JERZY GAŹDZICKI
WOJCIECH JANUSZ

526.913.1 : 519.281

Jednoczesne wyrównanie azymutów i współrzędnych węzłowych w siatkach poligonowych

WSTĘP

Przy wyrównywaniu spostrzeżeń geodezyjnych, uważa się metodę najmniejszych kwadratów za dającą wyniki najbardziej zgodne z teoretycznymi dociekaniami, dotyczącymi rozkładu błędów pomiarowych z punktu widzenia ich charakteru i prawdopodobieństwa wystąpienia. Metoda ta w praktyce ma zastosowanie do wyrównywania układów spostrzeżeń o wysokiej wartości — dokonanych przy dużym nakładzie pracy i kosztów dla celów wyznaczenia wzajemnych położeń punktów osnowy podstawowej. Pomijanie metody najmniejszych kwadratów, przy wyrównywaniu wyników pomiarów o mniejszej dokładności, wynika z jej dużej pracochłonności. Przy wyrównywaniu osnów niższorzędnych, jak poligonizacja techniczna, a częstokroć i precyzyjna, stosowane są powszechnie przybliżone sposoby wyrównania, spełniające warunek: $\left[\frac{vv}{mm}\right] = \min.$ tylko w przybliżeniu.

Wszystkie przybliżone sposoby wyrównania różnią się między sobą jedynie w drugorzędnych szczegółach, ponieważ wspólne dla nich są dwa zasadnicze uproszczenia w stosunku do metody najmniejszych kwadratów:

1. Stosowanie rozdzielności wyrównania, zwanej popularnie niejednoczesnością, a polegającej na tym, że zamiast poddania łącznemu wyrównaniu wszystkich dokonanych spostrzeżeń, wyrównuje się najpierw kąty, w oparciu o warunki jakie ich sumy na poszczególnych ciągach winny spełnić, a osobno — sumy przyrostów współrzędnych w poszczególnych ciągach.

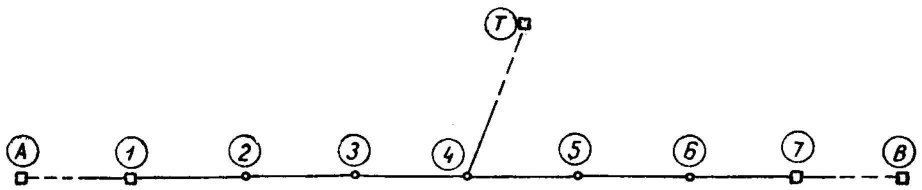
2. Stosowanie wyrównania funkcji spostrzeżeń, a nie samych spostrzeżeń.

Wydaje się, że szczególnie szkodliwie na wyniki wyrównania wpływa pierwsze uproszczenie, gdyż powoduje ono niemożliwość uwzględnienia przy wyrównaniu stosunku dokładności oddzielnie wyrównywanych spostrzeżeń. Uproszczenie to w rezultacie powoduje poważne zwiększenie zniekształceń spostrzeżeń w stosunku do zniekształceń uzyskiwanych przy wyrównaniu metodą najmniejszych kwadratów. Tego rodzaju zniekształcenia mogą być zaniedbywane przy pracach o niezbyt dużej dokładności, ale nie można ich pominąć przy wyrównywaniu poligonizacji precyzyjnej. Z drugiej strony, zastosowanie metody najmniejszych kwadratów do wyrównania poligonizacji precyzyjnej może w wielu wypadkach zdecydować o konieczności odrzucenia tej konstrukcji geometrycznej, jako nieopłacalnej w stosunku np. do metody punktów oporowych czy też zwykłej triangulacji i jej zagęszczenia metodą wcięć kątowych. Oczywiście nie zamierzamy tu bronić poligonizacji przed inwazją innych metod w wypadkach gdzie te ostatnie bardziej nadają się do zastosowania. Podkreślić jednak należy, że każda ze wspomnianych metod pomiarowych może być w określonych warunkach terenowych uznana za lepszą od innych, a częstokroć niezastąpioną. Pragniemy przeto, aby w warunkach, gdzie najbardziej odpowiednią jest poligonizacja precyzyjna, wyrównanie jej było jak najbardziej zbliżone wynikami do wyników metody najmniejszych kwadratów, a pracochłonnością — do sposobów przybliżonych. W tym celu opracowaliśmy dwa sposoby przybliżonego wyrównania współrzędnych i azymutów węzłowych w sieciach poligonowych, które — ze względu na uzasadnienie teoretyczne oraz osiągnięte wyniki — kwalifikujemy jako pośrednie między dotychczas znanymi sposobami przybliżonymi a metodą najmniejszych kwadratów. Co się tyczy ekonomii proponowanych sposobów, to wydają się one w nieznacznym stopniu bardziej pracochłonne od sposobu węzłów Popowa.

Obydwa proponowane sposoby różnią się od dotychczas stosowanych odrzuceniem pierwszego ze wspomnianych wyżej uproszczeń, w stosunku do metody najmniejszych kwadratów. Sposoby te bazują na jednoczesnym wyrównaniu funkcji wszystkich dokonanych spostrzeżeń, przy prawidłowym obliczeniu błędów tych funkcji w oparciu o znajomość wielkości błędów spostrzeżeń dokonanych. Przy założeniu, że wspomniane funkcje są identyczne z pewnymi spostrzeżeniami fikcyjnymi określającymi układ, w stosunku do tych ostatnich przeprowadza się w obu sposobach dalsze obliczenia zgodnie z postępowaniem metody najmniejszych kwadratów.

Proponowane sposoby różnią się między sobą tym, że w jednym z nich za spostrzeżenia fikcyjne uważa się długości poszczególnych ciągów, obliczone z sum przyrostów, i kąty między kierunkami prostych zamykających dla poszczególnych ciągów a kierunkami azymutow węzłowych, zaś w drugim — sumy kątów i przyrostów współrzędnych w poszczególnych ciągach. Oba proponowane sposoby mogą być — w mniemaniu autorów — przyjęte za równorzędne.

Na tle trwającego od kilku lat pędu racjonalizatorów do wynajdywania (rzeczywistego lub też opartego na obcojęzycznych publikacjach) coraz to nowych sposobów wyrównania przybliżonego poligonizacji, autorzy niniejszego uznali, że zamieszczone wyżej uwagi nie mogą stanowić wystarczającego uzasadnienia do proponowania jeszcze dwu nowych sposobów. Koniecznym wobec tego staje się podkreślenie, że wyrównanie ciągów względnie sieci poligonowych, w których na punktach wyznaczanych zaobserwowane są dodatkowo celowe do punktów stałych, leżących w bok od kierunku odpowiedniego ciągu, było dotychczas możliwe jedynie przy zastosowaniu metody najmniejszych kwadratów. Żaden ze znanych nam przybliżonych sposobów wyrównania nie pozwalał na uwzględnienie dokonanego nawiązania kątowego. Niekorzystanie więc z metody najmniejszych kwadratów z reguły przesądzało o niestosowaniu nawiązań kątowych, względnie o traktowaniu ich tylko jako spostrzeżeń kontrolnych, nie mających wpływu na wynik wyrównania. Celowości uwzględniania nawiązań kątowych w poligonizacji nie trzeba dowodzić na tym miejscu.



Rys. 21. Szkic orientacyjny ciągu

Otóż, obydwa proponowane tu sposoby pozwalają w bardzo ekonomiczny sposób określić współrzędne punktów na których zostało dokonane nawiązanie kątowe, z uwzględnieniem wpływu tego nawiązania. Ponieważ jednak możliwość zastosowania sposobów nie dowodzi jeszcze osiągania prawidłowych wyników, zamieszczamy niżej tabelę uzyskanych błędów rzeczywistych współrzędnych tego punktu w ciągu poligonowym (rys. 21), na którym zostało dokonane nawiązanie kątowe na punkt stały.

W tabeli oznaczamy:

ε_1 — błędy rzeczywiste uzyskane przy wyrównaniu ciągu metodą najmniejszych kwadratów bez uwzględnienia nawiązania kątowego,

ε_2 — błędy rzeczywiste uzyskane przy wyrównaniu ciągu metodą najmniejszych kwadratów z uwzględnieniem nawiązania kątowego.

ε_3 — błędy rzeczywiste uzyskane przy wyrównaniu współrzędnych punktu, na którym zostało dokonane nawiązanie kątowe, pierwszym z proponowanych sposobów z uwzględnieniem nawiązanią kątowego.

ε_4 — błędy rzeczywiste uzyskane przy wyrównaniu współrzędnych punktu, na którym zostało dokonane nawiązanie kątowe, drugim z proponowanych sposobów z uwzględnieniem nawiązania kątowego.

Nr obs. ciągu	X_4				Y_4			
	ε_1	ε_2	ε_3	ε_4	ε_1	ε_2	ε_3	ε_4
1	−5	−10	−4	−5	34	−4	−3	−3
2	5	4	5	3	1	2	3	4
3	−7	−7	−4	−4	6	−5	−4	−3
4	−2	−6	−3	−6	19	−3	−1	2
5	7	4	6	9	38	5	4	5
6	3	−3	0	7	46	−1	−1	0
7	−4	1	0	0	−39	−8	−8	−10
8	−2	−2	−3	−2	−2	−5	−4	−5
9	9	8	11	11	20	4	6	7
10	4	2	3	2	3	−3	−2	−6
$[\varepsilon\varepsilon]$	278	299	241	345	7048	194	172	273
m	0,06	0,06	0,05	0,06	0,28	0,05	0,04	0,05

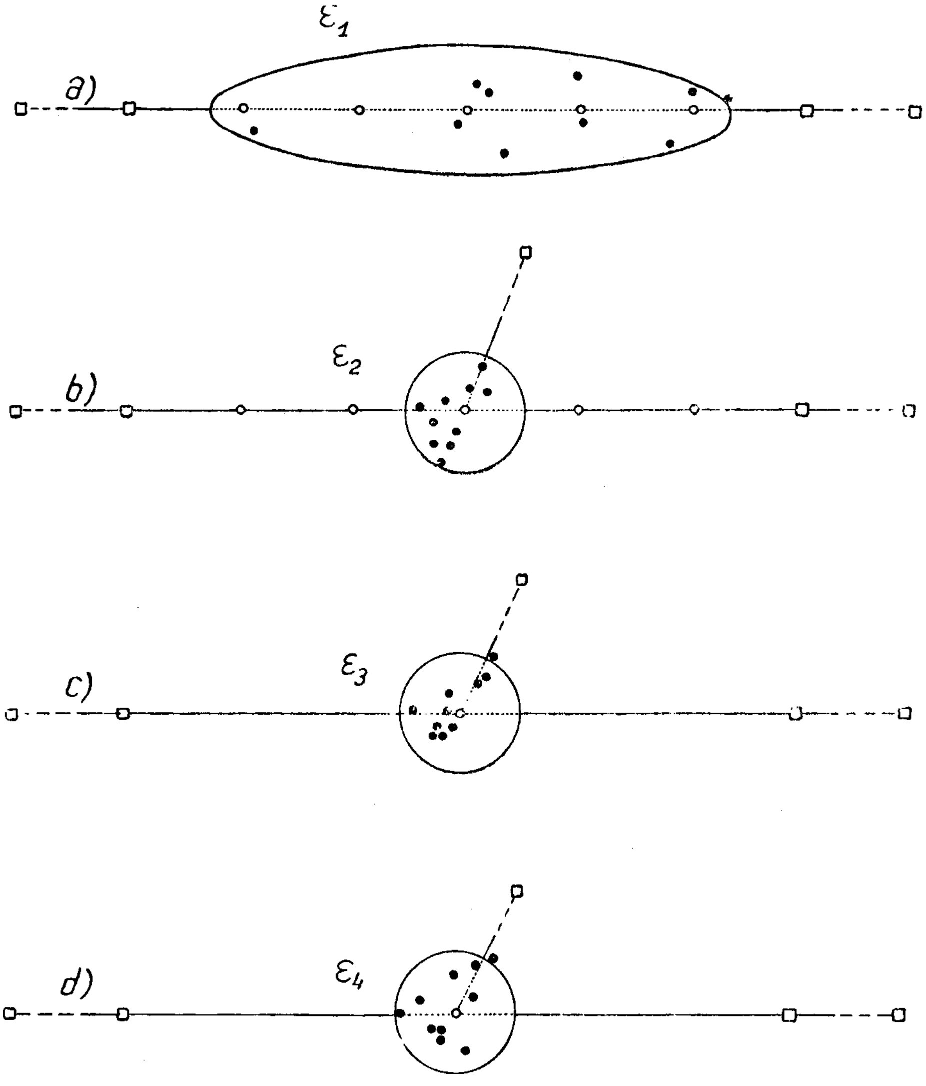
Zamieszczone w tabeli błędy dotyczą wyników 10 kolejnych wyrównań tego samego ciągu poligonowego, przy wykorzystaniu wyników 10 powtórzeń obserwacji ciągu*. Ponadto, wyznaczone z wyrównań kolejne położenia punktu Nr 4 w stosunku do położenia rzeczywistego (wyznaczonego z bardzo wysoką dokładnością — praktycznie bezbłędnie, w stosunku do dokładności powtarzanych 10-cio krotnie pomiarów) oznaczone są kropkami na rys. 22 abcd, odpowiednio do sposobu wyrównania. Na rysunku tym podane są elipsy błędu wyznaczenia punktu Nr 4. Prawdopodobieństwo, że punkt ten znajduje się wewnątrz elipsy wynosi $P = 90\%$ (za środek elipsy błędu przyjęto rzeczywiste położenie punktu Nr 4).

Przyjęte do badania układy spostrzeżeń tego samego ciągu można uważać za przeciętne, ponieważ błąd średni położenia punktu Nr 4, określony na podstawie 10 błędów rzeczywistych, zgadza się z błędem średnim wynikającym z wyrównania 35 dalszych układów spostrzeżeń metodą najmniejszych kwadratów, odpowiednio — z uwzględnieniem i bez uwzględnienia nawiązania kątowego. Wobec tego można powiedzieć, że przeprowadzone w odniesieniu do 10 powtórzeń pomiaru ciągu badanie wystarcza do określenia wartości proponowanych sposobów w ich zastosowaniu do wyrównywania ciągów z nawiązaniami kątowymi. Sposoby te pod względem uzyskanych błędów rzeczywistych okazały się równorzędne z metodą najmniejszych kwadratów.

Co się tyczy sprawdzenia wyników wyrównań współrzędnych i azymutów węzłowych, zamieszczamy narazie rezultaty jednokrotnego wyrównania sieci poligonowej każdym ze wspomnianych sposobów. Różnią się one w stosunku do wyników wyrównania metodą najmniejszych kwadratów o wielkości nieprzekraczające 0,5 wartości odpowiednich błędów

* Dane liczbowe przyjęto z publikacji [4]

średnich wyznaczenia niewiadomych. W chwili obecnej prowadzone są w IGiK dalsze badania dotyczące strony teoretycznej proponowanych tu sposobów wyrównania, oraz różnic między wynikami wyrównania różnych sieci poligonowych różnymi sposobami przybliżonymi, w zestawieniu z wynikami wyrównania tych sieci metodą najmniejszych kwadratów.



Rys. 22. Graficzne przedstawienie błędów rzeczywistych wyznaczenia p-ktu Nr 4

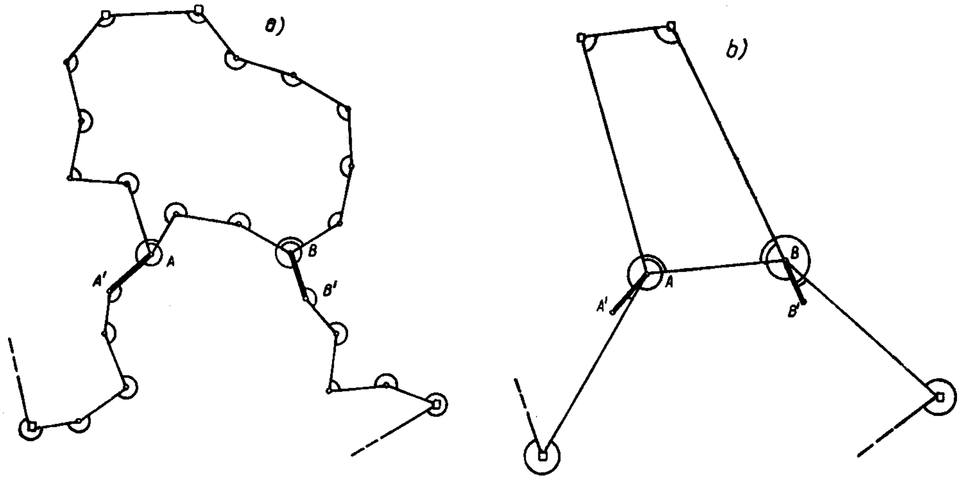
W dalszej części pracy podajemy omówienie szczegółowe każdego z proponowanych sposobów wyrównania wraz z przykładami liczbowymi ilustrującymi tok obliczeń.

SPOSÓB FIKCYJYCH SPOSTRZEŻEŃ

(opracował Wojciech Janusz)

Wyobraźmy sobie, że punkty *A* i *B* oraz azymuty *AA'* i *BB'* będące elementami węzłowymi sieci poligonowej, której kształt jest określony na rys. 23a, można wyznaczyć również przy wykorzystaniu spostrzeżeń oznaczonych na rys. 23b. Przyjmijmy dalej, że obydwa układy spostrzeżeń (a i b) prowadzą do wyznaczenia elementów węzłowych z jednakową dokładnością. W takim przypadku oczywistym jest, że z punktu widzenia ekonomii obliczeń korzystniejszy do wyrównania jest układ spostrzeżeń b.

Proponowany tu sposób jednoczesnego wyrównania wszystkich elementów węzłowych w sieciach poligonowych polega na zastosowaniu wyrównania fikcyjnych spostrzeżeń takiego typu jak w wariancie b, obliczonych na podstawie faktycznie dokonanych a n i e w y r ó w n a n y c h spostrzeżeń typu takiego jak w wariancie a.



Rys. 23. Oznaczenie wyrównywanych obserwacji

Obliczenia związane z wyrównaniem elementów węzłowych wymienionym sposobem można podzielić na następujące etapy:

1. Obliczenie fikcyjnych spostrzeżeń na podstawie spostrzeżeń dokonanych.

2. Określenie błędów średnich spostrzeżeń fikcyjnych (w oparciu o znajomość dokładności spostrzeżeń dokonanych).

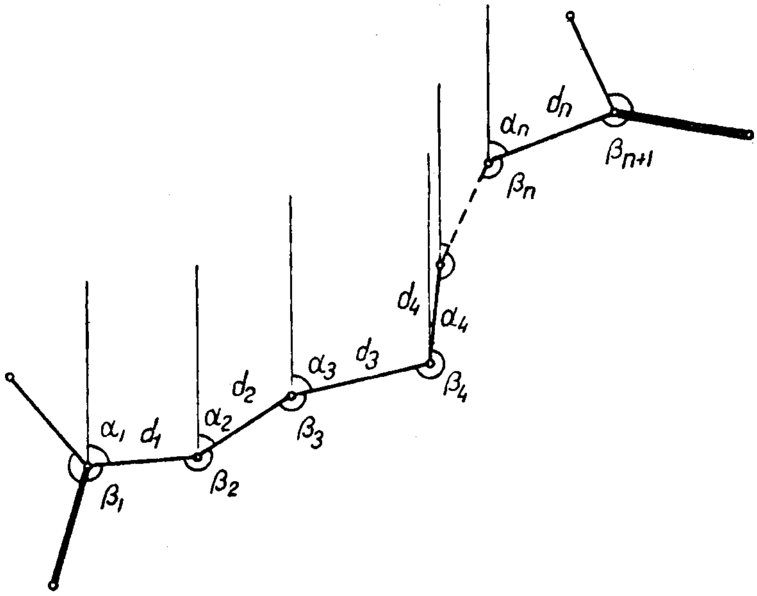
3. Wyrównanie metodą najmniejszych kwadratów układu spostrzeżeń fikcyjnych.

W dalszym ciągu omówię i zilustruję na przykładzie liczbowym rodzaje rachunków, jakie należy wykonać przy wyrównaniu elementów węzłowych proponowanym tu sposobem.

1.

Korzystając z dokonanych w sieci poligonowej spostrzeżeń kątów i długości, obliczamy sumy przyrostów współrzędnych między punktem początkowym i końcowym każdego ciągu. Azymut pierwszego boku możemy tu przyjąć w sposób dowolny, a azymut każdego następnego boku w ciągu poligonowym wynikać będzie wprost ze znanego wzoru:

$$\alpha_n = \alpha_1 \pm \Sigma\beta \mp (n-2)\,180^0 \tag{1}$$



Rys. 24

$$[\Delta X] = d_1 \cos\alpha_1 + d_2 \cos\alpha_2 + \;.\;.\;.\; d_n \cos\alpha_n \tag{2}$$

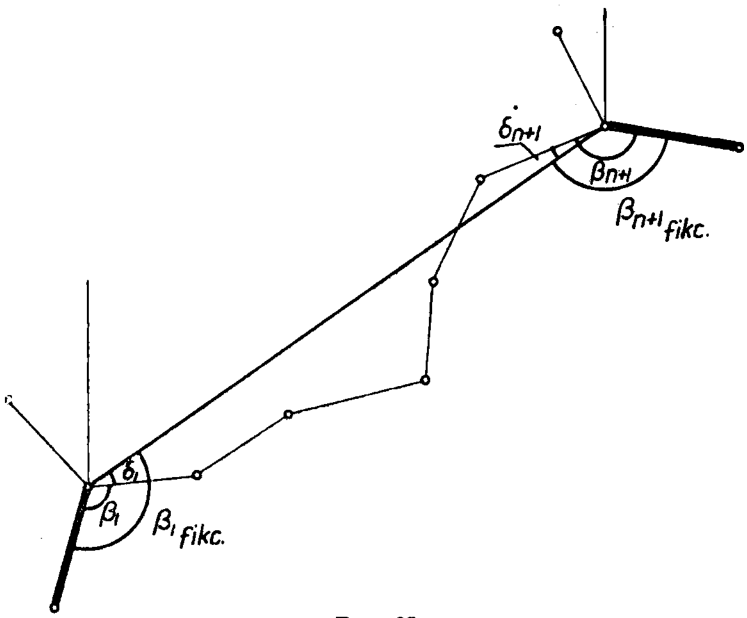
$$[\Delta Y] = d_1 \sin\alpha_1 + d_2 \sin\alpha_2 + \;.\;.\; d_n \sin\alpha_n \tag{3}$$

Z obliczonych w ten sposób sum przyrostów współrzędnych dla poszczególnych ciągów, obliczamy azymuty i długości linii łączących początek i koniec każdego z nich (prostych zamykających dla poszczególnych ciągów). Korzystając z azymutu prostej zamykającej oraz z azymutów boku pierwszego i ostatniego w ciągu, obliczamy dla poszczególnych ciągów kąty δ. Fikcyjne spostrzeżenia kątów $\beta_{fikc.}$ uzyskujemy przez dodanie, względnie odjęcie, otrzymanych z różnic azymutów kątów δ do odpowiednich kątów pomierzonych faktycznie na punktach początkowych i końcowych odpowiednich ciągów (rys. 25)

$$\beta_{fikc.} = \beta \pm \delta \tag{4}$$

Fikcyjne spostrzeżenia długości są to obliczone z sum przyrostów długości prostych zamykających dla poszczególnych ciągów:

$$d_{fikc.} = \sqrt{[\Delta X]^2 + [\Delta Y]^2} \tag{5}$$



Rys. 25

2.

Określenie średnich błędów fikcyjnych spostrzeżeń przeprowadzimy wiedząc, że są one odpowiednio równe błędom funkcji (4) i (5) względem wzajemnie niezależnych i niewyrównanych spostrzeżeń faktycznie dokonanych.

Błąd fikcyjnego kąta ($\beta_{fikc.}$) obliczymy jako błąd sumy dwu składników, z których pierwszy (β) posiada błąd określony wprost na podstawie dokładności spostrzeżeń kątów, natomiast drugi możemy utożsamić z błędem kierunku prostej zamykającej, obliczonego uprzednio z sum przyrostów współrzędnych zgodnie ze wzorem

$$\operatorname{arc\,tg} \frac{[d \sin \alpha]}{[d \cos \alpha]} = Az.$$

Utożsamienie błędu kąta δ z błędem kierunku prostej zamykającej jest związane z dowolnością orientacji ciągu, z której to dowolności wynika bezbłędność azymutu pierwszego lub ostatniego boku w ciągu poligonowym. Błąd kierunku linii zamykającej obliczymy ze wzoru na błąd w kierunku poprzecznym wyznaczenia ostatniego punktu w ciągu nawiązanym jednostronnie, dzieląc go następnie przez długość prostej zamykającej i wyrażając w mierze kątowej. Przyjmując oś OX lokalnego układu współrzędnych dla każdego ciągu za równoległą do odpowiedniej prostej zamykającej, otrzymamy wzór:

$$m_{Az} = \pm \frac{\sqrt{[d^2\sin^2\alpha]\left(\frac{m_d}{d}\right)^2 + [D_x^2]\left(\frac{m_\beta}{\rho}\right)^2}}{d_{fikc.}} \cdot \rho \tag{7}$$

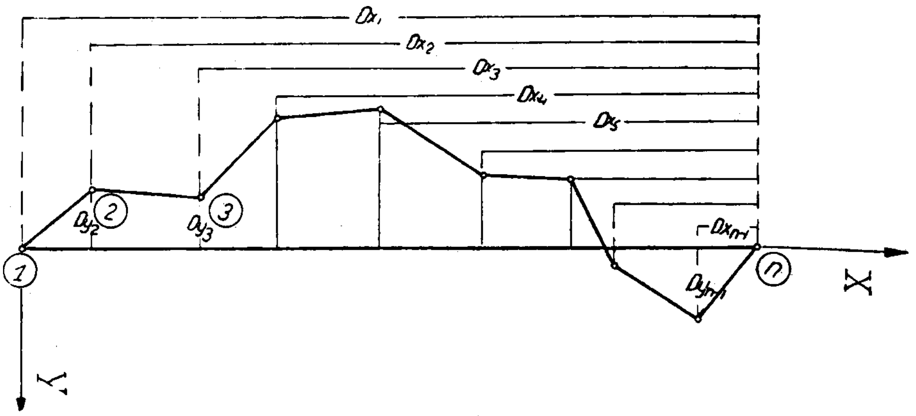
gdzie $[D_x^2]$ — suma kwadratów składowych x odległości od punktu końcowego, w ciągu nawiązanym jednostronnie, do każdego z punktów poprzedzających (rys. 26). Ostatecznie więc, średni błąd kąta fikcyjnego obliczymy ze wzoru:

$$m_{\beta_{fikc.}} = \pm \sqrt{m_\beta^2 + \frac{[d^2\sin^2\alpha]\left(\frac{m_d}{d}\right)^2 + [D_x^2]\left(\frac{m_\beta}{\rho}\right)^2}{d^2_{fikc.}} \cdot \rho^2} \tag{8}$$

Błąd fikcyjnej długości obliczymy jako błąd podłużny ostatniego punktu w ciągu nawiązanym jednostronnie:

$$m_{d_{fikc.}} = \pm \sqrt{[d^2\cos^2\alpha]\left(\frac{m_d}{d}\right)^2 + [D_y^2]\left(\frac{m_\beta}{\rho}\right)^2} \tag{9}$$

gdzie $[D_y^2]$ — suma kwadratów składowych y odległości od punktu końcowego, w ciągu nawiązanym jednostronnie, do każdego z punktów poprzedzających.



Rys. 26

Wzory (8) i (9), ze względu na swą formę, czynią określenie błędów średnich spostrzeżeń fikcyjnych dosyć pracochłonnym. Wobec tego, jak również z uwagi na małą stosunkowo dokładność wymaganą w określeniu błędów spostrzeżeń, w celu późniejszego zrównoważenia pod względdem dokładnościowym układu równań poprawek spostrzeżeń, w praktyce można stosować następujące wzory uproszczone:

$$m_{d_{fikc.}} = m_d \sqrt{n} \tag{10}$$

$$m_{\beta_{fikc.}} = m_\beta \sqrt{1 + \frac{1^2 + 2^2 + \ldots n^2}{n^2}} = m_\beta\, C \tag{11}$$

gdzie: n — ilość boków w ciągu, m_d — średni błąd pomierzonego boku o długości średniej dla danego ciągu, C — współczynnik.

Dla ułatwienia rachunku błędów podaję tabelkę wartości współczynnika C w zależności od n.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
C	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2,0	2,1	2,1	2,2	2,3	2,4	2,4	2,5

3.

Wyrównanie układu spostrzeżeń fikcyjnych przeprowadzimy sposobem powszechnie znanym, przy wykorzystaniu metody pośredniczącej, która — poza wyznaczeniem niewiadomych — pozwala na określenie ich błędów w sposób stosunkowo prosty. W wypadku gdy sieć poligonowa oparta jest na punktach o wątpliwej wartości (pod względem dokładnościowym), istnieje możliwość potraktowania ich w niniejszym sposobie wyrównania jako obciążonych błędami (uzmiennienie współrzędnych punktów stałych metodą Prof. Dr S. Hausbrandta).

W niniejszym sposobie wyrównania należy pamiętać o konieczności wprowadzenia dodatkowo równania poprawki długości każdego boku azymutalnego, względnie wyeliminowania z układu równań poprawek jednej współrzędnej punktu na końcu każdego boku azymutalnego (azymutu węzłowego). Eliminację taką przeprowadzamy w prosty sposób wiedząc, że w równaniu poprawki kąta, którego jednym ramieniem jest odpowiedni azymut węzłowy, poprawki współrzędnych punktu na końcu tego ramienia występują w formie:

$$\ldots \pm (B\, dx - A\, dy) \ldots$$

gdzie A i B — współczynniki kierunkowe kierunku azymutu węzłowego.

Ponadto dla przeprowadzenia eliminacji należy wprowadzić założenie, że w wyniku wyrównania punkt na końcu boku azymutu węzłowego uzyska przesunięcie w kierunku prostopadłym do kierunku boku (wynikające tylko ze zmiany azymutu węzłowego w stosunku do jego wartości przybliżonej α_{w_0}):

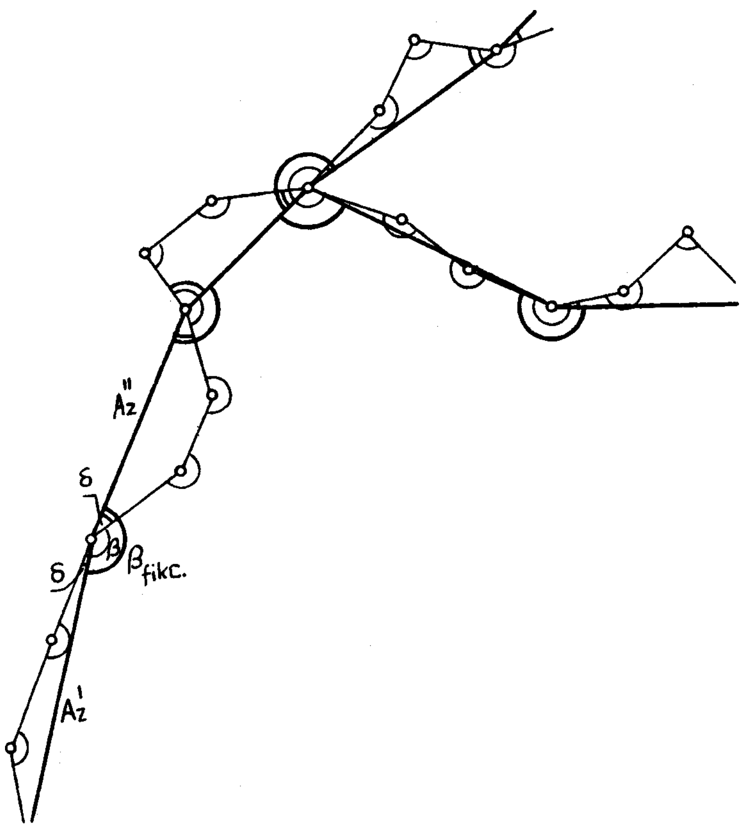
$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\mathrm{tg}\alpha_{w_0}} = -\frac{A}{B}$$

Wówczas zamiast wyrażenia ... $\pm (B\, dx - A\, dy)$ ... do równania poprawki wprowadzimy wyrażenie:

$$\ldots \pm \left(B + \frac{AA}{B}\right) \cdot dx \ldots$$

względnie wyrażenie: $\ldots \pm \left(A + \frac{BB}{A}\right) dy \ldots$

Przy wykorzystaniu niniejszego sposobu wyrównania, możemy wyznaczyć dowolną ilość punktów w sieci, zastępując spostrzeżenia faktycznie dokonane spostrzeżeniami fikcyjnymi, opartymi o dowolnie wybrane punkty na tych samych ciągach (np. co drugi, względnie co trzeci). W takim przypadku fikcyjne długości obliczamy z sum przyrostów współrzędnych pomiędzy punktami, które pragniemy wyznaczyć w trakcie wyrównania.



Rys. 27

Fikcyjne spostrzeżenia kątów zawarte tu będą nie między kierunkami prostych łączących punkty oparcia dla spostrzeżeń fikcyjnych a kierunkami azymutów węzłowych, lecz bezpośrednio — między kierunkami łączącymi punkty wyznaczane na ciągach (rys. 27). Wówczas błędy odpowiednich kątów fikcyjnych wyliczać będziemy ze wzoru:

$$m_{\beta_{fikc}} = \pm \sqrt{m_\beta^2 + m_{Az'}^2 + m_{Az''}^2} \tag{12}$$

przy czym m_{Az} obliczać będziemy podobnie jak uprzednio, co przy zastosowaniu wzoru uproszczonego da nam:

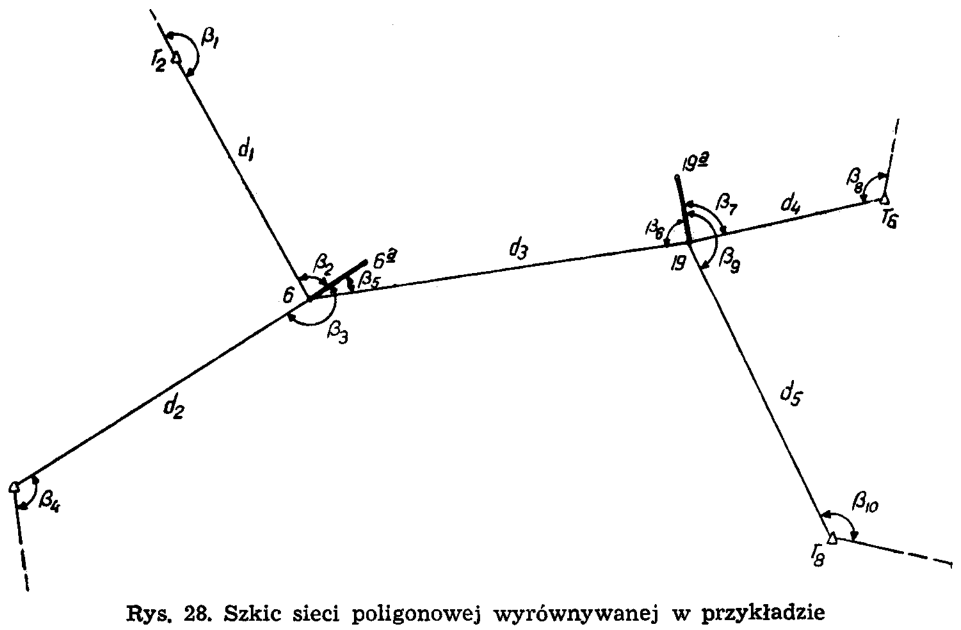
$$m_{Az} = \pm \sqrt{\frac{1^2 + 2^2 + \ldots + n^2}{n}}\, m_\beta = \pm\, m_\beta C' \tag{13}$$

Dla ułatwienia rachunku błędów, podaję tabelkę wartości współczynnika C' w zależności od n.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
C'	1,0	1,1	1,2	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2,0	2,0	2,1	2,2	2,3

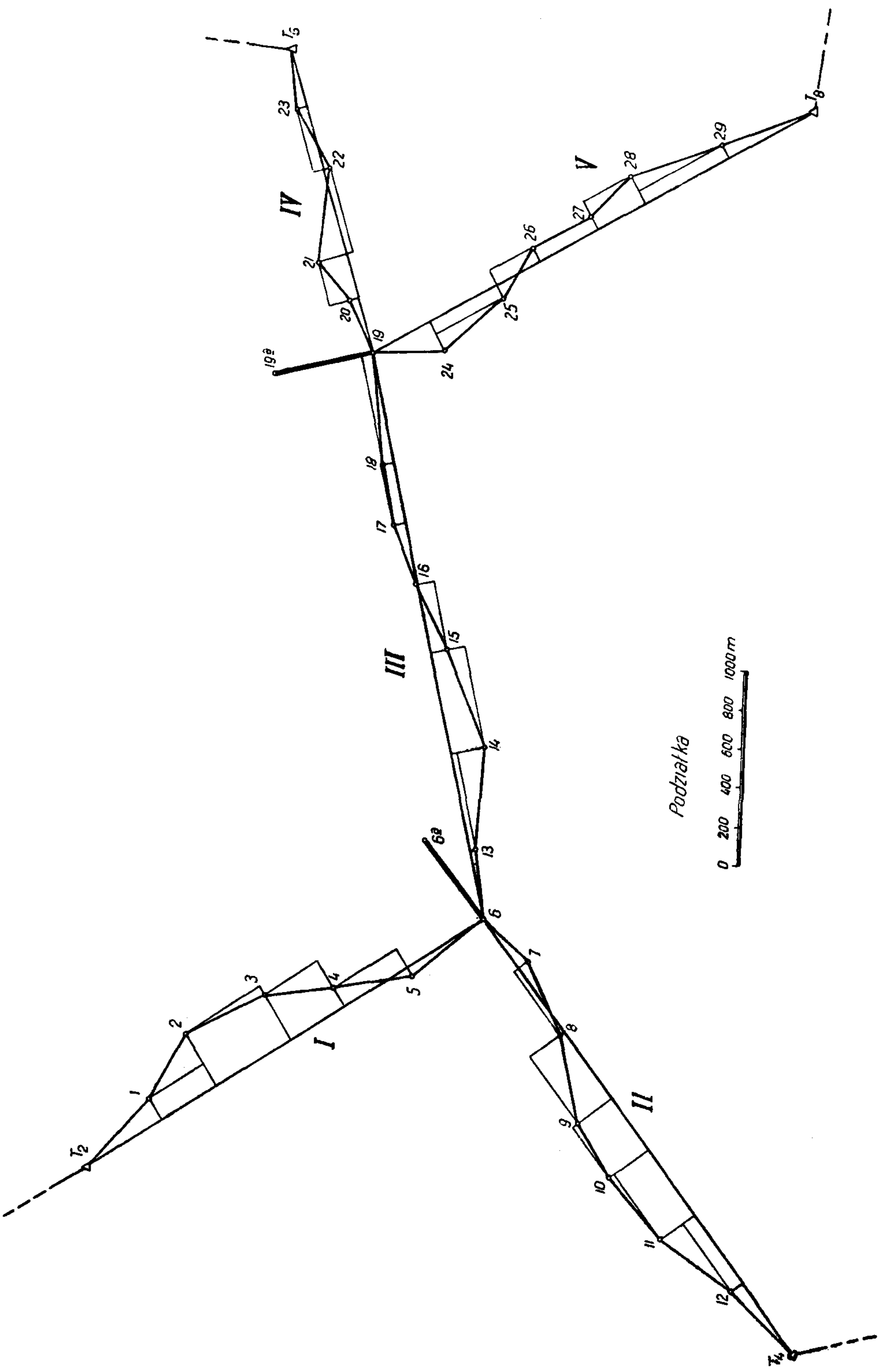
Przykład liczbowy

Dane pomiarowe do przykładu przyjęto z książki: Gorodskaja Poligonomietria, rukowodstwo po wyczislitielnym rabotam, str. 115. W trakcie wyrównania przyjąłem dla obliczenia błędów średnich spostrzeżeń fikcyjnych, że błędy średnie spostrzeżeń dokonanych są odpowiednio równe: $m_d = \frac{d}{17000}$, $m_\beta = 8'',5$, w przybliżeniu zgodnie z założeniami poczynionymi we wspomnianym podręczniku. Dla ułatwienia w liczeniu wyrazów wolnych, przyjąłem współrzędne i azymuty przybliżone takie, jakie



Rys. 28. Szkic sieci poligonowej wyrównywanej w przykładzie

wynikły z obliczenia na podstawie rachunku przyrostów w ciągach I i III. W związku z tym, uniknąłem konieczności liczenia fikcyjnych kątów Nr Nr 1, 2, 5, 6 oraz fikcyjnych długości boków Nr Nr 1, 3, ponieważ wyrazy wolne równań poprawek tych spostrzeżeń są równe zeru.



Rys. 29. Szkic sieci z oznaczeniem spostrzeżeń fikcyjnych

Nr ciągu	Nr p-ktu	Kąt lewy	Azymut	Bok	cos α / sin α	Δx	Δy
		° ′ ″	° ′ ″				
I	T_1						
			132 17 09,4				
	T_2	178 24 17,3					
			130 41 26,7	456,674	— 0,651976 0,758240	— 297,740	346,268
	1	167 43 47,8					
			118 25 14,5	363,081	— 0,475942 0,879477	— 172,805	319,321
	2	214 12 01,6					
			152 37 16,1	442,310	— 0,887985 0,459872	— 392,765	203,406
	3	201 10 36,5					
			173 47 52,6	346,535	— 0,994147 0,108035	— 344,507	37,438
	4	176 36 12,4					
			170 24 05,0	403,436	— 0,986000 0,166745	— 397,788	67,271
	5	149 28 56,2					
			139 53 01,2	456,023	— 0,764738 0,644342	— 348,738	293,835
	6	92 46 14,6					
			52 39 15,8			$\Sigma\Delta x$	$\Sigma\Delta y$
	6a					— 1954,343	1267,539
II	6a						
			232 39 15,8				
	6	170 14 38,2					
			222 53 54,0	308,963	— 0,732563 — 0,680699	— 226,335	— 210,311
	7	201 11 24,7					
			244 05 18,7	397,031	— 0,436982 — 0,899470	— 173,495	— 357,117
	8	192 49 51,3					
			256 55 10,0	446,753	— 0,226321 — 0,974053	— 101,110	— 435,161
	9	159 06 26,5					
			236 01 36,5	312,472	— 0,558805 — 0,829299	— 174,611	— 259,133
	10	172 27 41,8					
			228 29 18,3	395,110	— 0,662771 — 0,748822	— 261,867	— 295,867
	11	166 41 07,4					
			215 10 25,7	441,325	— 0,817408 — 0,576059	— 360,743	— 254,229
	12	188 16 14,9					
			223 26 40,6	453,912	— 0,726039 — 0,687653	— 329,558	— 312,134
	T_4	131 29 44,1					
			174 56 20,1			$\Sigma\Delta x$	$\Sigma\Delta y$
	T_5					— 1627,719	— 2123,952

Azymut prostej zamykającej 6-T_4 wynosi: $\operatorname{arc\,tg} \dfrac{-2123{,}952}{-1627{,}719} = 232°32'05,''2$

Kąt 7,6,T_4 obliczony z różnic azymutów: $\delta = 232°32'05,''2 - 222°53'54,''0 = 9°38'11,''2$

Kąt 12,T_4,6 obliczony z różnic azymutów: $\delta = 232°32'05,''2 - 223°26'40,''6 = 9°05'24,''6$

Kąt fikcyjny $\beta_3 = 170°14'38,''2 + 9°38'11,''2 = 179°52'49,''4$

Kąt fikcyjny $\beta_4 = 131°29'44,''1 - 9°05'24,''6 = 122°24'19,''5$

Długość fikcyjna $d_2 = \sqrt{1627{,}719^2 + 2123{,}952^2} = 2675{,}937$

Nr ciągu	Nr p-ktu	Kąt lewy	Azymut	Bok	cos α sin α	Δx	Δy
		° ′ ″	° ′ ″				
III	6a						
			232 39 15,8				
	6	29 06 14,6					
			81 45 30,4	346,434	0,143347 0,989672	49,660	342,856
	13	192 48 20,5					
			94 33 50,9	523,304	− 0,079575 0,996829	− 41,642	521,645
	14	152 47 42,9					
			67 21 33,8	527,924	0,384950 0,922938	203,224	487,241
	15	174 48 33,4					
			62 10 07,2	357,997	0,466870 0,884326	167,138	316,586
	16	184 41 50,7					
			66 51 57,9	313,562	0,392881 0,919589	123,193	288,348
	17	190 22 30,7					
			77 14 28,6	302,094	0,220846 0,975309	66,716	294,635
	18	185 11 29,2					
			82 25 57,8	555,552	0,131691 0,991291	73,161	550,714
	19	84 50 12,5				$\Sigma\Delta x$	$\Sigma\Delta y$
	19a		347 16 10,3			641,450	2802,025
IV	19a		167 16 10,3				
	19	74 48 53,3					
			62 05 03,4	291,367	0,468172 0,883637	136,409	257,463
	20	165 18 41,7					
			47 23 45,1	244,763	0,676929 0,736048	165,687	180,157
	21	227 00 40,4					
			94 24 25,5	475,154	− 0,076842 0,997043	− 36,512	473,749
	22	145 05 23,0					
			59 29 48,5	340,005	0,507586 0,861601	172,582	292,949
	23	200 49 47,5					
			80 19 36,0	316,080	0,168030 0,985782	53,111	311,586
	T_6	120 57 13,0					
			21 17 14,6			$\Sigma\Delta x$	$\Sigma\Delta y$
	T_5					491,277	1515,904

Azymut prostej zamykającej 19-T_6 wynosi: $\mathrm{arc\,tg}\,\frac{1515{,}904}{491{,}277} = 72^\circ 02' 36{,}''4$

Kąt 20,19,T_6 obliczony z różnic azymutów: $\delta = 72^\circ 02' 36{,}''4 - 62^\circ 05' 03{,}''4 = 9^\circ 57' 33{,}''0$

Kąt 19,T_6,23 obliczony z różnic azymutów: $\delta = 80^\circ 19' 36{,}''0 - 72^\circ 02' 36{,}''4 = 8^\circ 16' 59{,}''6$

Kąt fikcyjny $\beta_7 = 74^\circ 48' 53{,}''3 + 9^\circ 57' 33{,}''0 = 84^\circ 46' 26{,}''3$

Kąt fikcyjny $\beta_8 = 120^\circ 57' 13{,}''0 + 8^\circ 16' 59{,}''6 = 129^\circ 13' 12{,}''6$

Długość fikcyjna $d_4 = \sqrt{491{,}277^2 + 1515{,}904^2} = 1593{,}524$

Nr ciągu	Nr p-ktu	Kąt lewy	Azymut	Bok	cos α sin α	Δx	Δy
	19a	° ′ ″	° ′ ″				
			167 16 10,3				
	19	190 24 35,0					
			177 40 45,3	354,838	— 0,999180 0,040494	— 354,547	14,369
	24	139 22 45,6					
			137 03 30,9	383,160	— 0,732051 0,681250	— 280,493	261,028
	25	162 08 16,0					
			119 11 46,9	288,991	— 0,487804 0,872953	— 140,971	252,276
	26	210 43 43,7					
V			149 55 30,6	328,034	— 0,865371 0,501130	— 283,871	164,388
	27	162 12 32,7					
			132 08 03,3	285,500	— 0,670870 0,741575	— 191,533	211,720
	28	207 50 07,4					
			159 58 10,7	475,790	— 0,939511 0,342518	— 447,010	162,967
	29	179 58 30,6					
			159 56 41,3	498,971	— 0,939363 0,342925	— 468,715	171,110
	T_8	141 29 15,0					
	T_7		121 26 19,1			$\Sigma\Delta x$ — 2167,140	$\Sigma\Delta y$ 1237,858

Azymut prostej zamykającej 19-T_8 wynosi: $\operatorname{arc\,tg} \dfrac{1237{,}858}{-2167{,}140} = 150^\circ 15' 54'',8$

Kąt T_8,19,24 obliczony z różnic azymutów: $\delta = 177^\circ 40' 45'',3 - 150^\circ 15' 54'',8 = 27^\circ 24' 50'',5$

Kąt 19,T_8,29 obliczony z różnic azymutów: $\delta = 159^\circ 56' 41'',3 - 150^\circ 15' 54'',8 = 9^\circ 40' 46'',5$

Kąt fikcyjny $\beta_9 = 190^\circ 24' 35'',0 - 27^\circ 24' 50'',5 = 162^\circ 59' 44'',5$

Kąt fikcyjny $\beta_{10} = 141^\circ 29' 15'',0 + 9^\circ 40' 46'',5 = 151^\circ 10' 01'',5$

Długość fikcyjna $d_5 = \sqrt{2167{,}140^2 + 1237{,}858^2} = 2495{,}754$

Mając współrzędne punktów stałych i współrzędne przybliżone punktów węzłowych oraz azymuty nawiązujące i przybliżone wartości azymutów węzłowych, obliczamy przybliżone wartości tych obserwacji fikcyjnych dla których wyrazy wolne równań poprawek nie są równe zero.

Nr p-ktu	Współrzędne punktów stałych x	Współrzędne punktów stałych y	Azymuty nawiązujące α_n
T_2	40 882,045	35 534,910	
T_1			312°17′09″,4
T_4	37 300,135	34 678,510	
T_3			174 56 20 ,1
T_6	40 060,135	41 120,545	
T_5			21 17 14 ,6
T_8	37 401,620	40 842,395	
T_9			121 26 19 ,1

Współrzędne przybliżone punktów węzłowych			Przybliżone azymuty węzłowe
Nr p-ktu	x_0	y_0	α_{w_0}
6	38 927,702	36 802,449	
6^a			52°39'15,"8
19	39 569,152	39 604,474	
19^a			347 16 10, 3

Wartości przybliżone spostrzeżeń fikcyjnych:

$$\beta_3 = 179^0 52' 58'',0 \qquad d_2 = 2675{,}835$$
$$\beta_4 = 122\ 24\ 06\ ,3 \qquad d_4 = 1593{,}592$$
$$\beta_7 = 84\ 47\ 08\ ,6 \qquad d_5 = 2496{,}126$$
$$\beta_8 = 129\ 13\ 55\ ,4$$
$$\beta_9 = 162\ 59\ 56\ ,1$$
$$\beta_{10} = 151\ 10\ 12\ ,7$$

Na podstawie miar zdjętych ze szkicu sieci (rys. 28) określiłem błędy średnie fikcyjnych długości $m_{d_{fikc.}}$ oraz błędy średnie kierunków linii zamykających dla poszczególnych ciągów m_{Az}.

Nr ciągu ($d_{fikc.}$)	$\Sigma\Delta x^2$	ΣD_y^2	$m_{d_{fikc}}$	$\Sigma\Delta y^2$	ΣD_x^2	m_{Az}	$m_{\beta_{fikc.}}$ *
						"	"
I	1 000 600	177 000	0,061	95 100	13 655 600	13,6	16,0
					13 608 800	13,6	
II	1 023 100	154 100	0,062	69 900	19 100 800	13,9	16,6
					21 714 300	14,8	
III	1 252 100	43 000	0,065	27 600	23 669 900	14,3	16,6
					23 918 800	14,3	
IV	518 900	57 200	0,043	26 100	5 365 700	12,6	15,4
					5 858 500	13,1	
V	1 005 600	67 300	0,060	72 500	16 123 700	13,7	16,7
					19 611 000	15,0	

Błędy średnie spostrzeżeń fikcyjnych, obliczone przy wykorzystaniu wzorów uproszczonych (zamieszczone w tabeli poniżej), różnią się w naszym przykładzie w stosunku do poprzednio wyznaczonych o wielkości praktycznie zaniedbywalne.

* Dla kątów których jednym ramieniem jest kierunek linii zamykającej danego ciągu

Nr ciągu	$m_{d_{fikc.}}$	$m_{\beta_{fikc.}}$
		$''$
I	0,056	16,2
II	0,059	17,0
III	0,065	17,0
IV	0,042	15,3
V	0,056	17,0

W dalszym ciągu obliczeń układam równania poprawek spostrzeżeń fikcyjnych

β_1	T_1	dx_6 74, dy_6 —48	T_2	1	$= v$
β_2	T_2: 74, — 48	dx_{6a} —252, dy_{6a} —322	dx_6 178, dy_6 370	1	$= v$
β_3	dx_{6a} 252, dy_{6a} 322	T_4: 47, 61	dx_6 —299, dy_6 —383	1	$+ 8,''6 = v$
β_4	dx_6 47, dy_6 61	T_3	T_4	1	$- 13,2 = v$
β_5	dx_{6a} 252, dy_{6a} 322	dx_{19} — 16, dy_{19} — 69	dx_6 — 236, dy_6 — 253	1	$= v$
β_6	dx_6 — 16, dy_6 — 69	dx_{19a} — 400, dy_{19a} 91	dx_{19} 416, dy_{19} —22	1	$= v$
β_7	dx_{19a} 400, dy_{19a} —91	T_6: — 41, — 125	dx_{19} — 359, dy_{19} 216	1	$+ 42,6 = v$
β_8	dx_{19} —41, dy_{19} —125	T_5	T_6	1	$- 17,2 = v$
β_9	dx_{19a} 400, dy_{19a} —91	T_8: 71, —40	dx_{19} — 471, dy_{19} 131	1	$+ 11,6 = v$
β_{10}	dx_{19} 71, dy_{19} —40	T_7	T_8	1	$+ 11,2 = v$
d_1	dx_6 — 0,84, dy_6 0,55	T_2		2	$= v$
d_2	dx_6 0,60, dy_6 0,80	T_4		2	$-102\text{mm} = v$
d_3	dx_6 — 0,22, dy_6 — 0,98	dx_{19} 0,22, dy_{19} 0,98		2	$= v$
d_4	dx_{19} — 0,30, dy_{19} — 0,96	T_6		2	$+ 68 = v$
d_5	dx_{19} 0,87, dy_{19} —0,49	T_8		2	$+ 372 = v$

Równania poprawek w postaci tabelarycznej

Bł. śr.	dx_6	dy_6	dx_{6a}	dy_{6a}	dx_{19}	dy_{19}	dx_{19a}	dy_{19a}	l	s
16″	− 48	− 74							0	− 122
,,	370	− 178	− 322	252					0	− 327
,,	− 383	299	322	− 252					8,6	444
,,	61	− 47							−13,2	1
,,	− 253	236	322	− 252	− 69	16			0	449
,,	− 69	16			− 22	− 416	91	400	0	1358
,,					216	359	− 91	− 400	42,6	−1231
,,					− 125	41			−17,2	− 101
,,					131	471	− 91	− 400	11,6	−1235
,,					− 40	− 71			11,2	− 100
0,06 m	−0,84	0,55							0	− 0,29
0,06	0,60	0,80							− 102	1,30
0,06	−0,22	−0,98			0,22	0,98			0	0
0,04					−0,30	−0,96			68	− 1,19
0,06					0,87	−0,49			372	0,75

W wyniku eliminacji niewiadomej dy_{6^a} otrzymujemy zamiast ... $\pm$ ($-$ 322 dx_{6^a} + 252 dy_{6^a}) ... wyrażenie ... $\pm$ 519 dx_{6^a} ...

W wyniku eliminacji niewiadomej dy_{19^a} otrzymujemy zamiast ... $\pm$ (91 dx_{19^a} + 400 dy_{19^a}) ... wyrażenie ... $\pm$ 1849 dx_{19^a} ...

$$m_0 = \pm \sqrt{\frac{\left[\frac{vv}{mm}\right]}{n_n}} = \pm \sqrt{\frac{7,32}{9}} = \pm\, 0,88$$

niewiadome	0,041	0,075	− 0,026	− 0,251	0,159	0,029
współczynniki wagowe $\sqrt{(a_{ii}^{-1})^2}$	0,052	0,044	0,045	0,048	0,035	0,010
błędy współrz.	0,046	0,039	0,040	0,042	0,031	0,009

Zrównoważone równania poprawek

dx_6	dy_6	dx_{6a}	dx_{19}	dy_{19}	dx_{19a}	l	s	$\frac{v}{m}$
− 3,0	− 4,6					0	− 7,6	−0,5
23,2	−11,1	−32,4				0	−20,3	1,0
−24,0	18,7	32,4				0,5	27,6	0,1
3,8	− 2,9					−0,8	0,1	−0,9
−15,8	14,8	32,4	− 4,3	1,0		0	28,1	0,9
− 4,3	1,0		− 1,4	−26,0	115,8	0	85,1	−0,5
			13,5	22,4	−115,8	2,7	−77,2	−0,5
			− 7,8	2,6		−1,1	− 6,3	1,3
			8,2	29,5	−115,8	0,7	−77,4	0,0
			− 2,5	− 4,4		0,7	− 6,2	0,6
−14,0	9,2					0	− 4,8	0,1
10,0	13,4					−1,7	21,7	−0,3
− 3,7	−16,4		3,7	16,4		0	0	0,3
			− 8,0	−24,0		1,7	−30,3	−0,1
			14,5	− 8,2		6,2	12,5	1,3

Równania normalne

1715,5	−875,8	−2041,2	60,3	35,3	− 497,9	− 32,0	− 1635,9	8
	1255,7	1445,0	−125,7	−280,2	115,8	− 11,1	1523,7	
		3149,3	−139,3	32,4		16,2	2462,4	
			625,0	700,9	−2675,0	125,3	−1428,6	5
				2987,3	−9020,8	− 16,4	−5561,5	
					40228,9	−393,7	27157,3	

41,4	− 21,2	− 49,3	1,5	0,9	− 12,0	− 0,8	− 39,5	
	28,4	14,1	− 3,3	− 9,2	− 4,9	− 1,0	24,2	1
		22,8	− 0,8	9,1	− 22,9	− 0,4	7,7	8
			24,7	27,4	−109,0	5,0	− 52,0	19
				45,5	−128,8	− 3,5	− 86,9	8
					105,2	− 3,1	102,1	

Wyrównane współrzędne punktów węzłowych wynoszą odpowiednio:

$$X_6 = 38\,927{,}743 \qquad X_{19} = 39\,568{,}901$$
$$Y_6 = 36\,802{,}524 \qquad Y_{19} = 39\,604{,}633$$

Różnią się one od współrzędnych uzyskanych z wyrównania niniejszej sieci metodą najmniejszych kwadratów o wielkości mniejsze od odpowiednich błędów średnich: X_6 — 0,015, Y_6 — 0,020, X_{19} — 0,024, Y_{19} — — 0,003.

Korzystając z założenia, że punkt 6^a oraz 19^a w wyniku wyrównania uzyskały poprawki współrzędnych zgodne ze wzorem: $\frac{dy}{dx} = -\frac{A}{B}$, gdzie: A i B — współczynniki kierunkowe odpowiednich boków azymutalnych, obliczamy:

$$dy_{6^a} = +\frac{252}{322} \cdot 0{,}026 = 0{,}020 \qquad dy_{19^a} = +\frac{400}{91} \cdot 0{,}029 = 0{,}128$$

Aby określić poprawkę wyrównawczą azymutu węzłowego, należy obliczyć składowe przesunięć odpowiednich punktów: węzłowego i przywęzłowego w kierunku prostopadłym do kierunku azymutu węzłowego. Składowe te możemy uzyskać na drodze transformacji lub w sposób bardziej prosty — graficznie.

Wynoszą one w naszym przykładzie odpowiednio:

$$ds_6 = +0{,}016 \qquad ds_{6^a} = +0{,}033$$
$$ds_{19} = +0{,}095 \qquad ds_{19^a} = +0{,}130$$

Poprawki azymutów węzłowych:

$$d\alpha_{6-6^a} = \frac{0{,}033 - 0{,}016}{500}\rho'' = 7{,}''0$$

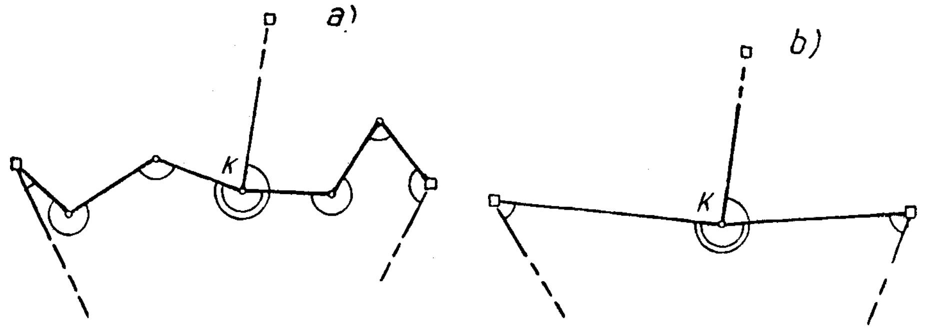
$$d\alpha_{19-19^a} = \frac{0{,}130 - 0{,}095}{500}\rho'' = 14{,}''4$$

(Długości boków azymutów węzłowych d = 500 m.).

Wyrównane azymuty węzłowe: $\alpha_{6-6^a} = 52^0 39' 22{,}''8$; $\alpha_{19-19^a} = 347^0 16' 24{,}''7$

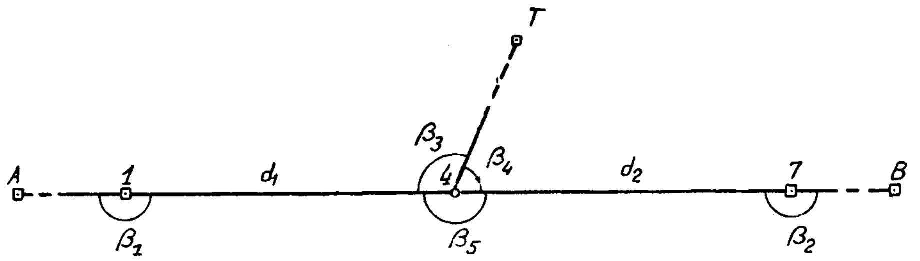
Zastosowanie sposobu spostrzeżeń fikcyjnych do wyrównywania ciągów i sieci poligonowych z nawiązaniami kątowymi

W wypadku gdy na punkcie K-tym ciągu poligonowego został dodatkowo pomierzony kierunek na punkt stały, leżący z boku od kierunku ciągu, możemy wyznaczyć współrzędne tego punktu (K) na podstawie wyrównania układu spostrzeżeń fikcyjnych zastępujących spostrzeżenia dokonane (rys. 30a, b). Po przeprowadzeniu takiego wyrównania, określony już punkt K możemy uważać za końcowy w stosunku do rozdzielonych przezeń części ciągu i współrzędne pozostałych punktów obliczyć z dwu osobnych wyrównań każdej części ciągu. Dla zilustrowania takiego wyrównania podaję przykład liczbowy zaczerpnięty z publikacji [4]. Założenia dotyczące dokładności spostrzeżeń są zgodne z poczynionymi we wspomnianej pracy.



Rys. 30. Oznaczenie wyrównywanych obserwacji

Przykład liczbowy



Rys. 31. Szkic ciągu z nawiązaniem kątowym

Nr	Kąty	Azymuty	Boki	cos α sin α	x	y	$\Sigma\Delta x$	$\Sigma\Delta y$
A								
		88^g89^c						
1	195^g40^c				516,67	594,52		
		93 49	93,7	0,10208 0,99478				
2	205 10							
		88 39	110,8	0,18136 0,98342			41,64	305,38
3	195 75							
		92 64	103,9	0,11535 0,99332				
4	204 73				558,31	899,90		
		87 91	101,5	0,18877 0,98202				
5	194 94							
		92 97	100,9	0,11020 0,99391			48,45	297,38
6	204 71							
		88 26	99,1	0,18337 0,98304				
7	198 62				606,76	1197,28		
B								

Ponadto na p-kcie Nr 4 zostały dodatkowo pomierzone kąty:

$$\beta_{3,4,T} = 121^g69^c \quad \text{oraz} \quad \beta_{T,1,5} = 73^g59^c$$

Kąt $\delta_{4,1,2}$ obliczony z różnic azymutów: $93^g49^c - 91^g37^c = 2^g12^c$

„ $\delta_{1,4,3}$ „ „ „ $92\ 64 - 91\ 37 = 1\ 27$

„ $\delta_{5,4,7}$ „ „ „ $89\ 72 - 87\ 91 = 1\ 81$

„ $\delta_{6,7,4}$ „ „ „ $89\ 72 - 88\ 26 = 1\ 46$

Oznaczenie spostrzeżeń fikcyjnych podane jest na rys. 29.

Kąty fikcyjne:

$$\begin{aligned}
\beta_1 &= 195^g40^c + 2^g12^c = 197^g52^c \\
\beta_2 &= 198\ 62 + 1\ 46 = 200\ 08 \\
\beta_3 &= 92\ 64 + 1\ 27 = 122\ 96 \\
\beta_4 &= 73\ 59 + 1\ 81 = 75\ 40 \\
\beta_5 &= 204\ 73 - 1\ 27 - 1\ 81 = 201^g65^c
\end{aligned}$$

Długości fikcyjne:

$$d_1 = \sqrt{41{,}64^2 + 305{,}38^2} = 308{,}21$$

$$d_2 = \sqrt{48{,}45^2 + 297{,}38^2} = 301{,}30$$

Współrzędne punktów stałych			Azymuty nawiązujące
Nr	x	y	α
A			
			88^g89^c
1	516,67	594,52	
7	606,91	1197,21	
			89 63
B			
T	708,39	933,78	

Współrzędne przybliżone punktu Nr 4: $x_4 = 558{,}43$ $y_4 = 899{,}53$

Przybliżone wartości spostrzeżeń fikcyjnych:

$$\begin{aligned}
\beta_1 &= 197^g55^c \\
\beta_2 &= 200\ 09 \\
\beta_3 &= 122\ 96 \qquad & d_1 &= 307{,}86 \\
\beta_4 &= 75\ 42 \qquad & d_2 &= 301{,}60 \\
\beta_5 &= 201\ 62
\end{aligned}$$

Błędy średnie spostrzeżeń fikcyjnych obliczam tu ze wzorów uproszczonych:

$$m_{\beta_1} = m_{\beta_2} = m_{\beta_3} = m_{\beta_4} = \pm 2^c{,}1 \cdot C = \pm 3^c{,}4$$

$$m_{\beta_5} = \pm 2^c{,}1 \sqrt{1 + 2\frac{1^2 + 2^2 + 3^2}{3^2}} = \pm 4^c{,}2$$

$$m_{d_1} = m_{d_2} = \pm 0{,}17 \cdot \sqrt{n} = \pm 0{,}29$$

Równania poprawek

β_1	dx_4 dy_4 2,8 20,6	A	1	$\vert_1 + 3^c = V$
β_2	B	dx_4 dy_4 3,4 21,0	7	$\vert_1 + 1^c = V$
β_3	1 −2,8 −20,6	T −40,2 −9,1	dx_4 dy_4 43,0 29,7	$\vert_1 = V$
β_4	T 40,2 9,1	7 −3,4 −21,0	dx_4 dy_4 −36,8 11,9	$\vert_1 + 2^c = V$
β_5	7 3,4 21,0	1 2,8 20,6	dx_4 dy_4 −6,2 −41,6	$\vert_1 - 3^c = V$
d_1	1	dx_4 dy_4 0,99 0,14		$\vert_2 - 0{,}35\ \text{m} = V$
d_2	dx_4 dy_4 −0,99 −0,16	7		$\vert_2 + 0{,}30\ \text{m} = V$

Równania poprawek w postaci tabelarycznej

Bł. śr.	dx_4	dy_4	l
3,4	20,6	−2,8	3
3,4	21,0	−3,4	1
3,4	29,7	−43,0	0
3,4	11,9	36,8	2
4,2	−41,6	6,2	−3
0,29	0,99	0,14	−0,35
0,29	−0,99	−0,16	0,30

Zrównoważone równania poprawek

dx_4	dy_4	l	s
6,1	− 0,8	0,9	6,2
6,2	− 1,0	0,3	5,5
8,7	−12,6	0,0	−3,9
3,5	10,8	0,6	14,9
−9,9	1,5	−0,7	−9,1
3,4	0,5	−1,2	2,7
−3,4	−0,6	1,0	−3,0

Równania normalne

284,7	−94,0	8,9	199,6
	279,9	3,2	189,1

16,9	−5,6	0,5	11,8
	15,8	0,4	16,2

niewiadome	−0,04	−0,03
bł. śr. wsp.	0,06	0,06

$X_4 = 558{,}39$

$Y_4 = 899{,}50$

UOGÓLNIENIE SPOSOBU PUNKTÓW WĘZŁOWYCH POPOWA

(opracował Jerzy Gaździcki)

Zainteresowania wielu autorów skupiały się na zagadnieniu wyrównania dużych sieci poligonowych. Koncepcje zmniejszenia prac rachunkowych związanych z zastosowaniem metody najmniejszych kwadratów poszły z reguły w kierunku rozbicia wyrównania na dwa etapy:

1. wyrównanie elementów węzłowych, tj. azymutów A i współrzędnych x, y.
2. wyrównanie obserwacji na ciągach łączących punkty węzłowe.

Zatrzymajmy się przy pierwszym etapie, a mianowicie przy wyrównaniu elementów węzłowych A, x, y, przyporządkowanych każdemu punktowi węzłowemu sieci. (Jak wiadomo, punktem węzłowym nazywa się taki punkt poligonowy, który łączy co najmniej trzy ciągi poligonowe). Istotą wyrównania elementów węzłowych jest traktowanie funkcji obserwacji: sum kątów i przyrostów współrzędnych na ciągach, jako obserwacji bezpośrednich. Tego rodzaju identyfikowanie funkcji obserwacji z obserwacjami jest dość często spotykane w geodezji, np. w poligonizacji paralaktycznej, gdzie poddawane wyrównaniu długości są funkcjami zaobserwowanych kątów paralaktycznych. We wszystkich powszechnie znanych sposobach wyrównania elementów węzłowych nie poprzestaje się na tym uproszczeniu; zakłada się dodatkowo, że wyrównanie przyrostów współrzędnych nie zależy od wyrównania kątów, co oczywiście nie jest słuszne. W oparciu o to założenie wyrównuje się najpierw kąty, później zaś przyrosty współrzędnych. Takie postępowanie musi doprowadzić w konsekwencji do powstania znacznych zniekształceń obserwacji.

Wprowadzenie jednoczesnego wyrównania wszystkich elementów węzłowych pozwoli na osiągnięcie lepszych wyników (w sensie zbliżenia ich do metody najmniejszych kwadratów) kosztem stosunkowo niewielkiego zwiększenia pracochłonności.

Zastanówmy się nad sposobem uzyskania tej jednoczesności wyrównania. Za punkt wyjścia w rozumowaniu obierzemy wyrównanie sposobem węzłów Popowa [6]. Wyrównanie to polega na zestawieniu równań poprawek— a więc mamy do czynienia z metodą spostrzeżeń pośrednich — dla sum kątów $[\alpha]$ na poszczególnych ciągach:

$$v_\alpha = -dA_p + dA_k + l_\alpha \tag{1}$$

gdzie:

$$l_\alpha = -A_p^0 + A_k^0 - [\alpha] (\pm n \cdot 180^0)$$

oraz dla sum przyrostów współrzędnych $[\Delta x]$ i $[\Delta y]$ obliczonych z wyrównanych azymutów:

$$v_x = -dx_p + dx_k + l_x'' \tag{2}$$

$$v_y = -dy_p + dy_k + l_y'' \tag{3}$$

gdzie:

$$l_x'' = -x_p^0 + x_k^0 - [\Delta x],$$

$$l_y'' = -y_p^0 + y_k^0 - [\Delta y].$$

Zostały tu użyte następujące oznaczenia:

v_α, v_x, v_y — poprawki wyrównawcze sum kątów — $[\alpha]$ i sum przyrostów współrzędnych — $[\Delta x]$, $[\Delta y]$.

A_p^0, x_p^0, y_p^0 — przybliżone wartości elementów węzłowych punktu początkowego P,

A_k^0, x_k^0, y_k^0 — przybliżone wartości elementów węzłowych punktu końcowego K,

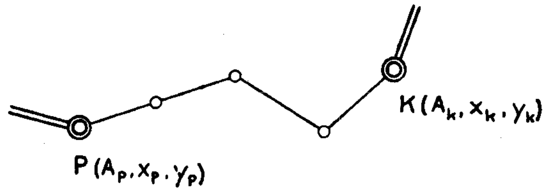
A_p, x_p, y_p — wyrównane wartości elementów węzłowych punktu P,

A_k, x_k, y_k — wyrównane wartości elementów węzłowych punktu K

dA_p, dx_p, dy_p — różnice między wartościami wyrównanymi i przybliżonymi elementów węzłowych punktu P,

dA_k, dx_k, dy_k — różnice między wartościami wyrównanymi i przybliżonymi elementów węzłowych punktu K.

W sposobie Popowa najpierw przeprowadza się wyrównanie kątów przy pomocy równania (1), a później — w oparciu o wyrównane kąty — oblicza się przyrosty i zestawia równania (2) i (3), które pozwalają już na wyrównanie współrzędnych.



Rys. 32

Tak więc, w sieci o w punktach węzłowych układa się trzy razy po w równań normalnych — dla azymutów, współrzędnych x i współrzędnych y. Równania te są rozwiązywane niezależnie, jakby nie było związku między wyrównaniem kątów i wyrównaniem przyrostów obliczonych z wyrównanych kątów.

Sposób Popowa trzykrotnie realizuje warunek minimum:

najpierw w odniesieniu do kątów — $\left[\frac{v_\alpha\, v_\alpha}{m_\alpha\, m_\alpha}\right] = \text{min.}$ (4)

później zaś, w odniesieniu do przyrostów współrzędnych —

$$\left[\frac{v_x\, v_x}{m_x\, m_x}\right] = \text{min.} \tag{5}$$

$$\left[\frac{v_y\, v_y}{m_y\, m_y}\right] = \text{min.} \tag{6}$$

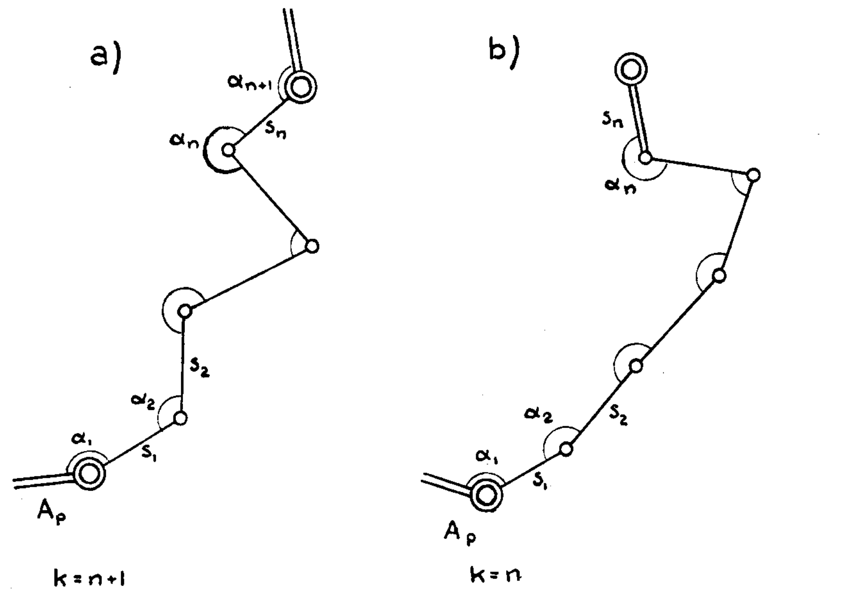
(m_α, m_x, m_y oznaczają tu odpowiednie błędy średnie).

Jednoczesne wyrównanie kątów i przyrostów współrzędnych będzie polegało na zrealizowaniu jednego ogólnego warunku:

$$\left[\frac{v_\alpha\, v_\alpha}{m_\alpha\, m_\alpha}\right] + \left[\frac{v_x\, v_x}{m_x\, m_x}\right] + \left[\frac{v_y\, v_y}{m_y\, m_y}\right] = \text{min.} \tag{7}$$

Ustalmy teraz związki, jakie istnieją między wyrównaniem kątów i przyrostów. Sumy przyrostów współrzędnych $[\Delta x]$ i $[\Delta y]$ są funkcjami długości boków $s_1, s_2, \ldots s_n$, kątów $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_k$, ich poprawek $v_1, v_2 \ldots v_k$ oraz wyrównanego azymutu początkowego $A_p = A_p^0 + dA_p$.

Rozumowanie przeprowadzimy jednocześnie dla dwóch przypadków położenia azymutów węzłowych względem ciągu, przedstawionych na rys. 33. W jednym z nich $k = n + 1$, zaś w drugim $k = n$. W obydwóch przypadkach otrzymujemy (pomijając w rachunku azymutów wielokrotności 180^0):



Rys. 33

$$
\begin{aligned}
[\Delta x] = {} & s_1 \cos(A_p^0 + dA_p + \alpha_1 + v_1) + s_2 \cos(A_p^0 + dA_p + \alpha_1 + v_1 + \alpha_2 + v_2) + \\
& + \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot + \\
& + s_n \cos(A_p^0 + dA_p + \alpha_1 + v_1 + \alpha_2 + v_2 + \cdot \cdot \cdot + \alpha_n + v_n), \\
[\Delta y] = {} & s_1 \sin(A_p^0 + dA_p + \alpha_1 + v_1) + s_2 \sin(A_p^0 + dA_p + \alpha_1 + v_1 + \alpha_2 + v_2) + \\
& + \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot + \\
& + s_n \sin(A_p^0 + dA_p + \alpha_1 + v_1 + \alpha_2 + v_2 + \cdot \cdot \cdot + \alpha_n + v_n).
\end{aligned}
$$

Dla dostatecznie małych wartości v i dA_p będziemy mogli zastosować rozwinięcie:

$$
\begin{aligned}
[\Delta x] = {} & [\overline{\Delta x}] - \overline{\Delta y}_1 (dA_p + v_1) - \overline{\Delta y}_2 (dA_p + v_1 + v_2) + \cdot \cdot \cdot \\
& - \overline{\Delta y}_n (dA_p + v_1 + v_2 + \cdot \cdot \cdot + v_n), \\
[\Delta y] = {} & [\overline{\Delta y}] + \overline{\Delta x}_1 (dA_p + v_1) + \overline{\Delta x}_2 (dA_p + v_1 + v_2) + \cdot \cdot \cdot \\
& + \overline{\Delta x}_n (dA_p + v_1 + v_2 + \cdot \cdot \cdot + v_n),
\end{aligned}
$$

gdzie przez $\overline{\Delta x}, \overline{\Delta y}$ oznaczono przyrosty obliczone przy pomocy przybliżonej wartości azymutu początkowego i kątów zaobserwowanych.

Przyjmując, że poprawka sumy kątów w ciągu (v_α), wyrażona wzorem (1), jest rozrzucana na wszystkie kąty, tj. przyjmując, że

$$v_1 = v_2 = \cdot \cdot \cdot = v_k = v = \frac{-dA_p + dA_k + l_\alpha}{k} \quad \text{otrzymamy:}$$

$$[\Delta x] = [\overline{\Delta x}] - dA_p[\overline{\Delta y}] - \begin{Bmatrix} \overline{\Delta y}_1 \\ \overline{\Delta y}_2 \\ \vdots \\ \overline{\Delta y}_n \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ n \end{Bmatrix} \frac{-dA_p + dA_k + l_\alpha}{k}$$

$$[\Delta y] = [\overline{\Delta y}] + dA_p[\overline{\Delta x}] + \begin{Bmatrix} \overline{\Delta x}_1 \\ \overline{\Delta x}_2 \\ \vdots \\ \overline{\Delta x}_n \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ n \end{Bmatrix} \frac{-dA_p + dA_k + l_\alpha}{k}$$

Po prostych przekształceniach dojdziemy do następujących wzorów:

$$[\Delta x] = [\overline{\Delta x}] - dA_p([\overline{\Delta y}] - W_y) - dA_k W_y - l_\alpha W_y \tag{8}$$

$$[\Delta y] = [\overline{\Delta y}] + dA_p([\overline{\Delta x}] - W_x) + dA_k W_x + l_\alpha W_x \tag{9}$$

gdzie współczynniki W_x i W_y określa równanie:

$$\begin{Bmatrix} W_x \\ W_y \end{Bmatrix} = \frac{1}{k} \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ n \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \overline{\Delta x}_1 & \overline{\Delta y}_1 \\ \overline{\Delta x}_2 & \overline{\Delta y}_2 \\ \vdots & \vdots \\ \overline{\Delta x}_n & \overline{\Delta y}_n \end{Bmatrix}$$

lub też równanie:

$$\begin{Bmatrix} W_x \\ W_y \end{Bmatrix} = \frac{1}{k\rho} \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ n \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \overline{\Delta x}_1 & \overline{\Delta y}_1 \\ \overline{\Delta x}_2 & \overline{\Delta y}_2 \\ \vdots & \vdots \\ \overline{\Delta x}_n & \overline{\Delta y}_n \end{Bmatrix}$$

jeśli obliczenia prowadzimy w mierze kątowej mianowanej o zamienniku ρ.

Podstawiając $[\Delta x]$ wyrażoną wzorem (8) do równania (2) i $[\Delta y]$ wyrażoną wzorem (9) do równania (3), otrzymamy równania poprawek przyrostów v_x i v_y, uzależnione nie tylko od współrzędnych punktów węzłowych (poprzez różniczki dx_p, dy_p, dx_k, dy_k) lecz także od wartości azymutów węzłowych (poprzez różniczki dA_p, dA_k):

$$v_x = -dx_p + dA_p([\overline{\Delta y}] - W_y) + dx_k + dA_k W_y + l_x \tag{10}$$

$$v_y = -dy_p - dA_p([\overline{\Delta x}] - W_x) + dy_k - dA_k W_x + l_y \tag{11}$$

gdzie: $l_x = l'_x + l_\alpha W_y,$

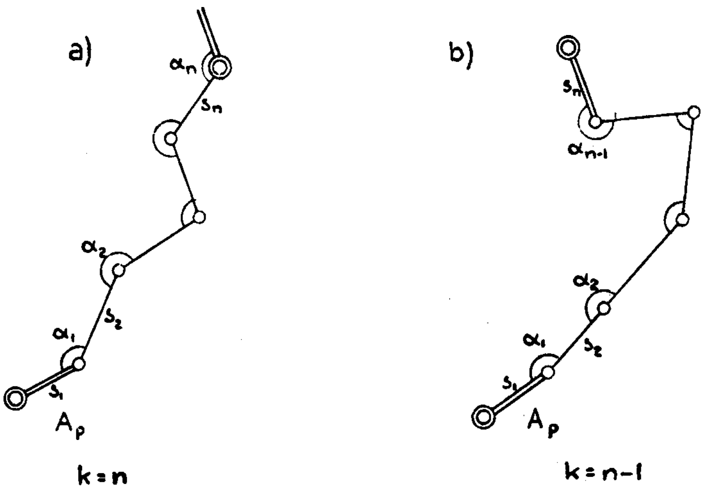
$l_y = l'_y - l_\alpha W_x,$

zaś: $l'_x = -x_p^0 + x_k^0 - [\overline{\Delta x}],$

$l'_y = -y_p^0 + y_k^0 - [\overline{\Delta y}],$

Równania poprawek (10) i (11) łącznie z równaniem kątowym (1) pozwalają nam na przeprowadzenie jednoczesnego wyrównania zgodnie z warunkiem (7).

Oprócz dwóch przypadków przedstawionych na rys. 33, zupełnie wystarczających do wyrównania każdej sieci przy odpowiednim obiorze azymutów węzłowych, mogą zaistnieć jeszcze dwa inne przypadki (patrz rys. 34).



Rys. 34

Łatwo sprawdzić, że wzory (10) i (11) będą słuszne i dla tych przypadków, jeśli użyjemy w nich zamiast współczynników W_x, W_y współczynniki W'_x, W'_y określone wzorem:

$$\begin{Bmatrix} W'_x \\ W'_y \end{Bmatrix} = \frac{1}{k} \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ \cdot \\ n-1 \end{vmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta x_1 , & \Delta y_1 \\ \Delta x_2 , & \Delta y_2 \\ \Delta x_3 , & \Delta y_3 \\ \cdot & \cdot \\ \Delta x_n , & \Delta y_n \end{Bmatrix}$$

Przy wyrównaniu poligonów w przybliżeniu prostoliniowych i równobocznych znajdują zastosowanie wzory uproszczone:

$$\begin{Bmatrix} W_x \\ W_y \end{Bmatrix} = \frac{n+1}{2k} \begin{Bmatrix} [\Delta x] \\ [\Delta y] \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} W'_x \\ W'_y \end{Bmatrix} = \frac{n-1}{2k} \begin{Bmatrix} [\Delta x] \\ [\Delta y] \end{Bmatrix}$$

Zajmiemy się z kolei błędami średnimi m_α, m_x i m_y. Najprostszy jest wzór na błąd średni sumy k kątów:

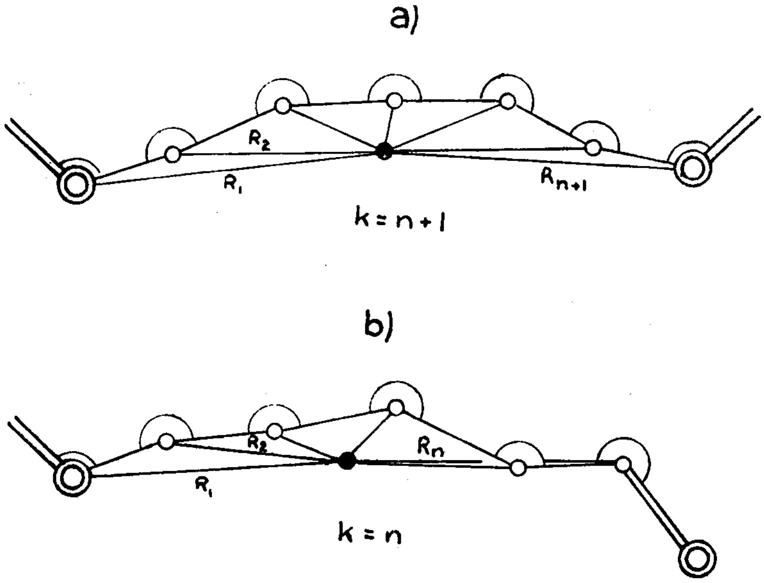
$$m_\alpha = m_k \sqrt{k} \tag{12}$$

gdzie m_k oznacza średni błąd pomiaru kąta.

Więcej kłopotu sprawia rachunek średnich błędów sum przyrostów współrzędnych obliczonych po wyrównaniu kątowym. Nie wdając się w szczegółową analizę zagadnienia przytoczę tylko wzór*, który może znaleźć tutaj zastosowanie:

$$\begin{Bmatrix} m_x^2 \\ m_y^2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} m_s^2 \\ m_k^2 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} [\Delta x^2], & [\Delta y^2] \\ [R_y^2], & [R_x^2] \end{Bmatrix} \tag{13}$$

We wzorze tym m_s oznacza błąd względny pomiaru długości boku, zaś R_x i R_y — rzuty na odpowiednie osie odcinków łączących środek ciężkości wszystkich k punktów ciągu, na których pomierzono kąty — z poszczególnymi k punktami ciągu (patrz rys. 35).



Rys. 35

Wartości R_x i R_y można określić ze szkicu sieci lub obliczyć z dokładnością do pełnych metrów.

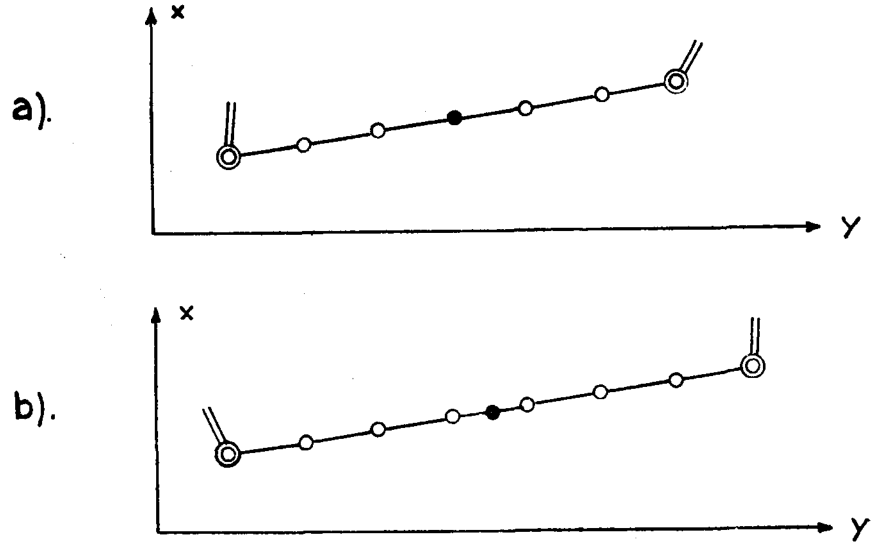
W większości przypadków spotykanych w praktyce wystarczy stosować wzór znacznie łatwiejszy rachunkowo, a odnoszący się do poligonów w przybliżeniu prostoliniowych i równobocznych:

$$\begin{Bmatrix} m_x^2 \\ m_y^2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} m_s^2 \\ m_k^2 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} n\overline{\Delta x^2}, & n\overline{\Delta y^2} \\ \frac{1}{12}\, k\,(k^2-1)\,\overline{\Delta y^2}, & \frac{1}{12}\, k\,(k^2-1)\,\overline{\Delta x^2} \end{Bmatrix} \tag{14}$$

* Jest to wzór na błędy średnie współrzędnych ostatniego punktu poligonu nawiązanego jednostronnie współrzędnymi i obustronnie kątowo. Dowód tego wzoru można znaleźć między innymi w pracy Pawłowa [5]. Dowód krakowianowy, bardziej ogólny, podał prof. dr St. Hausbrandt.

gdzie — przypomnijmy to sobie jeszcze raz — n jest ilością boków ciągu, k — ilością kątów, zaś przez $\overline{\Delta x}$ i $\overline{\Delta y}$ należy rozumieć średnią wartość przyrostu boku.

Wzór (14) wynika bezpośrednio z wzoru (13). Słuszność równań $[\Delta x^2] = n\overline{\Delta x}^2$ i $[\Delta y^2] = n\overline{\Delta y}^2$ jest oczywista. Natomiast dla udowodnienia równań $[R_y^2] = \frac{1}{12}k(k^2-1)\overline{\Delta y}^2$ i $[R_x^2] = \frac{1}{12}k(k^2-1)\overline{\Delta x}^2$ należy rozważyć dwa przypadki: dla pa rzystej i nieparzystej ilości punktów ciągu na których pomierzono kąty. Nie trudno sprawdzić (patrz rys. 36), że zachodzą następujące równania:



Rys. 36

dla k nieparzystego: $$[R_x^2] = 2\left[1^2+2^2+3^2+\dots+\left(\frac{k-1}{2}\right)^2\right]\overline{\Delta x}^2$$

$$[R_y^2] = 2\left[1^2+2^2+3^2+\dots+\left(\frac{k-1}{2}\right)^2\right]\overline{\Delta y}^2$$

dla k parzystego $$[R_x^2] = \frac{1}{2}\,|\,1^2+3^2+5^2+\dots+(k-1)^2\,|\,\overline{\Delta x}^2$$

$$[R_y^2] = \frac{1}{2}\,|\,1^2+3^2+5^2+\dots+(k-1)^2\,|\,\overline{\Delta y}^2$$

Stosując znane wzory:

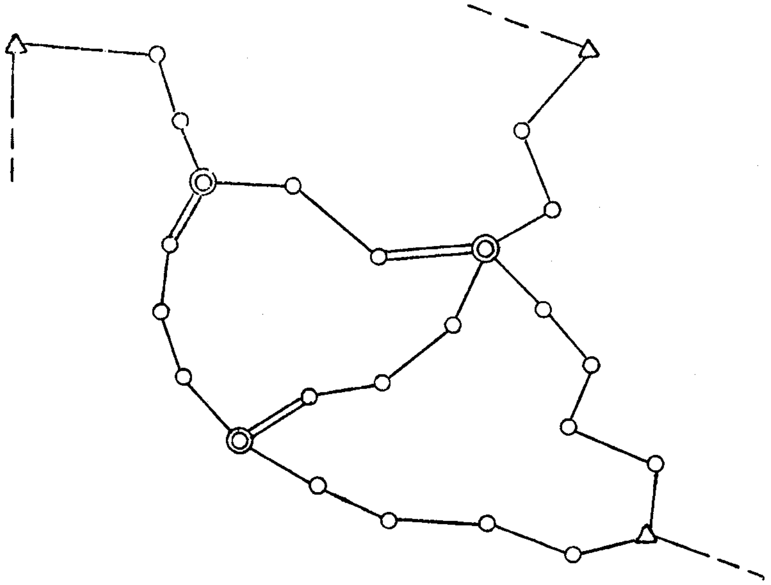
$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \qquad \sum_{k=1}^{n}(2k-1)^2 = \frac{1}{3}n(4n^2-1)$$

otrzymamy w obydwóch przypadkach wynik zgodny z podanym

Weźmy pod uwagę siatkę poligonową przedstawioną na rys. 37. Stosując opisany sposób wyrównania, ułożymy dla 7 ciągów poligonowych

21 równań poprawek według wzorów (1), (10) i (11). W oparciu o nie zestawimy 9 równań normalnych, których rozwiązanie dostarczy nam wyrównanych wartości elementów węzłowych A, x, y dla trzech punktów węzłowych.

Ogólnie, w sieci poligonowej o c ciągach łączących w punktów węzłowych mamy 3c równań poprawek i $3w$ równań normalnych. Ilość obserwacji nadliczbowych wynosi $3(c\text{-}w)$. Przy zastosowaniu metody najmniej-



Rys. 37

szych kwadratów otrzymujemy również $3(c\text{-}w)$ obserwacji nadliczbowych, co można sprawdzić na drodze następującego rozważania. Przypuśćmy, że w sieci poligonowej wszystkie elementy węzłowe są stałe, wówczas każdy spośród c ciągów poligonowych dostarcza nam trzech obserwacji nadliczbowych (jeden bok i dwa kąty), a więc w sumie — 3c. Jednakże elementy węzłowe nie są stałe, lecz wyznaczane. Do ich jednoznacznego określenia potrzeba $3w$ obserwacji. Ostatecznie ilość obserwacji nadliczbowych równa się 3c — $3w$.

W proponowanym sposobie wyrównania łatwo można uzmiennić elementy nawiązania wprowadzając równania poprawek kształtu:

$$v_A = dA \tag{15}$$

$$v_x = dx \tag{16}$$

$$v_y = dy \tag{17}$$

o błędach średnich wynoszących odpowiednio m_A, m_x, m_y.

Charakterystykę dokładnościową elementów węzłowych przeprowadza się według wzorów znanych z metody najmniejszych kwadratów:

$$m_i = \pm m_o \sqrt{(\underline{A}_i^{-1})^2} \tag{18}$$

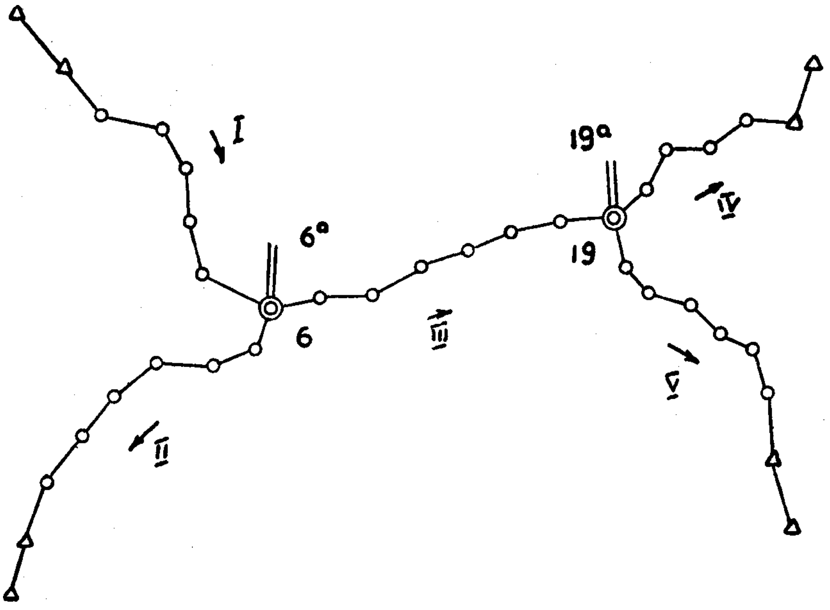
gdzie: $m_o = \pm \sqrt{\dfrac{\left[\dfrac{vv}{mm}\right]^{*}}{3(c-w)}}$,

zaś $\underline{A}$ jest pierwiastkiem krakowianowym tabeli współczynników układu równań normalnych.

Przykłady liczbowe

Materiał cyfrowy do przykładów jednoczesnego wyrównania elementów węzłowych zaczerpniemy z zamieszczonego obok artykułu mgra inż. W. Janusza.

Weźmy najpierw pod uwagę sieć o dwóch punktach węzłowych. Na szkicu sieci (patrz rys. 38) ustalimy przy pomocy strzałek, który z punktów węzłowych jest początkowy czy też końcowy dla danego ciągu.



Rys. 38

Przyjmując jako azymuty początkowe przybliżone wartości azymutów węzłowych (lub wartości stałe), przeprowadzamy rachunek przyrostów współrzędnych na poszczególnych ciągach. Aby nie przytaczać po raz dru-

* Suma $\left[\frac{vv}{mm}\right]$ odnosi się do wszystkich poprawek wyrównawczych.

gi analogicznych obliczeń, weźmiemy te same przybliżone wartości azymutów węzłowych, jakie przyjął w swoim artykule mgr inż. W. Janusz, tj. wartości:

$$A^0_{6-6a} = 52^\circ 39' 15.''8$$

$$A^0_{19-19a} = 347^\circ 16' 10.''3$$

Będziemy mogli wobec tego wykorzystać podane tam (str. 230-232) sumy przyrostów współrzędnych oraz wartości azymutów. Przybliżone wartości współrzędnych punktów węzłowych przyjmiemy równe wartościom uzyskanym z wyrównania metodą najmniejszych kwadratów:

$$x^0_6 = 38\ 927{,}728 \qquad x^0_{19} = 39\ 568{,}925$$

$$y^0_6 = 36\ 802{,}507 \qquad ?^0_{19} = 39\ 604{,}630$$

Przejdziemy teraz do ułożenia równań poprawek. W odpowiednio przygotowanym formularzu wypisujemy najpierw współczynniki W_x, W_y, $[\overline{\Delta x}] - W_x$, $[\overline{\Delta y}] - W_y$ obliczone przy uwzględnieniu zamiennika $\rho = 206265''$. Z kolei obliczamy wyrazy wolne l_α, $l_x = l'_x + l_\alpha W_y$ i $l_y = l'_y - l_\alpha W_x$. Wartości l_α, l'_x i l'_y otrzymujemy jako różnice między wartościami przybliżonymi: $-A^0_p + A^0_k$, $-x^0_p + x^0_k$, $-y^0_p + y^0_k$ i wartościami wynikającymi z rachunku w oparciu o niewyrównane kąty: $[\alpha]$, $[\overline{\Delta x}]$, $[\overline{\Delta y}]$; stosujemy zatem wzory:

$$l_\alpha = -A^0_p + A^0_k - [\alpha] \cdot (\pm n \cdot 180^\circ)$$

$$l_x = -x^0_p + x^0_k - [\overline{\Delta x}]$$

$$l_y = -y^0_p + y^0_k - [\overline{\Delta y}]$$

Patrząc na szkic sieci wypisujemy współczynniki przy niewiadomych dA_{6-6^a}, dx_6, dy_6, dA_{19-19^a}, dx_{19}, dy_{19} w równaniach poprawek:

$$v_\alpha = -dA_p + dA_k + l_\alpha$$

$$v_x = -dx_p + dA_p([\overline{\Delta y}] - W_y) + dx_k + dA_k W_y + l_x$$

$$v_y = -dy_p - dA_p([\overline{\Delta x}] - W_x) + dy_k - dA_k W_x + l_y$$

Równania poprawek zrównoważymy, tzn. sprowadzimy do jednostkowej wagi, przy pomocy błędów średnich m_α, m_x, m_y, obliczonych według wzorów (12) i (13). Wzór (13) jest dosyć uciążliwy w realizacji rachunkowej. W danym przypadku wystarczyłoby w zupełności zastosowanie wzoru uproszczonego (14), chociaż kształt niektórych ciągów poligonowych dość znacznie odbiega od prostoliniowości i równoboczności.

Do rachunku przyjęto: $m_s = \dfrac{1}{17\,000}$, $m_k = 9'',5$.

Utworzenie równań normalnych i obliczanie niewiadomych metodą pierwiastka krakowianowego nie wymaga objaśnień. Błędy niewiadomych otrzymujemy ze wzoru (18) bezpośrednio w sekundach łuku (dla azymutów węzłowych) i w centymetrach (dla współrzędnych punktów węzłowych).

Przeprowadźmy porównanie elementów węzłowych otrzymanych z wyrównania opisanym sposobem:

$$A_{6-6^a} = 52^0\ 39'26'' \pm 7'' \qquad A_{19-19^a} = 347^0\ 16'23'' \pm 8''$$

$$x_6 = 38\,927.71\ \mathrm{m} \pm 5\ \mathrm{cm} \qquad x_{19} = 39\,568.96\ \mathrm{m} \pm 5\ \mathrm{cm}$$

$$y_6 = 36\,802.48\ \mathrm{m} \pm 4\ \mathrm{cm} \qquad y_{19} = 39\,604.60\ \mathrm{m} \pm 4\ \mathrm{cm}$$

oraz z wyrównania metodą najmniejszych kwadratów:

$$A_{6-6^a} = 52^0\ 39'25'' \qquad A_{19-19^a} = 347^0\ 16'21''$$

$$x_6 = 38\,927.73\ \mathrm{m} \qquad x_{19} = 39\,568.93\ \mathrm{m}$$

$$y_6 = 36\,802.51\ \mathrm{m} \qquad y_{19} = 39\,604.63\ \mathrm{m}$$

Wyniki należy uznać za zadawalające.

Poniżej przytoczone są poszczególne etapy rachunku.

I. Ułożenie równań poprawek

Współczynniki			$dA_{6\text{-}6^a}$	dX_6	dY_6	$dA_{19\text{-}19^a}$	dX_{19}	dY_{19}	1	Wyrazy wolne	
		Nr ciągu	$v_\alpha = -dA_p + dA_k + l_\alpha$						l_α		
		1	1						0",0		
		2	−1						− 4",6		
		3	−1			1			0",0		
		4				−1			+25",6		
		5				−1			+22",8		
W_y	$[\bar{\Delta y}]-W_y$		$v_x = -dX_p + dA_p([\bar{\Delta y}]-W_y) + dX_k + dA_k W_y + l_x$						l_x	l'_x	$l_\alpha W_y$
0.267	0.349	1	0.267	1					+ 2.6	+ 2.6	0
− 0.401	− 0.630	2	−0.630	−1					+ 14.4	+ 12.6	+ 1.8
0.679	0.686	3	0.686	−1		0.679	+ 1		− 25.3	− 25.3	0
0.385	0.350	4				0.350	− 1		+ 3.2	− 6.7	+ 9.9
0.315	0.286	5				0.286	− 1		− 9.3	− 16.5	+ 7.2
$-W_x$	$-([\bar{\Delta x}]-W_x)$		$v_y = -dY_p - dA_p([\bar{\Delta x}]-W_x) + dY_k - dA_k W_x + l_y$						l_y	l'_y	$-l_\alpha W_x$
0.504	0.444	1	0.504		1				+ 5.8	+ 5.8	0
0 447	0.344	2	0.344		− 1				− 6.6	− 4.5	− 2.1
− 0.168	− 0.143	3	−0.143		− 1	− 0.168		1	+ 9.8	+ 9.8	0
− 0.107	− 0.132	4				− 0.132		− 1	− 1.6	+ 1.1	− 2.7
0.570	0.482	5				0.482		− 1	+ 3.7	− 9.3	+ 13.0

Rachunek prowadzony jest w cm.

II. Zrównoważenie równań poprawek

Nr	m	$\frac{1}{m}$	$dA_{6\text{-}6^a}$	dX_6	dY_6	$dA_{19\text{-}19^a}$	dX_{19}	dY_{19}	1	s	$\frac{v}{m}$	v
												″
α 1	25″	40	40						0	40	0.40	10.0
2	27	37	−37						−170	−207	−0.54	−14.6
3	27	37	−37			37			0	0	0.11	3.0
4	23	43				−43			1113	1070	0.56	12.9
5	27	37				−37			844	807	0.37	10.0
x 1	6.8	147	39	147					382	568	0.49	3.3
2	10.0	100	−63	−100					1440	1277	1.02	10.2
3	11.8	85	58	−85		58	85		−2150	−2034	−0.38	−4.5
4	6.2	161				56	−161		515	410	0.72	4.5
5	7.7	130				37	−130		−1209	−1302	−1.14	−8.8
y 1	8.7	115	58		115				667	840	0.95	8.3
2	7.8	128	44		−128				−845	−929	−0.07	−0.5
3	7.2	139	−20		−139	−23		139	1362	1319	0.85	6.1
4	4.6	217				−29		−217	−347	−593	−0.15	−0.7
5	9.1	110				53		−110	407	350	1.37	12.5

Zrównoważone równania poprawek pomnożono przez 10^3

$$\left[\frac{vv}{mm}\right] = 7.659, \qquad m_0 = \pm\sqrt{\frac{7.659}{9}} = \pm\, 0{,}92$$

III. Ułożenie i rozwiązanie równań normalnych

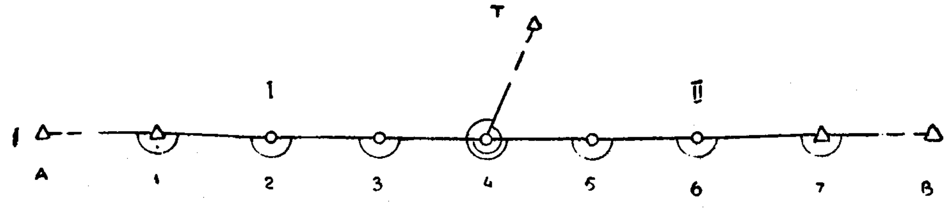
	$dA_{6\text{-}6^a}$ ·	dX_6 ·	dY_6 ·	$dA_{19\text{-}19^a}$ ·	dX_{19} ·	dY_{19} ·	1 ·	s ·
	18 892	7 103	3 818	2 455	4 930	−2 780	−219 966	−185 548
	7 103	38 834	0	−4 930	−7 225	0	94 904	128 686
	3 818	0	48 930	3 197	0	−19 321	−4 453	32 171
	2 455	−4 930	3 197	16 635	−8 896	−2 734	−219 372	−213 645
	4 930	−7 225	0	−8 896	50 046	0	−108 495	−69 640
	−2 780	0	−19 321	−2 734	0	78 510	219 847	273 522
	137.4	51.7	27.8	17.9	35.9	−20.2	−1660.9	−1350.4
		190.2	−7.6	−30.8	−47.7	5.5	934.1	1043.6
			219.3	11.2	−6.2	−85.3	215.0	354.1
				123.4	−88.6	−10.1	−1331.9	−1307.1
					196.5	−2.2	−626.7	−432.5
						265.9	699.1	964.9
	″							
niewiadome:	+10.06	−2.06	−2.57	+12.85	+3.16	−2.63	1	

IV. Obliczenie średnich błędów niewiadomych

	$dA_{6\text{-}6^a}$ ·	dX_6 ·	dY_6 ·	$dA_{19\text{-}19^a}$ ·	dX_{19} ·	dY_{19} ·	s
odwrotność	7.28						7.28
pierwiastka	−1.98	5.26					3.28
krakowianowego	−0 99	0.18	4.56				3.75
$\underline{A}^{\ 1}$	−1.46	1.30	−0.41	8.10			7.53
	−2.50	1.87	−0.04	3 65	5.09		8.07
	0.20	0.01	1.45	0.34	0.04	3.76	5.80
$\sqrt{(A_i^{-1})^2}$	8.14	5.73	4.82	8 89	5.09	3.76	
	″			″			
m_i	7.5	5.3 cm	4.4 cm	8.2	4.7 cm	3.5 cm	

Jako drugi przykład rozważymy ciąg poligonowy o dodatkowym nawiązaniu kątowym do punktu stałego (patrz rys. 39).

Przyjmiemy tu punkt 4, na którym pomierzono kąt nawiązujący, za punkt węzłowy i azymut 4-T za azymut węzłowy. Punkt T jest punktem



Rys. 39

stałym, wobec tego wartość azymutu węzłowego można jednoznacznie określić położeniem punktu 4. Wynika stąd, że z równań poprawek v_α v_x, v_y, które ułożymy dla ciągów I i II, będziemy musieli wyeliminować niewiadomą dA_{4-T}, jako funkcjonalnie zależną od niewiadomych dx_4 i dy_4. Uczynimy to przy pomocy łatwego do wyprowadzenia związku:

$$dA_{4-T} = dx_4 \cdot B_{4-T} - dy_4 \cdot A_{4-T}$$

gdzie: $A_{4-T} = \dfrac{\Delta x_{4-T}\,\rho}{\Delta x^2_{4-T} + \Delta y^2_{4-T}}$, $\qquad B_{4-T} = \dfrac{\Delta y_{4-T}\,\rho}{\Delta x^2_{4-T} + \Delta y^2_{4-T}}$

Przybliżoną wartość azymutu węzłowego obliczymy ze współrzędnych przybliżonych punktu węzłowego oraz ze współrzędnych punktu stałego.

Poza czynnością eliminowania niewiadomej dA_{4-T}, postępowanie wyrównawcze w tym przypadku nie różni się niczym od opisanego poprzednio.

W dalszym ciągu podane są obliczenia w kolejności ich wykonywania.

Ciąg I

Nr	Kąt	Azymut	Bok	cos$A$ sin$A$	x	y
A						
		88g89c				
1	195g40c				516.67	594.52
		93 49	93.7	0.10208 0.99478		
2	205 10					
		88 39	110.8	0.18136 0.98342		
3	195 75					
		92 64	103.9	0.11535 0.99332		
4	278 31				558.31	899.90
		14 33				
T					708.39	933.78

$A^0 = 14^g13^c.5$	$l_\alpha = -19^c.5$	$-x_1 + x_4^0$	41.64	$-y_1 + y_4^0$	305.38
		$[\Delta x]_{1-4}$	-41.64	$[\Delta y]_{1-4}$	-305.38
		l'_x	0	l'_y	0

Ciąg II

Nr	Kąt	Azymut	Bok	cos$A$ sin$A$	x	y
B						
		289^g63^c				
7	198^g62^c				606.91	1197.21
		288 25	99.1	— 0.18352 — 0.98302		
6	204 71					
		292 96	100.9	— 0.11036 — 0.99389		
5	194 94					
		287 90	101.5	— 0.18892 — 0 98199		
4	326 41				558.31	899.90
		14 31				
T						

$$l_\alpha = -17^c.5 \qquad \begin{array}{rr} -x_7+x_4^0 & -48.60 \\ [\overline{\Delta x}]_{7-4} & +48.51 \\ \hline l'_x & -9 \end{array} \qquad \begin{array}{rr} -y_7+y_4^0 & -297.31 \\ [\overline{\Delta y}]_{7-4} & +297.37 \\ \hline l'_y & +6 \end{array}$$

Obliczenie średnich błędów według wzorów (12) i (14):

Ciąg I

$$m_\alpha = \pm m_k\sqrt{n} = \pm 2^c.1\sqrt{4} = \pm 4^c.2 \qquad m_k = \pm 2^c.1 \qquad m_s = 0.0017$$

$$\begin{Bmatrix} m_x^2 \\ m_y^2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 289\cdot 10^{-8} \\ 11\cdot 10^{-8} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 3\cdot 169 & 3\cdot 10400 \\ 5\cdot 10400 & 5\cdot 169 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.0072 \\ 0.0903 \end{Bmatrix}$$

$$m_x = \pm 0.08$$
$$m_y = \pm 0.30$$

Ciąg II

$$m_\alpha = \pm 4^c.2$$

$$\begin{Bmatrix} m_x^2 \\ m_y^2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 289\cdot 10^{-8} \\ 11\cdot 10^{-8} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 3\cdot 256 & 3\cdot 10000 \\ 5\cdot 10000 & 5\cdot 256 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.0077 \\ 0.0868 \end{Bmatrix}$$

$$m_x = \pm 0.09$$
$$m_y = \pm 0.30$$

I Ułożenie równań poprawek

			dA_{4-T}	dx_4	dy_4	1		
		Nr ciągu	$v_\alpha = -dA_p + dA_k + l_\alpha$			l_α		
		1	1			−19.5		
Współczynniki		2	1			−17.5	Wyrazy wolne	
W_y	$[\overline{\Delta y}] - W_y$	$v_x = -dx_p + dA_p([\overline{\Delta y}] - W_y) + dx_k + dA_k W_y + l_x$				l_x	l'_x	$l_\alpha \cdot W_y$
0.0243		1	0.0243	1		−0.473	0.00	−0.473
−0.0234		2	−0.0234	1		+0.320	−0.09	+0.410
$-W_x$	$-([\overline{\Delta x}] - W_x)$	$v_y = -dy_p - dA_p([\Delta x] - W_x) + dy_k - dA_k W_x + l_y$				l_y	l'_y	$-l_\alpha \cdot W_x$
−0.0033		1	−0.0033		1	−0.064	0.00	0.064
0.0038		2	0.0038		1	+0.006	0.06	−0.066

II. Wyeliminowanie poprawki azymutu węzłowego $dA_{4\cdot T} = 9.11\, dx_4 - 40.36\, dy_1$

Nr ciągu	dx_4	dy_1	1
α 1	9.11	−40.36	−19.5
2	9.11	−40.36	−17.5
x 1	1.22	−0.98	−0.473
2	0.79	0.94	+0.320
y 1	−0.03	1.13	+0.064
2	0.03	0.85	−0.006

III. Zrównoważenie równań poprawek

Nr ciągu	m	$\frac{1}{m}$	dx_4	dy_4	1	S	$\frac{v}{m}$	v
α 1	4.2	0.24	2.19	−9.69	−4.68	−12.18	−0.67	$-2^c.8$
2	4.2	0.24	2.19	−9.69	−4.20	−11.70	−0.19	$-0^c.8$
x 1	0.08	12.50	15.25	−12.25	−5.91	−2.91	+0.08	0.01
2	0.09	11.11	8.78	10.44	+3.56	22.78	+0.07	0.01
y 1	0.30	3.33	−0.10	3.76	+0.21	3.87	−1.29	−0.39
2	0.30	3.33	0.10	2.83	−0.02	2.91	−1.14	−0.34

$$\frac{1}{4}\left[\frac{vv}{mm}\right] = 0.8646$$

$$m_0 = \pm 0.93$$

IV. Ułożenie i rozwiązanie równań normalnych

$$319.26\, dx_4 - 137.68\, dy_4 - 78.34 = 0$$

$$-137.68\, dx_4 + 468.99\, dy_4 + 196.34 = 0 \qquad D = 130774$$

$$dx_4 = +0.074 \qquad m_x = \pm m_0 \sqrt{0.0036} = \pm 0.06 \text{ m}$$

$$dy_4 = -0.397 \qquad m_y = \pm m_0 \sqrt{0.0024} = \pm 0.05 \text{ m}$$

$$X = 558.38 \pm 0.06$$

$$Y = 889.50 \pm 0.05$$

W podobny sposób przeprowadzono wyrównanie 9 dalszych niezależnych pomiarów tego samego ciągu poligonowego. Pomiary te były uprzednio wyrównane metodą najmniejszych kwadratów. Poza tym współrzędne punktów poligonowych wyznaczono ze znacznie dokładniejszych pomiarów (kilkadziesiąt razy dokładniejszych). Pozwoliło to nam na obliczenie błędów prawdziwych, których zestawienie, jak również ilustracja graficzna, podane zostały we wstępie.

LITERATURA

[1] *Gaździcki J.*: Wpływ nawiązań kątowych na zmniejszenie błędów podłużnych punktów typowego ciągu poligonowego, Prace IGiK, tom IV, zeszyt 1 (8), Warszawa, 1956.

[2] Gorodskaja poligonomietria, rukowodstwo po wyczislitielnym rabotam, Moskwa, 1952.

[3] *Hausbrandt S.*: Rachunki geodezyjne, W-wa, 1953.

[4] *Janusz W.*: Badanie terenowe konstrukcji ciągu poligonowego prostoliniowego i równobocznego oraz wnioski z tego badania, Prace IGiK, tom IV, zeszyt 2 (9), Warszawa, 1956.

[5] *Pawłow*: Priedwyczislenije pogresznostiej w osnownych markszajdierskich rabotach, Ugletiechizdat 1950.

[6] *Popow W.*: Urawnowiesziwanije poligonow, Gieodiezidat 1954.

ЕЖИ ГАЗЬДЗИЦКИ
ВОЙЦЕХ ЯНУШ

ОДНОВРЕМЕННОЕ УРАВНОВЕШЕНИЕ УЗЛОВЫХ ЭЛЕМЕНТОВ В ПОЛИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ СЕТЯХ

Резюме

Уравновешение больших полигонометрических сетей по методу наименьших квадратов является трудоёмким, и поэтому обыкновенно применяют приближенные методы уравновешения, которые можно в общем назвать „методами узловых точек". Уравнительные вычисления при этих методах разбиваются на две части:

1. Уравновешение узловых элементов, т. е. азимутов и координат x и y.
2. Уравновешение наблюдении в полигонометрических ходах, соединяющих узловые точки.

Сущность уравновешения узловых элементов состоит в том, что определенные функции наблюдении принимаются как непосредственные наблюдения, для которых можно составить уравнения поправок или условные уравнения. Однако, во всех общеизвестных методах узловых точек, упрощение идет еще дальше: каждый из узловых элементов α, x, y, уравновешивается отдельно. Такой ход уравнивания бесспорно приводит к большим искажениям наблюдении, с которыми нельзя помирится при уравновешении сетей высшей точности.

В этом докладе обсуждаются два способа одновременного уравновешения узловых элементов α, x, y. При первом способе уравниваемыми функциями наблюдении являются углы и длины, определенные узловыми элементами, при другом — суммы углов и суммы приращении координат, вычисленные для отдельных ходов. Следует заметить, что оба способа позволяют уравновешивать сети с т, наз. боковыми увязками, т. е. добавочно наблюденными с некоторых полигонометрических точек направлениями на опорные пункты.

Результаты полученные в приведенных числовых примерах очень близки результатам, полученным при методе наименьших квадратов.

JERZY GAŹDZICKI
WOJCIECH JANUSZ

THE SIMULTANEOUS ADJUSTING THE NODAL ELEMENTS IN POLIGONAL NETS

Summary

The adjustment of extensive polygon nets by the method of the least squares being very laborious, the aproximating methods generally called „Method of nodal points" are used. The adjusting operations in these methods are divided into two phases:

1. the adjustment of nodal elements i. e. of azimuths a and co-ordinates x, y.
2. adjustment of observations in individual polygons between corresponding nodal points.

The essence of adjustment of nodal points consists in treating certain observation functions as direct observations for which correction equations or conditional equations may be made. All the known methods of nodal points are not limited to this simplifikation: each of the nodal elements a, x, y is adjusted separately. This manner of dealing with them must necessarily lead to considerable observation deformation that cannot be tolerated when a higher precision net is being adjusted.

The paper discusses two ways of simultaneous adjusting the nodal elemnts a, x, y. The observation functions being adjusted in the first one are angles and lengths determined by the nodal element, in the second-sums of angles and sums of co-ordinate increments (departure and latitude) calculated for individuol polygons. Both the methods enable the adjustment of the net with the so called side connections (with additionally observed directions towards fixed points, from certain polygon points). The given numerical examples show results very near those received by means of the least squares method.