

### Zagadnienie jednolitej instrukcji poligonizacji technicznej

Znaczne rozszerzenie się zakresu stosowania pomiarów geodezyjnych dla potrzeb różnych resortów z jednej strony świadczy o poważnej roli geodezji w życiu gospodarczym kraju — z drugiej natomiast przysparza personelowi geodezyjnemu szeregu kłopotów natury organizacyjnej a częstokroć też technicznej i pojęciowej. Potrzeby każdego z resortów zlecających opracowania geodezyjne są bardzo zróżnicowane, szczególnie co się tyczy dokładności i częstokroć nie są nawet wyczerpująco sprecyzowane. Taki stan rzeczy przy jednoczesnym rozczłonkowaniu wykonawstwa geodezyjnego w różnych przedsiębiorstwach resortowych powoduje brak jednolitości opracowań, a co za tym idzie, niemożliwość ich wykorzystania dla innych celów, niż te o jakich myślano w momencie zlecenia pracy.

Sytuacja obecna wymaga wprowadzenia jednolitej instrukcji pomiarowej, szczególnie w zakresie poligonizacji technicznej, przy czym założenia instrukcji winny być przejrzyste i zrozumiałe nie tylko dla geodety, ale i dla zleceniodawcy. Charakterystyka dokładnościowa poszczególnych klas poligonizacji winna być oparta nie na dokładności pomiarów a na dokładności ostatecznych rezultatów — współrzędnych. Tylko takie bowiem kryteria mogą służyć fachowcowi z innej dziedziny do określenia przydatności poligonizacji danej klasy dla jego prac. W związku z tym, na naradzie przedstawicieli I.G. i K. i Departamentu Techniki G.U.G. i K. postanowiono przyjąć 4 klasy poligonizacji, charakteryzujące się odpowiednio błędami średnimi najslabiej wyznaczonych punktów:

Klasa poligonowa	I	II	III	IV
Błąd średni punktu	0,075	0,150	0,375	0,750

Dobór narzędzi pomiarowych i metod pracy, jak również projekt sieci winny zapewniać możliwość spełnienia powyższych warunków, przy czym dokładność wyznaczenia najslabszego punktu winna być w przybliżeniu jednakowa w każdym kierunku.

Dalej zamieszczone wyniki analiz dokładnościowych zostały uzyskane w sposób zgodny z przybliżonym sposobem wyrównania, stosowanym w poligonizacji technicznej (z uwzględnieniem przewidywanego efektu wyrównania przybliżonego). Odchyłki liniowe ciągów zostały uzyskane ze wzoru uwzględniającego efekt wyrównania kątów (w instrukcji B-III wzór na odchyłkę liniową nie uwzględnia wpływu uprzedniego wyrównania kątów, natomiast w praktyce określa się ją po wyrównaniu kątów ze względu na wygodę w rachunku). W analizie niniejszej korzystamy ze wzoru na błąd punktu w ciągu nawiązanym jednostronnie liniowo i obustronnie kąto. Wzór ten wyprowadzony przez prof. S. Hausbrandta, wyrażony krakowianowo posiada następującą postać:\*

$$\begin{Bmatrix} m_x^2 \\ m_y^2 \end{Bmatrix} = \left( \frac{m_d}{d} \right)^2 \begin{Bmatrix} \sum d_x^2 \\ \sum d_y^2 \end{Bmatrix} + m_0^2 \begin{Bmatrix} k_1^2 \\ k_2^2 \end{Bmatrix}$$

gdzie:

$$\begin{Bmatrix} \underline{k}_1 \\ -\underline{k}_2 \end{Bmatrix} = \frac{1}{n+1} \begin{Bmatrix} y_0 - y_i & x_0 - x_i \\ y_1 - y_i & x_1 - x_i \\ y_2 - y_i & x_2 - x_i \\ \dots & \dots \\ y_{i-1} - y_i & x_{i-1} - x_i \end{Bmatrix} \underbrace{\begin{Bmatrix} n-1 & -1 & -1 & \dots & -1 & -1 & \dots & -1 & -1 \\ -1 & n & -1 & -1 & \dots & -1 & -1 & \dots & -1 & -1 \\ -1 & -1 & n & -1 & \dots & -1 & -1 & \dots & -1 & -1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & -1 & -1 & -1 & \dots & n & -1 & \dots & -1 & -1 \end{Bmatrix}}_{\text{ogółem } n+1 \text{ kolumn}}$$

Po wyrównaniu kątów możemy obliczyć współrzędne każdego z punktów tak, jak w ciągu nawiązanym jednostronnie — dwukrotnie: wychodząc ze współrzędnych punktów nawiązujących na początku ciągu i po raz drugi — wychodząc ze współrzędnych punktów nawiązujących na końcu ciągu, przy czym w obu wypadkach korzystamy z niewyrównanych długości i wyrównanych kątów.

\* Wyprowadzenie wzoru na błąd współrzędnych punktu  $i$ -tego w ciągu poligonowym nawiązanym obustronnie kąto i jednostronnie liniowo prof. S. Hausbrandt oparł na związku określającym błąd funkcji spostrzeżeń wyrównanych metodą zawarunkowaną. W dużym skrócie tok wyprowadzenia wygląda następująco:

Na błąd wyznaczenia punktu  $i$ -tego wpływ swój wywierają błędy długości i kątów:

$$m_p^2 = m_{pd}^2 + m_{p\alpha}^2$$

Wpływ błędów długości niewyrównanych, jako wielkości wzajemnie niezależnych warunkuje znany wzór:

$$m_{pd} = \pm \sqrt{n} m_d$$

który stanowi pierwszą część wzoru prof. S. Hausbrandta wymienionego powyżej w tekście, rozwiniętą w stosunku do współrzędnych punktu, którego błąd jest określany.

Według wymienionego uprzednio wzoru prof. S. Hausbrandta możemy obliczyć błędy średnie punktu  $i$ -tego uzyskane przy obliczaniu jego współrzędnych z każdej z dróg z osobna. Czynność wyrównania przyrostów, stosowana w praktyce po uprzednim wyrównaniu kątów jest identyczna pod względem uzyskiwanych wyników z wyrównaniem każdego z punktów ciągu z osobna jako węzłowego (z dwu dróg). Można wobec tego po-

Wpływ błędów kątów wyrównanych musimy obliczyć z uwzględnieniem wzajemnej zależności zmiennych wynikającej z równania warunkowego:

$$v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_n = \Delta$$

gdzie  $v$  — poprawki kątów,  $\Delta$  — odchyłka kątowa ciągu poligonowego.

Jeśli związek, wg którego określamy położenie punktu  $i$ -tego w zależności (między innymi) od wyrównanych kątów oznaczymy przez  $F$ , to  $m_F$  błąd punktu  $i$ -tego spowodowany przez błędy kątów będzie się kształtował wg ogólnego wzoru:

$$m_F^2 = m_0^2 \left[ f \left\{ \tau - a \left[ (\tau - a)^2 \right]^{-1} a \right\} \right]^2$$

gdzie  $m_0$  — błąd średni pojedynczego spostrzeżenia,

$a$  — krakowian współczynniki układu równań warunkowych:

$$a = \{ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ \dots \ 1 \}$$

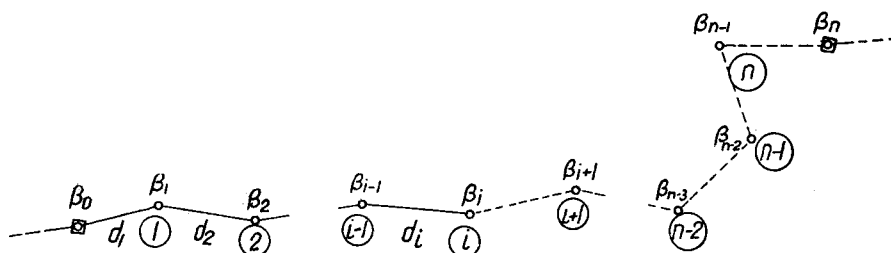
$n + 1$  współczynniki

$f$  — kolumna pochodnych cząstkowych funkcji względem poszczególnych zmiennych w tym uporządkowaniu w jakim występują one w równaniu warunkowym.

W związku z tym, że położenie punktu określone jest przez dwie współrzędne, przez  $f$  rozumiemy kolumny pochodnych cząstkowych współrzędnych punktu  $i$ -tego względem poszczególnych zmiennych:

$$\underline{f}_x = \begin{pmatrix} y_0 - y_i \\ y_1 - y_i \\ \dots \\ y_{i-1} - y_i \end{pmatrix} \quad -\underline{f}_y = \begin{pmatrix} x_0 - x_i \\ x_1 - x_i \\ \dots \\ x_{i-1} - x_i \end{pmatrix}$$

Realizując wzór na błąd funkcji spostrzeżeń wyrównanych otrzymamy na drodze przeprowadzenia przeróbek czysto algebraicznych drugą część wzoru na błąd punktu wymienionego w tekście.



wiedzieć, że błąd wyrównanego punktu jest równy błędowi średniej arytmetycznej, której składniki posiadają określone uprzednio błędy średnie.

$$\begin{aligned} x'_{p_i} &= X_A + d_1 \cos \alpha_1 + \dots + d_i \cos \alpha_i \\ y'_{p_i} &= Y_A + d_1 \sin \alpha_1 + \dots + d_i \sin \alpha_i \end{aligned} \quad \text{z błędem średnim } m'_{p_i}$$

$$\begin{aligned} x''_{p_i} &= X_B + d_{n+1} \cos \alpha_{n+1} + \dots + d_{i+1} \cos \alpha_{i+1} \\ y''_{p_i} &= Y_B + d_{n+1} \sin \alpha_{n+1} + \dots + d_{i+1} \sin \alpha_{i+1} \end{aligned} \quad \text{z błędem średnim } m''_{p_i}$$

$$x_{p_i} = \frac{p'_i x'_i + p''_i x''_i}{p' + p''} \quad y_{p_i} = \frac{p'_i y'_i + p''_i y''_i}{p' + p''}$$

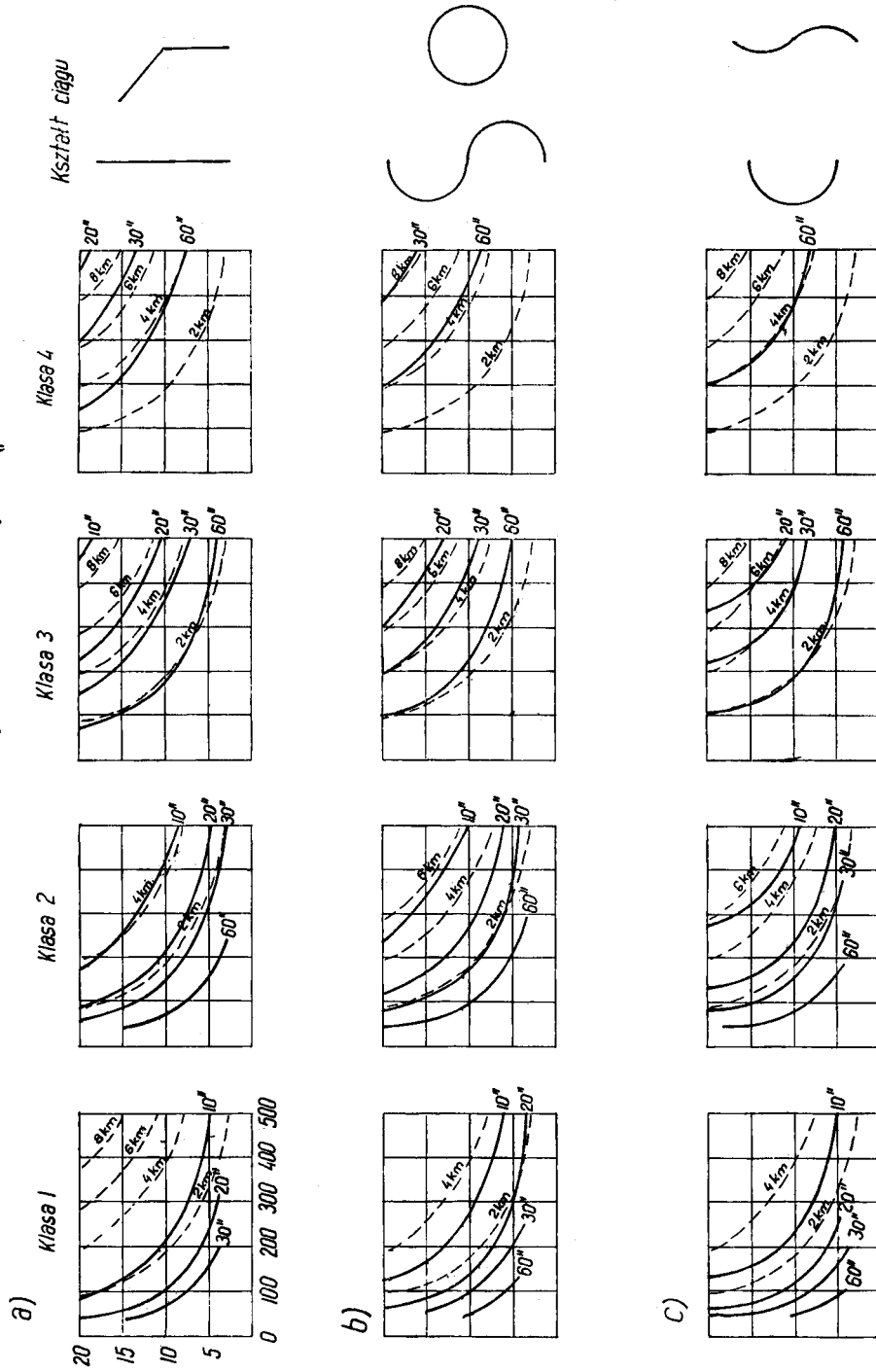
$$m_{p_i}^2 = \frac{m_{p_i}'^2 \cdot m_{p_i}''^2}{m_{p_i}'^2 + m_{p_i}''^2}$$

Korzystając z wymienionych wzorów przeprowadzono analizy dokładności ciągów zamieszczonych na rysunkach przy wykresie 1 (oczywiście przy zmiennej ilości punktów wyznaczanych). Ostateczne wyniki analiz dokładności przedstawiono na wykresach 1, 2, 3.

Wykres 1a, b, c, przedstawia dla różnych kształtów ciągów i klas poligonizacji zależność między  $n$ ,  $d$ ,  $m_0$  (gdzie przez  $n$  rozumiemy ilość punktów wyznaczanych za pomocą ciągu, odmiennie niż we wzorze prof. S. Hausbrandta, gdzie  $n$  oznacza ilość wierzchołków kątów załamania)\*. Linia ciągłą, grubą oznaczono krzywe stałych wartości  $m_0$ , natomiast przerywaną — krzywe stałych długości ciągu. Z wykresu tego można wysnuć wnioski dotyczące maksymalnej długości ciągu ze względu na możliwości dokładnościowe pomiaru kątów. Z drugiej strony, możemy odczytać z jaką dokładnością należy mierzyć kąty ciągu o określonej długości boków (średniej) i ilości punktów wyznaczanych, aby można go było zaliczyć do określonej klasy poligonowej. Przybliżona co do kierunku zgodność przebiegu krzywych  $m_0 = \text{const.}$  i krzywych  $L = \text{const.}$  pozwala przyjąć dla poszczególnych klas założenie, że dokładność pomiaru kątów jaką należy stosować zależy tylko od długości ciągu. Spośród wszystkich możliwych do zastosowania kombinacji długości celowych i ilości punktów wyznaczanych w ramach określonej długości ciągu (a więc i określonej wartości  $m_0$  jaką należy uzyskać w danej klasie) można wybrać w oparciu o zbadanie możliwości praktycznych, wielkości optymalne długości boków poligonowych.

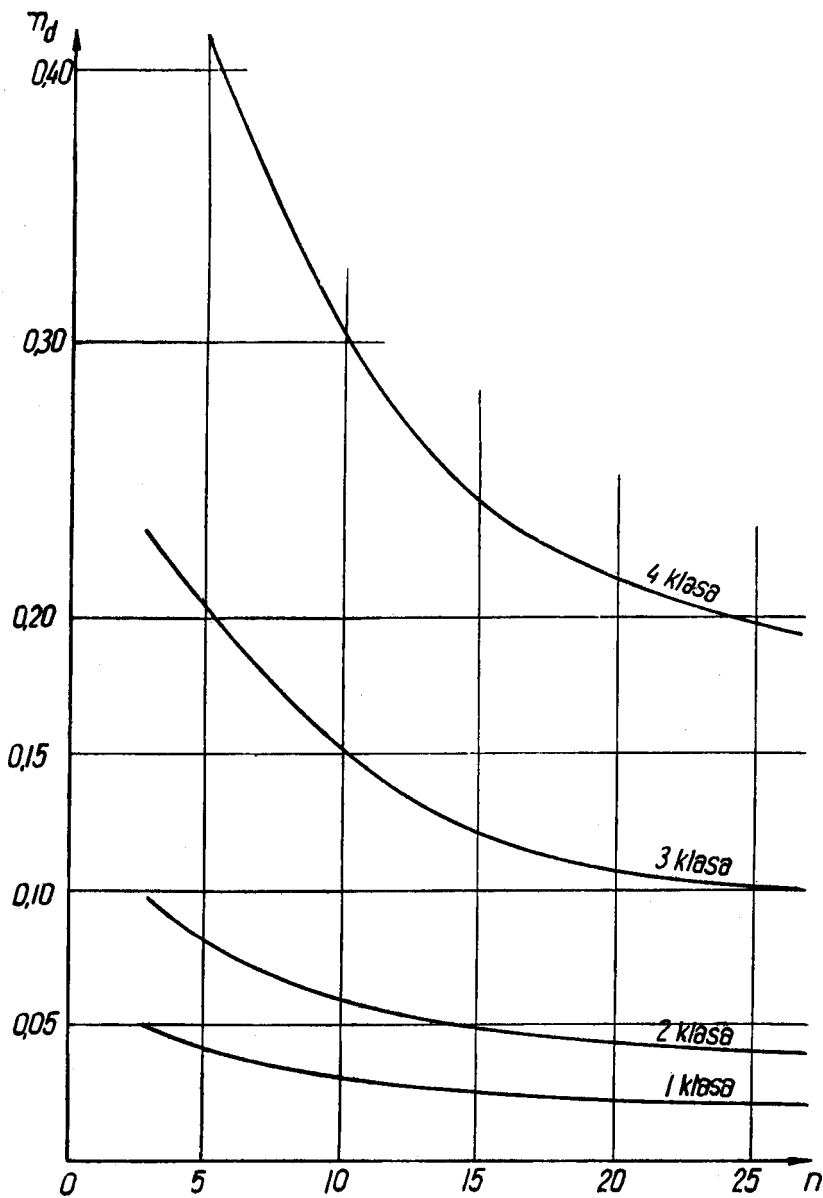
\* Na wykresach 1a, b, c oraz 3a, wzdłuż osi poziomej odkładano wartości  $d$ , a wzdłuż osi pionowej wartości  $n$ .

WYKRES 1. BŁĘDY POMIARU KĄTA  $m_0$



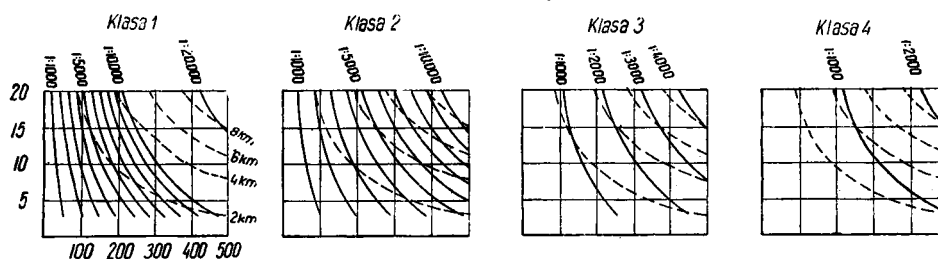
Wykres 2 wynika bezpośrednio ze wzoru na błąd najniższego punktu i podaje wielkość błędów średniar pomiaru długości dla poszczególnych klas w zależności od ilości punktów wyznaczanych. Wykres ten nie może być wykorzystany w swej formie do dalszej analizy i stanowi tylko podstawę do sporządzenia wykresu 3.

WYKRES 2. ŚREDNIE BŁĘDY POMIARU DŁUGOŚCI W ZALEŻNOŚCI OD ILOŚCI PUNKTÓW WYZNACZANYCH



Wykres 3a mówi nam, jaki winien być błąd względny pomiaru długości przy określonych wartościach  $d$  i  $n$  dla danej klasy poligonowej. Operowanie jednak pojęciem błędu względnego (utartym w praktyce) nie jest w naszym przypadku wygodne, ponieważ — jak wskazuje wykres — przy danej długości ciągu błąd względny pomiaru długości winien zmieniać się w

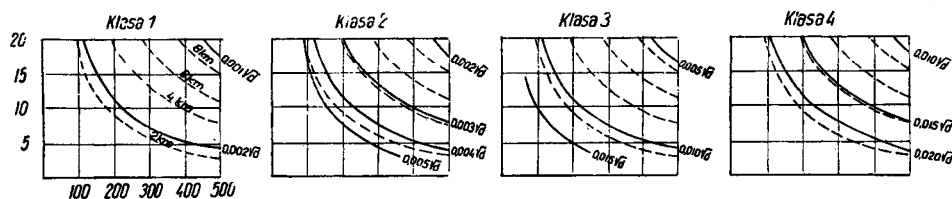
WYKRES 3a. BŁĄD WZGLĘDNY DŁUGOŚCI



zależności od stosowanej długości boków poligonowych. Przy operowaniu więc pojęciem błędu względnego utrudnione jest określenie rodzaju przymiaru i sposobu pomiaru jaki należy zastosować. Wygodniejszym w korzystaniu jest wykres 3b — krzywych błędu długości, jaki należy uzyskać przez zastosowanie określonego przymiaru długości (w myśl założeń

WYKRES 3b. BŁĘDY DŁUGOŚCI PRZY STOSOWANIU OKREŚLONEGO PRZYMIARU

(przy założeniu  $m = 0,1 m \sqrt{d}$ , gdzie  $m$  — błąd pomiaru odcinka 100-metrowego)



nia, że przy danym rodzaju przymiaru i stosowanym sposobie pomiaru błąd średni mierzonej długości jest proporcjonalny do jej pierwiastka kwadratowego). Podobnie jak na wykresie 1 w odniesieniu do kątów, możemy stwierdzić na wykresie 3b istnienie przybliżonej zgodności przebiegu krzywych  $L = \text{const.}$  i krzywych błędu długości pomierzonej określonym przymiarem bez względu na wielkość  $d$ .

Należy podkreślić, że wykresy omówione wyżej podają wartości błędów średnich pomiaru przy założeniu, że wpływ błędów kątów na błąd wyznaczenia najsłabszego punktu w ciągu jest równy wpływowi błędów długości. Ponadto, przy opracowywaniu wykresów przyjęto założenie bezbłędności punktów nawiązujących. Wpływ błędów punktów nawiązujących uwzględniamy poprzez zmniejszenie wartości  $m_0$  i  $m_d$  odczytanych z wymienionych wykresów.

Błąd punktu  $i$ -tego w ciągu wiszącym, wynikły tylko z błędów punktów nawiązujących, możemy obliczyć ze wzoru:

$$m_{p_{in}}'^2 = m_p^2 + R^2 m_{\alpha_n}^2$$

gdzie:  $m_p$  — błąd średni punktu nawiązującego,  $R$  — odległość od punktu nawiązującego do  $i$ -tego,  $m_{\alpha_n}$  — błąd azymutu nawiązującego.

Przy założeniu równości błędów wszystkich punktów nawiązujących można napisać:

$$m_{\alpha_n} = \frac{m_p}{S}$$

gdzie  $S$  — długość celowej nawiązującej;

wówczas:

$$m_{p_{in}}^2 = m_p^2 \left[ 1 + \left( \frac{R}{S} \right)^2 \right]$$

Można dalej przyjąć, że wpływ błędów punktów nawiązania na błąd wyrównanego punktu  $i$ -tego kształtuje się wg wzoru na błąd średniej arytmetycznej:

$$m_{p_{in}}^2 = \frac{m_{p_{in}}'^2 \cdot m_{p_{in}}''^2}{m_{p_{in}}'^2 + m_{p_{in}}''^2}$$

Poniżej zamieszczamy tabelkę współczynników  $\delta$ , przez które należy pomnożyć błędy średnie pomiaru kątów i długości odczytane z wykresów 1 i 3, w wypadku gdy stosunek  $m_{p_{in}}$  do charakteryzującego daną klasę błędu wyznaczenia najsłabszego punktu przyjmuje określone wartości:

$\frac{m_{p_{in}}}{m_{p_i}}$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
$\delta$	1,00	0,98	0,95	0,92	0,87	0,80	0,71	0,60	0,44

W powyższej tabelce symbol  $i$  odnosi się do najsłabszego punktu ciągu.

#### Przykład korzystania z wyników analiz

Należy pomierzyć ciąg poligonowy o kształcie zbliżonym do zamieszczonego przy wykresie 1b (esowy). Ilość punktów wyznaczanych  $n = 7$ ,  $d = 200$  m, klasa II, błąd punktu nawiązującego  $m_p = 0,05$ , długość celowej nawiązującej  $S = 400$  m.

Z wykresu 1b  $m_0 = 30''$

Z wykresu 2  $m_d = 0,07$



Z wykresu 3b odczytujemy, że należy zastosować przymiar i sposób pomiaru zapewniający uzyskanie błędu średniego nie większego niż  $0,005\sqrt{d}$

Ze wzoru na wpływ błędów punktów nawiązujących:

$$m_{p_{i n}} = \pm 0,05 \sqrt{\frac{1 + \left(\frac{800}{400}\right)^2}{2}} = \pm 0,11$$

$$\frac{m_{p_{i n}}}{m_{p_i}} = \frac{0,11}{0,15} = 0,8$$

odpowiadający temu stosunkowi współczynnik  $\delta$  wynosi 0,60, wobec czego:

$$m_0 = 0,60 \cdot 30'' = 18''$$

$$m_d = 0,60 \cdot 0,005\sqrt{d} = 0,003\sqrt{d}$$

W wypadku gdy określamy dokładność całej sieci poligonowej, należy obliczyć błędy średnie punktów węzłowych, uzyskane z każdej wykorzystanej do wyrównania drogi, wg wzoru na błąd punktu po wyrównaniu kątowym (podwójną wartość tak uzyskanego błędu średniego punktu węzłowego możemy później uważać za dopuszczalną odchyłkę liniową, w wypadku gdy dokładności pomiaru zgodne są z określonymi a priori przy analizie). Następnie należy obliczyć błąd średni wyrównanego punktu węzłowego ze wzoru na błąd średniej arytmetycznej oraz błędy średnie azymutu węzłowego uzyskane z każdej z dróg, wg wzoru:

$$m^2\alpha_w = nm_0^2 + m^2\alpha_n$$

i podobnie jak dla błędu punktu — błąd azymutu węzłowego po wyrównaniu. Za dopuszczalną odchyłkę kątową ciągu uważać będziemy podwójny błąd średni azymutu węzłowego (względnie końcowego w ciągu nawiązanym obustronnie do punktów osnowy wyższego rzędu), uzyskany w sposób zgodny z ostatnim wzorem. Z kolei obliczamy błędy średnie punktów na poszczególnych ciągach, przyjmując wpływ błędów punktów węzłowych i nawiązujących oraz azymutów węzłowych i nawiązujących na końcach badanego ciągu.

Z uwagi na wielką różnorodność kształtu sieci poligonowych, jak również dosyć dużą pracochłonność przeprowadzania wstępnych analiz dokładnościowych, należy przyjąć, że przy pomiarze sieci, odczytane z wykresów 1, 2, 3 dokładności pomiaru, wzięte dla najdłuższego ciągu w sieci, winny być powiększone ok. odwukrotnie. Takie przyjęcie dokładności pomiarów, winno zapewnić uzyskanie błędów średnich wyznaczenia naj słabszego punktu w sieci, nie większych od podanych w instrukcji. W wypadku pomiaru ciągów między punktami wyższego rzędu, nie wchodzącymi w skład sieci wyrównywanej, można przyjąć za dopuszczalną odchyłkę liniową czterokrotny błąd średni naj słabszego punktu, charakteryzujący instrukcyjnie daną klasę poligonizacji.

#### LITERATURA

- [1] *Hausbarndt S.*: Rachunki Geodezyjne.
- [2] *Hausbrandt S.*: Rękopis wyprowadzenia wzoru na błąd dowolnego punktu ciągu poligonowego nawiązanego obustronnie kątowno i jednostronnie liniowo.
- [3] *Lazzarini T.*: Wykłady z geodezji szczegółowej w latach 1952/53 oraz rękopis skryptu wykładów 1957.
- [4] *G.U.P.K.* Przepisy o Pomiarach Kraju Dział B — Pomiarzy Szczegółowe. Instrukcja B-III 1949.
- [5] *Min. Leśnictwa.*: Instrukcja techniczna dla pomiarów gruntów Państwowego Gospodarstwa Leśnego 21. XII. 1955.
- [6] *Pawłow.\** Priedwyczislenje pogriesznostiej w osnovnych markszejdierskich robotach, Ugletiechizdat 1950.
- [7] Proposal for a new Swedish Ordinance by the Land Survey Board Stockholm 1956.

---

\* Zamieszczony w cytowanej pracy Pawłowa wzór na błąd punktu w ciągu nawiązanym obustronnie kątowno i jednostronnie liniowo jest słuszny tylko w odniesieniu do punktu, na którym zostaje dokonane nawiązanie kątowne ciągu.

ВОЙЦЕХ ЯНУШ

## ПРОБЛЕМА ОДНОРОДНОЙ ИНСТРУКЦИИ ТЕХНИЧЕСКОЙ ПОЛИГОНИЗАЦИИ

### Резюме

Реферат включает описание способа проведения анализа точности, служащего для определения средних ошибок измерения при технической полигонизации. Особенно сильно подчеркнут совершенно новый способ подхода редакционной комиссии к этой проблеме инструкции. Этот новый способ заключается в том, что классы полигонизации характеризуются не точностью измерения, а точностью окончательных результатов — т. е. координат. Результаты анализа даны в реферате в форме диаграмм. На диаграммах даны средние ошибки измерения, какие следует получить в случае полигонов, похожих своей формой полигонам на приложенных рисунках. Анализ точности основан на точных формулах, предвидящих уравновешение общеприменяемыми в технической полигонизации способами.

WOJCIECH JANUSZ

ON THE PROBLEM OF A UNIFORM INSTRUCTION ON TECHNICAL  
TRAVERSING

S u m m a r y

The present paper contains a description of the procedure adopted for carrying out analyses of accuracy serving to define the mean errors of measurements in technical traversing. Particular emphasis is laid on the novelty of the treatment of the subject by the editors of the draft measuring instruction due to characterizing the classes of traversing not on the basis of the accuracy of the measurement but on the basis of the accuracy of the final results, the co-ordinates. In conclusion the present paper gives the results of the analyses in the form of diagrams. These diagrams show the mean errors of measurement which ought to be achieved if the shapes of the traverses approximates those shown in the opposite figures. The analyses of accuracy are based on exact formulae anticipating the effect of levelling by methods generally applied in technical traversing.