów niwelacyjnych — można wprowadzać redukcje ze względu na ruch niwelowanej powierzchni w celu zwiększenia dokładności każdego następnego pomiaru sieci; w celu zwiększenia wewnętrznej zgodności każdorazowego pomiaru tej lub innej sieci położonej na danym terenie.

2) Wprowadzając redukcje do pomiarów sieci, która nie była użyta do wyznaczenia wielkości ruchów skorupy na tym terenie, możemy w sposób niezależny sprawdzić czy wyznaczone wielkości ruchów są wiel-

kościami prawdziwymi. Potwierdzeniem właściwego wyznaczenia wielkości ruchów będzie zmniejszenie błędów niwelacji po wprowadzeniu redukcji (zmniejszenie błędów zamknięcia poligonów).

Waga tego sprawdzenia będzie tym większa, im większe będą redukcje w porównaniu do błędów samego pomiaru niwelacji. Jeżeli błędy niwelacji będą tego samego rzędu co redukcje — waga tego sprawdzenia będzie niewielka.

3) Możemy korzystać z redukcji już przy samym wyznaczaniu prędkości ruchów. Będzie to miało miejsce, kiedy ruchy skorupy będą wyznaczane na drodze porównania wysokości punktów lub przewyższeń na liniach tej samej sieci niwelacyjnej dwukrotnie niezależnie w odpowiednim odstępie czasu pomierzonej i niezależnie dwukrotnie wyrównanej — w wypadku długiego okresu trwania poszczególnego pomiaru sieci. Pierwszy raz porównywane wyniki niwelacji będą obciążone — prócz błędów samego pomiaru — również błędem niewprowadzenia redukcji do średniego momentu pomiaru, przed dokonaniem wyrównania. Otrzymamy więc tylko pierwsze przybliżenie szukanych wielkości ruchów. Mając je możemy już wprowadzić odpowiednie redukcje do surowych wyników pomiaru i tak otrzymane wartości poddać powtórnemu wyrównaniu (dotyczy to obu porównywanych sieci). Drugie przybliżenie powinno dać bliższe prawdy wyznaczenie ruchów *).

Również i w tym przypadku metoda wyznaczania ruchów jest tym pewniejsza, im większy jest wpływ ruchów w porównaniu do błędów samej niwelacji.

Niniejsza analiza daje możliwość wyrobienia poglądu na wielkość wpływu systematycznych ruchów powierzchni na niwelację. Znajomość tego wpływu oraz znajomość rozkładu wielkości ruchów na terenie objętym siecią niwelacyjną nasunąć może pewne sugestie co do projektowania przyszłych sieci niwelacyjnych i ich pomiarów. Sugestie te dotyczyć będą zarówno usytuowania linii jak też projektowanej długości okresu czasu pomiaru całej sieci lub jej poszczególnych fragmentów.

Aczkolwiek przy analizowaniu wpływu ruchu powierzchni na wyniki niwelacji miano na względzie w zasadzie ogólne ruchy tektoniczne, to jednak, przez analogię, można zakres analizy rozszerzyć i na inne podobne warunki pomiaru.

Można więc stosować podobne podejście do zagadnienia w wypadku niwelacji na obszarze objętym lokalnymi ruchami skorupy, jak to ma

*) *Kukkamäk!* T. J. „The land uplift in Finland determined with two levelings as with water level observations”. Bull. Géodésique, Nr. 36, Londyn 1955.

miejsce np. w zagłębiu węglowym na skutek odbudowy górniczej. Oczywiście ze względu na możliwe zmienności ruchów, inna musi tu być częstość pomiarów i krótsze redukcyjne interwały czasu. W wypadku bowiem lokalnych ruchów skorupy najczęściej mamy do czynienia ze stosunkowo dużymi ich wielkościami, o dużym gradiencie, przy małych błędach wyznaczającej je niwelacji (mały obszar, krótki pomiar).

Podobne redukcje mogą być stosowane przy geodezyjnym badaniu odkształceń budowli i w niektórych innych wypadkach, tam gdzie wielkość obserwowana jest zmienna w czasie, a prawo tej zmienności jest proste i stałe w pewnym określonym interwale czasu.

Na zakończenie zestawimy wnioski, jakie wypływają z analizy pomiaru niwelacji precyzyjnej na terenie podlegającym powolnemu ale systematycznemu ruchowi pionowemu.

1) Wyznaczone drogą niwelacji przewyższenia między punktami są — ściśle biorąc — aktualne jedynie dla momentu pomiaru (jeśli czas trwania jego jest dostatecznie krótki); z biegiem czasu coraz bardziej się dezaktualizują.

2) Wyznaczone wysokości punktów i przewyższenia w sieci niwelacyjnej są obarczone systematycznymi błędami na skutek nie zachowania jednoczesności pomiarów poszczególnych linii w sieci.

3) Średni błąd niwelacji wyznaczony z niezamknięć poligonów i z wyrównania sieci zawiera w sobie systematyczny wpływ ruchu powierzchni, a więc nie jest ścisłą oceną dokładności samego pomiaru niwelacji.

4) Dla uzyskania lepszej zgodności pomiarów w sieci niwelacyjnej — jeśli analiza wykaże tego celowość — należy otrzymane z pomiaru wyniki zredukować do wspólnej epoki, a praktycznie — do wyznaczonego momentu średniego.

5) Średni błąd niwelacji obliczony z niezamknięć poligonów i z wyrównania sieci, w której — przed wyrównaniem — wprowadzone były redukcje do wspólnej epoki, nie zawiera już praktycznie wpływu ruchów skorupy, a tym samym daje ściślejszą ocenę dokładności pomiaru niwelacji.

Rękopis dostarczono Redakcji w październiku 1959 r.

ТАДЭУШ ВЫЖЫКОВСКИ

ВЛИЯНИЕ СИСТЕМАТИЧЕСКИХ ВЕРТИКАЛЬНЫХ ДВИЖЕНИЙ ЗЕМНОЙ КОРЫ НА РЕЗУЛЬТАТЫ И ОПРЕДЕЛЯЕМЫЕ ОШИБКИ ПРЕЦИЗИОННОЙ НИВЕЛИРОВКИ

Резюме

Вертикальные движения земной коры общего, тектонического характера отличаются тем свойством, что для данного района имеют черты постоянства, это значит, характеризуются постоянной величиной в наблюдаемом промежутке времени. Свойство это особенно важно, так как благодаря ему можно использовать математическую зависимость между изменением высоты пункта, скоростью движения и временем.

Эта математическая зависимость была основной предпосылкой проведенного в этом труде анализа влияния систематических вертикальных движений земной коры результаты нивелировки и определяемые ошибки нивелирной сети, реализуемой постепенно в течение определенного промежутка времени. Проведенный анализ в значительной мере имеет теоретический характер, хотя он принимал во внимание возможные величины движения земной коры и практически получаемые точности прецизионной нивелировки. Результаты анализа получают специальное значение и полную возможность практического использования только тогда и там, где уже определены величины движений земной коры.

Материал рассматривается систематически, начиная от наиболее простых элементов, а кончая более сложными.

Принимая во внимание изменчивость нивелируемой поверхности во времени — эта изменчивость определяется скоростью движения в данной точке — рассмотрено изменение высоты точки, влияние движения земной коры на изменение превышения на нивелирной линии и на ошибку увязки нивелирного полигона.

Величина невязки полигона (Δ_p) определяется двумя формулами разной пригодности: формулой (24) — пользуясь изменениями высот

конечных точек линии в промежутках времени между измерениями соседних линий, и формулой (25) — пользуясь изменениями превышения на линиях в промежутке времени между моментом нивелировки линии (T_n) и принятым общим моментом относимости измерения (T_0).

Далее рассмотрено величину влияния движения земной коры на ошибку линии и нивелирного полигона по сравнению с ошибкой самого нивелирования. Процентное соотношение этих ошибок для линии, при принятии разных предпосылок, представлено в табл. 3 и 4.

Дана также характеристика влияния ошибки движения земной коры до и после уравнивания нивелирования.

Если величина влияния движения земной коры на нивелирование достаточно большая, следует — ранее уравнивания — ввести в наблюдённые превышения на линиях редукции к общему среднему моменту.

Проблема общего момента относимости наблюдению целой сети, т. е. так наз. „среднего момента” подробно рассмотрена. Даны формулы (40), (41), (42), (46) и (53), служащие для определения этого среднего момента. Эти формулы получены при принятии разных предпосылок, от совсем простых до позволяющих приписать точный вес моменту наблюдения каждой нивелируемой линии. Наиболее точная формула (53) ставит вес момента наблюдения линии в зависимость от разности скоростей движения её конечных точек и её длины, соблюдая при этом условие минимума суммы квадратов соотношении редукции линии к ошибкам линии, вытекающим из измерений.

Применение более или менее точной формулы для определения среднего момента зависит, с одной стороны, от величины движения поверхности и протяжения наблюдения во времени, а с другой стороны — от требования точности нивелирования.

В труде даны примеры конкретных числовых вычислений.

Используя конкретный, наблюденный материал, данный на рис. 8, в табл. 6, как пример, пользуясь приближенной формулой (41) вычислено редукции линии к средним моментам, определенным независимо для каждого полигона. В действительности однако, в виду необходимости введения одинаковых редукции для совместных линии соседних полигонов, средний момент должен быть общим для целой сети.

Таблица 7 представляет вычисления общего среднего момента для целой сети. Для сравнения, этот средний момент вычислен при помощи формул (41), (42), (46) и (53), причем дано сравнение значений характерных величин (табл. 7, 8 и 9) таких, как напр. величины редукции и их соотношения к ошибкам измерения линии.

Последняя часть труда занимается способами практического использования результатов анализа, при предпосылке, что в районе нивелирования известны величины движения земной коры. Показано как следует поступать (пользуясь формулами и таблицами), чтобы определить целесообразность или нецелесообразность введения редукции к среднему моменту, рассмотрено пределы редукции и ход вычислений, опираясь на данные формулы и примеры.

Анализ позволяет выработать себе суд относительно величины влияния систематических движений земной коры на результаты нивелирования. Знание этого влияния и знание распределения величин движений земной коры в районе нивелировки помогает поставить указания, директивы, относительно проектирования будущих сетей и их наблюдений. Эти указания могут касаться равно расположения линии нивелирования, как и проектированного периода времени, предназначенного на измерение целой сети или ее отдельных частей.

TADEUSZ WYRZYKOWSKI

INFLUENCE OF SYSTEMATIC VERTICAL MOVEMENTS
OF THE EARTH CRUST UPON RESULTS AND DETERMINED ERRORS
OF PRECISE LEVELLING

S u m m a r y

Vertical movements of the earth crust, of a general tectonic nature, owing to their proprieties are over a given area of a somewhat constant character, i. e. they remain constant during an observed time interval. The said characteristic is of a particular importance as it makes possible to use mathematical relation between the change in height of a point, the speed of movement and the time.

In the present paper just the above mathematical dependence was the basic foundation to analyse the influence of systematic vertical crust movements upon results of precise levelling, and upon levelling net and its errors to be determined, successively realised during a fixed time interval. The completed analysis, in its considerable part, is of a theoretical character, though it has been considered under an angle of real quantity of earth crust movements and practically attainable accuracy of precise levelling. The results of analysis are of particular importance, and might be fully used in practice only when and where the magnitude of crust movements have been already determined.

The material is compiled systematically, starting from the most simple elements till up to the most compound ones.

The change in the height of a point, the influence of earth crust movement upon the height difference on levelling line and upon the closure of levelling polygon have been discussed, taking into consideration variability of the levelled surface with time.

The magnitude of the discrepancy (Δ_p) in closure of levelling polygon was determined by two formulae of different fitness; by formula (24) using height changes of terminal points during time interval between measurements of neighbouring lines, and by formula (25) using height

changes between measurement moment of the line (T_n) and an accepted common reference moment (T_0).

Further on the magnitude of the influence of earth crust movement on the error both of the levelling line and levelling polygon in comparison with the error of levelling measurement itself has been discussed. Different assumptions made, the percent relation of those errors for a line has been shown in tables 3 and 4.

The influence of the error of surface movement has been characterised both before and after the compensation.

If the magnitude of earth crust movement is sufficiently large it is necessary, before compensation is started, to introduce into measured height differences on the lines reductions brought to a common moment.

The problem of common reference moment or so called mean moment has been broadly discussed. To determine that mean moment formulae (40), (41), (42), (46) and (53) are given. They have been derived by taking various assumptions, starting from the most primitive ones up to those weighing the moment of measurement of the levelling line as exactly as possible. The most precise formula (53) makes the weight of the moment of line surveying dependent on the speed difference of movement of terminal points and the length of the line, preserving the condition of minimum of sum squares of ratio of line reductions to that of line errors originating from the measurement.

Application of a less or a more exact formula for determination of the mean moment will depend, on the one hand, on the magnitude of area movement and the extent of measurements in time, that is on the magnitude of the reductions, and on the other hand, on demands as to the precision of levelling.

The paper is elucidated by instances of concrete computations. Founded on real material given on the graph 3 and in the table 6, a pattern calculation of line reductions for mean moment determined distinctly for each polygon, by using approximate formula (41) is added. In practice, however, mean moment has to be common for the whole net, because it is essential that the reductions of common lines of adjacent polygons are given unequivocally.

Table 7 illustrates the computation of a common moment for the whole net. For the sake of comparison it has been calculated by means of formulae (41), (42), (46) and (53); and then in the tables 7, 8 and 9 there is also presented a comparison of the characteristic values of the reductions and their proportions to the errors of length measurements.

In the last part of the paper practical ways of using the results of analysis are discussed on condition that crust movements in involved

area are known. A method of proceeding has been given (use of formulae and tables) to make sure whether the introduction of a reduction into mean moment is appropriate resp. inappropriate; it has then been discussed the sphere of application of the reduction and the procedure based on the above formulae and the appertaining calculations.

The analysis enables to get an opinion as to the greatness of influence of systematic movements of the area upon levelling. Knowledge of that influence and notion of the disposition of the greatness of movements in the area embraced by a levelling net may hint to some additional suggestions how the future nets and their measurements should be lanned. Suggestions will involve location of the line as well as the planned period of time foreseen for measurement of the total net or its particular parts.