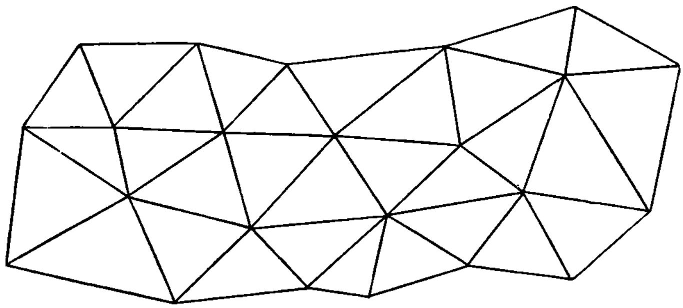
STEFAN HAUSBRANDT 526.53

Przybliżone wyrównanie niezależnych sieci powierzchniowych

1. Treść zagadnienia

Nowoczesne instrumenty geodezyjne, służące do pomiarów kątowych w sieciach triangulacyjnych, produkowane przez przodujące w przemyśle optycznym firmy (np. Wild, Zeiss i inne), pozwalają na dokonywanie pomiarów kątowych z tak wysoką dokładnością, że staje się często problematyczną celowość wyrównywania błędów pomiaru kątów sieci metodą najmniejszych kwadratów. Uwaga ta nasuwa się przede wszystkim przy wyrównywaniu niezależnych sieci powierzchniowych — nawet bardzo wielkich — tzn. sieci nieopartych o punkty stałe, a zbudowanych z zespołów układów centralnych (rys. 21).



Rys. 21

Wyrównanie błędów kątowych w tego rodzaju sieci, tzn. przyporządkowanie obserwacjom kątowym takich poprawek v, aby obserwacje wyrównane spełniły wszystkie warunki matematyczne: trójkątowe, horyzontalne i sinusowe, osiągnąć tu bowiem można łatwo, stawiając inne od założeń metody najmniejszych kwadratów ($[vv] = \min.$) założenia wyrównawcze, pozwalające na nierównie mniejszy nakład pracy rachunkowej, a dostarczające rezultaty pod względem praktycznym identyczne z metodą najmniejszych kwadratów.

W niniejszej pracy omówimy tego rodzaju wyrównanie „przybliżone" niezależnej sieci powierzchniowej, uogólniając na sieć złożoną z zespołu układów centralnych zasadę wyrównania stopniowego (kolejne spełnianie warunków), która sugerowana była dla sieci lokalnych, zawierających jeden układ centralny, w polskiej instrukcji pomiarowej obowiązującej w okresie międzywojennym (tzw. Instrukcja Ministerstwa Robót Publicznych).

Zasadę wyrównania sformułujemy jak następuje:

Wyrównanie przeprowadzone zostaje w trzech kolejnych etapach, mających na celu stopniowe poprawienie wartości kątów tak, aby najpierw spełnione zostały warunki trójkątowe, następnie hyryzontalne z zachowaniem warunków trójkątowych, wreszcie warunki sinusowe z zachowaniem warunków horyzontalnych i trójkątowych. Przy tym poprawki jakie otrzymują różne kąty występujące w warunku matematycznym z tytułu niespełnienia się tego warunku winny być sobie równe co do wartości bezwzględnej, zaś poprawienie kąta, spełniającego już pewien warunek matematyczny na skutek rachunku w etapie poprzedzającym, zostaje zrekompensowane przez równe a przeciwne co do znaku zniekształcenie innych kątów figurujących w tym warunku.

Można wykazać — co zrobimy dalej (patrz p. 2) — że w oparciu o postawione zasady, nie naruszające wymagań logiki technicznej, wyrównanie mieć będzie następujący przebieg:

Etap I

Wyrównanie warunków trójkątowych, przez rozdzielenie w każdym trójkącie odchyłki: $F = 200^g - A - B - C$, w równej części na wszystkie kąty trójkąta.

Etap II

Wyrównanie warunków horyzontalnych. Po ustaleniu wielkości odchyłek horyzontu: $H = 400^g - C_1 - C_2 .. - C_n$ dla każdego wierzchołka układu centralnego, w oparciu o wielkości kątów uzyskane z rachunku w etapie I, należy obliczyć dla wierzchołka każdego układu centralnego odpowiadającą mu wielkość x.

Wielkości x uzyskujemy rozwiązując symetryczny układ równań liniowych:

$$\begin{array}{cccc|c}
x_1 & x_2 & x_3 \;\ldots\ldots & x_u & 1 \\
\hline\hline
Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} \;\ldots\ldots & Q_{1u} & \frac{1}{2}H_1 \\
Q_{21} & Q_{22} & Q_{23} \;\ldots\ldots & Q_{2u} & \frac{1}{2}H_2 \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
Q_{u1} & Q_{u2} & Q_{u3} \;\ldots\ldots & Q_{uu} & \frac{1}{2}H_u
\end{array} \qquad \begin{array}{l} u \text{ — ilość} \\ \text{układów} \\ \text{centralnych} \end{array} \qquad (1)$$

przy czym $Q_{ii} = n_i$ gdzie n_i — ilość trójkątów w i-tym układzie centralnym, zaś $Q_{ij} = -1$ jeżeli punkty $i, j,$ są sąsiadującymi punktami centralnymi, oraz $Q_{ij} = 0$ jeżeli to nie zachodzi. Dla każdego punktu nie będącego wierzchołkiem układu centralnego, odpowiadająca wielkość x jest zerem. Po wyznaczeniu wartości x, obliczamy dla każdego kąta sieci poprawkę drugiego etapu, odejmując od podwojonej wielkości x, przyporządkowanej punktowi centralnemu kąta, wielkości x przyporządkowane punktowi na lewym i punktowi na prawym ramieniu kąta:

$$\boxed{v_{II} = 2x_C - x_L - x_P} \tag{2}$$

Etap III

Wyrównanie warunków sinusowych. Po ustaleniu wielkości odchyłek sinusowych: $S = \Sigma \lg \sin P - \Sigma \lg \sin L$, gdzie P-kąty prawe, L-kąty lewe dla obserwatora znajdującego się w centrum układu — w oparciu o wartości kątów uzyskane z rachunku w etapie II — należy obliczyć dla wierzchołka każdego układu centralnego odpowiadającą mu wielkość y. Wielkości y uzyskujemy rozwiązując symetryczny układ równań liniowych:

$$\begin{array}{ccccc|c} y_1 & y_2 & y_3 & \cdots\cdots & y_u & 1 \\ \hline R_{11} & R_{12} & R_{13} & \cdots\cdots & R_{1u} & S_1 \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} & \cdots\cdots & R_{2u} & S_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ R_{u1} & R_{u2} & R_{u3} & \cdots\cdots & R_{uu} & S_u \end{array} \qquad \begin{array}{l} u \text{ — ilość} \\ \text{układów} \\ \text{centralnych} \end{array} \tag{3}$$

przyczym $R_{ii} = \Sigma r_i$ jest sumą „różnic" lg sin kątów peryferyjnych w i-tym układzie centralnym (tzn. sumą przyrostów wartości lg sin, odpowiadających przyrostowi wartości kąta o 1^{cc}), zaś $R_{ij} = - \Sigma r_{ij}$ jest minus sumą różnic lg sin kątów pod którymi obserwowano odcinek i-j, gdy i,j są sąsiadującymi punktami centralnymi, zaś $R_{ij} = 0$, gdy to nie zachodzi. Dla każdego punktu, nie będącego wierzchołkiem układu centralnego, odpowiadająca wartość y jest zerem.

Po wyznaczeniu wartości y, obliczamy dla każdego kąta sieci poprawkę trzeciego etapu, odejmując od wielkości y, przyporządkowanej punktowi na prawym ramieniu kąta, wartość y, przyporządkowaną punktowi na lewym ramieniu kąta, co oznaczymy przez:

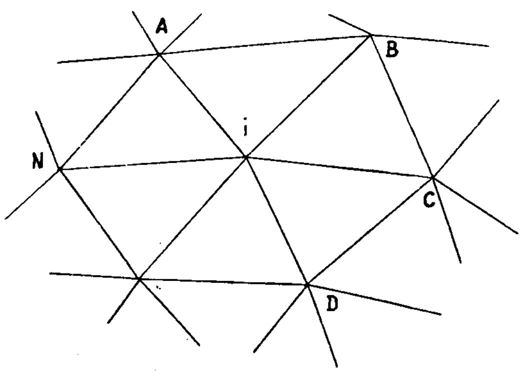
$$\boxed{v_{III} = y_P - y_L} \tag{4}$$

2. Uzasadnienie zgodności postępowania rachunkowego z założeniami

Słuszność postępowania w etapie I wynika bezpośrednio z zasady, aby wielkości poprawek przydzielanych poszczególnym kątom, występującym w warunku matematycznym, były sobie równe, i żadnych omówień nie wymaga.

Dla uzasadnienia słuszności postępowania w etapie II rozpatrzmy układ n_i trójkątów, którego punktem centralnym jest punkt i, zaś punktami peryferyjnymi są punkty: $A, B, C, D \ldots N$ (w ogólnej ilości — n_i) i niech odchyłką horyzontalną w układzie i będzie wielkość H_i, tj. niech $H_i = 400^g - \sphericalangle AiB - \sphericalangle BiC - \sphericalangle CiD - \ldots$

Zgodnie z przyjętym założeniem, każdy kąt występujący w warunku horyzontu i ma otrzymać z tytułu niespełnienia tego warunku taką samą poprawkę — oznaczmy tę poprawkę przez $2x_i$. Analogicznie niech każdy kąt występujący w warunku horyzontu punktu A otrzymuje poprawkę $2x_A$, każdy kąt występujący w warunku horyzontu punktu B poprawkę $2x_B$ itd. itd. O ile któryś spośród punktów $A, B, C \ldots N$ nie jest punktem centralnym, odpowiednia poprawka $2x$ będzie oczywiście zerem. Ponieważ dodanie poprawki $2x$ do każdego z kątów wokółhoryzontalnych powodować będzie niespełnienie warunków trójkątowych w odpowiednich trójkątach, musimy zgodnie z założeniem zrekompensować każdą poprawkę $2x$, dodając do każdego z kątów niecentralnych odpowiadającego trójkąta poprawkę $-x$. Wynika stąd od razu, że kąty położone wokół punktu i otrzymywać będą następujące poprawki:



Rys. 22

Kąt AiB:	$2x_i - x_A - x_B$	jako kąt centr. w i oraz niecentr. w A i B
Kąt BiC:	$2x_i - x_B - x_C$	jako kąt centr. w i oraz niecentr. w B i C
Kąt CiD:	$2x_i - x_C - x_D$	jako kąt centr. w i oraz niecentr. w C i D

. . . .

Stąd, ponieważ suma poprawek kątów, których wierzchołkiem jest punkt i ma wynosić H_i, otrzymujemy dla i-tego punktu centralnego równanie:

$$2x_i n_i - 2x_A - 2x_B - 2x_C \ldots - 2x_N = H_i$$

lub:

$$n_i x_i - x_A - x_B - x_C \ldots - x_N = \frac{1}{2} H_i$$

Dla każdego układu centralnego daje się zestawić tego rodzaju równanie, przyczym, jak widać w równaniu zestawionym dla punktu i-tego, współczynnik przy niewiadomej x_i jest równy ilości trójkątów w układzie n_i, zaś współczynnik przy niewiadomej x_j ($j \neq i$) jest równy -1, jeżeli i, j są sąsiadującymi punktami centralnymi, zaś równy 0, gdy to nie zachodzi. Jest to treść równania (1).

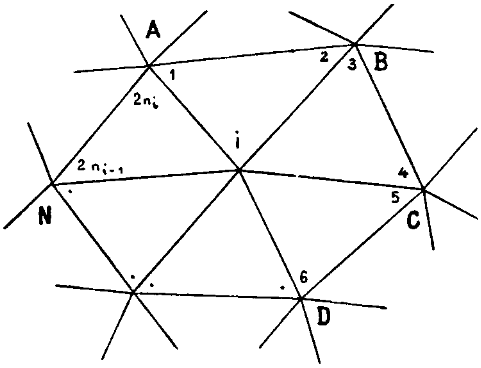
Jednocześnie z napisanych wyżej wielkości poprawek dla kątów AiB, BiC... widać, że ogólnie dla uzyskania poprawki drugiego etapu dla dowolnego kąta, należy od podwojonej liczby x_C — przyporządkowanej punktowi centralnemu (wierzchołkowemu) kąta — odjąć poprawki x_L, x_P przyporządkowane punktom położonym na lewym i na prawym ramieniu kąta. Jest to treścią równania (2).

Przejdźmy do uzasadnienia słuszności postępowania w etapie III. Rozważajmy znów układ n_i trójkątów, którego punktem centralnym jest punkt i, zaś punktami peryferyjnymi są punkty $A, B, C, D \ldots N$ (w ogólnej ilości n_i), i niech odchyłką sinusową w układzie i będzie wielkość S_i, to znaczy niech będzie: $S_i = \Sigma \lg \sin P - \Sigma \lg \sin L$, gdzie przez P rozumiemy kąty prawe, zaś przez L kąty lewe, dla obserwatora znajdującego się w centrum układu, tj. w punkcie i.

Jeżeli dla usystematyzowania rozważań ponumerujemy kolejne kąty peryferyjne w układzie i i oznaczymy odpowiednio przez:

$$r_1, r_2, r_3, r_4 \ldots\ldots r_{2n_i-1}, r_{2n_i}$$

(rys. 23), różnice logarytmiczne dla tych kątów, to znaczy przyrosty lg sin kątów odpowiadające przyrostom wartości kątów o jednostkę rachunkową (1^{cc} lub $1''$), wówczas warunek który mają spełnić poprawki $v_1, v_2 \ldots v_n$ poszczególnych kątów peryferyjnych w układzie (i) mieć będzie znaną ogólnie postać:



Rys. 23

$$r_1 v_1 - r_2 v_2 + r_3 v_3 - r_4 v_4 + r_5 v_5 - r_6 v_6 \ldots + r_{2n_i-1} v_{2n_i-1} - r_{2n_i} v_{2n_i} = S_i$$

Zgodnie z założeniem, że poprawki, które z tytułu niespełnienia się pewnego warunku matematycznego przydzielane zostaną figurującym w tym warunku kątom, mają być sobie równe co do wartości bezwzględnej, oznaczmy przez y_i poprawki kątów lewych, zaś przez $-y_i$ poprawki kątów prawych, przyporządkowane kątom w układzie i z tytułu niespełnienia warunku sinusowego w układzie i. Analogicznie oznaczymy przez y_A oraz $-y_A$ poprawki, które zostaną przyporządkowane kątom lewym i prawym z tytułu niespełnienia warunku sinusowego w układzie A itd.

Wynika stąd zaraz że kąty peryferyjne w układzie i otrzymają poprawki:

$v_1 = y_i - y_B$	gdyż kąt	1	jest lewym w ukł. centr.	i,	a prawym w ukł. centr.	B
$v_2 = - y_1 + y_A$	„ „	2	„	„ A	„	„ i
$v_3 = y_i - y_C$	„ „	3	„	„ i	„	„ C
$v_4 = - y_i + y_B$	„ „	4	„	„ B	„	„ i
$v_5 = y_i - y_D$	„ „	5	„	„ i	„	„ D
$v_6 = - y_i + y_C$	„ „	6	„	„ C	„	„ i

. . . .

Mnożąc kolejno napisane równania przez r_1, $-r_2$, r_3, $-r_4 \ldots$ i sumując otrzymać mamy S_i (w myśl napisanego wyżej równania). Będzie więc:

$$y_i(r_1+r_2+r_3+r_4 \ldots) - (r_2+r_{2n_i-1})\, y_A - (r_1+r_4)\, y_B - (r_3+r_6)\, y_C \ldots . = S_i$$

Dla każdego układu centralnego daje się zestawić tego rodzaju równanie, przy czym, jak widać, w równaniu zestawionym dla punktu i-tego współczynnik przy niewiadomej y_i jest równy sumie różnic logarytmicznych dla kątów położonych na peryferii układu i-tego, zaś współczynnik przy niewiadomej y_j $(j \neq i)$ jest równy minus sumie różnic logarytmicznych kątów pod którymi widoczny jest odcinek $i - j$, gdy i, j są sąsiadującymi punktami centralnymi, zaś równy zeru, gdy to nie zachodzi. Jest to treść równania (3). Jednocześnie z napisanych wyżej równań dla poprawek v jest widoczne, że dla otrzymania poprawki trzeciego etapu dla kąta należy od liczby y_P, przyporządkowanej punktowi położonemu na prawym ramieniu tego kąta, odjąć liczbę y_L, przyporządkowaną punktowi położonemu na jego lewym ramieniu. Jest to treść równania (4).

3. Przykład liczbowy i jego omówienie

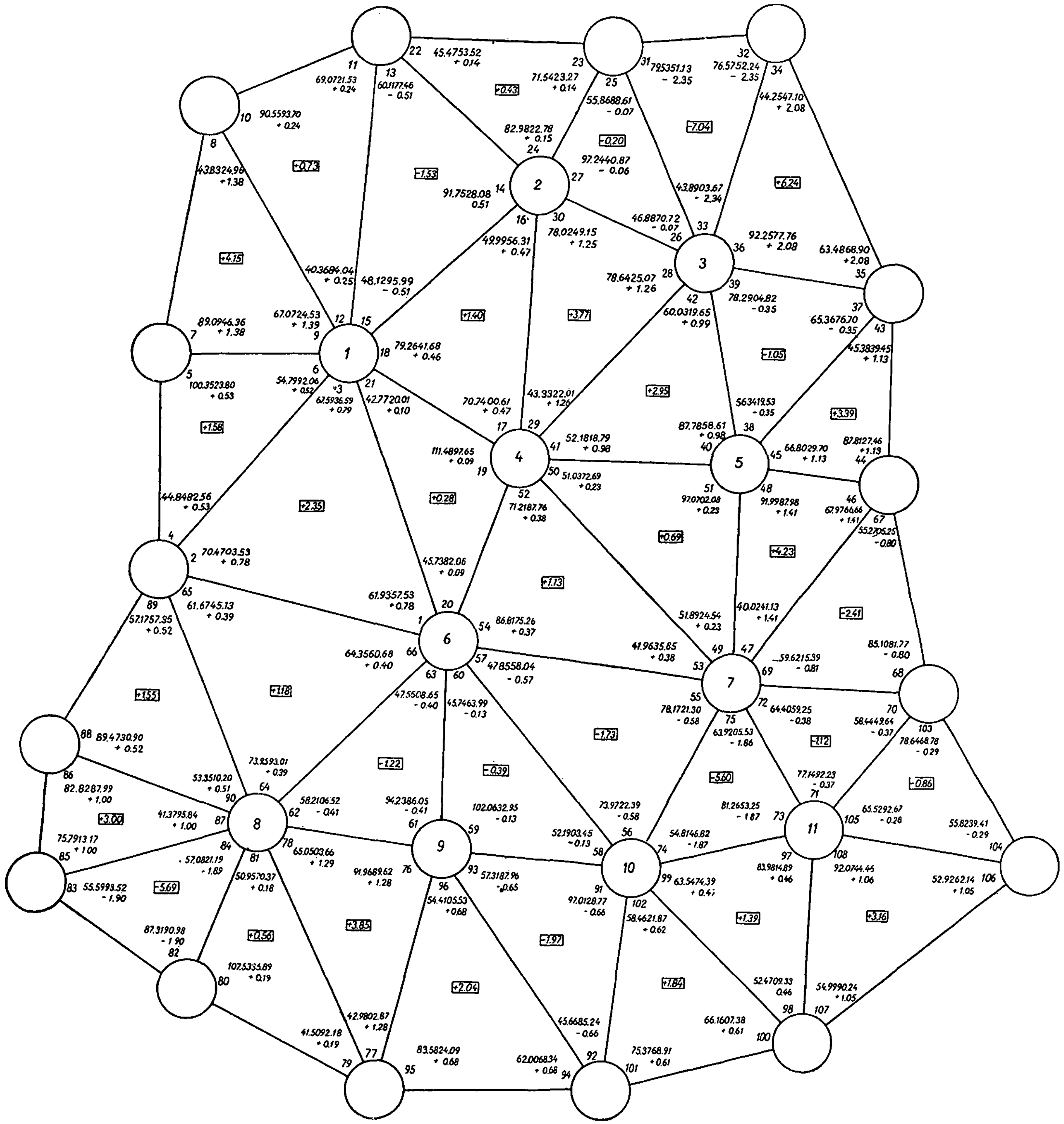
Podajemy przykład wyrównania niewielkiej sieci niezależnej omówionym wyżej sposobem przybliżonym. Warto podkreślić, że załączony materiał (arkusze 1, 2, 3, 4) zawiera całkowity przebieg rachunku, to znaczy że w toku pracy nie istniała potrzeba zapisywania jakichkolwiek liczb poza liczbami zapisanymi w przykładzie.

Każdemu etapowi pracy poświęcono tu oddzielny arkusz (1, 2, 3), zaś ostateczne wyniki, tzn. wartości wyrównanych kątów znajdują się na arkuszu 4. Na arkuszach, odpowiadających poszczególnym etapom pracy, opisano też przebieg rachunku, co pozwoli nawet czytelnikowi nieobznajmionemu z treścią artykułu całkowicie opanować technikę rachunku.

Sieć stanowi fragment prac triangulacyjnych prowadzonych przez Państwowe Przedsiębiorstwo Geodezyjne i została przez to przedsiębiorstwo wyrównana metodą najmniejszych kwadratów, jako sieć niezależna. Pozwoliło to na porównanie wyników wyrównania „ścisłego", tzn. metodą najmniejszych kwadratów i przybliżonego, sposobem wyżej omówionym. Porównanie to podajemy na str. 169.

Jeżeli za kryterium porównawcze przyjmiemy pierwiastek z sumy kwadratów poprawek podzielonej przez ilość nadliczbowych spostrzeżeń w układzie (tzn. dla wyrównania ścisłego błąd średni obserwacji, a dla przybliżonego — „surogat" tego błędu, obliczony w analogiczny sposób), będziemy musieli uznać różnice w wynikach wyrównania za zupełnie nieistotne. Odpowiadające wielkości wynoszą bowiem, jak widać z zestawienia 1,78^{cc}, oraz 1,82^{cc}. Maksymalna różnica w wielkości poprawki wynosi 0,63^{cc}, tzn. $^1/_3$ błędu średniego obserwacji, natomiast wartość przeciętna różnicy w wielkości poprawki wynosi 0,2^{cc} tzn. około $^1/_{10}$ błędu średniego.

ETAP I. WYRÓWNANIE WARUNKÓW TRÓJKĄTOWYCH

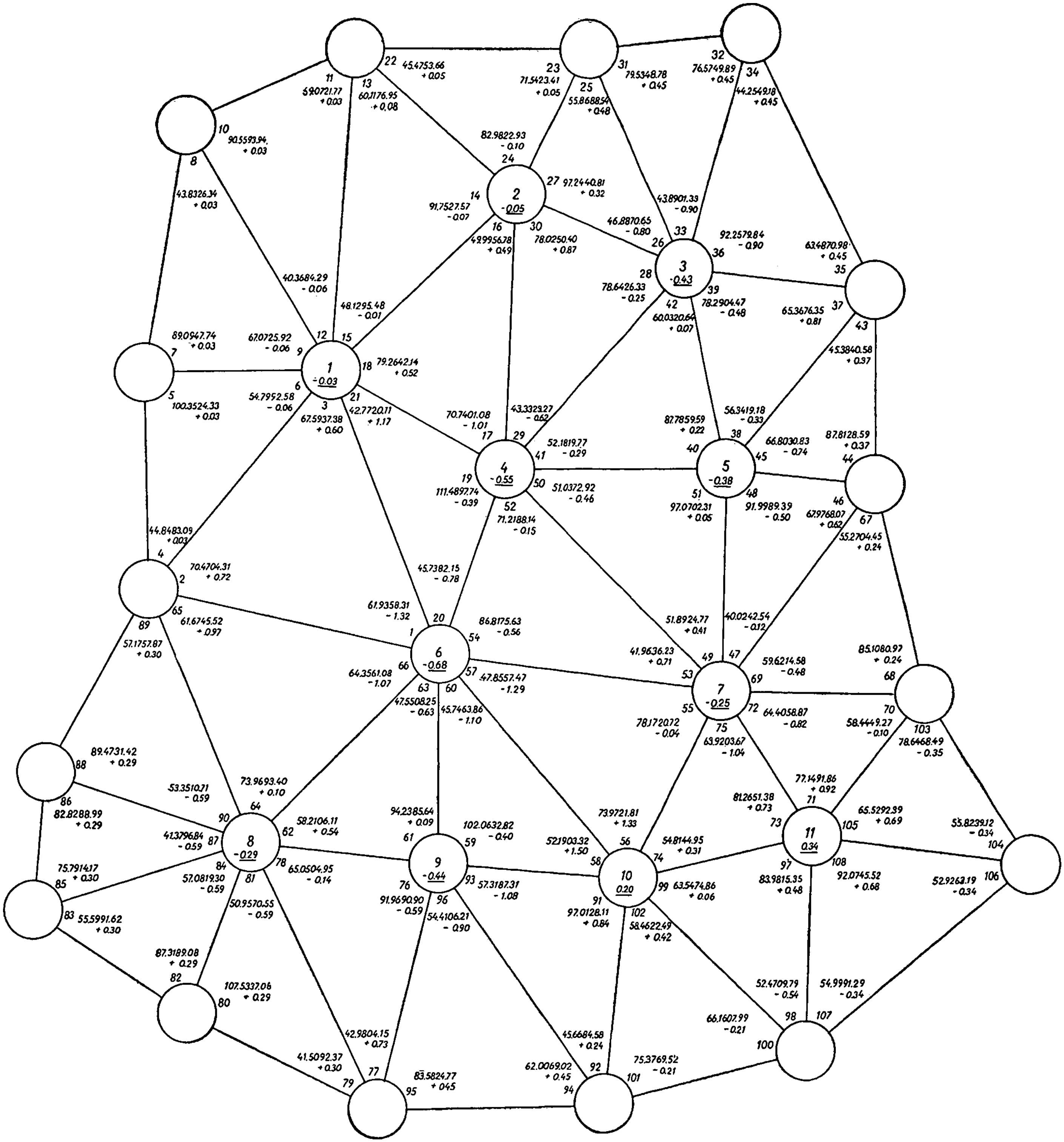


PRZEBIEG RACHUNKU

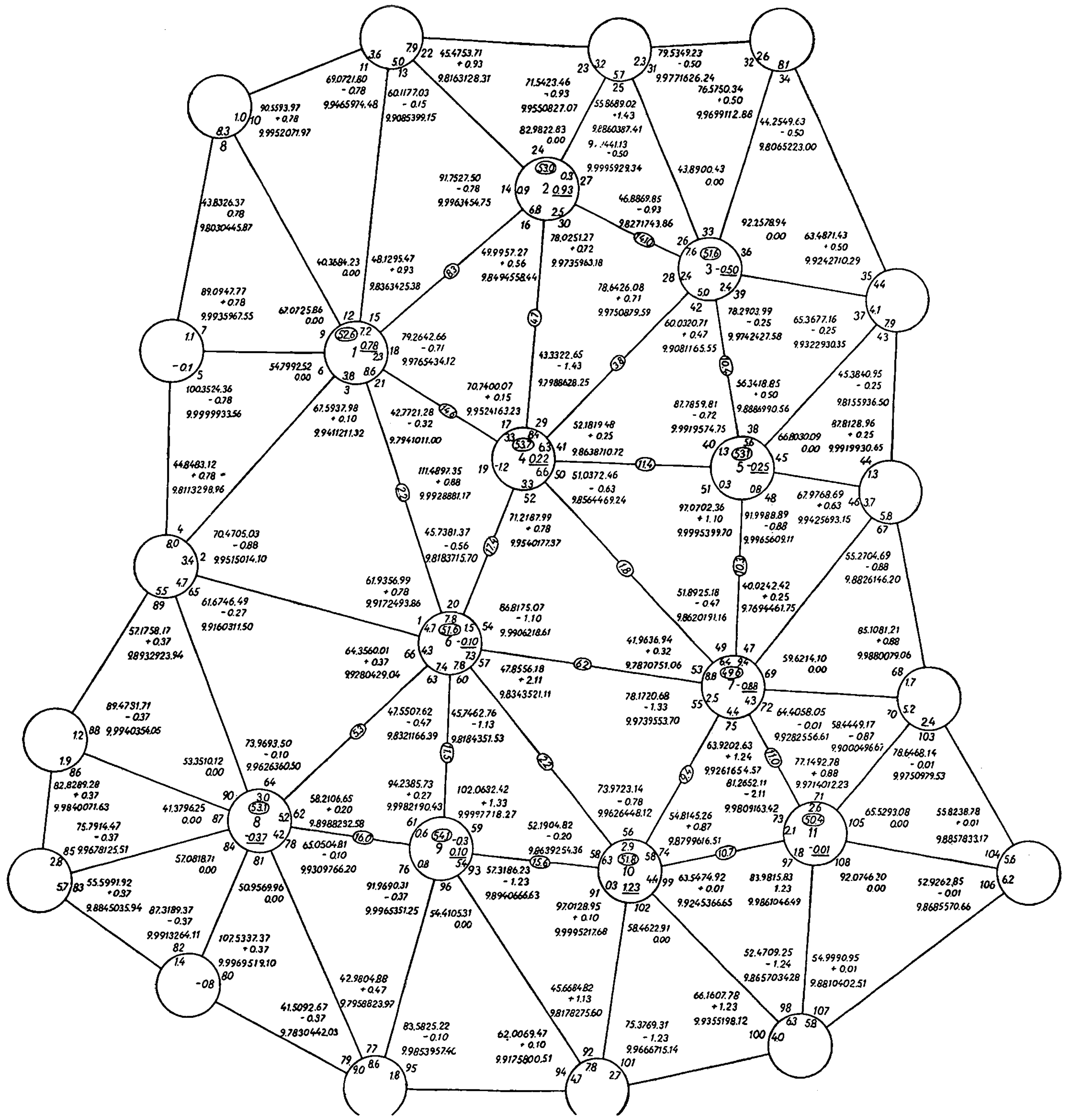
Po dodaniu wartości kątów, zaobserwowanych i przeniesionych na płaszczyznę odwzorowania (wpisane na szkicu), w każdym trójkącie ustala się odchyłki trójkątowe (na szkicu wpisano je w prostokątnych obramowaniach) i oblicza poprawki kątowe pierwszego etapu, dzieląc odchyłki w równej części na wszystkie trzy kąty trójkąta. Wartości poprawek (na szkicu wpisano je z odpowiednim znakiem pod wartościami kątów) zostają dodane algebraicznie do wartości kątów, a otrzymane w wyniku „kąty poprawione po raz pierwszy" zostają wpisane na szkic rachunkowy II etapu. Kontrola — sumy kątów poprawionych po raz pierwszy we wszystkich trójkątach spełniać muszą warunki sumowe — przeprowadzona zostaje na arkuszu rachunkowym II etapu.

Uwaga. Przy wyrównaniu dużych sieci praca przebiega niezależnie na kilku arkuszach rachunkowych dla każdego etapu.

ETAP II. WYRÓWNANIE WARUNKÓW HORYZONTÓW



ETAP III. WYRÓWNANIE WARUNKÓW SINUSOWYCH



Układ centralny N_i	Odchyłka sinusowa $S = \Sigma \lg \sin P - \Sigma \lg \sin L$
1	30.59
2	48.53
3	− 36.89
4	4.24
5	− 1.57
6	− 7.44
7	− 52.24
8	− 20.79
9	− 6.32
10	70.54
11	− 4.02

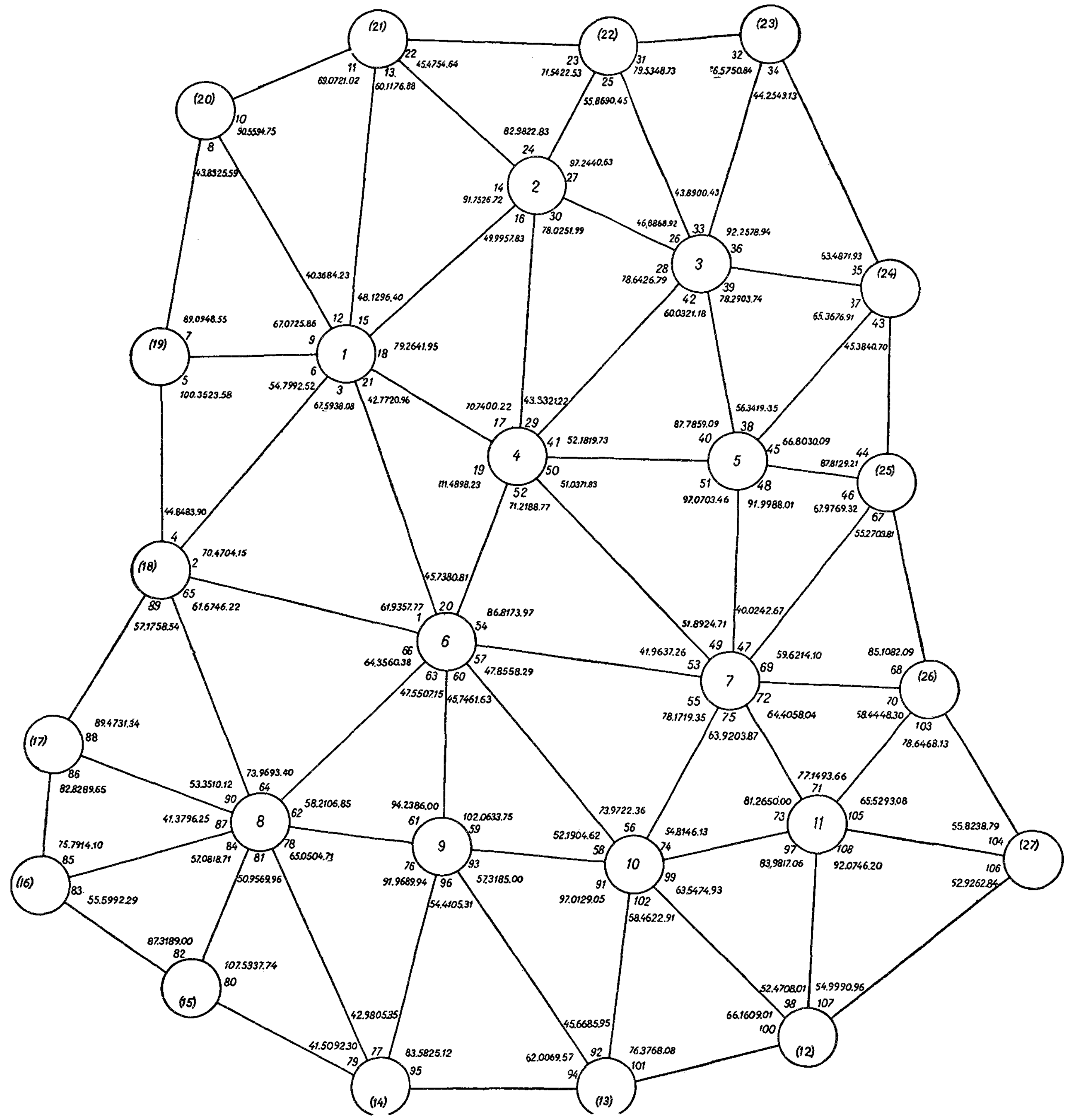
Odchyłki sinusowe.

	y 1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	$-S_i$	Σ
1	52.60	− 8.30		− 14.60		− 2.20						− 30.59	− 3.09
2	− 8.30	53.00	− 14.10	− 4.70								− 48.53	− 22.63
3		− 14.10	51.60	− 3.80	− 10.40							36.89	60.19
4	− 14.60	− 4.70	− 3.80	53.70	− 11.40	− 17.40	− 1.80					− 4.24	− 4.24
5			− 10.40	− 11.40	53.10		− 10.30					1.57	22.57
6	− 2.20			− 17.40		51.60	− 6.20	− 5.30	− 11.50	− 2.20		+ 7.44	14.24
7				− 1.80	− 10.30	− 6.20	49.60			− 9.40		+ 52.24	63.14
8						− 5.30		53.10	− 16.00		− 11.00	+ 20.79	52.59
9						− 11.50		− 16.00	54.10	− 15.60		+ 6.32	17.32
10						− 2.20	− 9.40		− 15.60	51.80	− 10.70	− 70.54	− 56.64
11							− 11.00			− 10.70	50.40	+ 4.02	32.72
	7.25	− 1.14		− 2.01		− 0.30						− 4.22	− 0.43
		7.19	− 1.96	− 0.97		− 0.05						− 7.42	− 3.22
			6.91	− 0.83	− 1.51	− 0.01						3.23	7.80
				6.93	− 1.83	− 2.61	− 0.26					− 2.49	− 0.25
					6.89	− 0.70	− 1.56					0.27	4.92
						6.65	− 1.20	− 0.79	− 1.72	− 0.33		− 0.07	2.53
							6.76	− 0.14	− 0.31	− 1.45	− 1.63	7.68	10.92
								7.24	− 2.40	− 0.06	− 0.03	3.01	7.75
									6.73	− 2.49	− 0.09	2.35	6.49
										6.59	− 2.02	− 8.10	− 3.54
											6.61	0.07	6.68
	0.785	0.926	− 0.495	0.221	− 0.249	− 0.105	− 0.879	− 0.372	0.104	1.226	− 0.011	1.000	

PRZEBIEG RACHUNKU

Opierając się na wartościach logarytmów sinusów, odpowiadających kątom obliczonym w II etapie, oblicza się dla każdego układu centralnego odchyłkę sinusową $S = \Sigma \lg \sin P - \Sigma \lg \sin L$, gdzie P kąty peryferyjne „prawe", zaś L kąty peryferyjne „lewe" — dla obserwatora znajdującego się w centrum układu. (na szkicu wpisano: kąty, pod nimi lg sin, zaś obok — w kółku numerowym układu centralnego obok kąta — różnicę logarytmiczną r na 1^{cc}; Np. dla kąta $N54$ w układzie centralnym 6 wpisano: wartość kąta 86.8175.07, pod spodem wartość lg sin 86.8175.07 równą 9.990 6218.61, oraz obok kąta w kółku numerowym układu 6 różnicę logarytmiczną $r = 1.5$). Odchyłki sinusowe S (na szkicu wpisano je w kolumnie obok rysunku) stanowią kolumnę wyrazów wolnych symetrycznego układu równań liniowych, służącego do wyznaczenia wielkości y, który zestawiono i rozwiązano obok. Ilość niewiadomych y w układzie równa jest ilości układów centralnych (w przykładzie 11). W i-tym równaniu (w przykładzie $i = 1,2,3...11$) współczynnikiem przy i-tej niewiadomej jest suma różnic logarytmicznych sinusów kątów peryferyjnych w i-tym układzie (tę sumę wpisano dla każdego układu w kółku numerowym układu w elipsie, np. w układzie 5 mamy: 53.1 = 6.6 + 6.3 + 5.0 + 2.4 + 4.1 + 7.9 + 1.3 + 3.7 + + 9.4 + 6.4). W i-tym równaniu współczynnikiem przy j-tej niewiadomej, dla $j \neq i$, jest: minus suma różnic logarytmicznych sinusów kątów pod którymi obserwowano odcinek i-j, gdy punkty i, j są sąsiadującymi punktami centralnymi, lub zero, gdy to nie zachodzi (sumę różnic logarytmicznych log sin kątów pod którymi obserwowano odcinek i-j na szkicu wpisywano na tym odcinku w elipsie, np. na odcinku 4—6 wpisano 17.4 = 8.6 + 8.8). Wpisanie wartości współczynników równania do tabeli następuje bezpośrednio ze szkicu (np. w drugim równaniu: przy drugiej niewiadomej 53.0, przy pierwszej — 8.3, przy trzeciej — 14.1 oraz przy czwartej — 4.7). Po obliczeniu i skontrolowaniu niewiadomych y (w przykładzie układ równań rozwiązano metodą pierwiastka krakowianowego) i wpisaniu ich wartości na szkic (liczby podkreślone wypisane w kółkach numerowych układów centralnych, oblicza się dla każdego kąta poprawkę trzeciego etapu odejmując od wartości y przyporządkowanej punktowi na prawym ramieniu kąta wartość y przyporządkowaną punktowi na lewym ramieniu kąta (np. dla kąta $N54$ mamy: $v_{III} = -0.88 - 0.22 = -1.10$). Kontrola w układach centr.: $\Sigma v.r_{praw} - \Sigma v.r_{lew} - S$. Wartości poprawek (na szkicu wpisano je ze znakiem pod wartościami kątów) zostają dodane algebraicznie do wartości kątów, a otrzymane w wyniku „kąty poprawione po raz trzeci" zostają wpisane na ostateczny szkic rachunkowy. Kąty te winny już spełnić wszystkie warunki niezależnej sieci powierzchniowej: warunki trójkątów, horyzontów i sinusów.

ETAP IV. WYKAZ WARTOŚCI KĄTÓW PO WYRÓWNANIU



Odchyłki horyzontalne	
Układ centralny N_i	Odchyłka horyzontalna $H_i = 400^g - \Sigma\alpha$;
1	+ 2.10
2	+ 1.51
3	− 3.26
4	− 2.92
5	− 1.30
6	− 6.75
7	− 1.38
8	− 1.86
9	− 2.88
10	+ 4.46
11	+ 3.50

	x 1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	$-\frac{1}{2}H_I$	Σ
1	7.000	− 1 000		− 1.000		− 1.000						− 1.050	2.950
2	− 1.000	5.000	− 1.000	− 1.000								− 0.755	1.245
3		− 1.000	6.000	− 1.000	− 1.000							1.630	4.630
4	− 1.000	− 1.000	− 1.000	6.000	− 1.000	− 1.000	− 1.000					1.460	1.460
5			− 1.000	− 1.000	5.000		− 1.000					0.650	2.650
6	− 1.000			− 1.000		7.000	− 1.000	− 1.000	− 1.000	− 1.000		3.375	4.375
7				− 1.000	− 1.000	− 1.000	7.000			− 1.000	− 1.000	0.690	2.690
8						− 1.000		7.000	− 1.000			0.930	5.930
9						− 1.000		− 1.000	5.000	− 1.000		1.440	3.440
10						− 1.000	− 1.000		− 1.000	6.000	− 1.000	− 2.230	− 0.230
11							− 1.000			− 1.000	5.000	− 1.750	1.250
	2.646	− 0.378		− 0.378		− 0.378						− 0.397	1.115
		2.204	− 0.454	− 0.519		− 0.065						− 0.411	0.756
			2.407	− 0.513	− 0.416	− 0.012						0.600	2.066
				2.307	− 0.526	− 0.513	− 0.433					0.609	1.445
					2.133	− 0.129	− 0.576					0.572	2.002
						2.564	− 0.506	− 0.390	− 0.390	− 0.390		1.401	2.289
							2.495	− 0.079	− 0.079	− 0.480	− 0.401	0.798	2.255
								2.616	− 0.443	− 0.073	− 0.012	0.588	2.676
									2.155	− 0.567	− 0.017	1.072	2.643
										2.300	− 0.523	− 0.283	1.495
											2.137	− 0.727	1.410
	− 0.032	− 0.052	− 0.434	− 0.547	− 0.377	− 0.677	− 0.250	− 0.292	− 0.442	0.200	0.340	1.000	

PRZEBIEG RACHUNKU

Wychodząc z wartości kątów poprawionych w I etapie (wpisane na szkicu), oblicza się dla każdego wierzchołka układu centralnego odnośną odchyłkę horyzontalną (na szkicu odchyłki wpisano w kolumnie obok rysunku). Połowy tych odchyłek stanowią kolumnę wyrazów wolnych symetrycznego układu równań liniowych, który zestawiono i rozwiązano obok. Ilość niewiadomych w układzie równa jest ilości układów centralnych (w przykładzie 11). W i-tym równaniu (w przykładzie $i = 1, 2, 3, \ldots 11$) współczynnikiem przy i-tej niewiadomej jest ilość trójkątów w i-tym układzie centralnym, zaś współczynnikiem przy j-tej niewiadomej dla $j \neq i$ jest: minus jedność — gdy punkty ij są sąsiadującymi punktami centralnymi, zaś zero — gdy to nie zachodzi (np. w przykładzie w drugim równaniu współczynnikiem przy drugiej niewiadomej jest 5, gdyż drugi układ centralny zawiera 5 trójkątów, zaś współczynnikami przy pierwszej, trzeciej i czwartej niewiadomej w tymże drugim równaniu są minus jedności, gdyż z drugim punktem centralnym połączone są celowymi pierwszy, trzeci i czwarty punkt centralny).

Po obliczeniu i skontrolowaniu niewiadomych x (w przykładzie układ równań rozwiązano metodą pierwiastka krakowianowego) i wpisaniu ich wartości na szkic (liczby podkreślone wpisane w kółkach numerowych układów centralnych), oblicza się dla każdego kąta poprawkę drugiego etapu odejmując od podwójnej wartości liczby x, przyporządkowanej wierzchołkowi kąta, liczby x przyporządkowane punktowi na prawym i na lewym ramieniu kąta (np. dla kąta N 54 mamy: $v_n = -2 \cdot 0.68 + 0.55 + 0.25 = -0.56$). Kontrola — suma poprawek kątów wokół horyzontu winna być równa odchyłce horyzontalnej. Wartości poprawek (na szkicu wpisano je ze znakiem pod wartościami kątów) zostają dodane algebraicznie do wartości kątów, a otrzymane w wyniku „kąty poprawione po raz drugi" zostają wpisane na szkic rachunkowy III etapu. Kontrola — kąty poprawione po raz drugi winny spełniać wszystkie warunki trójkątowe i horyzontalne — przeprowadzona zostaje na arkuszu rachunkowym III etapu.

NN kątów	Poprawki v' (przybl.)	Poprawki v (ścisłe)	Różnice $v'-v$
1	0,24	0,13	0,11
2	0,62	0,72	−0,10
3	1,49	1,51	−0,02
4	1,34	1,54	−0,20
5	−0,22	0,12	−0,34
6	0,46	−0,06	0,52
7	2,19	2,07	0,12
8	0,63	0,37	0,26
9	1,33	1,71	−0,38
10	1,05	0,63	0,42
11	−0,51	−0,20	−0,31
12	0,19	0,29	−0,10
13	−0,58	−0,61	0,03
14	−1,36	−1,16	−0,20
15	0,41	0,22	0,19
16	1,52	1,42	0,10
17	−0,39	−0,49	0,10
18	0,27	0,47	−0,20
19	0,58	0,48	0,10
20	−1,25	−1,16	−0,09
21	0,95	0,97	−0,02
22	1,12	1,21	−0,09
23	−0,74	−0,50	−0,24
24	0,05	−0,28	0,33
25	1,84	1,79	0,05
26	−1,80	−2,03	0,23
27	−0,24	0,02	−0,26
28	1,72	1,71	0,01
29	−0,79	−0,75	−0,04
30	2,84	2,80	0,04
31	−2,40	−2,19	−0,21
32	−1,40	−1,69	0,29
33	−3,24	−3,16	−0,08
34	2,03	1,76	0,27
35	3,03	3,07	−0,04
36	1,18	1,41	−0,23
37	0,21	0,16	0,05
38	−0,18	−0,22	0,04
39	−1,08	−0,99	−0,09
40	0,48	0,61	−0,13
41	0,94	1,00	−0,06
42	1,53	1,34	0,19
43	1,25	1,18	0,07
44	1,75	1,72	0,03
45	0,39	0,49	−0,10
46	2,66	2,38	0,28
47	1,54	1,47	0,07
48	0,03	0,38	−0,35
49	0,17	0,38	−0,21
50	−0,86	−0,53	−0,33
51	1,38	0,85	0,53
52	1,01	0,80	0,21
53	1,41	1,55	−0,14
54	−1,29	−1,21	−0,08
55	−1,95	−2,03	0,08
56	−0,03	−0,47	0,44
57	0,25	0,77	−0,52
58	1,17	1,62	0,45
59	0,80	0,36	0,44
60	−2,36	−2,07	−0,29
61	−0,05	0,04	−0,09
62	0,33	0,61	−0,28
63	−1,50	−1,86	0,36
64	0,39	0,38	0,01
65	1,09	1,28	−0,19
66	−0,30	−0,49	0,19
67	−1,44	−1,59	0,15
68	0,32	0,19	−0,12
69	−1,29	−1,01	−0,28
70	−1,34	−1,38	0,04
71	1,43	1,36	0,07
72	−1,21	−1,10	−0,11
73	−3,25	−2,62	−0,63
74	−0,69	−0,72	0,03
75	−1,66	−2,26	0,60
76	0,32	0,57	−0,25
77	2,48	2,58	−0,10
78	1,05	0,71	0,34
79	0,12	0,07	0,05
80	0,85	0,66	0,19
81	−0,41	−0,16	−0,25
82	−1,98	−1,81	−0,17
83	−1,23	−1,29	0,06
84	−2,48	−2,59	0,11
85	0,93	1,11	−0,18
86	1,66	1,46	0,20
87	0,41	0,43	−0,02
88	0,44	0,61	−0,17
89	1,19	1,11	0,08
90	−0,08	−0,18	0,10
91	0,28	−0,01	0,29
92	0,71	1,05	−0,34
93	−2,96	−3,00	0,04
94	1,23	1,15	0,08
95	1,03	0,97	0,06
96	−0,22	−0,07	−0,15

NN kątów	Poprawki v' (przybl.)	Poprawki v (ściśle)	Różnice $v' - v$
97	2,17	1,72	0,45
98	−1,32	−1,31	−0,01
99	0,54	0,97	−0,43
100	1,63	1,28	0,35
101	−0,83	−0,35	−0,48
102	1,04	0,91	0,13
103	−0,65	−0,67	0,02
104	−0,62	−0,54	−0,08
105	0,41	0,34	0,07
106	0,70	0,63	0,13
107	0,72	0,82	−0,10
108	1,74	1,70	0,04
$[v'v'] = 191{,}66$		$[vv] = 183{,}91$	

$$m_o = \pm \sqrt{\frac{183{,}91}{58}} = \pm 1{,}78^{cc}$$

Obliczenie w analogiczny sposób wielkości m_o' z poprawek metodą przybliżoną daje:

$$m_o' = \pm \sqrt{\frac{191{,}66}{58}} = \pm 1{,}82^{cc}$$

Przeciętna wartość różnicy $(v' - v)$ wynosi $\pm 0{,}2^{cc}$,

Przeprowadzono również rachunek współrzędnych (przeciętna długość boku sieci wynosi koło 8 kilometrów), jednak wartości współrzędnych nie publikuję, zgodnie ze zwyczajem u nas panującym. Maksymalna różnica w wartości współrzędnych obliczonych w oparciu o dane wyrównane metodą najmniejszych kwadratów i w oparciu o dane z wyrównania przybliżonego wyniosła 2 centymetry; przeciętna — ½ centymetra. Wielkości te również uznać należy za zupełnie nieistotne, zwłaszcza gdy zważyć, że rachunek prowadzono 7-cyfrowo (8-a z interpolacji).

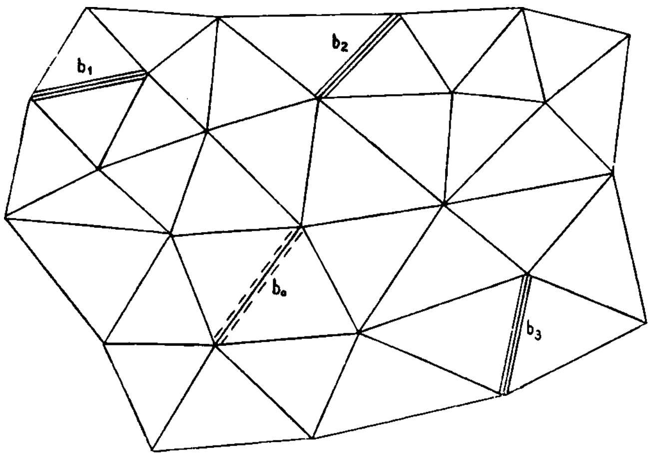
Oczywiście, że tego rodzaju porównywanie liczbowe efektu wyniku wyrównania metodą ścisłą (tzn. metodą najmniejszych kwadratów) i metodami przybliżonymi (np. sugerowanym tu sposobem) jest logicznie uzasadnione wtedy, gdy oba wyrównania odnoszą się do tego samego układu obserwacyjnego. Gdyby np. układ wyrównywany metodą najmniejszych kwadratów obejmował dodatkowe obserwacje (np. wzdłuż przekątnych, lub tp.) różnice w wynikach wyrównania mogłyby być znaczniejsze. Jednak należałoby oczekiwać, że różnice powstające z takiej niejednolitości materiału miałyby charakter lokalny, to jest występowałyby w tych fragmentach sieci, w których obserwowano dodatkowe wielkości.

4. Postępowanie w przypadku pomiarów bazowych

Jeżeli w sieci niezależnej, którą chcemy wyrównać opisanym wyżej sposobem, przeprowadzono więcej niż jeden pomiar bazowy, staje się jeszcze aktualne uzgodnienie warunków bazowych. Można by wprawdzie dokonywać tego uzgodnienia w sposób analogiczny do tego w jaki postępowano przy uzgadnianiu warunków sinusowych.

Ponieważ jednak postępowanie rachunkowe coraz więcej by się komplikowało, a wzamian napewno nie otrzyma się dużych zmian w wartościach wyrównywanych kątów, wydaje się że słuszniejsze było by uzgodnienie oparte na następującym rozumowaniu.

Celem pomiarów bazowych jest właściwie zadecydowanie o „skali" sieci. Jeżeli więc przeprowadzono kilka pomiarów bazowych, można decyzję dotyczącą skali powziąć obliczając z każdego z tych pomiarów bazowych długość jednego z niemierzonych boków sieci, leżącego w przybliżeniu w jednakowej odległości od baz, i przyjmując średnią arytmetyczną z tych wyników za ostateczną długość owego „pomocniczego" boku, decydującą już o skali sieci. Tak np. w sieci przedstawionej na rys. 24, po przepro-



Rys. 24

wadzeniu wyrównania w opisany wyżej sposób, można obliczyć długość pomocniczego boku b_o, raz przeprowadzając rachunek trygonometryczny od boku b_1, drugi raz od boku b_2 i trzeci raz od boku b_3 (oczywiście w każdym rachunku posługując się wyrównanymi wartościami kątów).

Ponieważ, z uwagi na przeprowadzenie wyrównania, błędy użytych do rachunku kątów będą już znikome, przeto i różnice w długości boku pomocniczego, liczonej różnymi drogami, będą bardzo niewielkie, a sam proces uśrednienia rezultatu będzie miał raczej charakter formalny i zniekształcenia, jakim poddane będą długości mierzonych baz b_1, b_2, b_3 przez przyjęcie za ostateczną długość boku b_o średniej z rezultatów otrzymanych na różnych drogach, praktycznie pozbawione będą znaczenia. Można by oczywiście stosować i bardziej ,,wyrafinowane" sposoby uzgodnienia warunków bazowych, wydaje się jednak, że było by to mało celowe.

5. Zakończenie

Na zakończenie — dla uniknięcia ewentualnych nieporozumień — nadmieniam, że nie jestem przeciwnikiem wyrównywania sieci metodą najmniejszych kwadratów. Wprost przeciwnie, uważam że konsekwentne stosowanie tej metody, jako dostarczające najprawdopodobniejsze wielkości poprawek obserwacyjnych, jest jedynym postępowaniem wyrównawczym dającym się obronić z naukowego punktu widzenia.

Wiadomo jednak, że w wielu procesach wyrównawczych stosujemy metodę najmniejszych kwadratów jedynie w charakterze pozoru, to znaczy rachunek wyrównania przeprowadzamy nie w drodze założenia warunku minimum dla całego układu obserwacyjnego podlegającego wyrównaniu, lecz w drodze odrzucenia tych równań, których uwzględnienie jest trudne lub kosztowne i założenia warunku minimum tylko w stosunku do wybranego zespołu równań warunkowych. Tak np., przy wyrównywaniu sieci powierzchniowych nawiązanych do ilości punktów większej od dwóch, traktuje się sieć jako niezależną, poddaje ścisłemu wyrównaniu a następnie „wpasowuje się" tak czy inaczej tę wyrównaną sieć w zespół punktów nawiązania. Wydaje mi się, że takie stosowanie metody najmniejszych kwadratów nie jako środka mającego wyznaczyć najprawdopodobniejszy układ poprawek, lecz jako środka mającego pracy, wykonanej niezgodnie z zasadami rachunku wyrównawczego, nadać pozory wyrównania poprawnego, nie daje się usprawiedliwić względami rzeczowymi i powoduje niepotrzebne koszty. Z chwilą gdy rezygnujemy z metody najmniejszych kwadratów, jako środka pozwalającego nam wyznaczyć najprawdopodobniejszy w danym układzie obserwacyjnym zespół poprawek obserwacyjnych, problem wyrównania przestaje być problemem ściśle naukowym a staje się problemem technicznym. Celem wyrównania staje się w tym przypadku nadanie obserwacjom takich poprawek, aby obserwacje poprawione stanowiły układ matematycznie niesprzeczny, zaś wielkość maksymalnej poprawki, co do wartości bezwzględnej nie przekroczyła granic założonych dla pracy danego typu w odnośnych przepisach technicznych, a więc np. trzykrotnego błędu średniego obliczonego z wzoru Ferrero (łatwo się przekonać że w podanym przykładzie liczbowym błąd Ferrero wynosi $1{,}67^{cc}$, a więc maksymalna poprawka równa w sposobie przybliżonym: $3{,}25^{cc}$ wynosi 1,95 błędu Ferrero, zaś maksymalna poprawka w sposobie ścisłym: $3{,}16^{cc}$ wynosi 1,89 błędu Ferrero).

Autor niniejszej pracy nie rości sobie bynajmniej pretensji do wyczerpania poruszonego tematu: celowości stosowania metody najmniejszych kwadratów przy wyrównywaniu sieci „niemal bezbłędnych" — jak możnaby nazwać nowoczesne sieci, pozwalające na traktowanie niezgodności warunków matematycznych w materiale pomiarowym jako wielkości zaniedbywalnych. Problem ten jednak istnieje i w miarę doskonalenia się narzędzi pomiarowych będzie się stawał coraz to istotniejszy, gdyż ilość sieci „niemal bezbłędnych" będzie się stawała coraz to większa.

LITERATURA

[1] Instrukcja techniczna Ministerstwa Robót Publicznych, Warszawa, 1919, 1920.
[2] *Jordan-Eggert*, Handbuch der Vermessungskunde (I 40, Stuttgart 1948).
[3] *Gajdajew P. A.* Urawniwanije triangulacji mietodom pribliżenij, Moskwa, 1953.

СТЕФАН ХАУСБРАНДТ

ПРИБЛИЖЕННОЕ УРАВНИВАНИЕ НЕЗАВИСИМЫХ ПОВЕРХНОСТНЫХ СЕТЕЙ

Резюме

Автор констатирует, что геодезические инструменты продукции передовых оптических фирм позволяют теперь измерять углы с такой высокой точностью, что с практической точки зрения во многих случаях сомнительной является целесообразность уравнивания наблюденных систем по методу наименьших квадратов.

Принимая более простые, чем $[vv]$ = минимум, уравнительные предпосылки, результаты уравнивания таких „почти безошибочных" систем практически получаются тождественными с результатами уравнивания по методу наименьших квадратов, а основной критерий искажения наблюдении: величина квадратного корня из суммы квадратов искажении делимой на число избыточных наблюдении получается почти тождественной по приближенным методам и по методу наименьших квадратов. Специально относится это к независимым поверхностным сетям, т. е. к триангуляционным сетям, построенным из центральных систем и неувязанных к постоянным пунктам (рис. 21).

В своем труде автор занимается такого рода „приближенным уравниванием" независимой поверхностной сети, возникающим при обобщении на состоящую из центральных систем сеть принципа постепенного уравнивания (поочередное уравнивание условий); такой способ рекомендовался польской инструкцией, дествующей до войны (т. наз. Инструкцией Министерства Публичных Работ), для местных триангуляционных сетей, состоящих из одной центральной системы. Принцип уравнивания, согласно этой Инструкции, можно изложить так: уравнивание ведется в трех очередных этапах, имеющих своей целью постепенное исправление величины углов так, чтобы сначала были исполнены условия треугольников, потом условия горизонта с соблюдением условии треугольников, наконец боковые условия, с соблюдением условий треугольников и горизонта. Поправки, которые получают из за несоблюдения некоторого математического условия углы, входящие в это условие, должны быть равны по абсолютной величине. Исправление угла, исполняющего уже некоторое математическое условие вследствие вычислительных действии в предтествующем этапе, компенсируется равным, но противного знака, искажением других углов, входящих в это условие.

Можно доказать (часть 2) что, базируя на выше поданных общих принципах, не противоречащих технической логике, уравнивание будет протекать как следует:

Этап 1. Исполнение условии треугольников — путем разделения в каждом треугольнике навязки $F = 200^g - A - B - C$ по ровну на все углы треугольника.

Для больших сетей через A, B, C понимаются значения углов, перенесенные на плоскость проекции. В сжатой форме можно это представить равенством:

$$\boxed{v_{\mathrm{I}} = \frac{1}{3} \cdot F}$$

где v_I обозначает поправку угла при вычислении в первом этапе, а F — навязка треугольника, в котором находится данный угол.

Этап 2. Исполнение условии горизонта.

После вычисления значений невязки горизонта: $H = 400^g - C_1 - C_2 \dots - C_n$ для каждого полюса центральной системы, причем C_1, $C_2 \dots C_n$ это значения центральных углов этой системы, исправленные на 1 этапе, следует для каждого полюса центральный системы вычислить соответствующее значение x. Значения x получаем, решая симметрическую систему u линейных уравнении (u — число центральных систем формы:

$$\begin{array}{cccc|c}
x_1 & x_2 & x_3 & \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\; x_u & 1 \\
\hline\hline
Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} & \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\; Q_{1u} & \frac{1}{2} H_1 \\
Q_{21} & Q_{22} & Q_{23} & \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\; Q_{2u} & \frac{1}{2} H_2 \\
\dots & \dots & \dots & \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \dots\dots \\
Q_{u1} & Q_{u2} & Q_{u3} & \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\; Q_{uu} & \frac{1}{2} H_u
\end{array}$$

это значит

$$Q_{11} \cdot x_1 + Q_{12} \cdot x_2 + Q_{13} \cdot x_3 + \dots\dots\dots\dots + Q_{1u} \cdot x_u = \frac{1}{2} H_1 \text{ и т. д.}$$

Элементами таблицы коэффициентов являются:

$Q_{ii} = n_i$, где n_i — число треугольников в i-той центральной системе, а $Q_{ij} = -1$, если пункты i, j являются полюсами соседних центральных систем, а $Q_{ij} = 0$, если это не имеет места. Для каждого пункта, не являющегося полюсом центральной системы, соответствующее значение x равно нулю.

После вычисления значении x вычисляем для каждого угла сети „поправку второго этапа” v_{II}, отнимая от удвоенной величины x, относящейся к вершине этого угла значения x, относящиеся к точкам на левом и правом визирных лучах угла, что можно выразить уравнением:

$$\boxed{v_{II} = 2x_C - x_L - x_P}$$

Этап 3. Исполнение боковых условии.

После вычисления значении невязок синусов: $S = \Sigma$ lg sin $P - \Sigma$ lg sin L для каждой центральной системы, где P — правые углы, L — левые углы для наблюдателя находящегося в полюсе системы, нужно вычислить, исходя из значении улов полученных при вычислениях на втором этапе — соответствующее значение y для полюса каждой центральной системы. Значения y получаем, решая симметрическую систему u линейных уравнении формы:

y_1	y_2	y_3	..... y_u	1
R_{11}	R_{12}	R_{13}	..... R_{1u}	S_1
R_{21}	R_{22}	R_{23}	..... R_{2u}	S_2
......	......	......	......	......
R_{u1}	R_{u2}	R_{u3}	R_{uu}	S_u

это значит:

$$R_{11}y_1 + R_{12}y_2 + R_{13}y_3 \; ..... + R_{1n}y_n = S_1 \text{ и т. д.}$$

Элементы таблицы имеют следующие значения: $R_{ii} = \Sigma r_i$ есть суммой „логарифмических разностей” в i-той центральной системе (т.е. суммой приращении значении lg sin, отвечающих приращению значения угла на 1^{cc}). Величина $R_{ij} = -\Sigma r_{ij}$ есть отрицательной суммой логарифмических разностей углов, под которыми наблюдался отрезок i-j, если i, j являются полюсами соседных центральных систем, а нулем ($R_{ij} = 0$) — если это не имеет места. Для каждого пункта, не являющегося полюсом центральной системы, соответствующее значение y равно нулю.

После вычисления всех значении y вычисляем для каждого угла сети „поправку третьего этапа” v_{III}, отнимая от величины y, соответствующей точке на правом луче угла величину y, соответствующую точке на левом луче угла, что можно выразить уравнением:

$$\boxed{v_{III} = y_P - y_L}$$

Как числовой пример описанного способа уравнивания приведено уравнивание небольшой независимой сети, покрывающей пространство ок. 30 $\times$ 40 км., со сторонами длиной ок. 8 км., исполненное Государственным Геодезическим Предприятием по методу наименьших квадратов. Квадратный корень из суммы квадратов искажении наблюдении, деленный на число избыточных наблюдении равняется соответственно:

метод наименьших квадратов:	$m_o = \pm 1{,}78^{cc}$
способ приближенный	$m'_o = \pm 1{,}82^{cc}$

Наибольшие искажения величины наблюденных углов равны соответственно:

метод наименьших квадратов:	$3{,}16^{cc}$	$3{,}07^{cc}$
способ приближенный	$3{,}25^{cc}$	$3{,}24^{cc}$

Среднее значение разности между поправкой угла, вычисленной по методу наименьших квадратов и соответствующей поправкой по приближенному способу равняется $0{,}2^{cc}$, наибольшее значение этой разности равно $0{,}63^{cc}$, т. е. около $^1/_3$ величины средней квадратической ошибки наблюдении.

Среднее значение разностей координат, вычисленных при обоих методах уравнивания равняется 0,5 сантиметра, наибольшее 2 сантиметра.

В окончании своего труда автор подчеркивает, что он не является противником метода наименьших квадратов, наоборот, он считает этот метод единственным, научно обоснованным методом, позволяющим получить самые вероятные значения поправок наблюдении. Однако во многих случаях экономические соображения не позволяют на полное применение метода наименьших квадратов. Тогда упускается часть условных уравнении и производится уравнивание по методу наименьших квадратов, включая в условие минимума только легко вычисляемые условные уравнения (напр. уравнивание увязанных сетей как независимых и прилаживание вычисленного материала к системе пунктов увязки). Проблема уравнивания перестает быть в этом случае научной проблемой разискивания системы найболее вероятных значении поправок наблюдении, она становится научно-технической проблемой разыскивания таких значении поправок, чтобы исправленные наблюдения исполняли математические условия сети, а найболшие — по абсолютной величине — значения поправок не превышали установленных техническими инструкциями для работ данного типа границ (напр. троекратной средней ошибки, вычисленной по формуле Ферреро). В таких именно случаях, когда применение метода наименьших квадратов не совсем обосновано, более целесообразным кажется применение приближенных способов простых и экономических —

вместо метода наименьших квадратов, применяемого только формально, с чем встречаемся при точном уравнивании части условии, и прилаживанием потом полученного материала к опорным, жестким пунктам.

Следует также помнить, что проблема уравнивания „почти безошибочных сетей", т. е. сетей, в которых несогласия математических условий с результатами наблюдении можно считать пренебрегаемо малыми, по мере совершенствования угломерных инструментов будет все более актуальной, а число „почти безошибочных" сетей будет все возрастать.

STEFAN HAUSBRANDT

APPROXIMATE ADJUSTMENT OF INDEPENDENT SURFACE NETS

Summary

The author of the present work makes a statement that the instruments for augular measurements produced by leading firms in optic industry, allow for the execution of augular measurements with such high an accuracy, that it is often difficult to justify, from the practical point of view, the pertinency of applying the method of the least squares to adjustment of observational systems.

For more simple compensation assumption taken than that of $[vv] = $ = minimum, the results of adjustment obtained in those "nearly errorless" systems are practically identical with those obtained in the compensation by the method of the least squares, the basic criterion of deformation of observation however — the magnitude of the root of sum of squares of deformation divided by the quantity of supernumerary observations — becomes nearly identical with the adjustment by the method of the least squares and that by approxinate methods only. This particularly concerns independent surface nets, i. e. triangle nets built of central systems, and not based on fixed points (fig. 21).

The present work discusses just this sort of "approximate adjustment" of an independent surface net, arising from a generalization of the principle of adjustment by degrees (successive adjustment of conditions) to a net composed of a set of central systems, as it was suggested for local nets containing one central system, by the instruction (so called instruction of the Ministry of Public Work) valid between the wars. The principle of adjustment may be framed as follows: the adjustment is carried out in three phrases aiming at a gradual correction of angle values so that the triangle conditions be fulfilled at first, than the horizontal conditions with preservation of triangle conditions, and at last, the sine conditions with preservation of triangle and horizontal conditions. If one of mathematical conditions has not been fulfilled, than the absolute values of the corrections to different angles, contained in the said condition, should equal each other, and the correction of an angle that already

fulfilled a certain mathematical conditions is, as a result of computation in the previous phase, recompensed by an equal — but of reverse sign — deformation of other angles contained in that condition.

It may be shown (which is done in p. 2) that the adjustment based on the above general principles congruent with technical logic, will be carried on as follows:

Phase I. Fulfillment of triangle conditions by apportionment of discripancies in each triangle $F = 200^g - A - B - C$ in equal parts to all angles of the triangle.

Of course, by A, B, C in larger nets we understand the angle values transferred upon projection plane. It may be denoted briefly by the equation:

$$\boxed{v_{\mathrm{I}} = \frac{1}{3} F}$$

v_{I} being angle correction in the first phase and F — the discrepancy of the triangle in which the said angle appears.

Phase II. Fulfillment of horizontal conditions

After the values of horizontal discrepancies $H = 400^g - C_1 - C_2 - \ldots$ $\ldots - C_n$ for each vertex of central system have been computed, C_1, $C_2 \ldots C_n$ being the values of central angles of the system corrected in phase I, corresponding value x for each vertex of the central system is to be computed. Values of x are obtained by solving a symetrical system of u linear equations (u being the number of central systems) in form of

x_1 x_2 x_3 .... x_u	1
Q_{11} Q_{12} Q_{13} .... Q_{1u}	$\frac{1}{2} H_1$
Q_{21} Q_{22} Q_{23} .... Q_{2u}	$\frac{1}{2} H_2$
....	....
Q_{u1} Q_{u2} Q_{u3} Q_{uu}	$\frac{1}{2} H_u$

or in the clear form:

$$Q_{11} x_1 + Q_{12} x_2 + Q_{13} x_3 \ldots\ldots\ldots\ldots + Q_{1u} x_u = \frac{1}{2} H_1 \text{ and so on.}$$

The elements of the coefficients table are: $Q_{ii} = n_i$, n_i being the number of triangles in the i^{th} central system, $Q_{ij} = -1$ if points i, j are neighbouring central points, and $Q_{ij} = 0$ if they are not. For each point which does not form a vertex of a central system the corresponding value x equals zero.

After the values x have been determined, we compute "correction of the second phase" v_{II} for each angle by substracting from the doubled value x conferred upon the central point of the angle, the values x conferred upon the points on the right and on the left arm of the angle, which may be denoted briefly by the equation:

$$\boxed{v_{II} = 2x_C - x_L - x_P}$$

Phase III. Fulfillment of sine equation

After the quantities of sine discripancies $S = \Sigma \log \sin P - \Sigma \log \sin L$ have been computed for each central point: P being right angles, L left angles for an observer's eye in the centre of the system, and based on the velues of angles obtained in the phase II were compute a value y corresponding to the vertex of each central system.

We obtain the values y by solving the system of u linear equations tabled below:

y_1	y_2	y_3	....	y_u	1
R_{11}	R_{12}	R_{13}	....	R_{1u}	S_1
R_{21}	R_{22}	R_{23}	....	R_{2u}	S_2
...	...	...	...	...	...
R_{u1}	R_{u2}	R_{u3}	....	R_{uu}	S_u

i.e.

$$R_{11}\,y_1 + R_{12}\,y_2 + R_{13}\,y_3 \,\ldots\ldots\ldots + R_{1u}\,y_u = S_1 \quad \text{an so on}$$

The meaning of symbols is as follows: $R_{ii} = \Sigma r_i$ the sum of "logaritmic differences" in the i^{th} central system (i.e. sum of increases of sine values corresponding to 1^{cc} increases of angle values). The value $R_{ij} = -\Sigma r_{ij}$ is the sum of logarithmic differences of angles of the observed sector $i - j$ with a negative sign if i, j are neighbouring central points, and zero ($R_{ij} = 0$) if they are not. For each point, which does not form a vertex of a central system, the corresponding value y equals zero.

After all values of y have been determined, we compute, for each angle of the net, a "correction of the third phase" v_{III}, subtracting from the value y conferred upon the point at the right arm of the angle the value y conferred upon the point at the left arm of the angle, which may be briefly expressed by the equation:

$$\boxed{v_{III} = y_P - y_L}$$

An adjustment of a small independent net with the length of sides of 8 km order covering an area of about 30×40 km is presented to illustrate numerically the described method.

It is adjusted according to the method of the least squares by the Geodesical State Enterprise. The root of square sums of observation deformations divided by the number of supernumerary observations amounted to:

according to the method of least squares . . . . $m_0 = \pm\ 1{,}78^{cc}$
according to the approximate method . . . . $m_0' = \pm\ 1{,}82^{cc}$

The maximum deformations of the quantity of the angles observed amounted to:

according to the method of the least squares . . $3{,}16^{cc}$, $3{,}07^{cc}$
according to the approximate method . . . . $3{,}25^{cc}$, $3{,}24^{cc}$

The average value of differences between angle correction computed according to the method of the least squares and that obtained according to approximate method amounted to $0{,}2^{cc}$, and the maximum value of those differences amounted to $0{,}63^{cc}$, i.e. about 1/3 of mean error of observations.

The average value of difference in magnitudes of coordinates computed according to two methods amounted to 1/2 cm, and the maximum one 2 cm.

To conclude the discussion the author stresses his not being an antagonist of adjustment according to the method of the least squares, but on the contrasy because of its supplying with most probable values of observation corrections, look upon this method as the only one scientifically expounded.

In many cases, however, the economic reasons do not permit the method of the least squares to be consistently applied. A part of conditional equations is then neglected and the adjustment is carried out according to (the method of the least squares with the minimum criterion encompassing only the easy computable conditional equations (e.g. adjustment of nets tied as independent nets, and fitting in the material obtained into a system of junection points). The problem of adjustment is then not a scientific problem — a search for a system of most probable values of observation corrections; but turns into a scienti-technical problem — a search for such values of corrections that the mathematic conditions be fulfilled by corrected observations and the magnitudes of maximum corrections, as to their absolute value, do not exceed the limits foreseen for this type of work in appropriate technical instructions (i.e. for instance tripled mean error calculated according to Ferrero's formula). In these cases, howerver, where the use of the method of the least squares is not indispensable for adjustment of a given system, the application of approximate methods — simple and inexpensive — seems more suitable than applying the method of the least squares in a purely apparent character, what happens when only a part of conditions is being adjusted exactly, and the system obtained interlaced into the junction points.

Moreover, it should be borne in mind that the problem of adjustment of "nearly errorles" nets — that is of nets allowing for the discripancies of mathematical conditions to be treated as negligible quantities — will grow more and more essential, for the number of "nearly errorless" nets will constantly increase as the surveying instruments will become more and more perfect.

STEFAN HAUSBRANDT

DAS VERFAHREN DER NÄHERUNGSAUSGLEICHUNG IN ANWENDUNG AUF SELBSTÄNDIGE FLÄCHENNETZE

Zusammenfassung

Der Verfasser stellt eingangs fest, dass die führenden Herstellerfirmen heutzutage Winkelmessinstrumente bauen, die eine sehr hohe Winkelmessgenauigkeit erreichen lassen. In vielen Fällen kommt es daher vor, dass man keine praktischen Gründe im Stande ist anzuführen, die die Zweckmässigkeit einer Ausgleichung der Beobachtungen nach der Methode der kleinsten Quadrate rechtfertigen könnten.

Wenn nämlich solche „fast fehlerfreie" Beobachtungsreihen vorhanden sind, genügen weniger strenge Bedingungen als $[vv]$ = minimum, und trotzdem erzielt man fast die gleichen Ausgleichungsergebnisse wie bei Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate. Hinzu kommt noch, dass dann ohne Unterschied, sowohl beim strengen als auch angenäherten Ausgleichungsverfahren das grundlegende Beurteilungsprinzip für die Genauigkeit der Beobachtungen fast identische Resultate gibt. Das bezieht sich insbesondere auf selbständige Flächennetze, also auf aus Zentralsystemen zusammengesetzte Dreiecksnetze, die an keine Festpunkte angeschlossen sind (s. Bild 21).

Vor dem letzten Kriege gab es in Polen eine Vermessungsanweisung des ehem. Ministeriums für Öffentliche Arbeiten. Diese Anweisung sah für kleine freie Netze (aus einem einzelnen Zentralsystem bestehende Netze) die Möglichkeit einer schrittweisen Ausgleichung vor, d. h. eine Aufteilung der ganzen Ausgleichberechnung in mehrere Teilvorgänge, die nacheinander, in bestimmter Reihenfolge, bewältigt werden. In jedem Vorgang befasst man sich mit Netzbedingungen einer bestimmten Art. Dieses Näherungsausgleichsverfahren wird im vorliegenden Beitrag vom Verfasser in Anwendung auf grosse selbständige Netze untersucht, also auf Netze, die aus mehreren Zentralsystemen zusammengesetzt sind. Dem Ausgleichungsprinzip könnte man eine solche Wortfassung geben: Die Ausgleichung ist in 3 Schritten auszuführen, zwecks allmählicher fortschreitender Verbesserung der Winkelwerte; beim ersten Schritt gilt es

die Winkelsummenbedingungen zu erfüllen, beim zweiten Schritt handelt es sich um die Erfüllung der Herizontbedingungen ohne dass dabei die vorher erfüllten Winkelsummenbedingungen gestört werden, schliesslich — beim dritten Schritt — wird die Erfüllung der Seitenbedingungen angestrebt, bei gleichzeitiger Berücksichtigung der bereits vorher erfüllten Winkelsummen — und Herizontbedingungen.

Verbesserungen, die verschiedenen Winkeln zugeschrieben werden, welche eine gewisse Bedingung — in der sie auftreten — nicht erfüllen, müssen absolut gleich sein. Die weitere notwendige Verbesserung eines Winkels, welcher einer mathematischen Bedingung bereits Genüge leistet, wird mittels gleich grosser Korrektionen entgegengesetzten Vorzeichens rekompensiert, die den übrigen, in der neuen Bedingung auftretenden Winkeln hinzugefügt werden.

Man kann den Beweis erbringen (s. Abs. 2), dass in Anlehnung an die soében angeführten allgemeinen Regeln der Ausgleichungsvorgang folgenden Verlauf nehmen wird.

I. Schritt. Erfüllung der Winkelsummenbedingungen

In jedem Dreieck wird der Dreieckwiderspruch

$$F = 200^g - A - B - C$$

zu gleichen Teilen auf alle Winkel verstreut. (A, B, C bezeichnen die gemessenen Dreieckswinkel; bei ausgedehnten, grossen Netzen sind es die auf die Referenzebene übertragenen Winkelwerte). Man kann demnach kurzerhand schreiben

$$\boxed{v_{\mathrm{I}} = \frac{1}{3} F}$$

wobei v_I die Verbesserung im ersten Ausgleichungsschritt, hingegen F den Winkelsummenwiderspruch des betreffenden Dreiecks bezeichnet.

II. Schritt. Erfüllung der Horizontbedingungen

Für jede Station des Zentralsystems wird der Horizontwiderspruch $H = 400^g - C_1 - C_2 - .... - C_n$ errechnet. Mit C_1, $C_2 .... C_n$ wurden hierbei die Stationswinkel bezeichnet. Sie wurden im ersten Ausgleichungsschritt bereits verbessert. Es ist nun für jede Station des Zentralsystems die ihr zugehörige Grösse x zu bestimmen. Zu diesem Zweck ist ein symmetrisches Gleichungssystem aufzulösen, welches u lineare Gleichungen enthält (u Anzahl der Zentralsysteme):

x_1	x_2	x_3	....	x_u	1
Q_{11}	Q_{12}	Q_{13}	....	Q_{1u}	$\frac{1}{2} H_1$
Q_{21}	Q_{22}	Q_{23}	....	Q_{2u}	$\frac{1}{2} H_2$
......	......	......	....	......	......
Q_{u1}	Q_{u2}	Q_{u3}	....	Q_{uu}	$\frac{1}{2} H_u$

Dasselbe, in anderer Form geschrieben, würde lauten:

$$Q_{11}\ x_1 + Q_{12}\ x_2 + Q_{13}\ x_3 + \dots\dots + Q_{1u}\ x_u = \frac{1}{2} H_1 \quad \text{usw. usw.}$$

Die Koeffiziententabelle setzt sich aus folgenden Daten zusammen: $Q_{ii} = n_i$, wobei n_i gleich der Anzahl der Dreiecke im Zentralsystem i ist; $Q_{ij} = -1$, wenn i und j zwei benachbarte Zentralsysteme bezeichnen; $Q_{ij} = 0$, wenn i und j nicht benachbarte Zentralsysteme sind. Die Grösse x ist gleich Null für jeden Punkt des Triangulationsnetzes, welcher nicht Ecke eines Zentralsystems ist.

Nachdem die Grössen x gefunden worden sind, werden für jeden Winkel des Netzes die „zweiten Verbesserungen" (d. h. Verbesserungen aus dem zweiten Ausgleichungsschritt) ermittelt, wozu die Beziehung

$$\boxed{v_{II} = 2x_C - x_L - x_P}$$

verwendet wird. Hierbei gelten folgende Bezeichnungen:

v_{II} = zweite Verbesserung; x_C = der für den Scheitelpunkt des Winkels gültige x-Wert; x_L = der für den auf dem linken Winkelarm gelegenen Punkt gültige x-Wert; x_P = x-Wert für den auf dem rechten Winkelarm gelegenen Punkt.

III. Schritt. Erfüllung der Seitenbedingungen

Zuerst wird der logarithmische Seitenwiderspruch für jedes Zentralsystem ermittelt. Also mit im II Schritt ausgeglichenen Winkeln rechnend.

$$S = \Sigma \lg \sin P - \Sigma \log \sin L$$

wobei die Bezeichnung P und L die rechten bezw. linken Winkel bedeuten, so wie sie für einen im Zentralpunkt stationierten Beobachter erscheinen.

Es sind nun die Werte y für jeden Zentralpunkt eines jeden Zentralsystems zu bestimmen. Zu diesem Zweck wird ein symmetrisches lineares Gleichungssystem von u Gleichungen aufgelöst. Dieses Gleichungssystem kann dargestellt werden in Tabellenform:

y_1	y_2	y_3	....	y_u	1
R_{11}	R_{12}	R_{13}	....	R_{1u}	S_1
R_{21}	R_{22}	R_{23}	....	R_{2u}	S_2
......	......	......	....	......	......
R_{u1}	R_{u2}	R_{u3}	....	R_{uu}	S_u

bezw. voll entwickelt:

$$R_{11}y_1 + R_{12}y_2 + R_{13}y_3 + \ldots\ldots\ldots + R_{1u}y_u = S_1 \quad \text{usw. usw.}$$

Hierbei ist $R_{ii} = \Sigma r_i$. Unter der Bezeichnung r_i ist die logarithmische Tafeldifferenz (z. B. für 1^{cc}) für den Winkel i zu verstehen; R_{ii} bezeichnet demnach die Summe der Tafeldifferenzen im Zentralsystem i. Die Grösse $R_{ij} = -\Sigma r_{ij}$* hat ein negatives Vorzeichen, wenn i und j zwei benachbarte Zentralpunkte darstellen. Wenn dieser Fall nicht zutrifft, dann ist $R_{ij} = 0$. Die Grösse y ist gleich Null für jeden Punkt der nicht Zentralpunkt ist.

Nachdem alle y-Werte gefunden worden sind, bestimmt man für jeden Winkel des Netzes die „dritte Verbesserung", gemäss der Bezeichnung und ähnlich dem Vorgang beim II Ausgleichungsschritt:

$$\boxed{v_{III} = y_P - y_L}$$

Als Zahlenbeispiel für dieses Verfahren wurde die Ausgleichung eines selbständigen Netzes angeführt, welches vorher nach der Methode der kleinsten Quadrate durch eine geodätische Dienststelle ausgeglichen worden war. Das Netz bestand aus Dreiecken mit durchschnittlich 8 km langen Seiten und bedeckte ein Gebiet von ca 40 km Länge und 30 km Breite.

Die Wurzel aus der durch die Anzhal der überzähligen Beobachtungen dividierte Quadratsumme der Beobachtungsabweichungen ergab

nach der Methode der kleinsten Quadrate: $m_o = \pm 1{,}78^{cc}$
nach dem Näherungsausgleichsverfahren: $m_o' = \pm 1{,}82^{cc}$

Die Maximalwerte der Winkelverbesserungen erreichten den Betrag

nach der Methode der kleinsten Quadrate: $3{,}16^{cc}$, $3{,}07^{cc}$
nach dem Näherungsausgleichsverfahren: $3{,}25^{cc}$, $3{,}24^{cc}$,

Die Differenz zwischen einer bestimmten, nach den beiden Methoden errechneten Winkelverbesserung, erreichte im Durchschnitt den Wert $0{,}2^{cc}$. Der Maximalwert einer solchen Differenz betrug $0{,}63^{cc}$, d. i. ungefähr $^1/_3$ des mittleren Beobachtungsfehlers. Die entsprechenden Koordinatendifferenzwerte betrugen: im Durchschnitt — $\frac{1}{2}$ cm, im Grenzfall — 2 cm.

* $R_{ij} = -\Sigma r_{ij}$ ist die Summe der logarithmischen Sinuswerte jener Winkel, unter denen die Strecke i—j beobachtet werden war.

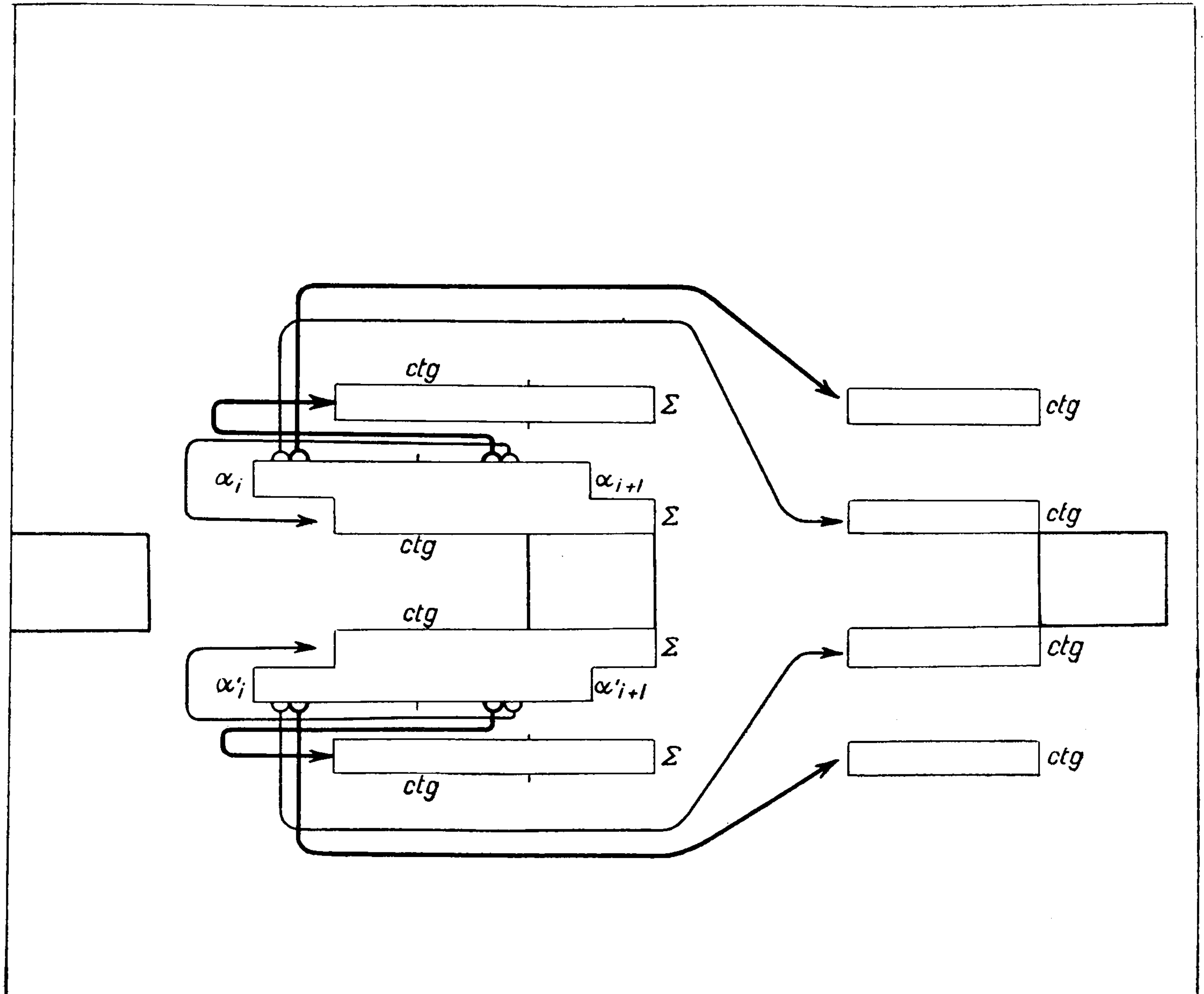
Abschliessend bemerkt der Verfasser, dass er keineswegs ein Gegner der Methode der kleinsten Quadrate ist, ganz im Gegenteil, er betrachtet sie als das einzig wissenschaftlich begründete Verfahren, welches die wahrscheinlichsten Verbesserungswerte zu den Beobachtungsdaten liefert. In vielen Fällen sprechen jedoch wirtschaftliche Erwägungen gegen die Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate. Ein Teil der Bedingungsgleichungen wird dann vernachlässigt und die Methode der kleinsten Quadrate nur in Bezug auf diejenigen Bedingungsgleichungen angewandt, deren Auflösung sich rechnerisch einfach gestaltet (z. B. das Ausgleichen angeschlossener Netze als freie Netze, mit nachfolgender Einfügung in die Passpunkte). Das Ausgleichungsproblem hört damit auf ein wissenschaftliches Problem zu sein, mit der Aufgabe, einen bestimmten Satz wahrscheinlichster Verbesserungswerte zu liefern. Es wandelt sich in eine wissenschaftlich-technische Frage um, wo solche Verbesserungswerte gesucht werden, die die mathematischen Netzbedingungen erfüllen, wobei aber gleichzeitig die Absolutgrössen maximaler Verbesserungen den durch Messvorschriften bezeichneten Grenzwert nicht überschreiten (z. B. kleiner sein müssen als der dreifache, nach der Ferrero-Formel errechnete mittlere Fehler). Solche Fälle, wo die Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate nicht unbedingt notwendig ist, dürfte es zweckmässiger sein, sie durch die einfacheren und billigeren Näherungsmethoden zu ersetzen.

Es bliebe noch darauf hinzuweisen, dass das Problem der Ausgleichung „fast fehlerfreier" Netze (d. h. solcher Netze, in denen die sich aus Beobachtungsdaten ergebenden mathematischen Widersprüche vernachlässigbarer Grössenordnung sind), mit der stetig steigenden Präzision der Messinstrumente an Wichtigkeit ständig zunehmen wird.

SZABLONY DO ARTYKUŁU

Nowa metoda wyrównania radialnej triangulacji instrumentalnej

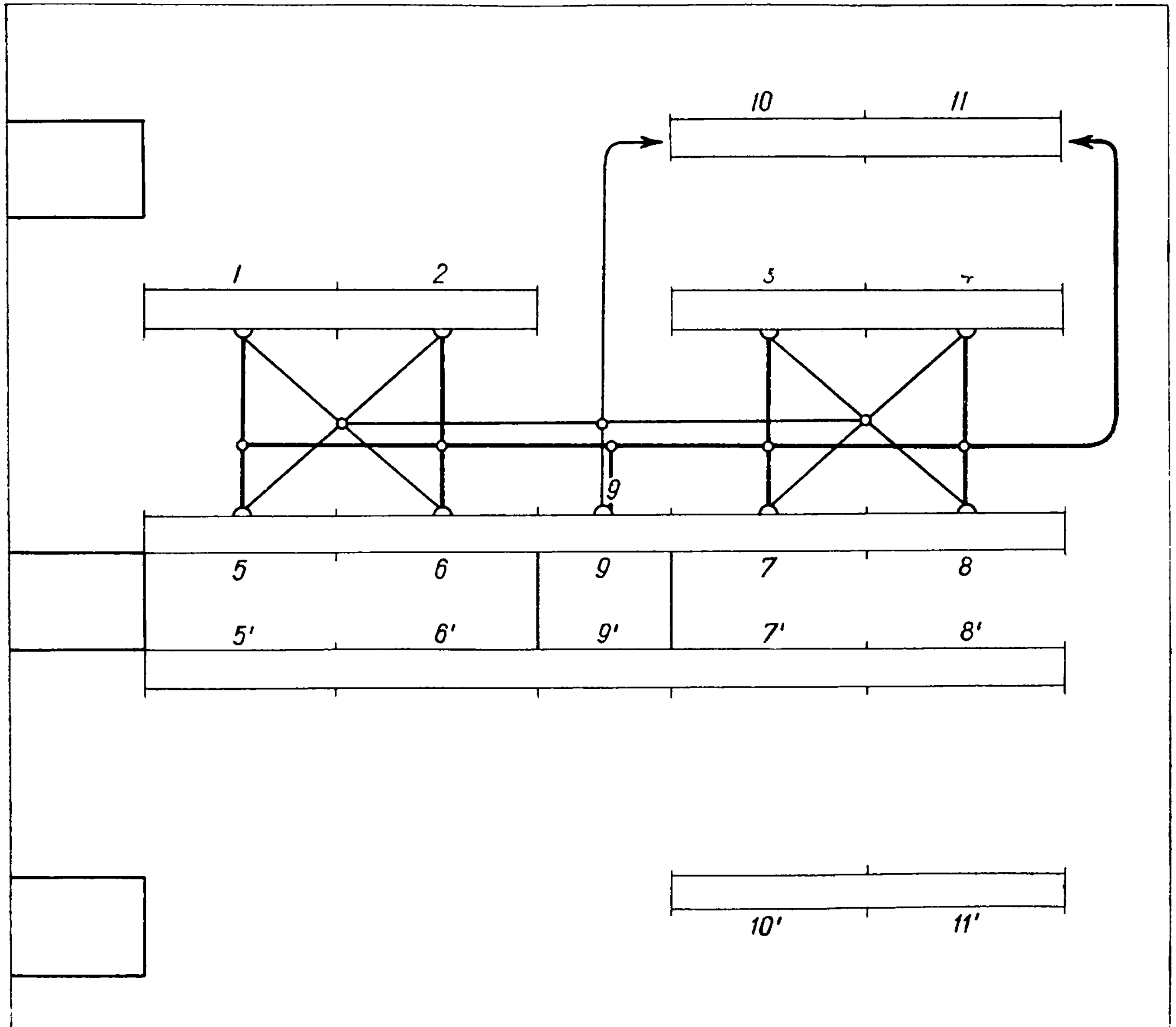
Uwaga. W celu przystosowania szablonów do użytku, należy uprzednio wyciąć w nich odpowiednie pola, oprowadzone cienką linią.



SZABLON NR 1

(DO FORMULARZA NR 2)

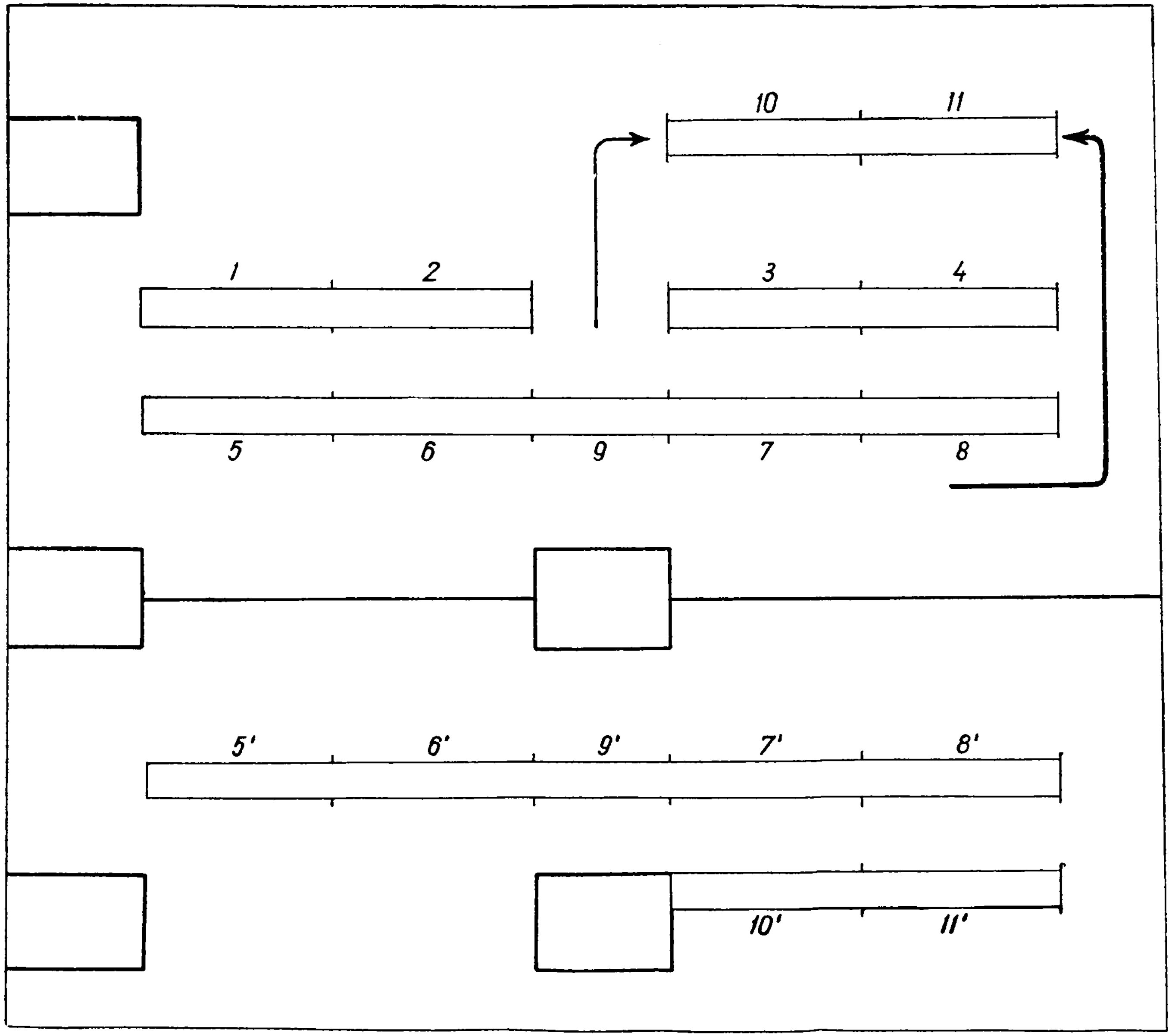
Wpisać cotangensy kątów α'_i, α'_{i+1}, α'_i, α'_{i+1} w miejsca wskazane strzałkami ⟶ względnie — strzałkami ⟶ (zależnie od tego, który wiersz jest wolny), a następnie zsumować cotangensy wierszami, wpisując sumy ctg (Σ) w wiersze obok ich składników.



SZABLON NR 1a

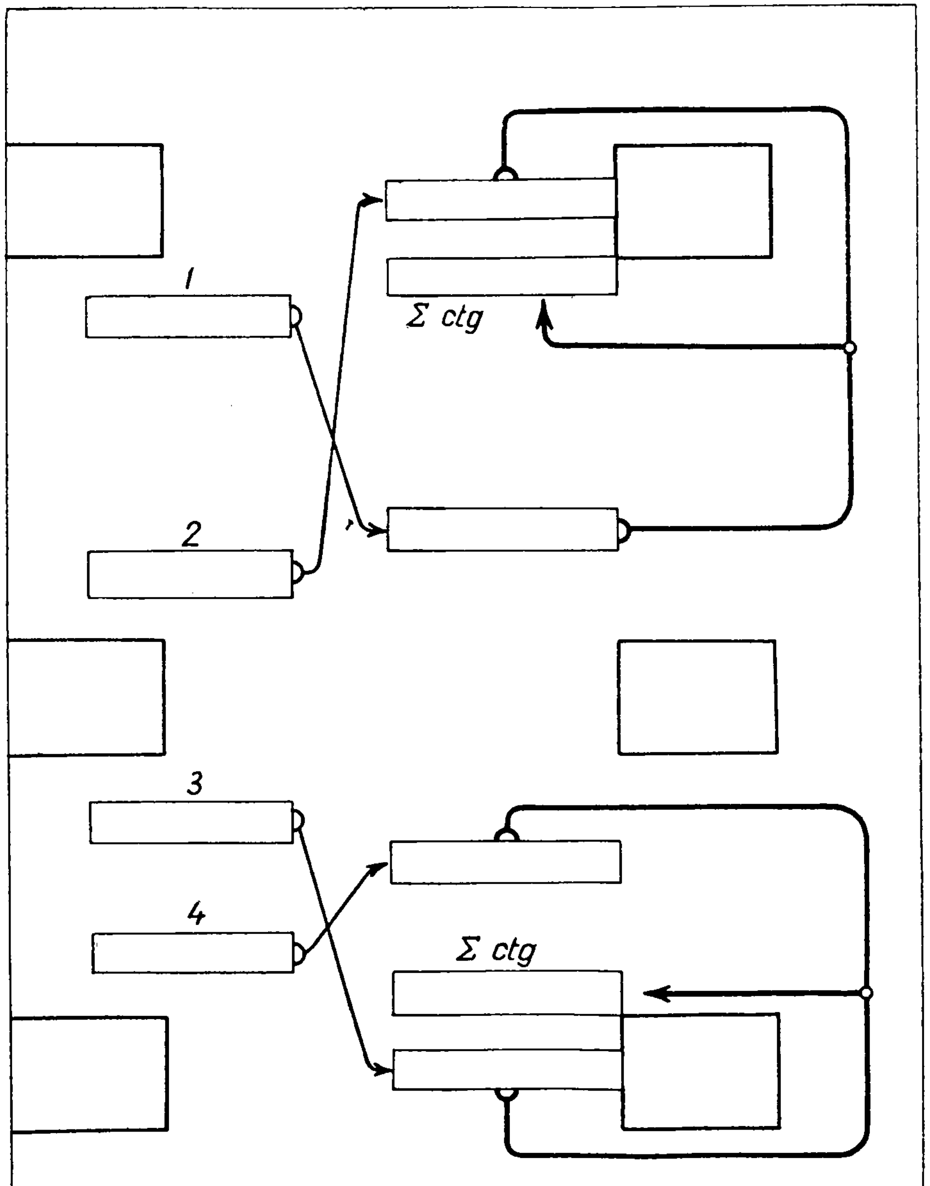
(DO FORMULARZA NR 2)

Czynności rachunkowe	
operacje	wynik
$\dfrac{1.6 + 3.8 - 2.5 - 4.7}{9} =$	10
$\dfrac{1.5 + 2.6 + 3.7 + 4.8}{9} =$	$\underline{11}$
$\dfrac{1.6' + 3.8' - 2.5' - 4.7'}{9'} =$	$\underline{10'}$
$\dfrac{1.5' + 2.6' + 3.7' + 4.8'}{9'} =$	$\underline{11'}$



SZABLON NR 1b
(DO FORMATU NR 2)

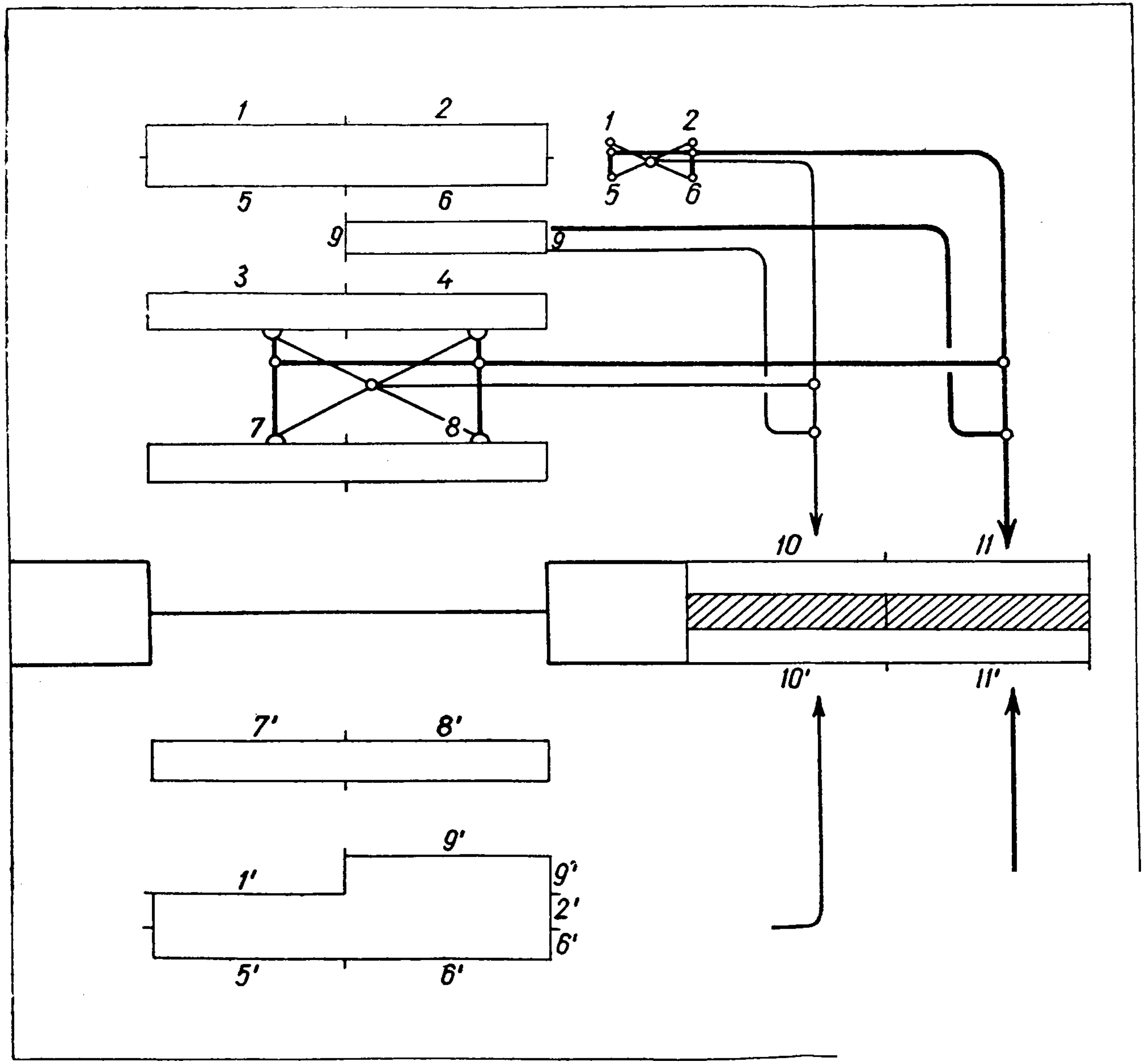
Czynności rachunkowe	
operacje	wynik
$\dfrac{1.6 + 3.8 - 2.5 - 4.7}{9} =$	$\underline{10}$
$\dfrac{1.5 + 2.6 + 3.1 + 4.8}{9} =$	$\underline{11}$
$\dfrac{1.6' + 3.8' - 2.5' = 4.7'}{9'} =$	$\underline{10'}$
$\dfrac{1.5' + 2.6' + 3.7' + 4.8'}{9'} =$	$\underline{11'}$



SZABLON NR 2

DO FORMULARZA NR 2

Wpisać cotangensy kątów 1, 2, 3, 4 w miejsca wskazane strzałkami ↗, a następnie zsumować cotangensy parami zgodnie ze wskazaniami strzałek ↗

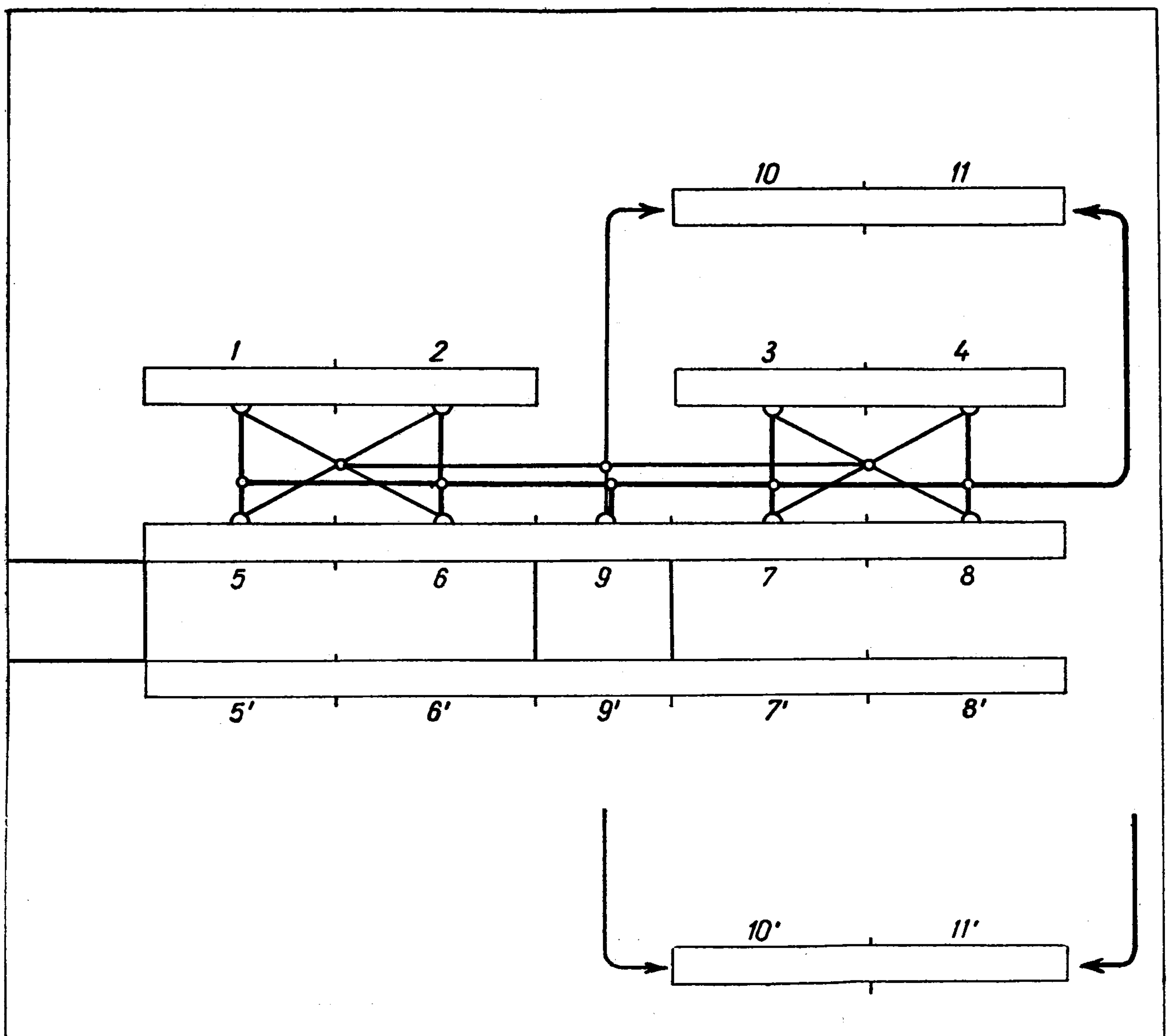


SZABLON NR 3

(DO FORMULARZA NR 2)

Czynności rachunkowe	
operacje	wynik
$\frac{1.6 + 3.8 - 2.5 - 4.7}{9} =$	$\underline{10}$
$\frac{1.5 + 2.6 + 3.7 + 4.8}{9} =$	$\underline{11}$
$\frac{1'.6' + 3.8' - 2'.5' - 4.7'}{9'} =$	$\underline{10'}$
$\frac{1'.5' + 2'.6' + 3.7' + 4.8'}{9'} =$	$\underline{11'}$

Po zdjęciu szablonu obliczyć i wpisać w miejsca zakreskowane różnice współrzędnych, tj. 10—10′ i 11—11′.



SZABLON NR 4
(DO FORMULARZA NR 2)

Czynności rachunkowe	
operacje	wynik
$\frac{1.6 + 3.8 - 2.5 - 4.7}{9} =$	$\underline{10}$
$\frac{1.5 + 2.6 + 3.7 + 4.8}{9} =$	$\underline{11}$
$\frac{1.6' + 3.8' - 2.5' - 4.7'}{9'} =$	$\underline{10'}$
$\frac{1.5' + 2.6' + 3.7' + 4.8'}{9'} =$	$\underline{11'}$